Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

П.В. Медведев,
В.А. Федотов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 19.04.02 Продукты питания из растительного сырья

Оренбург
2017

УДК 664.65.05 (075.8)
ББК 36.83-5я73
М 42

Рецензент – доктор технических наук, профессор В. Ю. Полищук

Медведев, П.В.
М 42 Математическое планирование эксперимента: учебное пособие/ П.В. Медведев, В.А. Федотов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 97 с.
ISBN 978-5-7410-1759-3

В учебном пособии приведены основные теоретические вопросы курса «Математическое планирование эксперимента» в виде лекций; примеры применения методов математического планирования эксперимента при решении различных задач; описание работы разработанной авторами прикладной программы для проведения полного факторного эксперимента.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 19.04.02 Продукты питания из растительного сырья

УДК 664.65.05 (075.8)
ББК 36.82-5я73

ISBN 978-5-7410-1759-3

Содержание

Введение

На основе многолетнего опыта применения методов математического планирования эксперимента при решении различных научных и инженерных задач и анализа работ, изданных в этой области за последние 50 лет, сделана попытка оказания помощи всем, кто связан с постановкой экспериментальных исследований, обработкой результатов опытов и выработкой практических рекомендаций.

Отличительной особенностью работы является наличие практических примеров из различных областей человеческой деятельности и раскрытие в доступной форме ряда существенных вопросов: выбор плана эксперимента, поиск научной новизны при решении задач, постановка эксперимента в случае невозможности соблюдения требований активного плана, охват области определения многомерной функции, учет в моделях доверительных интервалов и при необходимости качественных и статистически незначимых факторов.

В связи с практической направленностью работы теоретическим вопросам отведено мало внимания, в случае необходимости с ними подробно можно ознакомиться по предлагаемой литературе.

Для научных работников, инженеров, аспирантов, магистрантов и студентов, работающих или обучающихся по различным техническим и другим направлениям.

1 Основы математического планирования эксперимента

1.1 Общие сведения о планировании эксперимента

Планирование эксперимента представляет собой процедуру выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При этом существенными являются вопросы минимизации общего числа опытов, что определяет время получения конечного решения и стоимость достижения цели.

Для этого в каждом опыте одновременно варьируют частью или всеми переменными, определяющими исследуемое явление, используют математический аппарат, формализующий действия экспериментатора при проведении и обработке результатов опытов и т.д. Не менее важным представляется выбор стратегии дальнейших действий после проведения и обработки результатов одной или нескольких серий экспериментов.

Основные работы по теории планирования эксперимента в нашей стране и за рубежом появились во второй половине XX века. Уникальной следует считать каталог планов [1], где приведено свыше 10 тыс. планов эксперимента. Можно отметить и другие работы последних лет издания по подготовке к проведению экспериментов, реализации и обработке результатов опытов [2, 3, 4].

Развитие методов планирования эксперимента в нашей стране связано с именем В. В. Налимова [5, 6, 7, 8], который дал следующее определение. «Планирование эксперимента – это оптимальное управление экспериментом при неполном знании механизма явлений. Эксперименты обычно ставятся небольшими сериями по заранее составленному алгоритму, оптимальному в некотором строго сформулированном смысле. После каждой небольшой серии опытов производится обработка результатов наблюдений и принимается строго обоснованное решение о том, что делать дальше».

Целью настоящей работы является дальнейшая пропаганда идей математического планирования эксперимента и анализ некоторых актуальных положений, способствующих улучшению качества постановки экспериментальных исследований, правильной обработке и интерпретации результатов опытов.

В работе сделана попытка «прокладки мостика» между теоретическими разработками и практическим приложением теории планирования эксперимента, для чего рассмотрены практические примеры из различных отраслей техники. Последнее означает, что книга будет полезна для широкого круга пользователей.

Необходимость в таком анализе продиктована сложившимися тенденциями в этой области. Кроме того, в литературе изложение части существенных вопросов является или не совсем компактным, последовательным, полным в одном источнике, или сложное математическое изложение, не подкрепленное примерами, в большинстве случаев отпугивает экспериментатора.

В силу определенных причин данная работа не претендует на всю полноту изложения по всем вопросам теории математического планирования эксперимента. На основе многолетнего практического опыта работы в этой области в ней сделана попытка оказания помощи не только начинающему исследователю при экспериментальном изучении различных явлений.

Особенно это относится к многофакторным задачам, когда использование аппарата теории математического планирования эксперимента становится обязательным. При изложении материала почти сохранена сложившаяся последовательность в работах большинства авторов. Отличительной особенностью настоящей работы следует считать рекомендации:

- однозначного выбора плана эксперимента при исследовании конкретного явления,

- поиска научной новизны при решении новых или решенных задач,

- проведения опытов в случае невозможности соблюдения требований активного эксперимента,

- охвата области определения многомерной функции,

- учета в моделях доверительных интервалов и при необходимости качественных и статистически незначимых факторов.

При знакомстве с данной работой первые два раздела в первом чтении могут быть опущены. Будем благодарны за замечания и пожелания по работе, новые практические примеры из различных областей человеческой деятельности и «нестандартное» видение отдельных вопросов.

Развитие современной науки и техники связано с созданием новых и постоянным совершенствованием существующих научных и технологических процессов. Основой их разработки и оптимизации является эксперимент. Заметное повышение эффективности экспериментальных исследований и инженерных разработок достигается использованием математических методов планирования экспериментов. В процессе экспериментирования и при обработке полученных данных существенно сокращает сроки решения, снижает затраты на исследования и повышает качество полученных результатов.

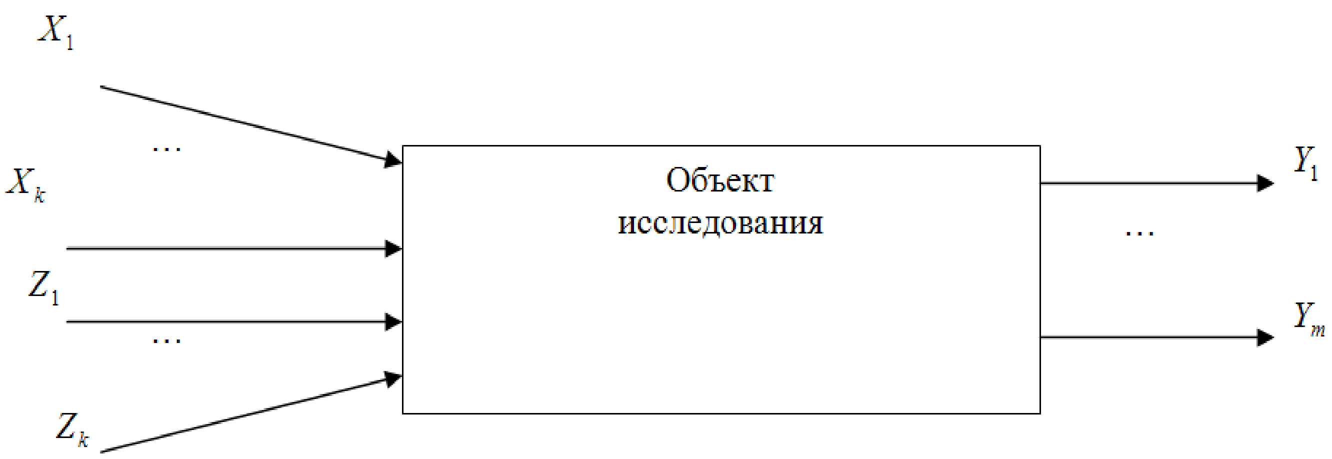
Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения опытов при которых удается получить надежную и достоверную информацию об объекте с наименьшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.

Инициатором применения планирования эксперимента является Рональд А. Фишер, другой автор известных первых работ – Френк Йетс. Далее идеи планирования эксперимента формировались в трудах Дж. Бокса, Дж. Кифера. В нашей стране - в трудах Г.К. Круга, Е.В. Маркова и др.

1.2 Модель «черного ящика»

Часто, приступая к изучению какого-либо процесса экспериментатор не имеет исчерпывающих сведений о механизме процесса. Можно только указать параметры определяющие условия протекания процесса, и, возможно требования к его результатам. Поставленная проблема является задачей кибернетики. Действительно, если считать кибернетику «наукой, изучающей системы любой природы, способные воспринимать, хранить и перерабатывать информацию для целей оптимального управления» [3], то такую систему можно представить в виде черного ящика.

Черный ящик (рисунок 1.1) – объект исследования, имеющий (k + p) входов и m выходов.



X – управляемые, Z – неуправляемые параметры.

Рисунок 1.1 – Система «Черный ящик»

Зависимость между выходными параметрами (откликом) и входными параметрами (факторами) называется функцией отклика. Математическая запись функции отклика представлена в виде формулы

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k). \tag{1.1}$$

Этому уравнению в многомерном пространстве соответствует гиперповерхность, которая называется поверхностью отклика, а само пространство – факторным пространством (рисунок 1.2).

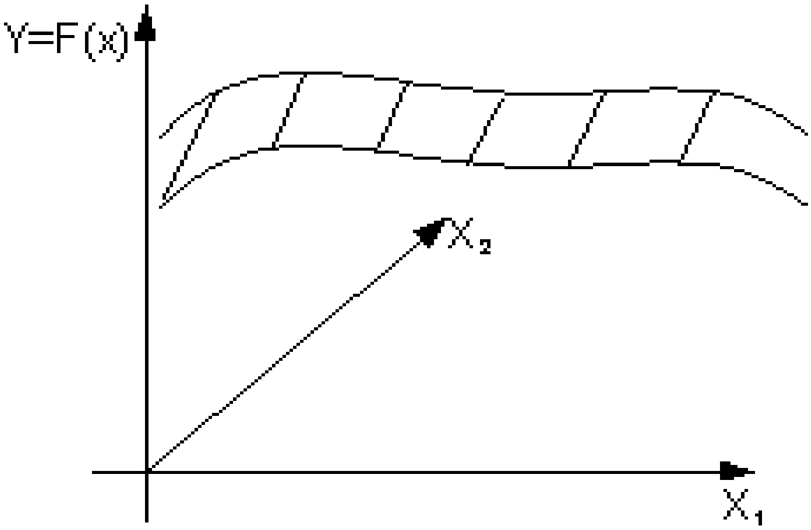


Рисунок 1.2 – Поверхность отклика

Для математического описания поверхности отдыха используют уравнение

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{\hat{e}} \beta_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} \beta_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + ..., \qquad (1.2)$$

где $x_i x_u$ - переменные факторы при i=1,…,k; u=1,…,k; i$\neq$u;

$$\beta_i = \left(\frac{\partial\ f}{\partial\ x_i} \right)_0;$$

$$\beta_{iu} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_u} \right)_0;$$

$$\beta_{ii} = \left(\frac{\partial^2 f}{2\partial x_i^{\ 2}} \right)_0.$$

Эксперимент можно проводить по-разному. В случае, когда исследователь наблюдает за каким-то неуправляемым процессом, не вмешиваясь в него, или выбирает экспериментальные точки интуитивно, на основании каких-то привходящих обстоятельств, эксперимент считают пассивным. В настоящее время пассивный эксперимент считается неэффективным.

Гораздо более продуктивно проводится эксперимент, когда исследователь применяет статистические методы на всех этапах исследования, и, прежде всего, перед постановкой опытов, разрабатывая схему эксперимента, а также в процессе экспериментирования, при обработке результатов и после эксперимента, принимая решение о дальнейших действиях. Такой эксперимент считают активным, и он предполагает планирование эксперимента.

Под планированием эксперимента понимают процедуру выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Под математической моделью планирования понимается наука о способах составления экономических экспериментальных данных планов, которые позволяют извлекать наибольшее количество информации об объекте исследования, о способах проведения эксперимента, о способах обработки данных и их использование для оптимизации производственных процессов, а также инженерных расчетов [11].

Использование теории планирования эксперимента является одним из путей существенного повышения эффективности многофакторных экспериментальных исследований. В планировании экспериментов применяются в основном планы первого и второго порядков. Планы более высоких порядков используются в инженерной практике редко. В связи с этим далее приводится краткое изложение методики составления планов эксперимента для моделей первого и второго порядков. Под планом первого порядка понимают такие планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего только первые степени факторов и их произведения

$$\overline{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{\substack{i,u=1 \\ i \neq 1`}}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{\substack{i,j,u=1 \\ i \neq 1\, j \neq 1}}^{k} b_{iju} x_i x_j x_u + \dots \qquad (1.3)$$

Планы второго порядка позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего и вторые степени факторов

$$\overline{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1`}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,u=1 \\ i \neq u}}^{k} b_{iu} x_i x_u + \ldots \quad (1.4)$$

Нахождение уравнения регрессии методом планирования экспериментов состоит из следующих этапов:

- выбор основных факторов и их уравнений;
- планирование и проведение собственного эксперимента;
- определение коэффициентов уравнения регрессии;
- статистический анализ результатов эксперимента [12].

Эксперимент - это опытное исследование воздействия заданного фактора (или нескольких факторов) на процесс функционирования изучаемого объекта. Алгоритм планирования и проведения эксперимента представлен на рисунке 1.3.

Этапы математического моделирования включают в себя:

1. Постановка проблемы, ее качественный анализ. На данном этапе формулируется сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы.

2. Построение математической модели. Это этап формализации проблемы, выражение ее в виде конкретных математических зависимостей, то есть функций, уравнений, неравенств.

3. Математический анализ модели. Целью данного этапа является выяснение общих свойств модели. Наиболее важный момент - доказательство существования решения построенной модели.

4. Подготовка исходной информации. В процессе подготовки информации широко используются методы теории вероятности и математической статистики.

5. Численное решение. Этот этап включает разработку алгоритмов для численного решения задачи, составление программ для ЭВМ и непосредственное проведение расчетов.

6. Анализ численных результатов и их применение. На заключительном этапе рассматривается вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и степени практической применимости.

Зависимости факторов между собой могут быть функциональными (проявляемые определенно и точно в каждом отдельно наблюдаемом случае) или корреляционными (определяемые на основе корреляционного метода).

С помощью факторного анализа возможно выявление скрытых (латентных) переменных (факторов), отвечающих за наличие линейных статистических связей (корреляций) между наблюдаемыми переменными.

Корреляционный анализ – это совокупность основанных на математической теории корреляции методов обнаружения корреляционной зависимости между двумя и более случайными признаками или факторами.

Для того, например, чтобы различать такие случаи (рисунки 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8) вводится коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции - это числовая характеристика, выражающая линейную взаимосвязь двух случайных величин Y и X по совместным наблюдениям $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, называется коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{1.5}$$

Как интерпретировать значение коэффициента корреляции Пирсона? Для оценки тесноты, или силы, корреляционной связи обычно используют общепринятые критерии, согласно которым абсолютные значения r < 0,3 свидетельствуют о слабой связи, значения r от 0,3 до 0,7 – о связи средней тесноты, значения r > 0,7 – о сильной связи. Более точную оценку силы корреляционной связи можно получить, если воспользоваться таблицей Чеддока (таблица 1.2).

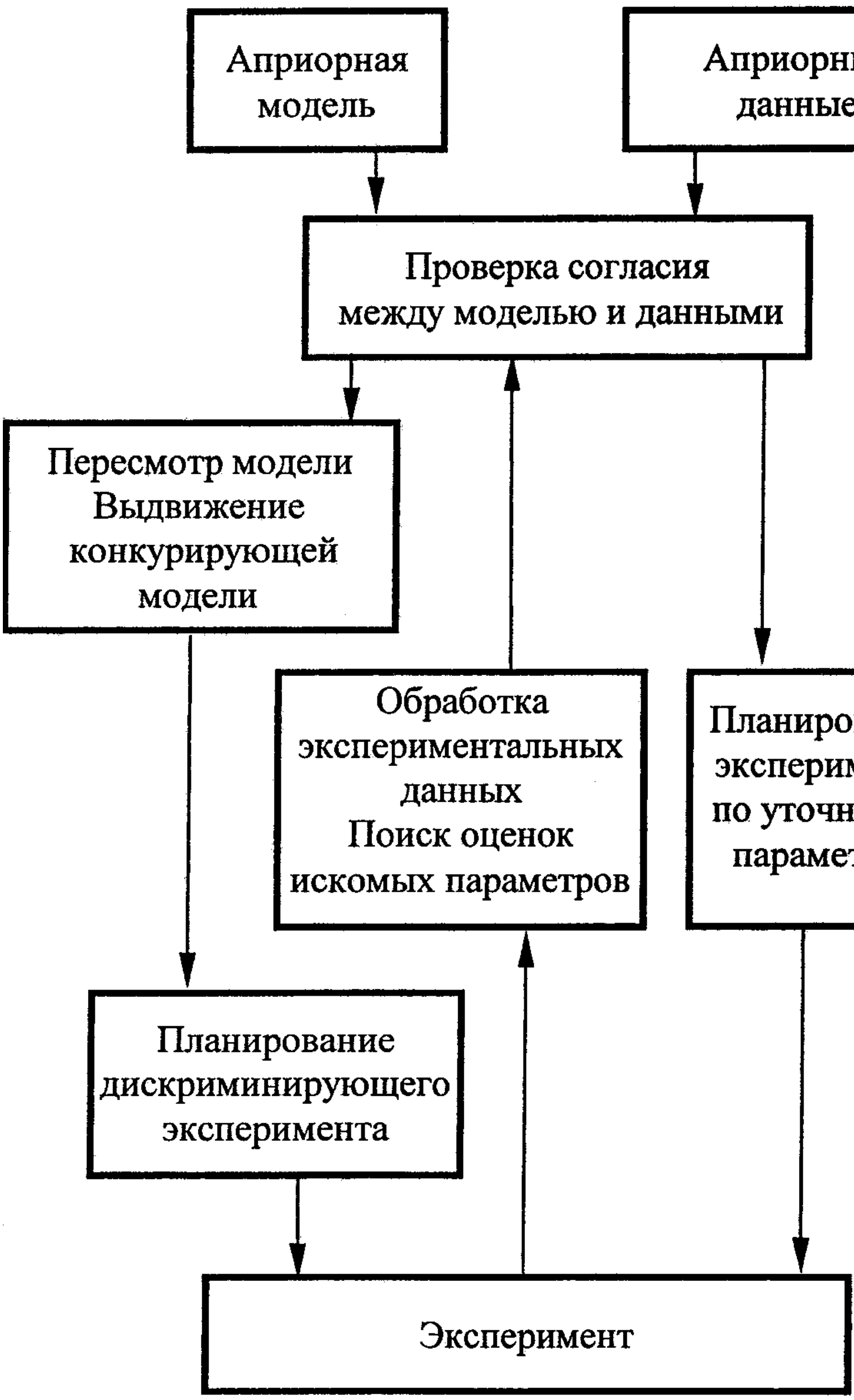


Рисунок 1.3 – Алгоритм проведения эксперимента

Таблица 1.2 – Таблица Чеддока для интерпретации силы корреляционной связи

Абсолютное значение r	Теснота (сила) корреляционной связи
менее 0,3	слабая
от 0,3 до 0,5	умеренная
от 0,5 до 0,7	заметная
от 0,7 до 0,9	высокая
более 0,9	весьма высокая

Другим способом оценки силы связи по коэффициенту корреляции является его сравнение с некоторым критическим, который в свою очередь зависит от количества измерений, опытов, наблюдений (таблица А.2).

Допустим, проводится независимое измерение различных параметров у одного типа объектов. Из этих данных можно получить качественно новую информацию - о взаимосвязи этих параметров. [13]

Например, измеряем рост и вес человека, каждое измерение представлено точкой в двумерном пространстве (рисунок 1.4). Несмотря на то, что величины носят случайный характер, в общем наблюдается некоторая зависимость - величины коррелируют.

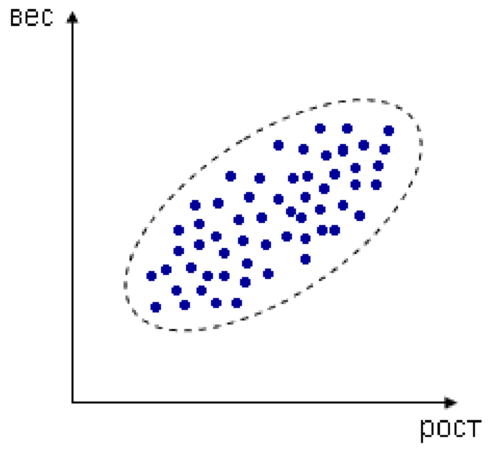


Рисунок 1.4 – Положительная корреляция

В данном случае это положительная корреляция (при увеличении одного параметра второй тоже увеличивается). Возможны также такие случаи (рисунки 1.5, 1.6).

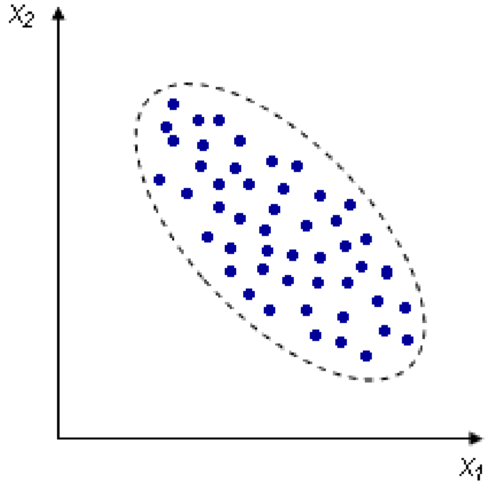


Рисунок 1.5 – Отрицательная корреляция

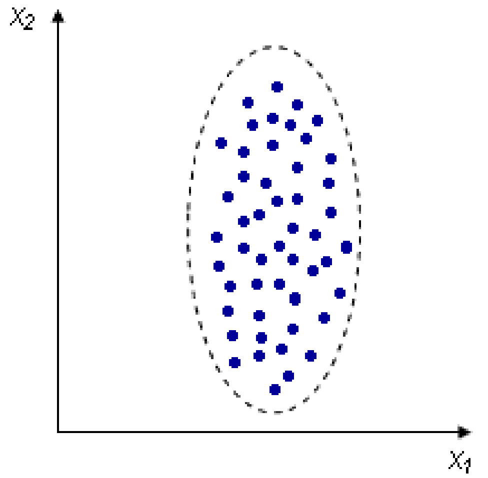


Рисунок 1.6 – Отсутствие корреляции

Взаимосвязь между переменными необходимо охарактеризовать численно, чтобы, например, различать такие случаи (рисунки 1.7, 1.8).

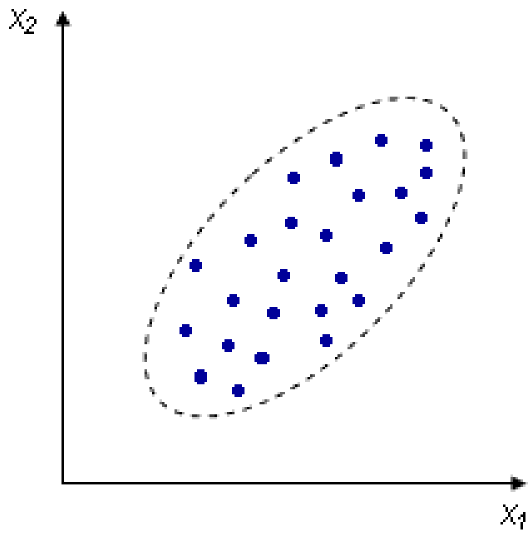


Рисунок 1.7 – Слабая связь

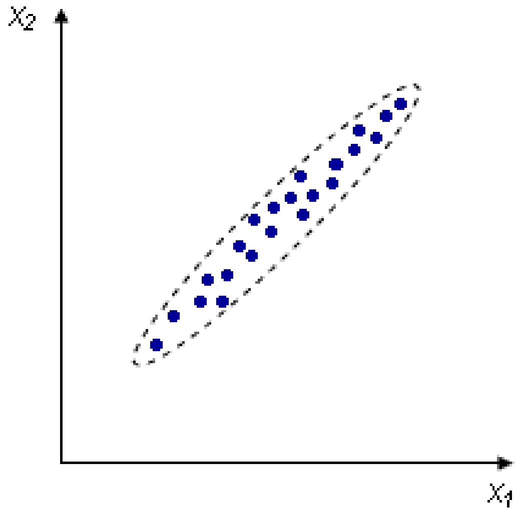


Рисунок 1.8 – Сильная связь

Правильно поставленный эксперимент позволяет проверять гипотезы о причинно-следственных отношениях, не ограничиваясь констатацией связи (корреляции) между переменными (рисунок 1.9).

Среди методов планирования эксперимента различают статические и последовательные. Под статическим планированием эксперимента понимают проведение всего эксперимента по заранее заданному плану (рисунок 1.10). Обычно при статическом планировании используют насыщенные планы.

При последовательном планировании эксперимента происходит перед каждым новым этапом эксперимента (рисунок 1.11). Статическое планирование эксперимента является вычислительно менее затратным, чем последовательное. Это привело к большому развитию статистических методов. Большинство из них рассмотрено в [1].

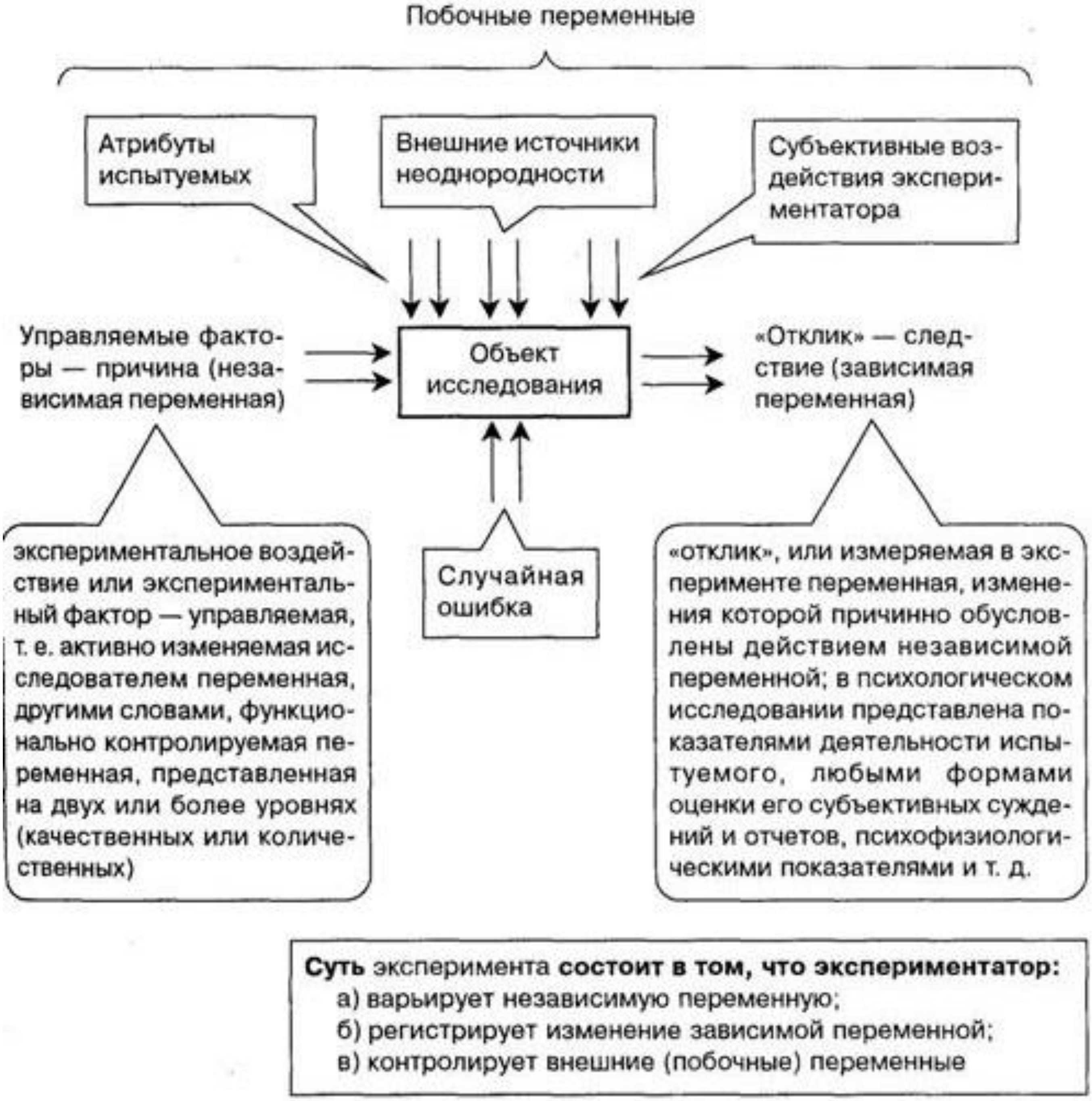


Рисунок 1.9 – Суть экспериментального исследования

Рисунок 1.10 - Схема статического планирования эксперимента

Рисунок 1.11 - Схема последовательного планирования эксперимента

На практике экспериментатору приходится чаще планировать не один, а несколько экспериментов, выполняя и анализируя каждый и, в соответствии с результатами, изменять план эксперимента. Стратегия такого эксперимента показана на рисунке 1.12.

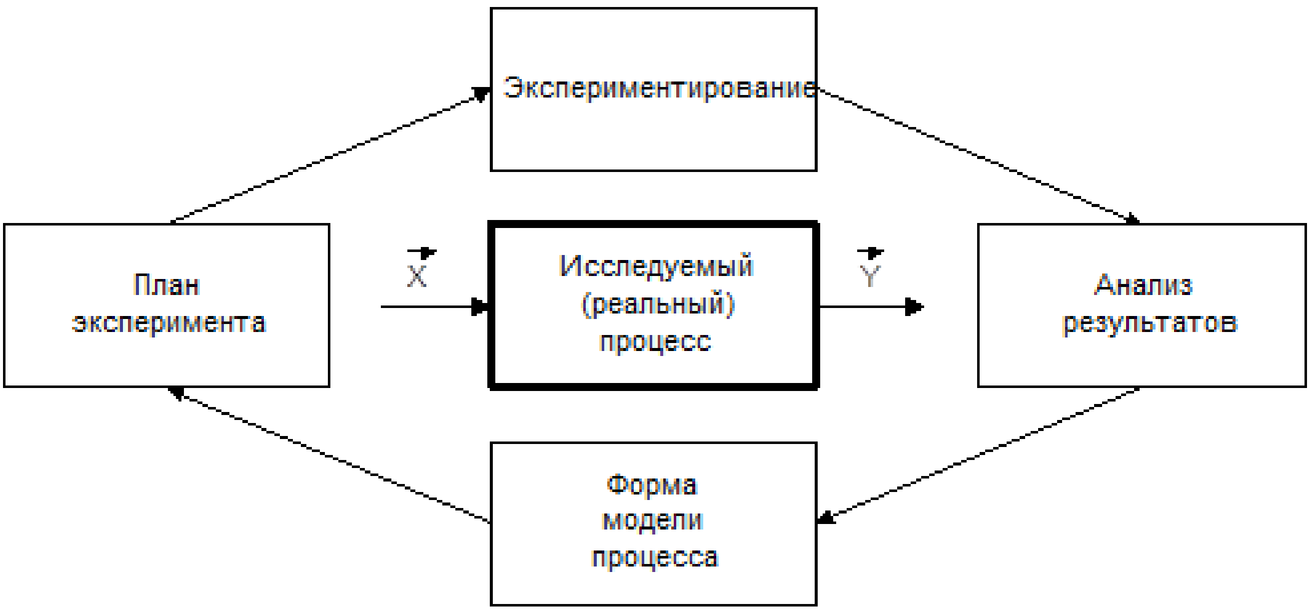


Рисунок 1.12 - Стратегия эксперимента

Использование теории планирования эксперимента является одним из путей существенного повышения эффективности многофакторных экспериментальных исследований. Под планированием эксперимента понимают процедуру выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. Основные преимущества активного эксперимента связаны с тем, что он позволяет:

1. Минимизировать общее число опытов;
2. Выбирать четкие логически обоснованные процедуры, последовательно выполняемые экспериментатором при проведении исследования;
3. Использовать математический аппарат, формализующий многие действия экспериментатора;
4. Одновременно варьировать всеми переменными и оптимально использовать факторное пространство;
5. Организовать эксперимент таким образом, чтобы выполнялись многие исходные предпосылки регрессионного анализа;
6. Получать математические модели, имеющие лучшие в некотором смысле свойства по сравнению с моделями, построенными из пассивного эксперимента;
7. Рандомизировать условия опытов, то есть многочисленные мешающие факторы превратить в случайные величины;
8. Оценивать элемент неопределенности, связанный с экспериментом, что дает возможность сопоставлять результаты, полученные разными исследователями.

В планировании экспериментов применяются в основном планы первого и второго порядков. Планы более высоких порядков используются в инженерной практике редко [2].

1.3 Составление планов эксперимента. Критерии плана эксперимента

1.3.1 Критерии оптимальности плана

В математической теории планирования эксперимента критерии оптимальности играют роль аксиом. Они, как и в любой другой науке, принимаются без доказательств, их правомерность основывается на интуитивном представлении исследователя о том, что предоставляет собой хороший эксперимент. Будучи сформулированными на математическом языке (на выводах теорий статистики и вероятностей), критерии оптимальности становятся теми исходными элементами, на которых строится теория планирования эксперимента [15].

В планировании эксперимента различают более 20 критериев оптимальности. Каждый из них определяет конкретные условия проведения опытов и их количество или, при геометрическом представлении, определенным образом располагают точки плана в исследуемом факторном пространстве с целью получения наиболее точного математического описания исследуемого процесса. С этой целью в настоящее время разработано очень большое число планов, в настоящей работе рассмотрены лишь отдельные из них в качестве примеров. Наиболее уникальной работой является [19], где собрано более 10 тыс. планов, построенных на различных критериях. Конкретная форма критерия зависит прежде всего от типа решаемой задачи, хотя даже в рамках одного типа задач могут быть предложены различные критерии.

Все критерии оптимальности в целях наглядности интерпретации принято подразделять на две большие группы. К первой группе относятся критерии, связанные с точностью оценок коэффициентов регрессии, а ко второй – критерии и свойства планов, связанные с ошибкой в оценке поверхности отклика (с предсказательными свойствами уравнения регрессии). Наибольшее применение среди критериев первой группы имеют D-, A-, E- оптимальности и ортогональности, а среди второй группы – G-, I-, Q- оптимальности, ротатабельности и униформности. Критерии этих групп сводятся к некоторым требованиям, предъявляемым в виду матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$, называемой ковариационной, или к матрице $\mathbf{M} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}/N$, называемой информационной; где $\mathbf{X}$ – матрица коэффициентов; σ^2 – дисперсия ошибки одного наблюдения, в качестве оценки σ^2 в случае адекватной модели принимается оценка остаточной дисперсии (оценка дисперсии неадекватности) [11].

Для иллюстрации сказанного обратимся к основным выводам теории математической статистики. Ранее было показано, что уменьшение доверительного интервала, связанного с уменьшением величины дисперсии, увеличивает точность результата. Отсюда вывод: при известной оценке s^2 дисперсии ошибки наблюдения σ^2 уменьшения $s(b_i)$ можно добиться в конечном итоге за счет соответствующего выбора элементов матрицы коэффициентов $\mathbf{X}$. Но сама матрица $\mathbf{X}$ при конкретном способе обработки результатов опытов (МНК) определяется значениями факторов в опытах, числом опытов N и видом получаемой модели.

Таким образом, в математической теории планирования эксперимента, положив в основу, в частности, уменьшение тех или иных дисперсий (доверительных интервалов), исследователю предложены «лучшие» планы экспериментов. Поэтому активный эксперимент предпочтительнее пассивного.

Сказанное интерпретируется и геометрически. В случае одного параметра b его истинная величина β для генеральной совокупности попадает в отрезок $b + \Delta b$, где Δb - величина доверительного интервала. В случае двух параметров b_1 и b_2 величины их доверительных интервалов в отдельности также представляют собой отрезки, но их совместная доверительная область представляют собой эллипс (“эллипсоид рассеивания”), который строится по определенной формуле (рисунок 1.4) [1, 7, 15]. Когда число параметров больше четырех, геометрическое представление невозможно.

Как видно из формул и рисунка 1.13 оценки дисперсий разных параметров b_i и функции отклика в разных точках (опытах) плана эксперимента в общем случае могут быть разными. Очевидно, что было бы лучше, если бы они все имели одинаковые и минимально возможные значения (например, рисунок 1.13, в). Желательно и другое: если какой-то коэффициент регрессии b_i в силу незначимости исключен из уравнения, то его влияние (точнее влияние фактора x_i при b_i) не должно сказываться (или наоборот) на значении другого параметра b_j. Наличие линейной связи между b_i и b_j определяется с помощью оценки коэффициента корреляции

$$r_{ij} = \frac{\text{cov}(b_i, b_j)}{[s(b_i)s(b_j)]^{0.5}}, \tag{1.6}$$

где ковариация $\text{cov}(b_i, b_j) = s^2(\mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{X})_{ij}^{-1}$; $0 \le r_{ij} \le 1{,}0$, близость $|r_{ij}|$ к 1,0 указывает на их более тесную связь.

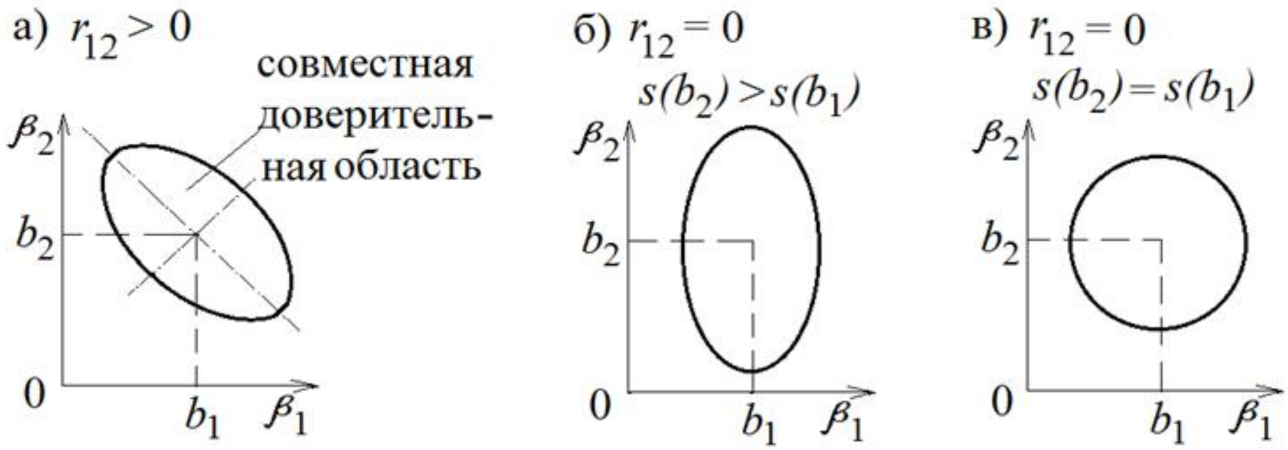


Рисунок 1.13 – Совместные доверительные интервалы двух параметров

Рассмотрим основные критерии оптимальности и свойства планов эксперимента, на основе которых построены различные планы [7, 15].

D-оптимальный план минимизирует обобщенную дисперсию оценок коэффициентов регрессии (значение определителя ковариационной матрицы) или с геометрической точки зрения это означает минимизацию объема эллипсоида рассеяния данных оценок. Критерий D-оптимальности является одним из наиболее важных и наиболее часто используемых критериев оптимальности в теории планирования эксперимента.

А-оптимальному критерию отвечают планы с минимальной средней дисперсией оценок коэффициентов регрессии (наименьший след ковариационной матрицы – наименьшая сумма оценок дисперсий отдельных коэффициентов регрессии). С геометрической точки зрения эллипсоид рассеяния при A-оптимальном плане обладает наименьшей суммой квадратов длин осей, тогда параллелепипед, описанный около эллипсоида рассеяния, имеет минимальную длину диагонали.

E-оптимальным планам соответствует наименьшее максимальное собственное значение ковариационной матрицы, то есть не допускается, чтобы отдельные коэффициенты регрессии имели большой доверительный интервал. Геометрически таким планам соответствует эллипсоид рассеяния с наименьшей максимальной осью.

Ортогональным планам соответствует диагональная ковариационная матрица оценок, то есть все оценки параметров модели являются независимыми; эллипсоид рассеяния в факторном пространстве ориентирован таким образом, что направление его главных осей параллельны направлениям факторных осей (рисунок 1.13, б, в). Такие планы лучше использовать в задачах выявления в чистом виде влияния на отклик отдельных факторов, отбрасывание незначимых коэффициентов регрессии из уравнения не скажется на значениях остальных коэффициентов.

Среди критериев, связанных с точностью оценки функции отклика, отметим следующие.

G-оптимальности план минимизирует максимальную дисперсию предсказания отклика по эмпирическому уравнению в принятой области изменения факторов (области планирования). Применение G-оптимального плана как бы дает экспериментатору гарантию, что в области планирования не окажется отдельных точек, в которых точность оценки поверхности отклика будет слишком низкой.

Q-оптимальные планы минимизируют среднюю дисперсию оценки модели (предсказательные свойства уравнения регрессии в области изменения факторов в целом являются лучшими). Q-оптимальный план позволяет удовлетворить естественное желание исследователя получить на основании малой выборки опытов зависимость, дающую меньшую погрешность при сравнении с результатами других опытов или с натурными данными, не учетными при построении искомой модели.

Для получения хороших предсказательных свойств уравнения регрессии в случае экстраполяции план эксперимента должен одновременно удовлетворять Q- и G-критериям оптимальности. Эффективные по этим критериям планы лучше использовать в задачах поиска моделей исследуемого явления.

Ротатабельные планы позволяют получить одинаковую дисперсию предсказанных значений функции отклика во всех равноудаленных от центра эксперимента точках, поэтому любое направление от центра эксперимента является равнозначным в смысле точности оценки поверхности отклика. Линии равной дисперсии предсказания для ротатабельного планирования являются гиперсферами. Такие планы лучше использовать в задачах оптимизации, особенно на начальном этапе исследования.

Униформные планы характеризуются постоянным значением дисперсии предсказанных значений функции отклика в некоторой области планирования вокруг центра эксперимента.

Рассмотрим далее некоторые свойства планов, которые не относятся к строгим основным критериям оптимальности, но имеют важное практическое значение

Композиционность плана дает возможность применять результаты опытов одного из предшествующих этапов для использования на следующем этапе, если модель, полученная на предшествующем этапе, неадекватна и требуется построение более сложных моделей. Такие планы лучше использовать в случае неуверенности исследователя в виде бедующей модели.

Насыщенным называется план, для которого число независимых опытов равно числу неизвестных параметров регрессии. Такой план является самым экономичным и рекомендуется применять на начальной стадии исследования. При этом в случае неадекватности модели можно получить хотя бы приближенное представление об исследуемом технологическом процессе или явлении.

Рандомизация – случайный порядок проведения опытов (например, на каждой из N карточек записывается один номер опыта, затем порядок выполнения опытов определяется выниманием наугад одной карточки (с последующим возвратом) из колоды). Соблюдение условия рандомизации необходимо для исключения (сведения к минимуму) влияния на отклик случайных факторов.

Простота вычислений и наглядность представления результатов опытов могут быть конкурентоспособными при сравнении с результатами других авторов или для экономии времени непосредственно в собственной работе.

Построение планов, отвечающих тем или иным критериям оптимальности, является достаточно сложной задачей, решаемой на ЭВМ с помощью численных методов. С другой стороны, каждый критерий выдвигает свои требования к ковариационной матрице. Поэтому планов, удовлетворяющих одновременно многим критериям, совсем мало (в основном позволяющие получать простые модели). В этой связи при решении определенной задачи исследователю приходится остановиться на одном из основных критериев, по остальным – принимать некоторое компромиссное решение. Эффективность различных планов по критериям оптимальности, необходимая для практического выбора конкретного плана, дается в сводной таблице в [15], а также в достаточно обширной литературе, где приводится те или иные планы [17].

1.3.2 Стратегия постановки экспериментального исследования

При разработке новых технологий или решении других проблем встречаются задачи поиска моделей этих процессов и (или) оптимизация исследуемого процесса. При исследовании поставленных проблем встречаются задачи, когда теоретическое решение отсутствует, особенно это относится к сложным многофакторным процессам. И тогда единственным инструментом для инженеров, научных работников, технологов и студентов остается проведение эксперимента и обработка результатов с целью извлечения полной и исчерпывающей информации. Для повышения эффективности научных исследований на стадиях разработки, исследования и эксплуатации изучаемых процессов видится полезным учет нижеследующих рекомендаций.

С начала 80-х годов прошлого столетия методологической основой экспериментальных исследований в нашей стране стала математическая теория планирования эксперимента, которая базируется на приложениях теории вероятности и математической статистики. а в настоящее время дисциплину «Математическое планирование эксперимента» изучают во многих ведущих вузах страны или же это является составной частью других дисциплин, например, основ научных исследований.

Планирование эксперимента представляет собой процедуру выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При этом существенными являются вопросы минимизации общего числа опытов, что определяет время получения конечного решения и затраты на достижение цели. Для этого в каждом опыте одновременно варьируют всеми переменными, определяющими исследуемое явление, используют математический аппарат, формализующий действия экспериментатора при проведении и обработке результатов опытов и т.д. Не менее важным представляется выбор стратегии дальнейших действий после проведения и обработки результатов одной или нескольких серий экспериментов.

Основные работы по теории планирования эксперимента появились во второй половине XX века. Уникальной следует считать каталог планов [19], где приведено свыше 10 тыс. планов эксперимента. Можно отметить и другие работы последних лет издания по подготовке к проведению экспериментов, реализации и обработке результатов опытов [17, 13, 14, 18, 20]. Особо нужно выделить работу [15], где изложена логика теории математического планирования эксперимента.

Цель настоящего раздела заключается в анализе некоторых актуальных положений, способствующих улучшению качества постановки экспериментальных исследований, правильной обработке и интерпретации результатов опытов. Необходимость в таком анализе продиктована сложившимися тенденциями в этой области. Кроме того, в литературе изложение части вопросов по постановке эксперимента является или не совсем компактным, последовательным, полным в одном источнике, или сложное математическое изложение, не подкрепленное примерами, в большинстве случаев отпугивает экспериментатора.

Таким образом, последовательность постановки, проведения, обработки и интерпретации результатов опытов видится в следующем.

1. Исследователь затрудняется при выборе из большого множества различных планов одного «лучшего» для решения конкретной задачи. Анализ достаточно большого количества работ научно-исследовательского характера показывает, что в более 95 % случаях эксперимент проведен без обоснования, по произвольно принятому плану. Одна из причин заключается в простом желании быстрого получения решения. На самом деле для выбора плана нужно время, соизмеримое со временем проведения самого эксперимента [15]. Это связано с ответом на нижеследующие вопросы. При общении с экспериментаторами из разных регионов страны выяснилось также, что применение методов планирования эксперимента считается известным и пройденным этапом. Однако практически никто не ответил на вопрос: а как выбрали именно этот план эксперимента для решения своей задачи, не говоря о других «мелочах» вроде значений уровней варьирования фактора внутри диапазона его изменения и др.

Методика сравнительно однозначного выбора плана эксперимента разработана с учетом рекомендаций [15] и исходя из опыта применения теории планирования эксперимента и заключается в следующем [1, 3]:

а) нужно априорно установить вид предполагаемой математической модели исследуемого явления. Этот этап является самым важным и ответственным при проведении исследований с привлечением теории планирования эксперимента, поскольку модель часто неизвестна и является искомой, а конкретный план позволяет получить определенный наперед заданный вид модели. Обработка результатов опытов позволит оценить лишь неизвестные параметры этой (может быть, неверно принятой) модели некоторым наилучшим способом. Полученная модель в конечном итоге может не выдержать проверки на адекватность и работоспособность.

Рекомендации по установлению вида модели могут быть следующими: на основе теоретических предпосылок, данных других исследователей, собственных графиков по предварительным сериям опытов, интуиции, а также степенные зависимости, которыми неплохо описывается широкий класс технических задач и которые при необходимости путем преобразований (например, логарифмирования) легко приводятся к линейному виду;

б) выбор числа уровней варьирования каждого фактора. Это зависит от полноты и точности исследования, вида модели (для линейных моделей достаточно принять два уровня – для проведения прямой достаточно иметь две точки), ширины интервала варьирования фактора на практике, желания исследователя и т.д.;

в) определиться: в чем план эксперимента должен быть хорошим. Например, если исследователь хочет получить гарантию в том, что даже при отдельных значениях факторов из области их определения полученная модель не даст больших расхождений при сравнении с натурными или другими реальными данными, надо выбрать *Q*-оптимальный план. А если исследователю нужна одинаковая точность во всех точках, нужно выбрать униформный план. Естественно также желание получить хорошие предсказательные свойства эмпирической модели в случае экстраполяции, тогда план эксперимента должен одновременно удовлетворять Q- и G-критериям оптимальности. Таких критериев оптимальности, на основе которых построен тот или иной план эксперимента, более 20. Поэтому на стадии выбора плана эксперимента исследователю нужно выбрать статистические критерии, по которым искомый план должен быть оптимальным. Задача несколько облегчается тем, что в случае малого числа факторов (ориентировочно до 4) большинство планов оптимально одновременно по многим критериям. Критерии оптимальности диктуют численные значения уровней варьирования каждого фактора внутри интервала, а также условия проведения конкретного опыта;

г) определение желаемого или возможного количества опытов (минимальное количество опытов соответствует критерию насыщенности).

Зная число факторов, число уровней варьирования каждого фактора, количество желаемых опытов, критерии оптимальности плана и вид математической модели исследуемого явления следует обратиться к обширной литературе по планированию эксперимента [19]. Выдвигаемым требованиям будет соответствовать очень узкий круг планов, то есть исследователю будет не трудно обоснованно выбрать один план эксперимента для решения поставленной задачи.

2. Необходимо обратить внимание на правильную обработку результатов опытов – имеется в виду полнота обработки, последовательность и выводы практического применения конечных формул или рекомендаций [1, 11, 18]. Поясним сказанное на примере.

В начале исследовательской работы пришлось заняться изучением вопроса размыва (разрушения) потоком воды отводящего русла за водосбросными сооружениями. Обзор работ по этой теме показал, что в мире на то время другими авторами предложено множество формул. Помимо сомнений продолжения исследований в этой области появился и такой вопрос: кто поверит еще в одну формулу и чем она будет предпочтительней. С другой стороны, существующие формулы получены из эксперимента или на основании других соображений, то есть каждый из авторов прав, но почему тогда при решении конкретной практической задачи формулы дают разброс, а каждый из исследователей предпочитают только свою методику.

Таких примеров из самых различных областей, к сожалению, можно привести большое множество и каждая научная школа придерживается своей методики. Но если каждый из этих исследователей на завершающем этапе обработки оценили бы доверительные интервалы, то их результаты имели бы общую зону совпадения, а это позволило бы более точно предсказать величину размыва. Вывод сводится к тому, что нужно предложить не просто формулу, а формулу с доверительными интервалами, тогда вместо противостояния разные методики дополнили бы друг друга.

3. Серьезное внимание приходится уделять применению ЭВМ при обработке данных. Соответствующие программы на различных языках разработаны давно, такие возможности имеют, например, и электронные таблицы (Excel и др.), имеются специализированные пакеты программ. На сегодня подавляющее большинство

исследователей пользуется готовыми пакетами и программами и очень редко программами собственной разработки. Каждая из указанных способов обработки данных имеет свои преимущества и недостатки. Дело в том, что так называемые стандартные программы отбрасывают (исключают из рассмотрения) статистически незначимые факторы и формально это правильно. Но в некоторых задачах может оказаться, что на самом деле тот или иной фактор на исследуемый процесс влияет и его нужно в конечной модели сохранить, а незначимость в конкретном случае могла быть вызвана узким интервалом варьирования этого фактора в опытах, нахождением в области экстремума, другими причинами. Только опытному экспериментатору виднее, от каких факторов исследуемое явление зависит. Ранее приведена программа, которая, в частности, по желанию исследователя позволяет сохранять в конечной модели и незначимые факторы, имеет некоторые другие особенности, например, ранжирование факторов по степени их влияния на исследуемую функцию.

4. Оказание помощи исследователям в поиске научной новизны в той или иной области при выполнении диссертационных работ. В этом вопросе всем трудно, особенно начинающим молодым исследователям: ведь во всем мире уже много лет данной проблемой занимаются специалисты поопытнее, а как найти что-то новое?! Первая рекомендация заключается в обоснованном применении методов планирования эксперимента при исследовании даже решенной задачи, тогда в подавляющем большинстве случаев (а для многофакторных задач всегда) результаты исследований будут более точными и достоверными.

Другая рекомендация заключается в доисследовании решенной задачи (в случае не обследования всей области определения искомой функции) или в усложнении задачи путем учета бóльшего числа факторов (таковыми являются почти все природные явления). Но здесь возникает трудность охвата и исследования многомерного факторного пространства. Например, если исследователь учел 6 факторов и в опытах без привлечения аппарата теории планирования эксперимента каждый фактор варьировал на 4 уровнях, но при этом не провел необходимое число опытов при полнофакторном эксперименте $N = 4^6 = 4096$, значит, явление недоисследовано. Если посмотреть в корень некоторых подобных исследований по многофакторным задачам, то можно увидеть характерные условия проведенных опытов.

Для пояснения сути такого подхода рассмотрим условный пример. Пусть искомой функцией являются вещи, которые нужно обнаружить в темной комнате, и эта функция зависит от трех параметров: x_1, x_2 и x_3. Опыты проводятся (поиск ведется) следующим образом. Сначала изменяется фактор x_1 (ходим) вдоль ширины комнаты с определенным шагом при постоянных x_2 и x_3. Далее при постоянных x_1 и x_3 меняют x_2 (идем) вдоль длины и на последнем этапе меняется x_3 по высоте комнаты при постоянных x_1 и x_2. На этом поиск завершается.

Таким образом, трехмерное факторное пространство наглядно доказывает несостоятельность такого подхода, заключающегося в поочередном изменении отдельных факторов и постоянных остальных. А теория математического планирования эксперимента то же самое или даже меньшее число опытных точек «разбрасывает по всей комнате», тем самым охватывается вся область определения искомой функции (конкретное расположение обследуемых точек в «комнате» определяется, как было отмечено, критериями оптимальности плана, положенными в основу построения того или иного плана эксперимента).

5. Не редки случаи, когда модель, полученная в результате обработки опытных данных, проверяется с помощью тех же опытов, на основе которых она построена. А во-вторых, закоренелым является и такое виденье (при слабой математической подготовке): если нет графиков, значит, явление не исследовано.

Понятно, что в случае многофакторного явления графики мало о чем говорят, они являются лишь частными случаями из громадного числа возможных. С другой стороны, при активном эксперименте в каждом отдельном опыте одновременно изменяются все или несколько факторов. Это означает, что по результатам таких опытов (назовем это основной серией) привычные одномерные графики нельзя построить. А поступать рекомендуем так: провести дополнительные опыты, изменяя по одному фактору при постоянных других, если это особо не затруднительно. При этом изменять нужно более значимые факторы, установленные в результате обработки результатов основной серии опытов. Результаты дополнительных опытов, называемых независимыми, помогут проверять работоспособность модели, полученной по основной серии опытов.

Кроме того, по результатам однофакторных независимых опытов можно построить графики. Это наглядно покажет влияние существенного фактора на исследуемую функцию (в какой-то степени качественно и в какой-то количественно), удовлетворит требования сторонников графического изображения, сама научно-исследовательская работа получится бóльшего объема и т. д. Для проверки работоспособности модели кроме независимых опытов нужно искать натурные (если основная серия опытов проведена в лаборатории) или другие данные из реальной жизни.

6. При необходимости формулы должны содержать не только количественные, но и качественные факторы, которые не подаются обычному измерению (например, цвет, вкус, запах, марка, сорт и т. п.). При этом надо помнить, что с этим связана некоторая особенность при обработке данных [11, 19].

7. Желательно применять планы с разным числом уровней варьирования разных факторов, а число повторов отдельных опытов должно быть обосновано. Анализ работ, выполненных с привлечением методов планирования эксперимента, показывает, что в подавляющем числе примерах все факторы имеют одинаковое число уровней варьирования (2 или 3) и одинаковое число повторов опытов. Отчасти это потому, что в более популярной и широко распространенной литературе по планированию эксперимента приведены только такие планы. В то же время любой исследователь скажет, что практически во всех задачах факторы не равнозначны и не имеют одинаковый диапазон варьирования, степень влияния и т д., значит, должны иметь разное число уровней варьирования.

8. В некоторых случаях невозможно, а иногда и не имеет физического смысла соблюдать все требования активного эксперимента по всему циклу или отдельным опытам (требование независимости или управляемости фактора и т.д.). Например, урожайность винограда сильно зависит от солнечной энергии, но этот фактор не управляем (на больших площадях и на протяжении всего сезона) и его невозможно

поддерживать на требуемых планом уровнях. Начинающие исследователи в таких случаях теряются, а порой и отказываются от активного эксперимента. В таких случаях нужно разумно сочетать элементы пассивного и активного эксперимента, максимально придерживаясь активного плана. Конечно, решение получится менее точным (доверительный интервал искомой функции будет не самым узким), но чем ничего - возможное будет предложено.

9. Большинство исследователей при проведении опытов в лаборатории поступают правильно, соблюдая требования теории подобия и размерностей и представляя результаты в критериальном (безразмерном) виде. Это облегчает перенос результатов модельных опытов в натуру. Возможно, излишне напомнить о том, чтобы в опытах варьировались все физические факторы, входящие в каждый критерий или безразмерный комплекс.

С многофакторными задачами связывают выражение «проклятие размерности» из-за катастрофического роста числа опытов с ростом числа факторов или уровней варьирования. Так, при 4 уровнях и 3 факторах необходимое число опытов в случае полнофакторного эксперимента $N = 4^3 = 64$, а при 8 факторах $N = 4^8 = 65\,536$. При решении таких задач единственным способом остается применение методов планирования эксперимента, причем небольшим числом опытов достигается более точное решение.

Правда, для достижения подобных показателей нужно иметь предварительную подготовку по постановке и обработке результатов опытов, знать существующие разработки других авторов по решаемой проблеме. Но все окупается экономией людских и материальных ресурсов, а ускорение во времени получения новой технологии и досрочный ее ввод в эксплуатацию позволит получить дополнительно и прибыль с оборота.

В заключении этого раздела отметим: в силу разных причин настоящая работа не претендует на всю полноту изложения вопросов, связанных с постановкой экспериментальных исследований. Однако в ней на основе анализа большого количества работ научно-исследовательского характера и исходя из многолетнего практического опыта работы в этой области, затронуты актуальные вопросы, которые окажут существенную помощь не только начинающему исследователю в формировании правильного подхода при экспериментальном исследовании сложных многофакторных явлений и изучении соответствующей литературы.

К таким вопросам относятся: необходимость применения методов математического планирования эксперимента и теории подобия и размерностей, обоснованный выбор плана проведения опытов, указание в практических рекомендациях или в конечной модели доверительных интервалов, проверка модели на данных из реальной жизни, учет в модели при необходимости качественных и статистически незначимых факторов, полнота исследования области определения искомой функции. Примеры проведения исследований в рекомендуемом формате даны в следующем разделе.

1.4 Двойной слепой рандомизированный метод планирования эксперимента

Наиболее доказательными являются проспективные (продольные) исследования, именно поэтому они проводятся чаще всего. Наиболее достоверным на сегодняшний день из всех проспективных исследований является двойное слепое рандомизированное многоцентровое плацебо-контролируемое испытание. Название выглядит слишком научно, но ничего сложного в нем нет. Объясню термин по словам.

Чаще всего эти методы используются в доказательной медицине. Что такое слепое и двойное слепое исследование? При одиночном слепом исследовании больной не знает, в какую группу он попал при рандомизации и какой препарат ему дают, но это знает медработник, который может непроизвольно или случайно выдать тайну. При двойном слепом исследовании ни врач, ни пациент не в курсе, что именно получает конкретный больной, поэтому такое исследование более объективно.

Что такое рандомизированное исследование? Слово произошло от англ. randomize - располагать в случайном порядке; перемешивать. Поскольку эффективность проверяемого препарата нужно с чем-то сравнивать, в каждом исследовании есть опытная группа (в ней проверяют необходимый препарат) и контрольная группа, или группа сравнения (пациентам из контрольной группы проверяемый препарат не дают). Забегая вперед, скажу, что исследование с контрольной группой называется контролируемым.

Рандомизация в данном случае - это случайное распределение пациентов по группам. Крайне важно, чтобы исследователи в своих корыстных целях не могли собрать более легких больных в опытную группу, а более тяжелых - в контрольную. Существуют специальные методы рандомизации, чтобы в итоге различия между группами стали статистически недостоверными.

Любопытно, что из общего числа больных в стационаре плацебо (лекарство-пустышка; плацебо имитирует лекарственный препарат, но активного вещества не содержит) помогает 25 %, в случаях психических заболеваний - до 40 %. Если прием плацебо у пациента имеет ярко выраженный положительный эффект, такие пациенты могут исключаться из исследования.

Ниже приведены истории из научной жизни – примеры ошибок и неточностей при планировании эксперимента, которые существенно исказили результаты исследований или же привели к неверным выводам.

Пример № 1. Одна из самых поучительных историй – история про открытие телепатии у крыс. Провели следующий эксперимент - брали крыс и сажали их парами в клетки, давали им познакомиться. Через некоторые время клетки делили на две группы: экспериментальную и контрольную.

Крысы из каждой пары изолировались друг от друга так, чтобы они не могли обмениваться звуками, запахами, не видели друг друга. В экспериментальной группе одну крысу из пары морили голодом, а за второй крысой наблюдали – сколько она ест в условиях, когда еды неограниченное количество. В контрольной группе обеим крысам давали неограниченное количество еды, за одной из крыс наблюдали: сколько она будет есть. Оказалось, что напарница голодающей крысы ела больше, чем напарница сытой крысы будто чувство голода каким-то волшебным образом передалось от одной крысы к другой.

Этими экспериментами заинтересовался один подкованный в математике человек, который приехал в этот институт и попросил принять участие в очередной серии опытов. Его взяли в команду, но он оказался очень дотошным: он попросил, чтобы на каждом этапе эксперимента крысы выбирались не экспериментатором, а жребием. Какая крыса окажется с какой в одной клетке? Определим жребием. Какая пара крыс попадет в экспериментальную группу, а какая в контрольную? Решит жребий. За какой из двух крыс будет вестись наблюдение на предмет количества съеденной еды? Тоже жребий. Все эти изменения протокола исследований были приняты.

Предложенная математиком процедура называется рандомизация, и эта процедура полностью устранила весь эффект телепатии у крыс. Простое объяснение: сами того не зная, экспериментаторы помещали в экспериментальную группу под наблюдение более активную или более толстую крысу, которая больше ела, что и приводило к столь потрясающему эффекту. Но никому в голову не приходило, что в эксперименте может быть вот такой изъян. На самом деле есть масса исследований, в том числе и в приличных научных журналах, где подобные эффекты не исключены. Это не значит, что в подобных исследованиях все заведомо не верно, но возможность такой ошибки нужно осознавать. Умение признавать ошибки и адекватно реагировать на критику является, пожалуй, одним из важнейших качеств ученого.

Планируя научные эксперименты или анализируя чужие исследования не забывайте, что нельзя верить всему, что видишь, что многое может быть объяснено случайностью, что в экспериментах должна быть контрольная группа, и что даже самый честный исследователь может, сам того не осознавая, повлиять на результаты экспериментов и исказить их, если не будут приняты необходимые меры предосторожности (например, рандомизация, слепой метод).

Пример № 2. В другом случае исследовали как мыши обучаются проходить лабиринт. Пробовали сначала скрещивать самых умных мышей друг с другом и увидели, что потомки этих умных мышей еще умнее и еще лучше проходят лабиринт, что было прямо-таки прекрасным доказательством теории эволюции в действии.

Но кроме того, скрещивали и самых глупых в выборке мышей, ожидая, что их потомки будут еще глупее. Но результат был просто удивительным: потомки самых глупых мышей, хоть и были глупее потомков умных мышей, но и они «умнели» из поколения в поколение, а не глупели, как следовало бы ожидать. Ведь в популяции глупых мышей отбор был направлен в сторону неумения проходить лабиринт! Получалось, что «умнели» все мыши, не важно в какую сторону была направлена селекция.

И возникла на фоне этого и других экспериментов идея, что существует некоторое информационное поле, благодаря которому, обучая умных мышей ходить по лабиринту, мы автоматических обучаем всех (да именно всех, существующих и еще не существующих) мышей ходить по лабиринту.

Разумеется, эти опыты с мышами удивили ученых. И снова здравый смысл конечно же победил. Кто-то из ученых догадался приехать и провести очень простой контроль: как следует помыть лабиринт и избавить его от запахов. Дело в том, что во всех исследованиях использовался один и тот же лабиринт. Умные мыши, бегая по лабиринту, оставляли свои запахи. Запахов было больше там, где чаще бегали мыши, а чаще они бегали в правильном направлении. Поэтому даже самая тупая мышь со временем все лучше и лучше ориентировалась по запаху. А эволюционные факторы играли очень малую роль, ведь чтобы серьезно отобрать умных или глупых мышей, надо много поколений. Не удивительно, что когда лабиринт помыли, все мыши «поглупели», особенно самые «глупые».

Пример № 3. Еще в одном случае исследовали действие вещества Х на крыс. Не будем вдаваться в подробности, ведь это лишь образовательный пример. Выборка составляла - шесть крыс и еще шесть крыс. Первых шесть крыс кормили веществом Х, других не кормили. Вскрытие показало, что некоторые изменения в кишечнике были почти у всех крыс, которых кормили веществом X и не было у крыс, которых не кормили веществом X. Результат был статистически значимый и поэтому учеными был сделан вывод о влиянии вещества X на кишечник крыс. Нормальное научное исследование, не так ли?

Но проблема была глубже. Дело в том, что ученые исследовали не только заявленное изменение в кишечнике, но еще несколько десятков вариабельных параметров крыс и конкретной гипотезы, какой именно параметр и как должен изменяться под действием вещества X ученые до исследования не имели. Практически по всем параметрам крысы, которые ели вещество X и не ели вещество X были одинаковы, а в кишечнике нашлось отличие.

В эксперименте было много конкретных ошибок, но они менее интересны, кроме того требуют специальных знаний. Но одну ошибку ученых можно понять не обладая ничем, кроме логики. Заключается ошибка в том, что если взять 6 крыс и еще 6 крыс и измерить то огромное количество параметров, которое ученые измерили и сравнили (более 50), просто неизбежно, что хотя бы по одному из них первые 6 крыс будут статистически значимо отличаться от других 6 крыс.

В современной науке в таких ситуациях вносят «поправку на множественные проверки». Очень ценное достижение научного метода. Незнание о такой поправке неизбежно приведет к ложным результатам, как в случае с крысами, но мало кто знает о ней и мало кто ее использует.

1.5 Нормальное распределение. Критерии нормальности

Встречаемые в обыденной жизни большое число наблюдений, измеряемые значения параметров, погрешности измерений и ошибки подчиняются нормальному закону. Этот закон можно считать основой математической статистики.

Нормальным называется закон распределения случайной величины x, если плотность распределения вероятности определяется по формуле

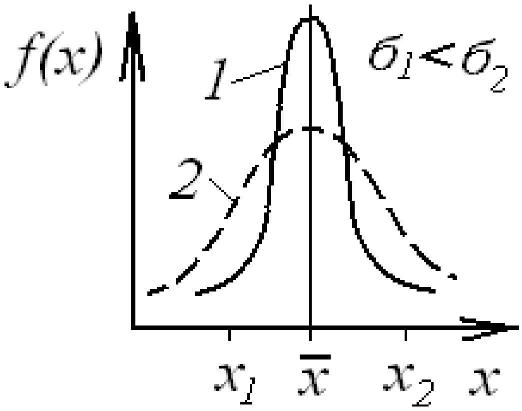
$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\bar{x})^2}, \ (-\infty < x < +\infty, \ \sigma > 0), \qquad (1.7)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение,

$\bar{x}$ - среднее значение (математическое ожидание),

π = 3,141593, e = 2,718282 – математические константы.

Из формулы следует, что нормальное распределение полностью определяется параметрами $\bar{x}$ и σ. Среднее квадратическое отклонение определяет форму кривой: чем больше σ (разброс данных), тем кривая становится пологой (рисунок 1.14). Математическое ожидание $\bar{x}$ определяет положение кривой на оси абсцисс, кривая симметрична относительно этого значения [5, 6].



1 – с меньшим разбросом данных, 2 – с большим разбросом данных.

Рисунок 1.14 – Виды графиков нормального распределения случайной величины

Нормальное распределение часто встречается в природе. Например, следующие случайные величины хорошо моделируются нормальным распределением:

- отклонение при стрельбе;

- погрешности измерений (однако погрешности некоторых измерительных приборов имеют не нормальные распределения);

- рост человека;

- давление крови в течение дня;

- экзаменационные оценки;

- некоторые характеристики живых организмов в популяции [7].

Многие непрерывные случайные величины не являются ни точно, ни приближенно нормальными. Свойства таких величин довольно сильно отличаются от свойств нормального распределения, перечисленных выше (рисунок 1.15).

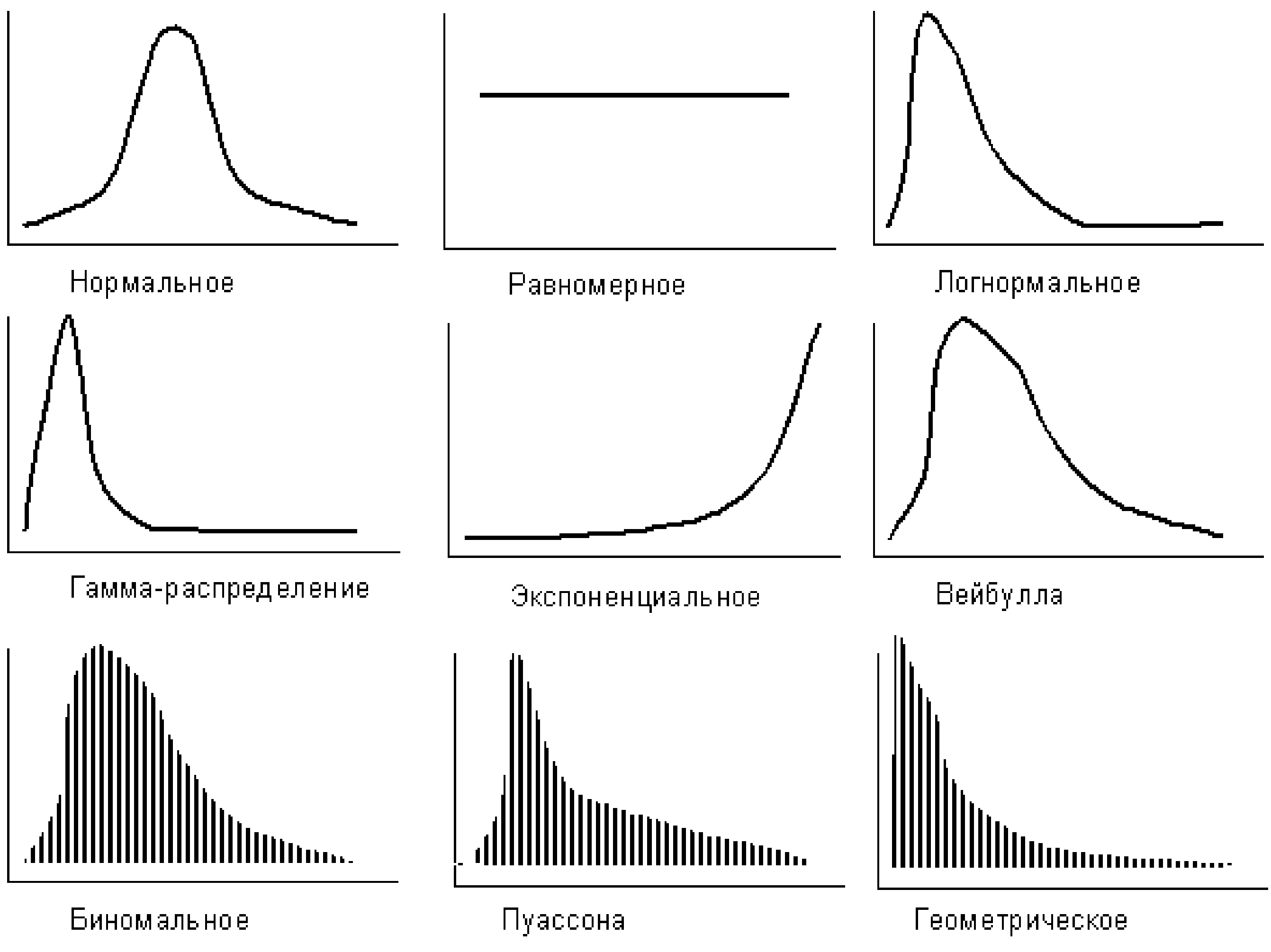


Рисунок 1.15 – Виды распределений величин

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей).

Например, при поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью (плотностью вероятности) показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т. е. имеют равномерное распределение [8].

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. Оно играет большую роль в теории вероятностей и занимает среди других распределений особое положение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Если предоставляется возможность рассматривать некоторую случайную величину как сумму достаточно большого числа других случайных величин, то данная случайная величина обычно подчиняется нормальному закону распределения.

Суммируемые случайные величины могут подчиняться каким угодно распределениям, но при этом должно выполняться условие их независимости (или слабой зависимости). При соблюдении некоторых не очень жестких условий указанная сумма случайных величин подчиняется приближенно нормальному закону распределения и тем точнее, чем большее количество величин суммируется [9].

Ни одна из суммируемых случайных величин не должна резко отличаться от других, т. е. каждая из них должна играть в общей сумме примерно одинаковую роль и не иметь исключительно большую по сравнению с другими величинами дисперсию.

Для примера рассмотрим изготовление некоторой детали на станке-автомате. Размеры изготовленных деталей несколько отличаются от требуемых. Это отклонение размеров от стандарта вызывается различными причинами, которые более или менее независимы друг от друга. К ним могут относиться: неравномерный режим обработки детали; неоднородность обрабатываемого материала; неточность установки заготовки в станке; износ режущего инструмента и деталей станков; упругие деформаций узлов станка; состояние микроклимата в цехе; колебание напряжения в электросети и т. д. Каждая из перечисленных и подобных им причин влияет на отклонение размера изготовляемой детали от стандарта. Таким образом, общее отклонение размера, фиксируемое измерительным прибором, является суммой большего числа отклонений, обусловленных различными причинами.

Если ни одна из этих причин не является доминирующей, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения.

1.6 Отсев грубых погрешностей

Предварительная обработка результатов измерений или наблюдений необходима для того, чтобы отсеять так называемые грубые промахи, убрать из рассмотрения статистически незначимые факторы и в дальнейшем использовать оставшиеся данные для построения адекватных моделей исследуемого процесса.

Грубые промахи могут быть вызваны ошибками измерительных приборов, субъективными ошибками исследователя, методом обработки данных, влиянием неучтенных случайных факторов, округлением при вычислениях, другими причинами.

Другим важным моментом предварительной обработки данных является проверка соответствия распределения результатов измерения закону нормального распределения. Если эта гипотеза неприемлема, то следует определить, какому закону распределения подчиняются опытные данные, и если это возможно, преобразовать данное распределение к нормальному.

Только после предварительного анализа и исключения грубых промахов можно использовать оставшиеся данные для получения правильных решений. Существуют различные рекомендации для проведения отсева грубых погрешностей наблюдения. Чащу всего грубые погрешности можно заметить на визуальных отображениях - графиках величин (рисунок 1.16).

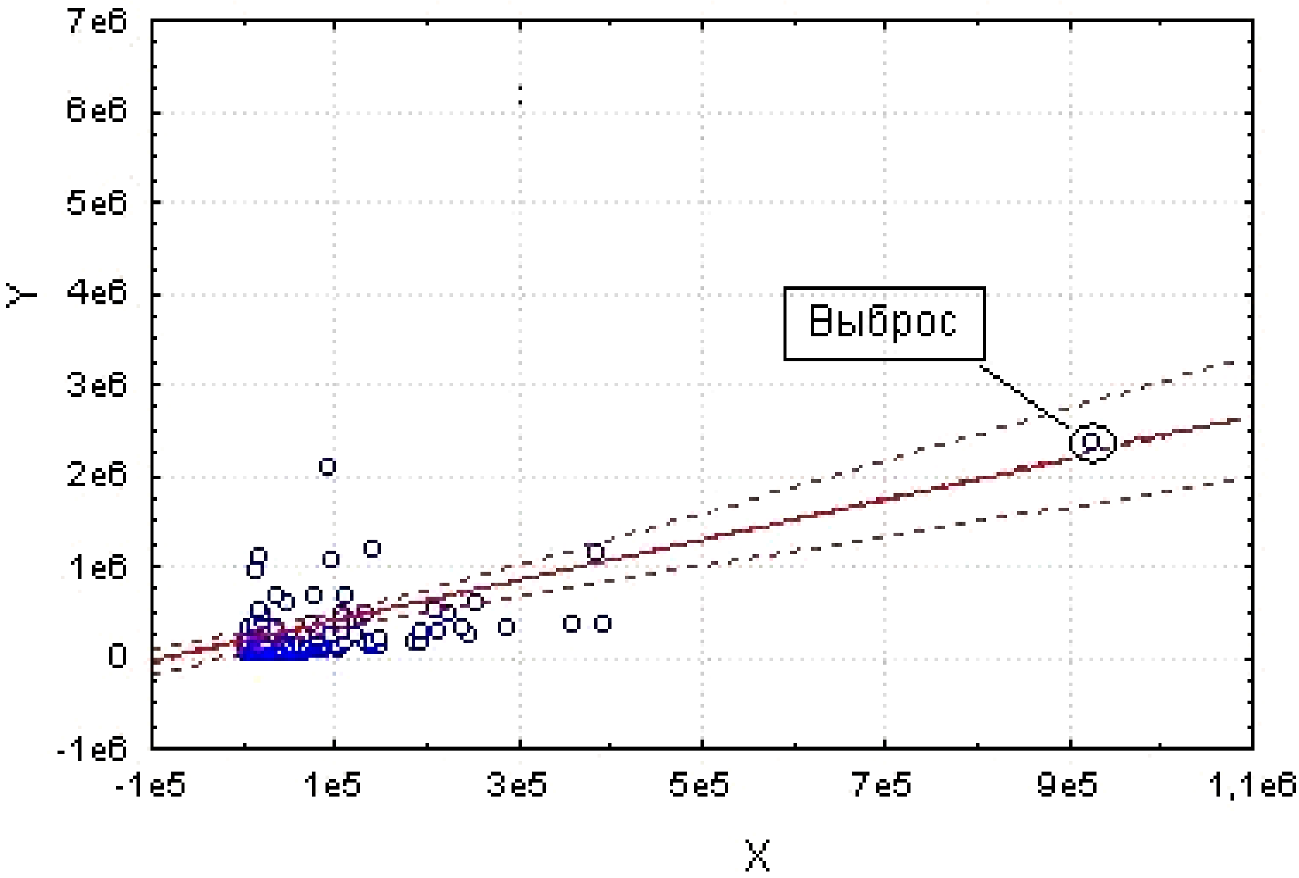


Рисунок 1.16 – Распределение случайной величины

1.7 Ошибки параллельных опытов

Эксперимент является основным и наиболее совершенным методом познания. Он может быть активным и пассивным. Осуществление пассивного эксперимента не зависит от экспериментатора, и ему приходится довольствоваться лишь ролью наблюдателя. Основной вид эксперимента – активный, проводится в контролируемых и управляемых условиях.

Все факторы, влияющие на исследуемые параметры объекта, предусмотреть, как правило, не удается. Так, в сложных системах, зависящих от множества факторов, некоторые воздействия не могут контролироваться или управляться. Воздействие этих факторов рассматриваются как белый шум, наложенный на истинные результаты эксперимента. Чтобы отделить факторы, интересующие экспериментатора, от шумового фона, применяются специальные методы, называемые рандомизацией эксперимента.

Проведение активного эксперимента зачастую требует больших материальных затрат. Поэтому важной задачей является получение необходимых сведений при минимальном числе опытов. Решением этой проблемы занимается теория планирования эксперимента, представляющая собой раздел математической статистики.

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка повторных (или параллельных) опытов не дает полностью совпадающих результатов, потому что всегда существует ошибка опыта (ошибка воспроизводимости). Эту ошибку и нужно оценить по параллельным опытам. Для этого опыт воспроизводится по возможности в одинаковых условиях несколько раз и затем берется среднее арифметическое всех результатов. Среднее арифметическое $\bar{y}$ равно сумме всех n отдельных результатов, деленной на количество параллельных опытов n

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{q-1}^{n} y_q \,. \qquad (1.8)$$

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность $y_q - \bar{y}$, где y_q – результат отдельного опыта. Наличие отклонения свидетельствует об изменчивости, вариации значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости чаще всего используют дисперсию. Дисперсией называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения. Дисперсия обозначается s^2 и выражается формулой

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{q-1}^{n} (y_q - \bar{y})^2 \,, \qquad (1.9)$$

где (n−1) – число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица. Одна степень свободы использована для вычисления среднего.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется средним квадратическим отклонением, стандартом или квадратичной ошибкой

Стандарт имеет размерность той величины, для которой он вычислен. Дисперсия и стандарт – это меры рассеяния, изменчивости. Чем больше дисперсия и стандарт, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

Ошибка опыта являемся суммарной величиной, результатом многих ошибок: ошибок измерений факторов, ошибок измерений параметра оптимизации и др. Каждую из этих ошибок можно, в свою очередь, разделить на составляющие.

Вопрос о классификации ошибок довольно сложный и вызывает много дискуссий. В качестве примера одной из возможных схем классификации приведем схему (рисунок 1.17).

Все ошибки принято разделять на два класса: систематические и случайные.

Систематические ошибки порождаются причинами, действующими регулярно, в определенном направлении. Чаще всего эти ошибки можно изучить и определить количественно.

Систематические ошибки обусловливаются причинами, действующими вполне определённым образом. Примером систематической ошибки при взвешивании может являться смещение стрелки ненагруженных весов относительно нулевой отметки на некоторую постоянную величину. Зная это смещение (например, взвесив гирю, масса которой точно известна), можно, всякий раз измеряя массу на этих весах, вычитать из показаний прибора. Таким образом, систематические ошибки могут быть устранены или достаточно точно учтены.

Систематические ошибки находят, калибруя измерительные приборы и сопоставляя опытные данные с изменяющимися внешними условиями (например, при градуировке термопары по реперным точкам, при сравнении с эталонным прибором).

Если систематические ошибки вызываются внешними условиями (переменной температуры, сырья и т. д.), следует компенсировать их влияние. Как это делать, будет показано ниже.

Случайными ошибками называются те, которые появляются нерегулярно, причины возникновения которых неизвестны и которые невозможно учесть заранее.

Систематические и случайные ошибки состоят из множества элементарных ошибок. Для того, чтобы исключать инструментальные ошибки, следует проверять приборы перед опытом, иногда в течение опыта и обязательно после опыта. Ошибки при проведении самого опыта возникают вследствие неравномерного нагрева реакционной среды, разного способа перемешивания и т.п. При повторении опытов такие ошибки могут вызвать большой разброс экспериментальных результатов [10].

Очень важно исключить из экспериментальных данных грубые ошибки, так называемый брак при повторных опытах. Для отброса ошибочных опытов существуют правила. Для определения брака используют, например, критерий Стьюдента

$$\frac{y-\overline{y}}{s} \geq t\,. \qquad (1.10)$$

Значение t берут из таблицы t-распределения Стьюдента. Опыт считается бракованным, если экспериментальное значение критерия t по модулю больше табличного значения.

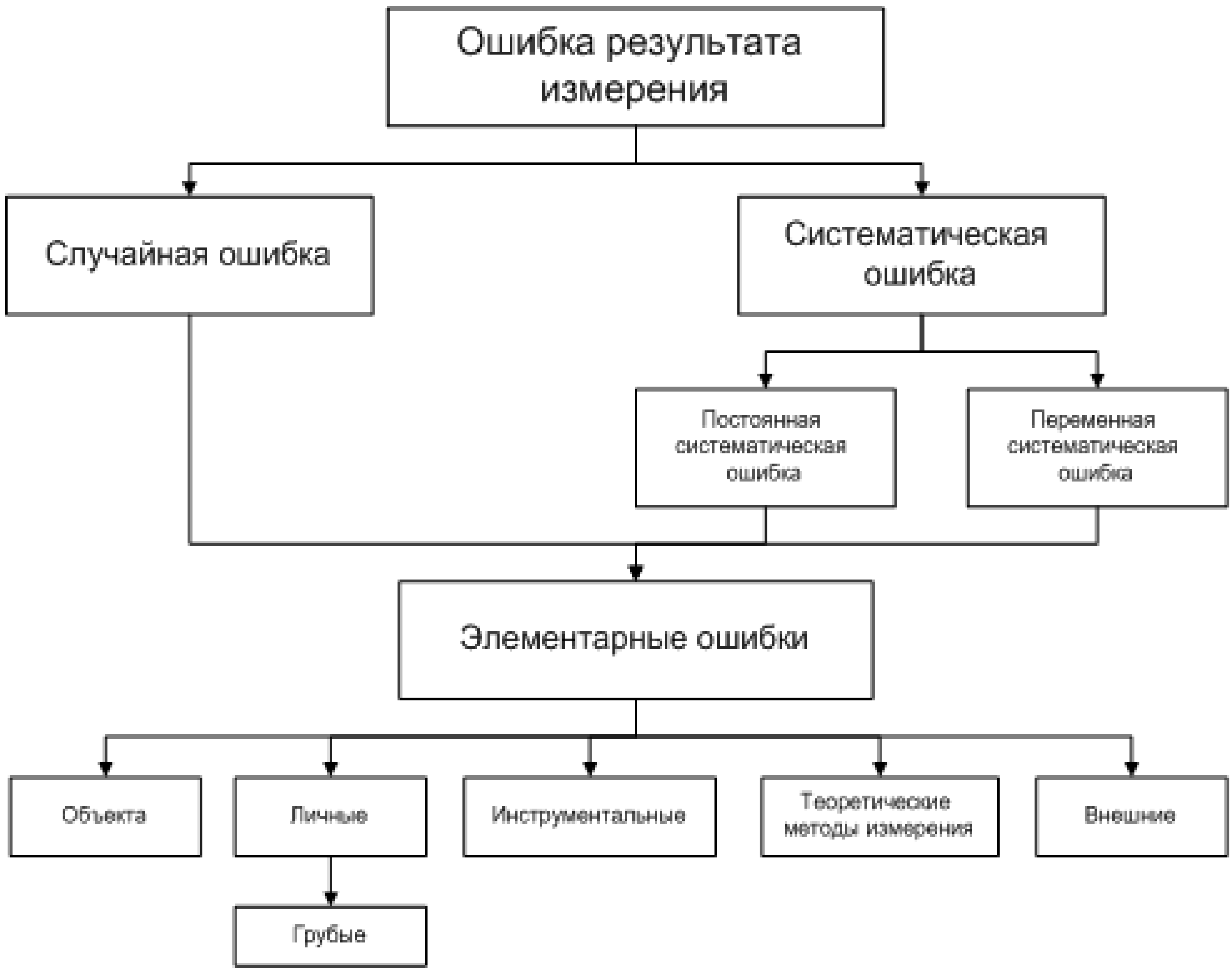


Рисунок 1.17 – Классификация ошибок измерений

1.8 Проверка гипотезы нормального распределения

Проверку нормальности распределения случайной величины можно производить разными способами, рассмотрим простую рекомендацию. Надо вычислить среднее абсолютное по обычной формуле

$$e = \frac{\sum_{1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}. \tag{1.11}$$

Если выполняется условие

$$\left| \frac{e}{S} - 0{,}7979 \right| < \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}, \tag{1.12}$$

то гипотеза нормальности распределения выборки данных принимается. В противном случае надо постараться преобразовать распределение к нормальному или применить другое распределение.

Если гипотеза нормальности распределения не может быть принята, то возможно, что с помощью существующих методов можно так преобразовать исходные данные, что их распределение будет подчиняться нормальному закону.

В самом начале преобразования данных большую помощь может оказать вид гистограммы. При крутой левой части и пологой правой, то есть при явной асимметрии путем, например, логарифмирования можно добиться симметричного распределения. При логарифмировании исходных данных левая ветвь кривой распределения сильно растягивается и распределение принимает приближенно нормальный характер.

Асимметричное распределение с одной вершиной часто приводится к нормальному преобразованием $x' = \ln(x \pm a)$. В некоторых случаях можно применять и другие преобразования: $x' = 1/x$, $x' = 1/\sqrt{x}$, $x' = ax^b$ и др. (a, b - некоторые постоянные).

Для нормализации смещенного право распределения служит тригонометрические преобразования. В этом и во многих других случаях универсальным является степенные преобразования $x' = ax^b$, причем b будет тем больше, чем больше выражено правое смещение.

Резюмируя вышесказанное, алгоритм предварительной обработки наблюдений сводится к следующему:

1) вычисление выборочных характеристик;

2) отсев грубых погрешностей;

3) проверка нормального закона;

4) преобразование распределения к нормальному в случае необходимости.

2 Прикладная программа «Полный факторный анализ планов первого порядка»

2.1 Назначение программы

Прикладная программа «Полный факторный анализ планов первого порядка» предназначена для быстрого составления планов эксперимента первого порядка и проведения факторного анализа на его основе.

2.2 Область применения

Прикладная программа «Полный факторный анализ планов первого порядка» направлена на составление планов эксперимента первого порядка и проведение факторного анализа на его основе.

Исходные данные могут вбиваться самостоятельно пользователем программы.

Для использования в учебно-практических целях в программе предусмотрено наличие:

– возможности демонстрации полного хода проведения полного факторного эксперимента;

– высокая скорость расчета.

2.3 Используемые технические средства

Прикладная программа реализована в виде скриптов веб-сайта, back-end часть программного средства реализована на объектно-ориентированном языке PHP 5.3, front-end часть - с помощью технологий гипертекстовой разметки HTML5, каскадных таблиц стилей CSS3, библиотек jQuery 2.1.1, jQuery UI 1.11.0.custom.

Прикладная программа «Полный факторный анализ планов первого порядка» предназначена для работы в графических операционных средах типа Microsoft Windows, Android, FreeBSD, OpenBSD, Linux, etc.

Ограничения, накладываемые на аппаратную часть компьютера, отсутствуют. Для уменьшения зрительного утомления монитор компьютера или дисплей планшетного компьютера должен иметь диагональ не менее 4 дюймов.

2.4 Руководство программиста

Проведенные эксперименты показывают, что для работы с данной прикладной программой не требуется специальной подготовки, она осваивается пользователем в течение 10 минут с начала работы с данной программой.

Прикладная программа «Полный факторный анализ планов первого порядка» не требует установки и дополнительной отладки. Для запуска программы необходимо зайти на веб-сайт http://bread.smartbunny.ru/experiments/

Исходными данными для программы являются числовые и строчные значения переменных, выбираемые и вводимые пользователем, на основе которых производятся все необходимые расчеты .

Математическая обработка данных, полученных в ходе исследования – важное условие при выполнении курсовых и дипломных работ.

Для анализа многомерных данных часто используется факторный анализ. Под многомерным количественным представлением объекта понимается присвоение ему одновременно несколько численных значений, характеризующих степень выраженности различных его свойств.

Факторным анализом называется любая процедура переработки многомерных данных, на «вход» которой «подается» матрица корреляции между исходными переменными (показателями, шкалами и пр.), а с «входа» считывается система переменных, именуемых факторами.

Лучше всего заранее, еще на стадии планирования, подбирать математическую модель, которая в дальнейшем будет использоваться или принимать оптимальное решение о выборе адекватной модели с учетом условий проведения исследования и разнообразия существующих математических методов.

Зависимость между выходными параметрами (откликом) и входными параметрами (факторами) называется функцией отклика.

Использование теории планирования эксперимента является одним из путей существенного повышения эффективности многофакторных экспериментальных исследований. В планировании экспериментов применяются в основном планы первого и второго порядков. Планы более высоких порядков используются в инженерной практике редко. В связи с этим далее приводится краткое изложение методики составления планов эксперимента для моделей первого и второго порядков. Под планом первого порядка понимают такие планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего только первые степени факторов и их произведения.

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Простая формула, которая для этого используется

$$N = 2^k, \tag{2.1}$$

где N – число опытов, k – число факторов, 2 – число уровней.

В общем случае эксперимент, в котором реализуются всевозможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа 2^k.

Нетрудно написать все сочетания уровней в эксперименте с двумя факторами. Напомним, что в планировании эксперимента используются кодированные значения факторов: +1 и –1 (часто для простоты записи единицы опускают). Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Будем называть такие таблицы матрицами планирования эксперимента. Матрица планирования для двух факторов приведена в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Матрица планирования эксперимента при 2 факторах

№ опыта	x_1	x_2	y
1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой. Таким образом, мы имеем 2 вектор-столбца независимых переменных и один вектор-столбец параметра оптимизации.

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором (или просто запомнить), то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц. Из многих возможных обычно используется три приема, основанные на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности. Рассмотрим первый. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана встречается дважды: в сочетании с нижним и верхним уровнями нового фактора. Отсюда естественно появляется прием: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Вот как это выглядит при переходе от эксперимента 2^2 к 2^3 – таблица 2.2.

Этот прием распространяется на построение матриц любой размерности.

Таблица 2.2 – Матрица планирования эксперимента при 3 факторах

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	–	–	+	y_1
2	+	–	+	y_2
3	–	+	+	y_3
4	+	+	+	y_4
5	–	–	–	y_5
6	+	–	–	y_6
7	–	+	–	y_7
8	+	+	–	y_8

Рассмотрим второй прием. Для этого введем правило перемножения столбцов матрицы. При построчном перемножении двух столбцов матрицы произведение единиц с одноименными знаками дает +1, а с разноименными –1. Воспользовавшись этим правилом, получим для случая, который мы рассматриваем, вектор-столбец произведения x_1x_2 в исходном плане. Далее повторим еще раз исходный план, а у столбца произведений знаки поменяем на обратные. Этот прием тоже можно перенести на построение матриц любой размерности, однако он сложнее, тем первый.

Третий прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два, в третьем – через 4, в четвертом – через 8 и т. д. по степеням двойки.

Оценки коэффициентов модели должны быть наилучшими и что точность предсказания параметра оптимизации не должна зависеть от направления в факторном пространстве, ибо заранее неясно, куда предстоит двигаться в поисках оптимума.

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы. Первое из них – симметричность относительно центра эксперимента – формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, или, где j – номер фактора, N – число опытов, $i = 1, 2, ..., k$.

Второе свойство – так называемое условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N \qquad (2.2)$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и –1.

Это свойства отдельных столбцов матрицы планирования. Теперь остановимся на свойстве совокупности столбцов. Сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0, \quad j \neq u, \quad j,u = 0,1,2,\dots,k \qquad (2.3)$$

Это важное свойство называется ортогональностью матрицы планирования.

Последнее, четвертое свойство называется ротатабельностью, т. е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Для движения к точке оптимума нам нужна линейная модель $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Наша цель – найти по результатам эксперимента значения неизвестных коэффициентов модели. До сих пор, говоря о линейной модели, мы не останавливались на важном вопросе о статистической оценке ее коэффициентов. Теперь необходимо сделать ряд замечаний по этому поводу. Можно утверждать, что эксперимент проводится для проверки гипотезы о том, что линейная модель $\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ адекватна. Греческие буквы использованы для обозначения «истинных» генеральных значений соответствующих неизвестных. Эксперимент, содержащий конечное число опытов, позволяет только получить выборочные оценки для коэффициентов уравнения $y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$. Их точность и надежность зависят от свойств выборки и нуждаются в статистической проверке. Как производится такая проверка, будет показано ниже. А пока займемся вычислением оценок коэффициентов. Их можно вычислить по простой формуле

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i, \quad j = 0,1,\ldots k, \qquad (2.4)$$

обоснование которой будет приведено ниже. Воспользуемся этой формулой для подсчёта коэффициентов b_1 и b_2

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}, \qquad (2.5)$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4}. \qquad (2.6)$$

Благодаря кодированию факторов расчет коэффициентов превратился в простую арифметическую процедуру. Для подсчета коэффициента b_1 используется вектор-столбец x_1, а для b_2 – столбец x_2. Остается неясным, как найти b_0. Если уравнение $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных: $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2$. Но в силу свойства симметрии $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$.

Следовательно, $\bar{y} = b_0$. Мы показали, что b_0 есть среднее арифметическое значений параметра оптимизации. Чтобы его получить, необходимо сложить все y и разделить на число опытов. Чтобы привести, эту процедуру в соответствие с формулой для вычисления коэффициентов, в матрицу планирования удобно ввести вектор-столбец фиктивной переменной x_0, которая принимает во всех опытах значение +1. Это было уже учтено в записи формулы, где j принимало значения от 0 до k.

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы найти неизвестные коэффициенты линейной модели

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 . \qquad (2.7)$$

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Иногда удобно оценивать вклад фактора при переходе от нижнего уровня к верхнему уровню. Вклад, определенный таким образом, называется вкладом фактора (иногда его называют основным или главным эффектом). Он численно равен удвоенному коэффициенту. Для качественных факторов, варьируемых на двух уровнях, основной уровень не имеет физического смысла. Поэтому понятие «эффект фактора» является здесь естественным.

Планируя эксперимент, на первом этапе мы стремимся получить линейную модель. Однако у нас нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью. Существуют способы проверки пригодности линейной модели (проверка адекватности).

Статистический вывод о пригодности (значимости) полученного в результате факторного анализа уравнения обычно проверяется в следующей последовательности:

Проводится общая проверка модели, целью которой является выяснение, объясняют ли переменные значимую долю изменения у. Определение значимости модели рекомендуется проводить по следующим методам (таблица 2.3).

Если регрессия не является значимой, то говорить больше не о чем.

В приведенном примере модель значима, т.к. вычисленный уровень значимости модели p=0,000000<0,05. Получаем уравнение вида

$$\acute{o}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_{3,} \mathrm{x}_4) = 6{,}9 + 0{,}07 \cdot x_1 - 0{,}00035 \cdot x_2 - 2{,}08 \cdot x_3 + 0{,}00003 \cdot x_4. \qquad (2.8)$$

Если регрессия оказывается значимой, то существует взаимосвязь между параметром у и переменными $x_1, x_2, ...x_m$. Однако остается неясно, каково влияние конкретных факторов $x_1, x_2, ...x_m$ на исследуемую функцию у. Можно продолжить анализ, используя t-тесты для отдельных коэффициентов регрессии $a_1, a_2, ...a_m$ с целью выяснить, насколько значимой является влияние той или иной переменной х на параметр у при условии, что все другие факторы x_k остаются неизменными. Проверку на адекватность коэффициентов уравнения рекомендуется проводить по следующим эквивалентным методам (таблица 2.4).

Т.к. вычисленные уровни значимости p-level для коэффициентов, стоящих при x_2 и x_4 меньше 0,05, то они не значимы. К аналогичному выводу можно прийти, воспользовавшись t-критерием: $t_2(10) = -0{,}013 < 2{,}228$ и $t_3(10) = 1{,}44 < 2{,}228$. С учетом этого факта, пересчитаем уравнение множественной регрессии, выбрав в качестве зависимой (dependent) переменную у и независимые (independent) переменные x_1 и x_3, коэффициенты при которых значимы.

Таблица 2.3 – Методы проверки модели, описываемой уравнением факторного анализа

Критерий Фишера	Использование уровня значимости α	Использование коэффициента детерминации R^2
Проверяется нулевая гипотеза H0 о равенстве полученных коэффициентов регрессии нулю: $a_1 = a_2 = a_m = 0$. Для этого рассчитанное системой значение F-критерия ($F_{\text{ðàñ÷}}$), сравнивается с табличным значением $F_{\text{ò àáë}}$, определяемым с использованием специальных таблиц по заданным уровню значимости (например, а=0,05) и числу степеней свободы (df1=m, df2=n-m-1). Если выполняется неравенство $F_{\text{ðàñ÷}} < F_{\text{ò àáë}}$, то с уверенностью, например на 95 %, можно утверждать, что рассматриваемая зависимость является статистически значимой.	Если рассчитанное значение уровня значимости р больше, чем заданный уровень значимости а (например, а=0,05), то полученный результат нужно трактовать как незначимый (для 95% вероятности). В том случае, когда величина р<0,05, то вывод такой: это значимое уравнение с вероятностью 95%.	Рассчитанная системой величина $R^2_{\text{ðàñ÷}}$ сравнивается с табличными (критическими) значениями $R^2_{\text{êðèò}}$, определяемым с использованием специальных таблиц по заданному уровню значимости (например, α =0,05). Если окажется, что $R^2_{\text{ðàñ÷}} > R^2_{\text{êðèò}}$, то с упомянутой степенью вероятности (95 %) можно утверждать, что анализируемая регрессия является значимой.

Таблица 2.4 – Методы проверки адекватности коэффициентов уравнения

Использование t-критерия Стьюдента	Использование уровня значимости α
Анализируемый коэффициент $a_1, a_2, \ldots a_m$ считается значимым, если рассчитанное программой для него значение t-критерия по абсолютной величине превышает $t_{ò\ àáë}$, определяемым с использованием таблиц по заданным уровню значимости (например, а=0,05) и числу степеней свободы ($df = n - m - 1$).	Коэффициент регрессии $a_1, a_2, \ldots a_m$ признается значимым, если рассчитанное программой для него значение уровня значимости р меньше (или равно) 0,05 (для 95%-ной доверительной вероятности).

При анализе адекватности уравнения модели исследуемому процессу, возможны следующие варианты:

1. Построенная модель на основе F-критерия Фишера в целом адекватна и все коэффициенты регрессии значимы. Такая модель может быть использована для принятия решений и осуществления прогнозов.

2. Модель по F-критерию Фишера адекватна, но часть коэффициентов не значима. Модель пригодна для принятия некоторых решений, но не для прогнозов.

3. Модель по F-критерию адекватна, но все коэффициенты регрессии не значимы. Модель полностью считается неадекватной. На ее основе не принимаются решения и не осуществляются прогнозы.

2.5 Алгоритм работы программы

Для начала работы с программой «Полный факторный анализ планов первого порядка» необходимо зайти на веб-сайт http://bread.smartbunny.ru/experiments/

В меню слева находятся следующие подпункты:

- «Открыть в новом окне»;
- «Теоретические основы»;
- «Примеры расчетов»;
- «О разработчиках».

Главное окно программы показано на рисунке 2.1.

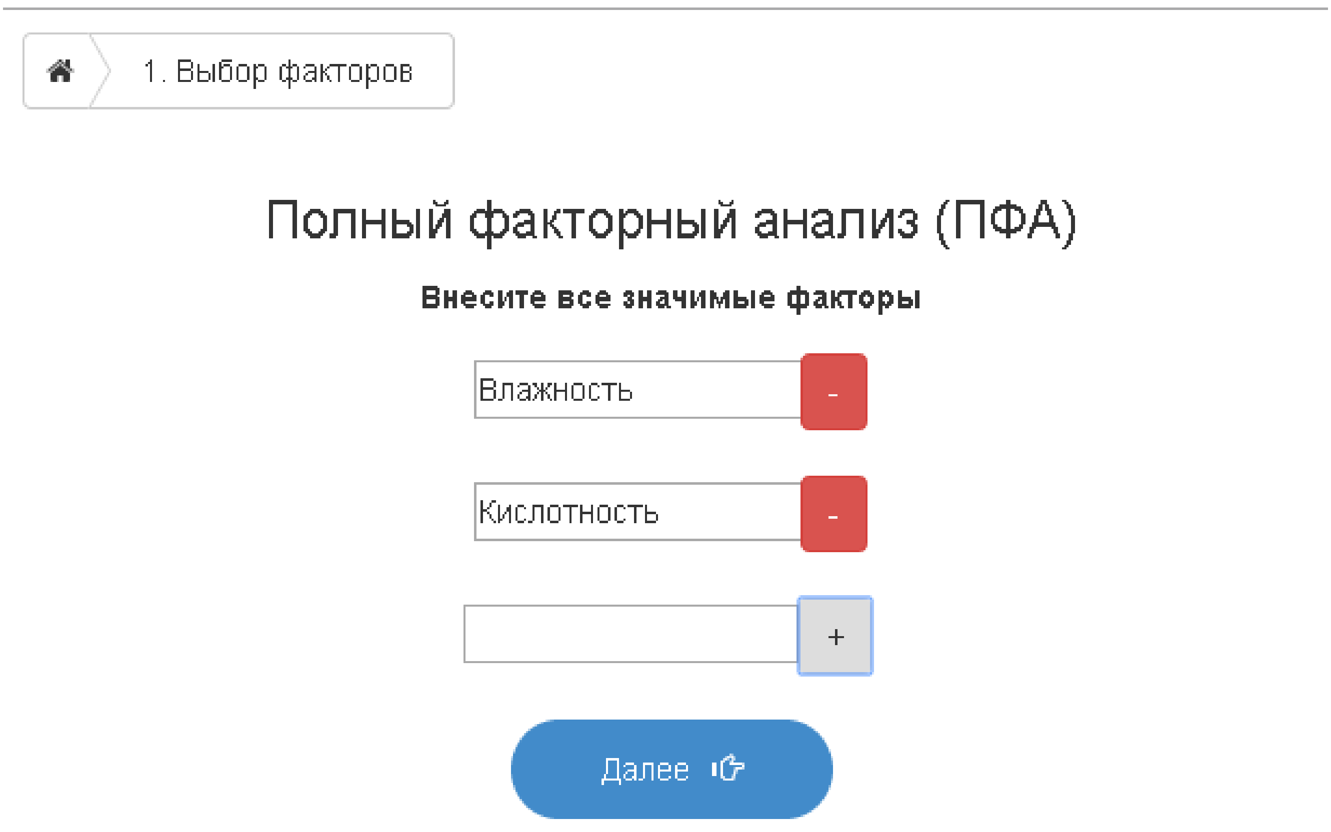


Рисунок 2.1 - Главное окно программы «Полный факторный анализ планов первого порядка»

Для произведения расчета следует заполнить необходимые поля в ручном режиме. После окончания ввода, следует нажать на кнопку «Посчитать», после чего произойдет программный расчет по введенным данным. Пример заполненной формы показан на рисунке 2.2.

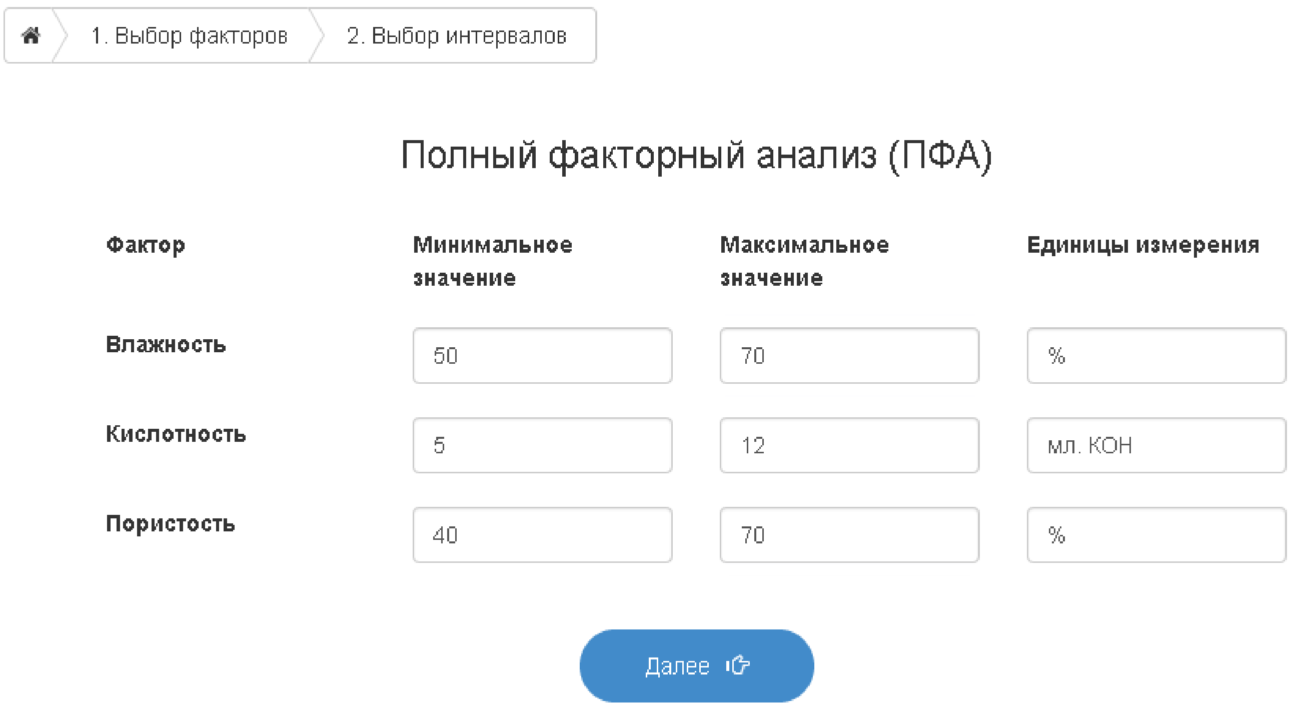


Рисунок **2.**2 – Заполненная форма программы
«Полный факторный анализ планов первого порядка»

Пример результата данных манипуляций показан на рисунке 2.3.

В ходе расчета создается виртуальный текст, формулы отображаются на экране браузера за счет использования javascript-библиотечки jsMath 2.0. Этот текст представляет собой последовательность операций, выполняющиеся в ходе выполнения расчета варианта. Для возврата в предыдущее меню для начала следующего расчета следует нажать на кнопку «Вернуться», после нажатия данной кнопки откроется новое окно с формой для заполнения. Пример расчетов показан на рисунке 2.4.

Полученный текст решения, а также введенные данные можно просматривать и сохранять в формате Word. Все формулы сохраняются в растровом формате хранения графической информации PNG.

Для просмотра теоретической информации о методах расчета производственных рецептур, а также примеров решения типовых заданий в выпадающем меню находятся соответствующие пункты «Теоретические основы» и «Примеры расчетов».

2. Выбор интервалов > 3. Составление плана эксперимента

Полный факторный анализ (ПФА)

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	1	1	1			
2	1	1	-1			
3	1	-1	1			
4	1	-1	-1			
5	-1	1	1			
6	-1	1	-1			
7	-1	-1	1			
8	-1	-1	-1			

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	70	12	70	150	155	160
2	70	12	40	135	135	130
3	70	5	70	120	120	115
4	70	5	40	110	110	110
5	50	12	70	125	125	130
6	50	12	40	100	90	90
7	50	5	70	80	80	80
8	50	5	40	75	70	75

Провести анализ

Рисунок 2.3 - Вывод результатов расчетов

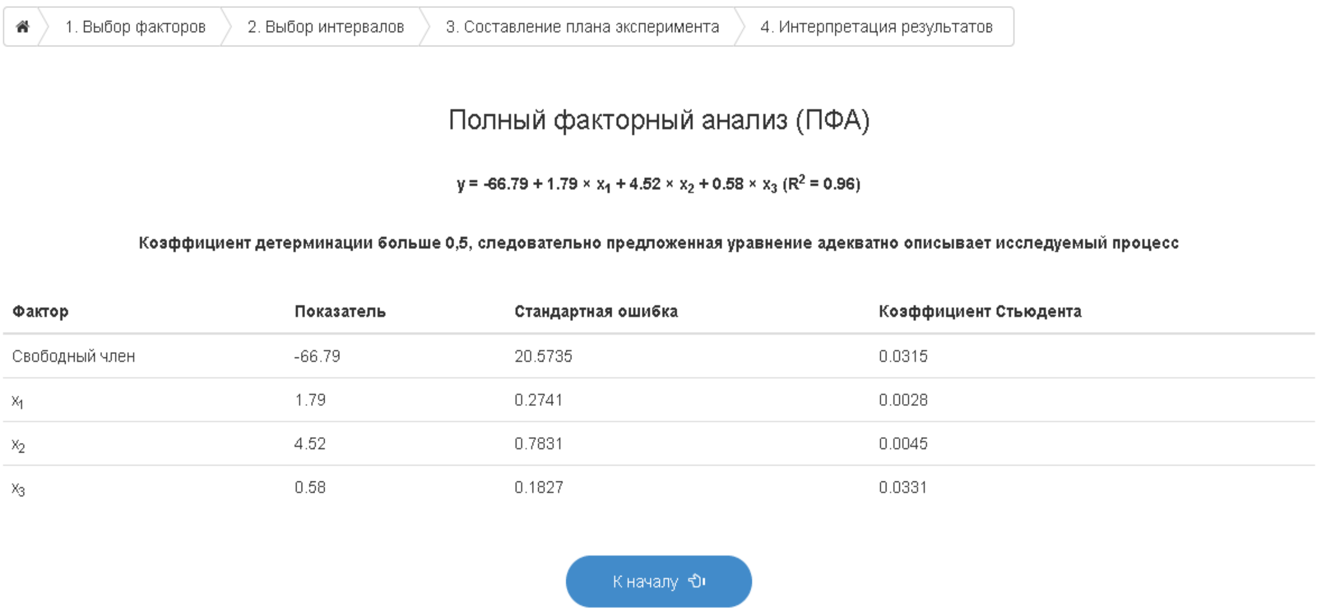
Достоинствами разработанной программы является:

- удобный, простой и понятный графический интерфейс программы;

- быстрый расчет производственных рецептур;

- кроссплатформенность, браузеронезависимость, отсутствия жесткой привязки техническим характеристикам устройств, обеспечивающих доступ (персональные компьютеры, планшетные компьютеры, смартфоны, коммуникаторы, etc).

Прикладная программа предназначена для быстрого расчета рецептур с наглядным поэтапным представлением хода решения. Программа значительно снижает участие человека в вычислительном процессе, оставляя за пользователем только наблюдательные функции.



Фактор	Показатель	Стандартная ошибка	Коэффициент Стьюдента
Свободный член	-66.79	20.5735	0.0315
x_1	1.79	0.2741	0.0028
x_2	4.52	0.7831	0.0045
x_3	0.58	0.1827	0.0331

Рисунок **2.4** – Таблица с результатами расчетов

3 Задания для практических работ

Используя показатели таблиц 3.1, 3.2, 3.3, составить план эксперимента, получить экспериментальные данные по приведенным ниже общим алгоритмам.

Общая последовательность проведения эксперимента:

1. Формулирование цели .
2. Выдвижение гипотезы об исследуемом объекте.
3. Планирование эксперимента.
4. Проведение эксперимента.
5. Обработка и анализ результатов эксперимента.
6. Проверка правильности выдвинутой гипотезы .
7. Окончание эксперимента .

Если правильность выдвинутой гипотезы (п.6) не подтвердилась ,то осуществляется переход к п.2 , в противном случае – к п.7.

Обработка данных эксперимента проводится ,чтобы очистить их от различных погрешностей и ошибок и выявить общие закономерности исследуемых явлений. Эта обработка ведется обычно на статистической основе по разработанным методикам с широким использованием компьютерной техники [6].

Обработанные данные сводятся в таблицы, графики, формулы, модели, удобные для использования .

В наиболее общем случае количественный анализ эксперимента сводится к ряду действий:

- оценка рассеяния данных, отбор значимых изменений, оценка сложности разрешимых гипотез по объему информации;

- формулировка гипотез для альтернативных физических моделей и выбор (по максимуму правдоподобия) модели, не противоречащей совокупности измерений;

- определение параметров моделей, их дисперсий и анализ их зависимостей от прочих условий эксперимента.

Даже если рабочая гипотеза не подтвердилась, необходимо упомянуть о первоначальной идее и причинах, по которым она не реализовалась.

Общая схема изложения результатов:

1. Описание отдельной зависимости, выявление в ней значимых эффектов.

2. Сопоставление однотипных зависимостей при различии некоторых параметров; анализ качественных изменений вида зависимости и величины эффекта при изменении этого параметра.

3. Сопоставление взаимосвязей зависимостей, полученных разными методами, анализ внутренней непротиворечивости.

4. Сравнение с литературой – выявление качественных и количественных соответствий, противоречий и отделение действительно нового материала.

5. Собственно обсуждение – сопоставление с теорией, выдвижение гипотез о природе явлений и причинах вновь обнаруженных зависимостей; анализ альтернатив и отбор гипотез.

Таблица 3.1 – Влияние на водопоглотительную способность муки показателей количества и качества клейковины

№ / Показатели	Водопоглотительная способность (у)	Количество клейковины (х1)	Качество клейковины (х2)
1			
2			
3			
4			
5			

Таблица 3.2 – Влияние на валориметрическую оценку реологических свойств муки показателей количества клейковины и твердозерности зерна

№ / Показатели	Валориметрическая оценка (у)	Количество клейковины (х1)	Твердозерность (х2)
1			
2			
3			
4			
5			

Таблица 3.3 – Влияние на качество хлеба характеристик зерна

№ / Показатели	Объемный выход хлеба (у)	Количество клейковины (х1)	Качество клейковины (х2)
1			
2			
3			
4			
5			

Таблица 3.4 – Влияние на качество хлеба характеристик зерна

№ / Показатели	Балльная оценка качества хлеба (y)	Твердозерность зерна (x1)	Качество клейковины (x2)
1			
2			
3			
4			
5			

Использовать данные таблиц 3.5, 3.6 и 3.7 как результаты проведенных экспериментов. Провести их анализ и обработку, сделать выводы.

Таблица 3.5 – Средние значения для разных сортов и коэффициенты вариации по годам показателей зернового анализа яровой пшеницы

Зона произрастания	Стекловидность		Натура		Число падения		Количество клейковины		ИДК	
	Среднее значение, %	Коэффициент вариации, %	Среднее значение, г/л	Коэффициент вариации, %	Среднее значение, с	Коэффициент вариации, %	Среднее значение, %	Коэффициент вариации, %	Среднее значение, ед. пр.	Коэффициент вариации, %
Восточная	91,15	5,34	798,3	2,90	358	10,2	30,2	7,92	92	6,94
Центральная	89,25	7,58	790,2	4,87	310	14,7	28,5	11,76	85	11,21
Западная	86,5	6,46	788,6	3,87	287	2,5	28,4	9,68	87	10,15

Таблица 3.6 – Сортовые и зональные различия реологических характеристик пшеницы

Сорт	Зона произрастания	Время образования теста, мин	Устойчивость теста, мин	Разжижение теста, ед. вал	ВПС, %
Твердые сорта					
Харьковская 3	восток	**11,2**	**17,8**	5,2	78,8
	центр	**10,5**	**16,5**	5,0	75,1
	запад	**8,7**	**14,2**	6,5	75,9
Оренбургская 10	восток	9,2	15,5	8,1	**79,5**
	центр	6,3	10,2	15,2	**74,3**
	запад	8,8	12,3	18,5	**75,6**
Оренбургская 21	восток	10,2	15,2	7,1	72,5
	центр	8,3	14,8	9,0	69,1
	запад	8,0	12,6	9,5	68,7
Безенчукская Янтарь	восток	7,0	16,0	**5,0**	78,9
	центр	6,9	16,1	**5,0**	72,1
	запад	5,7	14,9	**5,5**	68,5
Безенчукская 200	восток	7,2	13,2	8,1	75,8
	центр	7,0	13,5	8,0	74,1
	запад	5,5	11,8	10,2	75,2
Степь 3	восток	7,1	12,1	8,2	72,9
	центр	4,2	12,0	10,2	71,2
	запад	5,2	11,8	10,5	72,8

Продолжение таблицы 3.6

Сорт	Зона произрастания	Время образования теста, мин	Устойчивость теста, мин	Разжижение теста, ед. вал	ВПС, %
Мягкие сорта					
Учитель	восток	2,6	2,6	38,2	72,1
	центр	1,9	4,1	52,3	71,9
	запад	1,4	3,2	62,2	63,5
Варяг	восток	4,3	7,9	35,1	74,2
	центр	4,3	6,3	37,2	72,4
	запад	4,1	7,2	35,2	72,1
Юго-Восточная 3	восток	2,8	5,9	45,1	71,2
	центр	2,5	5,0	53,7	70,2
	запад	1,7	3,8	58,9	67,9
Оренбургская 13	восток	6,2	8,2	24,9	65,7
	центр	6,0	7,9	28,6	68,2
	запад	6,0	7,5	25,2	65,9
Прохор	восток	2,3	3,3	50,2	69,5
	центр	2,4	2,3	53,1	67,3
	запад	2,7	2,3	48,3	64,2
Л 503	восток	3,5	7,2	35,2	69,8
	центр	3,0	6,3	39,2	67,5
	запад	2,9	6,5	42,8	65,8
Саратовская 42	восток	4,2	8,6	30,3	67,8
	центр	3,5	6,2	42,1	64,3
	запад	3,7	6,0	40,2	63,8

Таблица 3.7 - Основные показатели качества готовых макаронных изделий

Сорт пшеницы	Физико-химические свойства					Варочные свойства			
	Влажность, %	Кислотность, гр. Т	Содержание клейковины, %	Содержание каротиноидов, мг/кг	Твердозерность, кг/мм^2	Гидратационная способность (по коэффициенту увеличения массы)	Сухие вещества, перешедшие в воду при варке, %	Потери белка при варке, %	Прочность сухих изделий на срез, Н
Харьковская 3	11,8	2,3	31,0	4,10	18,2	2,20	5,5	0,2	7,8
Оренбургская 10	12,5	2,6	28,5	3,08	21,6	1,94	6,2	0,5	7,2
Оренбургская 21	12,0	2,3	27,2	3,10	20,5	1,96	6,7	0,5	7,4
Безенчукская Янтарь	12,2	2,5	30,5	2,58	19,2	1,89	5,9	0,9	6,5
Безенчукская 200	11,9	2,4	26,2	2,98	18,2	1,85	7,1	0,6	6,9
Степь 3	12,5	2,4	32,5	2,78	20,7	2,12	5,7	0,8	7,1
Юго-Восточная 3	12,2	2,6	18,7	3,15	14,9	1,74	8,2	1,5	4,3
Учитель	12,0	2,6	19,5	3,87	15,7	1,68	8,5	1,2	4,9
Варяг	11,2	3,0	15,9	4,55	14,2	1,51	9,1	1,1	5,2
Оренбургская 13	11,8	2,7	15,4	4,22	15,8	1,49	9,5	1,4	6,0
Прохор	11,7	2,5	20,2	3,65	12,7	1,53	7,9	1,3	4,8
Л 503	12,9	3,0	17,5	2,47	14,2	1,44	10,1	0,8	5,4
Саратовская 42	11,7	3,0	16,7	2,34	13,9	1,52	9,1	1,1	5,2

Список использованных источников

1 Сидняев, Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / Н.И. Сидняев. – Москва : Юрайт, ИД Юрайт, 2011. - 219 с.

2 Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – Москва : ИЦ Академия, 2012. - 352 с.

3 Бычкова, С.Г. Социально-экономическая статистика: учебник для бакалавров / С.Г. Бычкова. – Москва : Юрайт, 2013. - 591 с.

4 Яковлева, А.В. Экономическая статистика: учебное пособие / А.В. Яковлева. – Москва : ИЦ РИОР, 2013. - 95 с.

5 Балдин, К.В. Общая теория статистики: учебное пособие / К.В. Балдин, А.В. Рукосуев. – Москва : Дашков и К, 2012. - 312 с.

6 Батракова, Л.Г. Теория статистики: учебное пособие / Л.Г. Батракова. – Москва : КноРус, 2013. - 528 с.

7 Громыко, Г.Л. Теория статистики: Практикум / Г.Л. Громыко. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 238 с.

8 Ефимова, М.Р. Общая теория статистики: учебник / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. – Москва : ИНФРА-М, 2013. - 416 с.

9 Лысенко, С.Н. Общая теория статистики: учебное пособие / С.Н. Лысенко, И.А. Дмитриева. – Москва : ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 208 с.

10 Костин, В. Н. Теория эксперимента : учебное пособие / В. Н. Костин, В. В. Паничев; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. прогр. обеспечения вычисл. техники и автоматизир. систем. - Оренбург : Университет, 2014. - 212 с. : табл. - Библиогр.: с. 207-208. - Прил.: с. 209-212. - ISBN 978-5-4417-0415-1.

11 Килов, А. С. Планирование экспериментов и обработка экспериментальных данных : методические указания к практическому занятию для студентов,

обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 150700.62 Машиностроение / А. С. Килов; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. материаловедения и технологии материалов. - Оренбург : ОГУ, 2014. - 35 с.

12 Годин, А. М. Статистика: учебник / А. М. Годин. – Москва: Дашков и К°, 2012. – 451 с.

13 Елисеева, И. И. Статистика : учебник для бакалавров / И. И. Елисеева. – Москва : Юрайт: ИД Юрайт, 2011. – 565 с.

14 Ниворожкина, Л. И. Статистика: учебник для бакалавров / Л. И. Ниворожкина. – Москва : Дашков и К°: Наука–Спектр, 2011. – 415 с.

15 Тумасян, А. А. Статистика промышленности: учебное пособие / А. А. Тумасян, Л. И. Василевская. – Минск: Новое знание. – Москва : Инфра–М, 2012. – 429 с.

16 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2013. - 479 с.

17 Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Б.А. Горлач. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 320 с.

18 Калинина, В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / В.Н. Калинина. – Москва : Юрайт, 2013. - 472 с.

19 Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 816 с.

20 Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – Москва : КноРус, 2013. - 376 с.

21 Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. – Москва : Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 240 с.

22 Краснов, М.Л. Вся высшая математика. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория игр: учебник / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Москва : ЛКИ, 2013. - 296 с.

23 Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов / Н.Ш. Кремер. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. - 551 с.

24 Кричевец, А.Н. Математическая статистика для психологов: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / А.Н. Кричевец, А.А. Корнеев, Е.И. Рассказова. – Москва : ИЦ Академия, 2012. - 400 с.

25 Семенов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.А. Семенов. - Санкт-Петербург : Питер, 2013. - 192 с.

Приложение А

(обязательное)

Проверка гипотез

Под гипотезой подразумевается некоторое предположение о случайной величине (функции распределения, математической модели и прочие). Примером может служить гипотеза об типе закона распределения.

Проверка статистических гипотез – один из разделов математической статистики. Необходимость выдвижения гипотез возникает при обработке или интерпретации результатов наблюдений. При проверке гипотезы необходимо установить, насколько экспериментальные результаты согласуются с выдвинутой гипотезой, после чего принять или отвергнуть гипотезу.

Правило, в соответствии с которым принимается или отвергается данная гипотеза, называется статистическим критерием. Построение критерия сводится к выбору подходящей функции от результата наблюдений, служащей мерой расхождения между экспериментальными и гипотетическими законами. При решении вопроса о принятии или отклонении какой-либо гипотезы с помощью какого-либо статистического критерия, основанного на результатах эксперимента, могут быть допущены ошибки двух типов.

Ошибка «первого рода» совершается тогда, когда гипотеза отвергается, а на самом деле она верна; «второго рода» – когда гипотеза принимается, а на самом деле она не верна. Результаты проверки гипотезы никогда не могут служить доказательством абсолютной справедливости и правильности гипотезы. Они означают лишь то, что гипотеза с заданной вероятностью не противоречит результатам эксперимента. Поэтому при проверке гипотезы нужно заранее допустить возможность ошибочного решения.

Соответственно, ошибку второго рода иногда называют пропуском события или ложноотрицательным срабатыванием - человек болен, но анализ крови этого не показал, или у пассажира имеется холодное оружие, но рамка металлодетектора его не обнаружила (например, из-за того, что чувствительность рамки отрегулирована на обнаружение только очень массивных металлических предметов).

Слово «отрицательный» в данном случае не имеет отношения к желательности или нежелательности самого события. Термин широко используется в медицине. Например, тесты, предназначенные для диагностики заболеваний, иногда дают отрицательный результат (т.е. показывают отсутствие заболевания у пациента), когда на самом деле пациент страдает этим заболеванием. Такой результат называется ложноотрицательным.

В других областях обычно используют словосочетания со схожим смыслом, например, «пропуск события», и т.п. В информационных технологиях часто используют английский термин false negative без перевода.

Степень чувствительности системы защиты должна представлять собой компромисс между вероятностью ошибок первого и второго рода. Где именно находится точка баланса, зависит от оценки рисков обоих видов ошибок.

Вероятность того, что гипотеза будет отвергнута, хотя на самом деле она верна, называют уровнем значимости и обозначают q. Тогда величина $P = 1 - q$, называемая статистической надежностью, характеризует вероятность выполнения статистического критерия при условии, что гипотеза верна. В технических задачах, как правило, выбирают $q = 0{,}05$ или 0,01, что соответствует уровням значимости 5 % и 1 %.

Ошибки первого и второго рода являются большой проблемой в системах биометрического сканирования, использующих распознавание радужной оболочки или сетчатки глаза, черт лица и т.д.

Такие сканирующие системы могут ошибочно отождествить кого-то с другим, «известным» системе человеком, информация о котором хранится в базе данных (к примеру, это может быть лицо, имеющее право входа в систему, или подозреваемый преступник и т.п.). Противоположной ошибкой будет неспособность системы распознать легитимного зарегистрированного пользователя, или опознать подозреваемого в преступлении.

Таблица А.1 - Значения критерия Стьюдента (t-критерия). Критические значения коэффициента Стьюдента (t-критерия) для различной доверительной вероятности p и числа степеней

f	p							
	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
1	3,0770	6,3130	12,7060	31,8200	63,6560	127,6560	318,3060	636,6190
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,9640	9,9240	14,0890	22,3270	31,5990
3	1,6377	2,35340	3,1820	4,5400	5,8400	7,4580	10,2140	12,9240
4	1,5332	2,13180	2,7760	3,7460	4,6040	5,5970	7,1730	8,6100
5	1,4759	2,01500	2,5700	3,6490	4,0321	4,7730	5,8930	6,8630
6	1,4390	1,9430	2,4460	3,1420	3,7070	4,3160	5,2070	5,9580
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,2293	4,7850	5,4079
8	1,3968	1,8596	2,3060	2,8965	3,3554	3,8320	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7800
10	1,3720	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,3630	1,7950	2,2010	2,7180	3,1050	3,4960	4,0240	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0845	3,4284	3,9290	4,1780
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,1123	3,3725	3,8520	4,2200
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9760	3,3257	3,7870	4,1400
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7320	4,0720
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,5830	2,9200	3,2520	3,6860	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5668	2,8982	3,2224	3,6458	3,9650
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5514	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495

Продолжение таблицы А.1

f	p							
	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
21	1,3230	1,7200	2,0790	2,5170	2,8310	3,1350	3,5270	3,8190
22	1,3212	1,7117	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
40	1,3030	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,9712	3,3069	3,5510
42	1,3200	1,6820	2,0180	2,4180	2,6980	2,6930	3,2960	3,5370
44	1,3010	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	3,9555	3,2861	3,5258
46	1,3000	1,6767	2,0129	2,4102	2,6870	3,9488	3,2771	3,5150
48	1,2990	1,6772	2,0106	2,4056	2,6822	3,9426	3,2689	3,5051
50	1,2980	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,9370	3,2614	3,4060
55	1,2997	1,6730	2,0040	2,3960	2,6680	2,9240	3,2560	3,4760
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,9146	3,2317	3,4602
80	1,2820	1,6640	1,9900	2,3730	2,6380	2,8870	3,1950	3,4160
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3885	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
150	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8482	3,1455	3,3566
200	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
250	1,2849	1,6510	1,9695	2,3414	2,5966	2,8222	3,1232	3,3299
300	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
400	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
500	1,2830	1,6470	1,9640	2,3330	2,7850	2,8190	3,1060	3,3100

Таблица А.2 - Критические значения коэффициента корреляции r

n	p			
	0,1	0,05	0,01	0,001
5	0,805	0,878	0,959	0,991
6	0,729	0,811	0,917	0,974
7	0,669	0,754	0,875	0,951
8	0,621	0,707	0,834	0,925
9	0,582	0,666	0,798	0,898
10	0,549	0,632	0,765	0,872
11	0,521	0,602	0,735	0,847
12	0,497	0,576	0,708	0,823
13	0,476	0,553	0,684	0,801
14	0,458	0,532	0,661	0,780
15	0,441	0,514	0,641	0,760
16	0,426	0,497	0,623	0,742
17	0,412	0,482	0,606	0,725
18	0,400	0,468	0,590	0,708
19	0,389	0,456	0,575	0,693
20	0,378	0,444	0,561	0,679
21	0,369	0,433	0,549	0,665
22	0,360	0,423	0,537	0,652
23	0,352	0,413	0,526	0,640
24	0,344	0,404	0,515	0,629
25	0,337	0,396	0,505	0,618
26	0,330	0,388	0,496	0,607
27	0,323	0,381	0,487	0,597

Продолжение таблицы А.2

n	p			
	0,1	0,05	0,01	0,001
28	0,317	0,374	0,479	0,588
29	0,311	0,367	0,471	0,579
30	0,306	0,361	0,463	0,570
31	0,301	0355	0,456	0,562
32	0,296	0,349	0,449	0,554
33	0,291	0,344	0,442	0,547
34	0,287	0,339	0,436	0,539
35	0,283	0,334	0,430	0,532
36	0,279	0,329	0,424	0,525
37	0,275	0,325	0,418	0,519
38	0,271	0,320	0,413	0,513
39	0,267	0,316	0,408	0,507
40	0,264	0,312	0,403	0,501
41	0,260	0,308	0,398	0,495
42	0,257	0,304	0,393	0,490
43	0,254	0,301	0,389	0,484
44	0,251	0,297	0,384	0,479
45	0,248	0,294	0,380	0474
46	0,246	0,291	0,376	0,469
47	0,243	0,288	0,372	0,465
48	0,240	0,285	0,368	0,460
49	0,238	0,282	0,365	0,456
50	0,235	0,279	0,361	0,451

Продолжение таблицы А.2

n	p			
	0,1	0,05	0,01	0,001
51	0,233	0,276	0,358	0,447
52	0,231	0,273	0,354	0,443
53	0,228	0,271	0,351	0,439
54	0,226	0,268	0,348	0,435
55	0,224	0,266	0,345	0,432
56	0,222	0,263	0,341	0,428
57	0,220	0,261	0,339	0,424
58	0,218	0,259	0,336	0,421
59	0,216	0,256	0,333	0,418
60	0,214	0,254	0,330	0,414
61	0,213	0,252	0,327	0,411
62	0,211	0,250	0,325	0,408
63	0,209	0,248	0,322	0,405
64	0,207	0,246	0,320	0,402
65	0,206	0,244	0,317	0,399
66	0,204	0,242	0,315	0,396
67	0,203	0,240	0,313	0,393
68	0,201	0,239	0,310	0,390
69	0,200	0,237	0,308	0,388
70	0,198	0,235	0,306	0,385
80	0,185	0,220	0,286	0,361
90	0,174	0,207	0,270	0,341

Продолжение таблицы А.2

n	p			
	0,1	0,05	0,01	0,001
100	0,165	0,197	0,256	0,324
110	0,158	0,187	0,245	0,310
120	0,151	0,179	0,234	0,297
130	0,145	0,172	0,225	0,285
140	0,140	0,166	0,217	0,275
150	0,135	0,160	0,210	0,266
200	0,117	0,139	0,182	0,231
250	0,104	0,124	0,163	0,207
300	0,095	0,113	0,149	0,189
350	0,088	0,105	0,138	0,175
400	0,082	0,098	0,129	0,164
450	0,078	0,092	0,121	0,155
500	0,074	0,088	0,115	0,147
600	0,067	0,080	0,105	0,134
700	0,062	0,078	0,101	0,130

Таблица А.3 - Критические значения критерия Фишера F для уровней статистической значимости p <= 0,05 и p <= 0,01 (df1 - число степеней свободы в числителе, df2 - число степеней свободы в знаменателе)

	df2									
df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p≤0,05									
1	161	18,51	10,13	7,71	6,61	5,99	5,59	5,32	5,12	4,96
2	200	19	9,55	6,94	5,79	5,14	4,74	4,46	4,26	4,1
3	216	19,16	9,28	6,59	5,41	4,76	4,35	4,07	3,86	3,71
4	225	19,25	9,12	6,39	5,19	4,53	4,12	3,84	3,63	3,48
5	230	19,3	9,01	6,26	5,05	4,39	3,97	3,69	3,48	3,33
6	234	19,33	8,94	6,16	4,95	4,28	3,87	3,58	3,27	3,22
7	237	19,36	8,88	6,09	4,88	4,21	3,79	3,5	3,29	3,14
8	239	19,37	8,84	6,04	4,82	4,15	3,37	3,44	3,23	3,07
9	241	19,38	8,81	6	4,78	4,1	3,68	3,39	3,18	3,02
10	242	19,39	8,78	5,96	4,74	4,06	3,63	3,34	3,13	2,97
11	243	19,4	8,76	5,93	4,7	4,03	3,6	3,31	3,1	2,94
12	244	19,41	8,74	5,91	4,68	4	3,57	3,28	3,07	2,91
	p≤0,01									
1	4052	98,49	34,12	21,2	16,26	13,74	12,25	11,26	10,56	10,04
2	4999	99	30,82	18	13,27	10,92	9,55	8,65	8,02	7,56
3	5403	99,17	29,46	16,69	12,06	9,78	8,45	7,59	6,99	6,55
4	5625	99,25	28,71	15,98	11,39	9,15	7,85	7,01	6,42	5,99
5	5764	99,3	28,24	15,52	10,97	8,75	7,46	6,63	6,06	5,64
6	5859	99,33	27,91	15,21	10,67	8,47	7,19	6,37	5,8	5,39
7	5928	99,36	27,67	14,98	10,45	8,26	7	6,19	5,62	5,21
8	5981	99,37	27,49	14,8	10,29	8,1	6,84	6,03	5,47	5,06
9	6022	99,39	27,34	14,66	10,15	7,98	6,71	5,91	5,35	4,95
10	6056	99,4	27,23	14,54	10,05	7,87	6,62	5,82	5,26	4,85
11	6082	99,41	27,13	14,45	9,96	7,79	6,54	5,74	5,18	4,78
12	6106	99,42	27,05	14,37	9,89	7,72	6,47	5,67	5,11	4,71

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	p≤0,05									
1	4,84	4,75	4,67	4,6	4,54	4,49	4,45	4,41	4,38	4,35
2	3,98	3,88	3,8	3,74	3,68	3,63	3,59	3,55	3,52	3,49
3	3,59	3,49	3,41	3,34	3,29	3,24	3,2	3,16	3,13	3,1
4	3,36	3,26	3,18	3,11	3,06	3,01	2,96	2,93	2,9	2,87
5	3,2	3,11	3,02	2,96	2,9	2,85	2,81	2,77	2,74	2,71
6	3,09	3	2,92	2,85	2,79	2,74	2,7	2,66	2,63	2,6
7	3,01	2,92	2,84	2,77	2,7	2,66	2,62	2,58	2,55	2,52
8	2,95	2,85	2,77	2,7	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48	2,45
9	2,9	2,8	2,72	2,65	2,59	2,54	2,5	2,46	2,43	2,4
10	2,86	2,76	2,67	2,6	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35
11	2,82	2,72	2,63	2,56	2,51	2,45	2,41	2,37	2,34	2,31
12	2,79	2,69	2,6	2,53	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28
	p≤0,01									
1	9,65	9,33	9,07	8,86	8,68	8,53	8,4	8,28	8,18	8,1
2	7,2	6,93	6,7	6,51	6,36	6,23	6,11	6,01	5,93	5,85
3	6,22	5,95	5,74	5,56	5,42	5,29	5,18	5,09	5,01	4,94
4	5,67	5,41	5,2	5,03	4,89	4,77	4,67	4,58	4,5	4,43
5	5,32	5,06	4,86	4,69	4,56	4,44	4,34	4,25	4,17	4,1
6	5,07	4,82	4,62	4,46	4,32	4,2	4,1	4,01	3,94	3,87
7	4,88	4,65	4,44	4,28	4,14	4,03	3,39	3,85	3,77	3,71
8	4,74	4,5	4,3	4,14	4	3,89	3,79	3,71	3,63	3,56
9	4,63	4,39	4,19	4,03	3,89	3,78	3,68	3,6	3,52	3,45
10	4,54	4,3	4,1	3,94	3,8	3,69	3,59	3,51	3,43	3,37
11	4,46	4,22	4,02	3,86	3,73	3,61	3,52	3,44	3,36	3,3
12	4,4	4,16	3,96	3,8	3,67	3,55	3,45	3,37	3,3	3,23

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	p≤0,05									
1	4,32	4,3	4,28	4,26	4,24	4,22	4,21	4,2	4,18	4,17
2	3,47	3,44	3,42	3,4	3,38	3,37	3,35	3,34	3,33	3,32
3	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,98	2,96	2,95	2,93	2,92
4	2,84	2,82	2,8	2,78	2,76	2,74	2,73	2,71	2,7	2,69
5	2,68	2,66	2,64	2,62	2,6	2,59	2,57	2,56	2,54	2,53
6	2,57	2,55	2,53	2,51	2,49	2,47	2,46	2,44	2,43	2,42
7	2,49	2,47	2,45	2,43	2,41	2,39	2,37	2,36	2,35	2,34
8	2,42	2,4	2,38	2,36	2,34	2,32	2,3	2,29	2,28	2,27
9	2,37	2,35	2,32	2,3	2,28	2,27	2,25	2,24	2,22	2,21
7	2,32	2,3	2,28	2,26	2,24	2,22	2,2	2,19	2,18	2,16
8	2,28	2,26	2,24	2,22	2,2	2,18	2,16	2,15	2,14	2,12
9	2,25	2,23	2,2	2,18	2,16	2,15	2,13	2,12	2,1	2,09
	p≤0,01									
1	8,02	7,94	7,88	7,82	7,77	7,72	7,68	7,64	7,6	7,56
2	5,78	5,72	5,66	5,61	5,57	5,53	5,49	5,45	5,42	5,39
3	4,87	4,82	4,76	4,72	4,68	4,64	4,6	4,57	4,54	4,51
4	4,37	4,31	4,26	4,22	4,18	4,14	4,11	4,07	4,04	4,02
5	4,04	3,99	3,94	3,9	3,86	3,82	3,79	3,76	3,73	3,7
6	3,81	3,76	3,71	3,67	3,63	3,59	3,56	3,53	3,5	3,47
7	3,65	3,59	3,54	3,5	3,46	3,42	3,39	3,36	3,33	3,3
8	3,51	3,45	3,41	3,36	3,32	3,29	3,26	3,23	3,2	3,17
9	3,4	3,35	3,3	3,25	3,21	3,17	3,14	3,11	3,08	3,06
10	3,31	3,26	3,21	3,17	3,13	3,09	3,06	3,03	3	2,98
11	3,24	3,18	3,14	3,09	3,05	3,02	2,98	2,95	2,92	2,9
12	3,17	3,12	3,07	3,03	2,99	2,96	2,93	2,9	2,87	2,84

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	$p \leq 0{,}05$									
1	4,15	4,13	4,11	4,1	4,08	4,07	4,06	4,05	4,04	4,03
2	3,3	3,28	3,26	3,25	3,23	3,22	3,21	3,2	3,19	3,18
3	2,9	2,88	2,86	2,85	2,84	2,83	2,82	2,81	2,8	2,79
4	2,67	2,65	2,63	2,62	2,61	2,59	2,58	2,57	2,56	2,56
5	2,51	2,49	2,48	2,46	2,45	2,44	2,43	2,42	2,41	2,4
6	2,4	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,31	2,3	2,3	2,29
4	2,32	2,3	2,28	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,21	2,2
5	2,25	2,23	2,21	2,19	2,18	2,17	2,16	2,14	2,14	2,13
6	2,19	2,17	2,15	2,14	2,12	2,11	2,1	2,09	2,08	2,07
7	2,14	2,12	2,1	2,09	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02
8	2,1	2,08	2,06	2,05	2,04	2,02	2,01	2	1,99	1,98
9	2,07	2,05	2,03	2,02	2	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95
	$p \leq 0{,}01$									
1	7,5	7,44	7,39	7,35	7,31	7,27	7,24	7,21	7,19	7,17
2	5,34	5,29	5,25	5,21	5,18	5,15	5,12	5,1	5,08	5,06
3	4,46	4,42	4,38	4,34	4,31	4,29	4,26	4,24	4,22	4,2
4	3,97	3,93	3,89	3,86	3,83	3,8	3,78	3,76	3,74	3,72
5	3,66	3,61	3,58	3,54	3,51	3,49	3,46	3,44	3,42	3,41
6	3,42	3,38	3,35	3,32	3,29	3,26	3,24	3,22	3,2	3,18
7	3,25	3,21	3,18	3,15	3,12	3,1	3,07	3,05	3,04	3,02
8	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,96	2,94	2,92	2,9	2,88
9	3,01	2,97	2,94	2,91	2,88	2,86	2,84	2,82	2,8	2,78
10	2,94	2,89	2,86	2,82	2,8	2,77	2,75	2,73	2,71	2,7
11	2,86	2,82	2,78	2,75	2,73	2,7	2,68	2,66	2,64	2,62
12	2,8	2,76	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,6	2,58	2,56

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	p≤0,05									
1	3,99	3,98	3,98	3,94	3,92	3,91	3,89	3,86	3,85	3,84
2	3,14	3,13	3,11	3,09	3,07	3,06	3,04	3,02	3	2,99
3	2,75	2,74	2,72	2,7	2,68	2,67	2,65	2,62	2,61	2,6
4	2,51	2,5	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,39	2,38	2,37
5	2,36	2,35	2,33	2,3	2,29	2,27	2,26	2,23	2,22	2,21
6	2,24	2,23	2,21	2,19	2,17	2,16	2,14	2,12	2,1	2,09
7	2,15	2,14	2,12	2,1	2,08	2,07	2,05	2,03	2,02	2,01
8	2,08	2,07	2,05	2,03	2,01	2	1,98	1,96	1,95	1,94
9	2,02	2,01	1,99	1,97	1,95	1,94	1,92	1,9	1,89	1,88
10	1,98	1,97	1,95	1,92	1,9	1,89	1,87	1,85	1,84	1,83
11	1,94	1,93	1,91	1,88	1,86	1,85	1,83	1,81	1,8	1,79
12	1,9	1,89	1,88	1,85	1,83	1,82	1,8	1,78	1,76	1,75
	p≤0,01									
1	7,04	7,01	6,96	6,9	6,84	6,81	6,76	6,7	6,66	6,64
2	4,95	4,92	4,88	4,82	4,78	4,75	4,71	4,66	4,62	4,6
3	4,1	4,08	4,04	3,98	3,94	3,91	3,88	3,83	3,8	3,78
4	3,62	3,6	3,56	3,51	3,47	3,44	3,41	3,36	3,34	3,32
5	3,31	3,29	3,25	3,2	3,17	3,14	3,11	3,06	3,04	3,02
6	3,09	3,07	3,04	2,99	2,95	2,92	2,9	2,85	2,82	2,8
7	2,93	2,91	2,87	2,82	2,79	2,76	2,73	2,69	2,66	2,64
8	2,79	2,77	2,74	2,69	2,65	2,62	2,6	2,55	2,53	2,51
9	2,7	2,67	2,64	2,59	2,56	2,53	2,5	2,46	2,43	2,41
10	2,61	2,59	2,55	2,51	2,47	2,44	2,41	2,37	2,34	2,32
11	2,54	2,51	2,48	2,43	2,4	2,37	2,34	2,29	2,26	2,24
12	2,47	2,45	2,41	2,36	2,33	2,3	2,28	2,23	2,2	2,18

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p≤0,05									
14	245	19,42	8,71	5,87	4,64	3,96	3,52	3,23	3,02	2,86
16	246	19,43	8,69	5,84	4,6	3,92	3,49	3,2	2,98	2,82
20	248	19,44	8,66	5,8	4,56	3,87	3,44	3,15	2,93	2,77
24	249	19,45	8,64	5,77	4,53	3,84	3,41	3,12	2,9	2,74
30	250	19,46	8,62	5,74	4,5	3,81	3,38	3,08	2,86	2,7
40	251	19,47	8,6	5,71	4,46	3,77	3,34	3,05	2,82	2,67
50	252	19,47	8,58	5,7	5,44	3,75	3,32	3,03	2,89	2,64
75	253	19,48	8,57	5,68	4,42	3,72	3,29	3	2,77	2,61
100	253	19,49	8,56	5,66	4,4	3,71	3,28	2,98	2,76	2,59
200	254	19,49	8,54	5,65	4,38	3,69	3,25	2,96	2,73	2,56
500	254	19,5	8,54	5,64	4,37	3,68	3,24	2,94	2,72	2,55
1000	254	19,5	8,53	5,63	4,36	3,67	3,23	2,93	2,71	2,54
	p≤0,01									
14	6142	99,43	26,92	14,14	9,77	7,6	6,35	5,56	5	4,6
16	6169	99,44	26,83	14,15	9,68	7,52	6,27	5,48	4,92	4,52
20	6208	99,45	26,69	14,02	9,55	7,39	6,15	5,36	4,8	4,41
24	6234	99,46	26,6	13,93	9,47	7,31	6,07	5,28	4,73	4,33
30	6261	99,47	26,5	13,83	9,38	7,23	5,98	5,2	4,64	4,25
40	6286	99,48	26,41	13,74	9,29	7,14	5,9	5,11	4,56	4,17
50	6302	99,48	26,35	13,69	9,24	7,09	5,85	5,06	4,51	4,12
75	6323	99,4	26,27	13,61	9,17	7,02	5,78	5	4,45	4,05
100	6334	99,49	26,23	13,57	9,13	6,99	5,75	4,96	4,41	4,01
200	6352	99,49	26,18	13,52	9,07	6,94	5,7	4,91	4,36	3,96
500	6361	99,5	26,14	13,48	9,04	6,9	5,67	4,88	4,33	3,93
1000	6366	99,5	26,12	13,46	9,02	6,88	5,65	4,86	4,31	3,91

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	p≤0,05									
14	2,74	2,64	2,55	2,48	2,43	2,37	2,33	2,29	2,26	2,23
16	2,7	2,6	2,51	2,44	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18
20	2,65	2,54	2,46	2,39	2,33	2,28	2,23	2,19	2,15	2,12
24	2,61	2,5	2,42	2,35	2,29	2,24	2,19	2,15	2,11	2,08
30	2,57	2,46	2,38	2,31	2,25	2,2	2,15	2,11	2,07	2,04
40	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,11	2,07	2,02	1,99
50	2,5	2,4	2,32	2,24	2,18	2,13	2,08	2,04	2	1,96
75	2,47	2,36	2,28	2,21	2,15	2,09	2,04	2	1,96	1,92
100	2,45	2,35	2,26	2,19	2,12	2,07	2,02	1,98	1,94	1,9
200	2,42	2,32	2,24	2,16	2,1	2,04	1,99	1,95	1,91	1,87
500	2,41	2,31	2,22	2,14	2,08	2,02	1,97	1,93	1,9	1,85
1000	2,4	2,3	2,21	2,13	2,07	2,01	1,96	1,92	1,88	1,84
	p≤0,01									
14	4,29	4,05	3,85	3,7	3,56	3,45	3,35	3,27	3,19	3,13
16	4,21	3,98	3,78	3,62	3,48	3,37	3,27	3,19	3,12	3,05
20	4,1	3,86	3,67	3,51	3,36	3,25	3,16	3,07	3	2,94
24	4,02	3,78	3,59	3,43	3,29	3,18	3,08	3	2,92	2,86
30	3,94	3,7	3,51	3,34	3,2	3,1	3	2,91	2,84	2,77
40	3,86	3,61	3,42	3,26	3,12	3,02	2,92	2,83	2,76	2,69
50	3,8	3,56	3,37	3,21	3,07	2,96	2,86	2,78	2,7	2,63
75	3,74	3,49	3,3	3,14	3	2,98	2,79	2,71	2,63	2,56
100	3,7	3,46	3,27	3,11	2,97	2,86	2,76	2,68	2,6	2,53
200	3,66	3,41	3,21	3,06	2,92	2,8	2,7	2,62	2,54	2,47
500	3,62	3,38	3,18	3,02	2,89	2,77	2,67	2,59	2,51	2,44
1000	3,6	3,36	3,16	3	2,87	2,75	2,65	2,57	2,49	2,42

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	p≤0,05									
14	2,2	2,15	2,09	2,05	2	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84
16	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81
20	2,14	2,1	2,04	2	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79
24	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,8	1,76
30	2,11	2,06	2	1,96	1,92	1,87	1,84	1,8	1,77	1,74
40	2,1	2,05	1,99	1,95	1,9	1,85	1,82	1,78	1,76	1,72
50	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,8	1,76	1,74	1,71
75	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
100	2,05	2	1,94	1,9	1,85	1,8	1,77	1,73	1,71	1,68
200	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66
500	2,2	2,15	2,09	2,05	2	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84
1000	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81
	p≤0,01									
14	3,07	3,02	2,97	2,93	2,89	2,86	2,83	2,8	2,77	2,74
16	2,99	2,94	2,89	2,85	2,81	2,77	2,74	2,71	2,68	2,66
20	2,88	2,83	2,78	2,74	2,7	2,66	2,63	2,6	2,57	2,55
24	2,8	2,75	2,7	2,66	2,62	2,58	2,55	2,52	2,49	2,47
30	2,72	2,67	2,62	2,58	2,54	2,5	2,47	2,44	2,41	2,38
40	2,63	2,58	2,53	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,32	2,29
50	2,58	2,53	2,48	2,44	2,4	2,36	2,33	2,3	2,27	2,24
75	2,51	2,46	2,41	2,36	2,32	2,28	2,25	2,22	2,19	2,16
100	2,47	2,42	2,37	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,13
200	2,42	2,37	2,32	2,27	2,23	2,19	2,16	2,13	2,1	2,07
500	2,38	2,33	2,28	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,03
1000	2,36	2,31	2,26	2,21	2,17	2,13	2,1	2,06	2,03	2,01

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	p≤0,05									
14	2,02	2	1,98	1,96	1,95	1,94	1,92	1,91	1,9	1,9
16	1,97	1,95	1,93	1,92	1,9	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85
20	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,82	1,81	1,8	1,79	1,78
24	1,86	1,84	1,82	1,8	1,79	1,78	1,76	1,75	1,74	1,74
30	1,82	1,8	1,78	1,76	1,74	1,73	1,72	1,71	1,7	1,69
40	1,76	1,74	1,72	1,71	1,69	1,68	1,66	1,65	1,64	1,63
50	1,74	1,71	1,69	1,67	1,66	1,64	1,63	1,62	1,61	1,6
75	1,69	1,67	1,65	1,63	1,61	1,6	1,58	1,57	1,56	1,55
100	1,67	1,64	1,62	1,6	1,59	1,57	1,56	1,54	1,53	1,52
200	1,64	1,61	1,59	1,57	1,55	1,54	1,52	1,51	1,5	1,48
500	1,61	1,59	1,56	1,54	1,53	1,51	1,5	1,48	1,47	1,46
1000	1,59	1,57	1,55	1,53	1,51	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44
	p≤0,01									
14	2,7	2,66	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,5	2,48	2,46
16	2,62	2,58	2,54	2,51	2,49	2,46	2,44	2,42	2,4	2,39
20	2,51	2,47	2,43	2,4	2,37	2,35	2,32	2,3	2,28	2,26
24	2,42	2,38	2,35	2,32	2,29	2,26	2,24	2,22	2,2	2,18
30	2,34	2,3	2,26	2,22	2,2	2,17	2,15	2,13	2,11	2,1
40	2,25	2,21	2,17	2,14	2,11	2,08	2,06	2,04	2,02	2
50	2,2	2,15	2,12	2,08	2,05	2,02	2	1,98	1,96	1,94
75	2,12	2,08	2,04	2	1,97	1,94	1,92	1,9	1,88	1,86
100	2,08	2,04	2	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,84	1,82
200	2,02	1,98	1,94	1,9	1,88	1,85	1,82	1,8	1,78	1,76
500	1,98	1,94	1,9	1,86	1,84	1,8	1,78	1,76	1,73	1,71
1000	1,96	1,91	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,7	1,68

Продолжение таблицы А.3

	df2									
df1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	p≤0,05									
14	1,88	1,86	1,85	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76	1,74	1,72
16	1,83	1,81	1,8	1,79	1,77	1,75	1,72	1,71	1,69	1,67
20	1,76	1,75	1,73	1,72	1,7	1,68	1,65	1,64	1,62	1,6
24	1,72	1,7	1,68	1,67	1,65	1,63	1,6	1,59	1,57	1,54
30	1,67	1,65	1,63	1,62	1,6	1,57	1,55	1,54	1,52	1,49
40	1,61	1,59	1,57	1,56	1,54	1,51	1,49	1,47	1,45	1,42
50	1,58	1,56	1,54	1,53	1,51	1,48	1,45	1,44	1,42	1,38
75	1,52	1,5	1,49	1,47	1,45	1,42	1,39	1,37	1,35	1,32
100	1,5	1,48	1,46	1,45	1,42	1,39	1,36	1,34	1,32	1,28
200	1,46	1,44	1,42	1,4	1,38	1,34	1,31	1,29	1,26	1,22
500	1,43	1,41	1,39	1,37	1,35	1,3	1,27	1,25	1,22	1,16
1000	1,41	1,39	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25	1,22	1,19	1,13
	p≤0,01									
14	2,43	2,4	2,37	2,35	2,32	2,26	2,23	2,2	2,17	2,12
16	2,35	2,32	2,3	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,04
20	2,23	2,2	2,18	2,15	2,11	2,06	2,03	2	1,97	1,92
24	2,15	2,12	2,09	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,88	1,84
30	2,06	2,03	2	1,98	1,94	1,89	1,85	1,83	1,79	1,74
40	1,96	1,93	1,9	1,88	1,84	1,79	1,75	1,72	1,69	1,64
50	1,9	1,87	1,84	1,82	1,78	1,73	1,68	1,66	1,62	1,57
75	1,82	1,79	1,76	1,74	1,7	1,64	1,59	1,56	1,53	1,47
100	1,78	1,74	1,71	1,69	1,65	1,59	1,54	1,51	1,48	1,42
200	1,71	1,68	1,64	1,62	1,57	1,51	1,46	1,43	1,39	1,32
500	1,66	1,63	1,6	1,56	1,52	1,46	1,4	1,37	1,33	1,24
1000	1,64	1,6	1,56	1,53	1,49	1,43	1,37	1,33	1,28	1,19

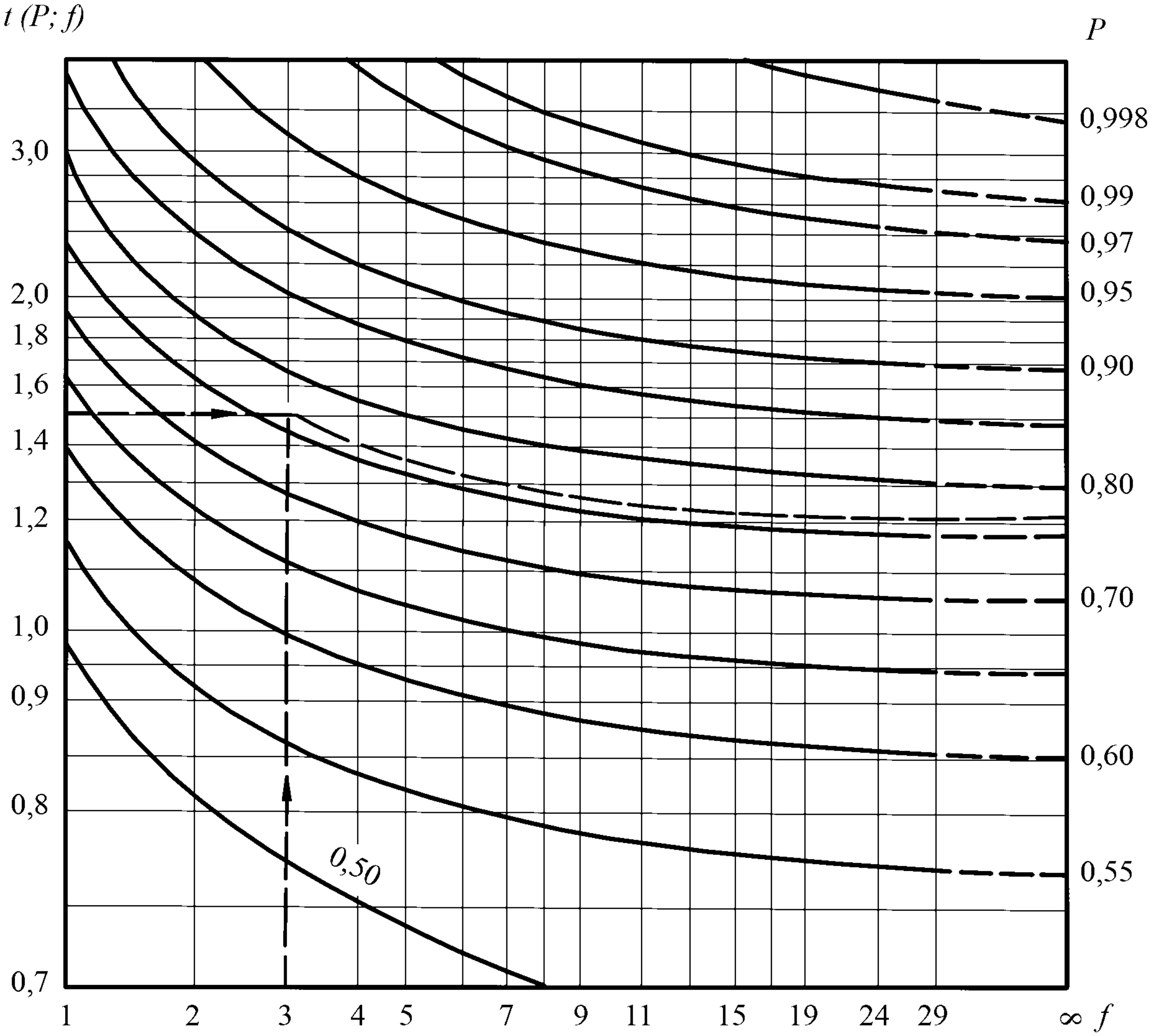


Рисунок А.1 – Зависимость критерия Стьюдента от доверительной вероятности Р и числа степеней свободы f

Основные формулы, используемые при обработке результатов исследований

Точность измерений оценивают с помощью следующих критериев, разработанных для малого числа определений.

1. Выборочное среднее (среднее арифметическое) – математическое ожидание (используется для простейшего прогнозирования)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{А.1}$$

где n – число измерений.

2. Единичные отклонения – отклонения отдельных измерений от среднего арифметического

$$E_i = x_i - \bar{x}\,. \tag{А.2}$$

Алгебраическая сумма единичных отклонений $\sum E_i$ равна нулю.

3. Выборочная дисперсия (рассеяние)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{k}\,, \tag{А.3}$$

где $k = n - 1$, если $0 < n < 50$, при $n \geq 50$ параметр $k = n$.

4. Выборочное среднеквадратичное (стандартное) отклонение

$$S = \sqrt{S^2}\,. \tag{А.4}$$

5. Коэффициент вариации (относительное стандартное отклонение)

$$W = S \cdot 100/\bar{x}. \qquad \text{(А.5)}$$

6. Выборочная дисперсия среднего значения

$$S_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 / n(n-1). \qquad \text{(А.6)}$$

7. Средняя квадратичная ошибка среднего арифметического или стандартное отклонение среднего результата

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2}\ ;\ S_{\bar{x}} = S/\sqrt{n}\ . \qquad \text{(А.7)}$$

8. Точность измерения среднего результата

$$E_\alpha = t_\alpha S_{\bar{x}}, \qquad \text{(А.8)}$$

где α - коэффициент надежности, принимают равным 0,95;

t_α - коэффициент Стьюдента или коэффициент нормированных отклонений.

9. Интервальные значения среднего результата

$$\bar{x} \pm E_\alpha . \qquad \text{(А.9)}$$

10. Относительная погрешность среднего результата, %,

$$\pm E_\alpha \cdot 100/\bar{x} . \qquad \text{(А.10)}$$

11. Числовая характеристика, выражающая линейную взаимосвязь двух случайных величин Y и X по совместным наблюдениям (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), называется коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{A.11}$$

Учебное пособие

Павел Викторович Медведев

Виталий Анатольевич Федотов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

ISBN 978-5-7410-1759-3