Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики
Кафедра алгебры и дискретной математики

А. Н. Павленко, О.А. Пихтилькова

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»
для обучающихся по программам высшего образования
по направлению подготовки 03.03.03 Радиофизика

Оренбург
2017

УДК 517.5
ББК 22.161.5
П 12

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С. А. Герасименко

Павленко, А. Н.
П 12 Дельта-функция Дирака и ее приложения: методические указания к выполнению домашних заданий и подготовке к контрольным работам / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов (направление подготовки: 03.03.03 – Радиофизика) при выполнении домашних заданий и при подготовке к контрольным работам по дисциплинам «Математический анализ», «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» и «Методы математической физики».

УДК 517.5
ББК 22.161.5

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 03.03.03 – «Радиофизика» для дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление», «Методы математической физики» и других предметов, в которых находит применение понятие дельта-функции Дирака.

Следует отметить, что приведенный материал предназначен лишь для предварительного самостоятельного ознакомления с теорией обобщенных функций и ее различными приложениями. Очевидно, что подобное изложение возможно лишь в ущерб строгости и обоснованности определений и доказательств, поэтому в дальнейшем следует рассмотреть более подробные курсы теории обобщенных функций [1-3].

Несмотря на то, что для физико-математических направлений имеется ряд отлично зарекомендовавших себя учебников, в которых рассматривается как подробное и строгое изложение теории обобщенных функций [1-3], так и предварительное ознакомление с ее основами [4-8], написание данных методических указаний представляется актуальным для выполнения следующих требований:

1) применение в учебном процессе компьютерных математических пакетов;

2) наличие 20 вариантов индивидуальных заданий для внеаудиторной самостоятельной работы студентов;

3) приведение подробно разобранных решений задач типового варианта индивидуального задания.

Данные методические указания могут быть использованы студентами и других физико-математических и инженерных направлений всех форм обучения.

1 Дельта-функция Дирака и ее свойства

1.1 Понятие дельта-функции Дирака

Рассмотрим функцию

$$\delta_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}},$$

содержащую параметр t.

С помощью любого математического компьютерного пакета (например, пакета «MathCAD» [9]) нетрудно определить, что при любом $t > 0$ выполняется

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_t(x) dx = 1.$$

Построим график данной функции, например, при $t = 1$.

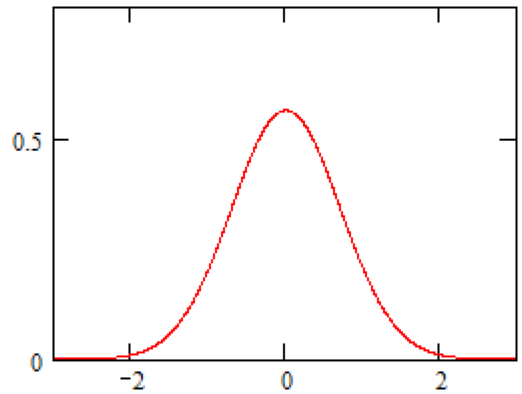

Рисунок 1

При уменьшении параметра t ($t > 0$) график функции $\delta_t(x)$ будет сужаться и вытягиваться вверх (см. рисунки 2-7).

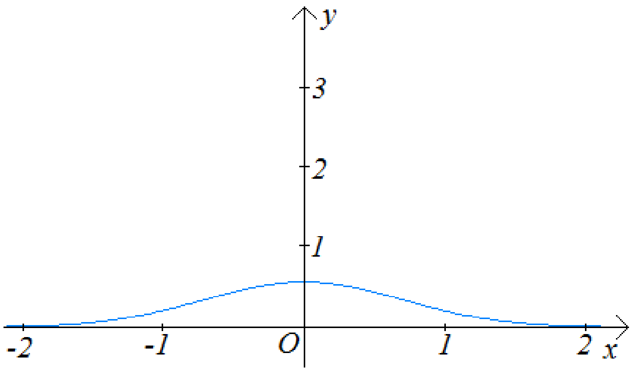

Рисунок 2

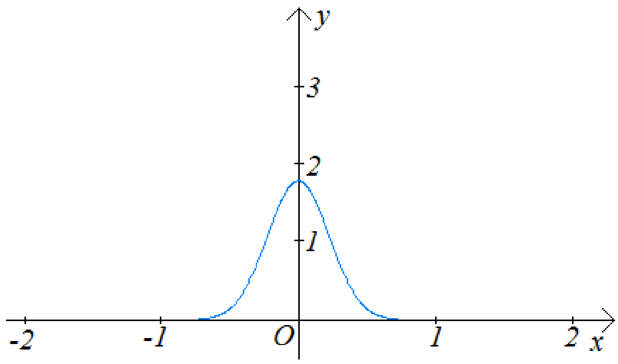

Рисунок 3

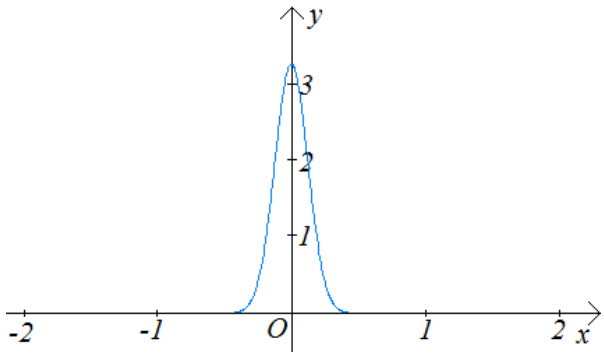

Рисунок 4

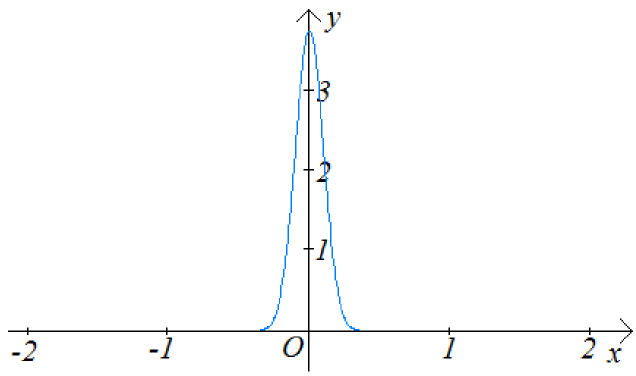

Рисунок 5

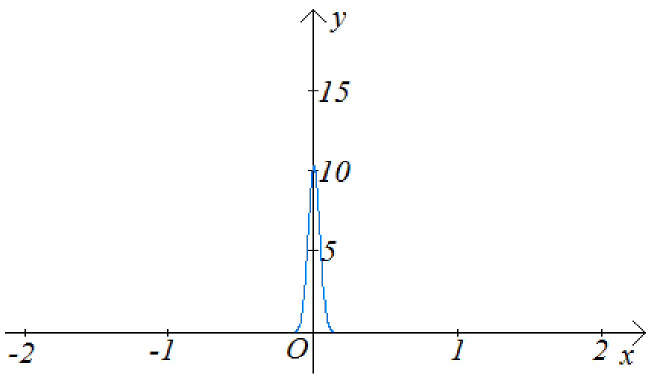

Рисунок 6

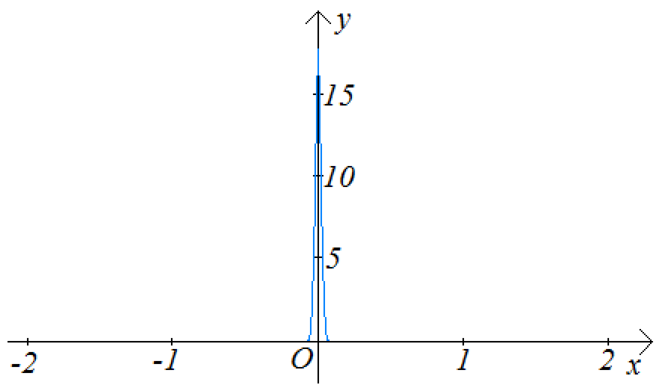

Рисунок 7

В пределе при $t \to 0$ функция $\delta_t(x)$ уже перестает быть функцией в общепринятом смысле, так как при $x = 0$ предельная «функция» должна равняться ∞. Такие предельные «функции», не являющиеся функциями в общепринятом смысле, будем в дальнейшем называть *обобщенными функциями*. Полученная в данном примере обобщенная функция носит название *дельта-функции Дирака* и обозначается $\delta(x)$.

Определение. Дельта-функцией Дирака будем называть обобщенную функцию $\delta(x)$, удовлетворяющую требованиям:

1) $\delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0; \\ \infty, x = 0; \end{cases}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.

С помощью дельта-функции можно некоторые физические формулы записать в более простом виде. В качестве примера [5,10] рассмотрим стержень длиной L, на котором имеется распределенный заряд с линейной плотностью, задаваемой функцией $\sigma = \sigma(x)$ и несколько точечных зарядов q_1, $q_2, \ldots$, q_n, расположенных в точках стержня с координатами x_1, $x_2, \ldots$, x_n. Тогда полный заряд стержня будет равен

$$q = \int\limits_0^L \sigma(x) dx + \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Если использовать дельта-функцию, то не будет необходимости записывать формулу полного заряда стержня в виде суммы двух слагаемых различного вида. В данном случае рассматриваемую формулу можно записать в виде

$$q = \int\limits_0^L \tilde{\sigma}(x) dx,$$

где

$$\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) + \sum_{i=1}^{n} q_i \, \delta(x - x_i).$$

Таким образом, дельта-функция имеет следующий физический смысл: $\delta(x)$ равна линейной плотности точечного единичного заряда, помещенного в точку $x = 0$.

Вместо заряда можно рассматривать и некоторые другие физические величины.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности дифференцирования дельта-функции. Учитывая, что дельта-функция не является функцией в общепринятом смысле, то и ее дифференцирование следует также понимать в некотором обобщенном смысле.

Построим график функции $\delta_t'(x)$ при некотором t. На рисунке 8 приведен график данной производной при $t = 0{,}006$.

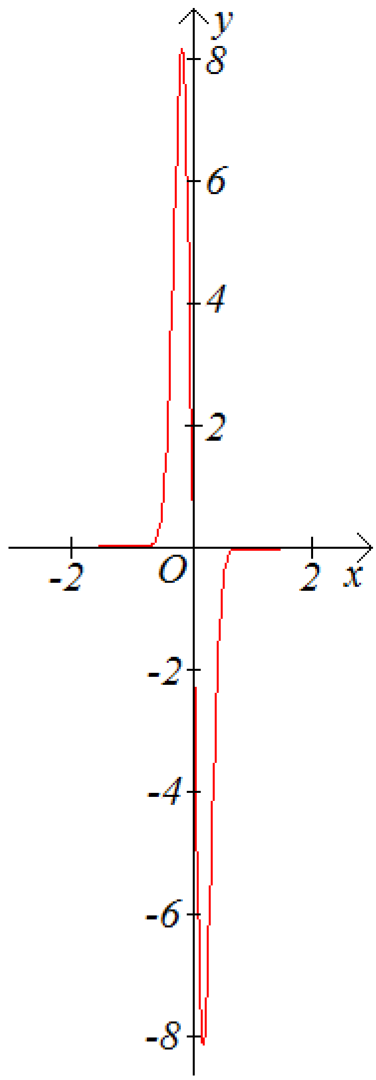

Рисунок 8

При стремлении t к 0, точки, в которых достигаются максимум и минимум будут приближаться к 0, а сами значения экстремумов будут стремиться к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Предел функции $\delta_t'(x)$ при $t \to 0$ уже не будет функцией в классическом смысле, а будет представлять собой обобщенную функцию, которую мы и будем называть производной дельта-функции.

Как мы уже знаем, дельта-функция может рассматриваться как линейная плотность единичного точечного заряда, помещенного в начало координат. Определим теперь, какой физический смысл имеет $\delta'(x)$.

Рассмотрим электростатический диполь [10], состоящий из двух равных по модулю положительного и отрицательного зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии L друг от друга, в точках $x = -L$ и $x = 0$ соответственно.

Найдем функцию линейной плотности заряда для данного диполя

$$\sigma(x) = q\delta(x+L) - q\delta(x) = q(\delta(x+L) - \delta(x)).$$

Пусть $L \to 0$ и $q \to +\infty$ таким образом, чтобы величина электрического момента диполя $p = qL$ оставалась постоянной.

Тогда получим

$$\sigma(x) = \lim_{L\to 0} q(\delta(x+L) - \delta(x)) =$$

►Так как $p = qL$, то $q = \frac{p}{L}$. Найдем предел, учитывая, что p является постоянной величиной.◄

$$= \lim_{L\to 0} \frac{p}{L}(\delta(x+L) - \delta(x)) = p\lim_{L\to 0} \frac{\delta(x+L) - \delta(x)}{L} =$$

►Так как полученный предел имеет тот же вид, что и предел из определения производной, то его будем рассматривать как производную дельта-функции.◄

$$= p\delta'(x).$$

Отсюда следует, что производная дельта-функции имеет следующий физический смысл: $\delta'(x)$ равна линейной плотности заряда точечного диполя с единичным электрическим моментом, помещенного в точку $x = 0$.

Более подробно о физических приложениях дельта-функции можно ознакомиться в [5].

1.2 Свойства дельта-функции

Во введении уже было отмечено, что строгое обоснование корректности различных действий с выражениями, содержащими дельта-функцию Дирака, выходит за рамки данных методических указаний, поэтому в дальнейшем некоторые свойства и методы будут просто распространяться на случай дельта-функции.

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$

Доказательство.

Из определения функции Дирака имеем, что при любом $\varepsilon > 0$ будет выполняться равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx =$$

►При стягивании отрезка $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ в точку $x = a$ функция $f(x)$ перейдет в константу $f(a)$.◄

$$= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(a)\delta(x-a)dx = f(a)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)dx =$$

►График функции $\delta(x-a)$ получается из графика функции $\delta(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x. Очевидно, что данная операция не влияет на площадь под графиком, и тогда получим:◄

$$= f(a)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx = f(a)\cdot 1 = f(a).$$

Свойство доказано.

2. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\ (a \neq 0)$.

Доказательство.

При $x \neq 0$ обе части данного неравенства равны 0, а при $x = 0$ – они равны $+\infty$. Осталось проверить соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}\delta(x)dx.$$

Рассмотрим случай $a > 0$, а при $a < 0$ данное равенство доказывается аналогично.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx =$$

►Введем замену $y = ax$. Тогда $dy = adx$, а пределы интегрирования при такой замене не изменяться.◄

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) \frac{1}{a} dy =$$

►Так как $a > 0$, то $a = |a|$.◄

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \delta(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \delta(x) dx .$$

Свойство доказано.

3. Пусть функция $f(x)$ равна 0 только в одной точке x_0, а ее производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим

$$\delta(f(x)) =$$

►Из определения производной имеем, что с точностью до бесконечно малой более высокого порядка выполняется приближенное равенство

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} .$$

Ведем обозначение $x = x_0 + \Delta x$.

Тогда

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x)}{x - x_0}, \; f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$◄

$$= \delta(f'(x_0)(x - x_0)) =$$

►Используем свойство 2.◄

$$= \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0).$$

Свойство доказано.

Замечание. Если функция $f(x)$ равна нулю только в нескольких точках x_1, $x_2, \ldots, x_n$, то тогда верно равенство

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_i)|}.$$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x - x_0)dx = -f'(a).$

Доказательство.

Применим интегрирование по частям.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x - x_0)dx =$$

►Формула интегрирования по частям: $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$. Здесь: $u = f(x)$, $dv = \delta'(x - x_0)dx$, $du = f'(x)dx$, $v = \delta(x - x_0)$.◄

$$= f(x)\delta(x - x_0)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x - x_0)dx =$$

►Используем определение дельта-функции и свойство 1.◄

$$= 0 - f(a) = -f(a).$$

Свойство доказано.

5. Первообразной дельта-функции является единичная функция

$$e(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Доказательство.

Найдем первообразную дельта-функции, используя формулу [11]

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt\ .$$

Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\delta(t)dt=$$

►Так как дельта-функция всюду при $x\neq 0$ равна 0, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$, то тогда рассматриваемый интеграл с переменным верхним пределом при переходе через точку $x=0$ должен скачком менять свое значение с 0 до 1.◄

$$=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\geq 0;\end{cases}=e(x).$$

Свойство доказано.

Замечание. Так как функция $e(x)$ является первообразной дельта-функции, то тогда

$$e'(x)=\delta(x).$$

2 Приложения дельта-функции

2.1 Применение дельта-функции в теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть нам дана краевая задача вида

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(a) = 0, y(b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – функции непрерывные на отрезке $[a,b]$.

Пусть данная задача имеет единственное решение для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = \delta(x-\xi), \\ y(a) = 0, y(b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть она имеет решение $y = G(x,\xi)$. Данное решение можно трактовать как отклик краевой задачи (1) на единичное воздействие в точке $x = \xi$.

Тогда решение краевой задачи (1) можно будет найти, просуммировав воздействия, вызываемые функцией $f(x)$ в каждой точке $\xi \in [a,b]$. Так как имеем непрерывное изменение переменной ξ в пределах отрезка $[a,b]$, то искомое решение задачи (1) получим с помощью интегрирования:

$$y = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi .$$

Функция $G(x,\xi)$ называется функцией Грина (или функцией влияния) краевой задачи (1).

Находить функцию Грина для конкретной краевой задачи вида (1) будем, применяя следующие свойства функции Грина.

1. Функция Грина $G(x,\xi)$ (как функция от x) является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

при $x \neq \xi$.

2. Функция Грина $G(x,\xi)$ (как функция от x) удовлетворяет краевым условиям

$$y(a) = 0\,,\ y(b) = 0\,.$$

3. Функция Грина $G(x,\xi)$ непрерывна при $x = \xi$.

4. Частная производная $G'_x(x,\xi)$ имеет в точке $x = \xi$ разрыв первого рода:

$$G'_x(x,\xi)\big|_{x=\xi+0} - G'_x(x,\xi)\big|_{x=\xi-0} = 1.$$

Свойства 1-2 непосредственно следуют из того, что функция $G(x,\xi)$ является решением краевой задачи (2). Свойства 3-4 можно доказать проинтегрировав уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \delta(x-\xi)$$

по переменной x от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Более подробно о приложениях дельта-функции и функции Грина в теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно ознакомиться в [4-6].

2.2 Применение дельта-функции в теории уравнений математической физики

Рассмотрим так называемую функцию теплового источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$. Она имеет вид

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Непосредственной проверкой можно показать, что функция $G(x,\xi,t)$ имеет приведенные ниже свойства. Для доказательства последних удобно использовать компьютерный математический пакет [9].

1. Функция $G(x,\xi,t)$ является решением уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$.

2. При любом $t > 0$ и любом x имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi = 1.$$

3. При приближении t к нулю график функции $G(x,\xi,t)$ меняется аналогично функции $\delta_t(x)$, введенной в п. 1.1.

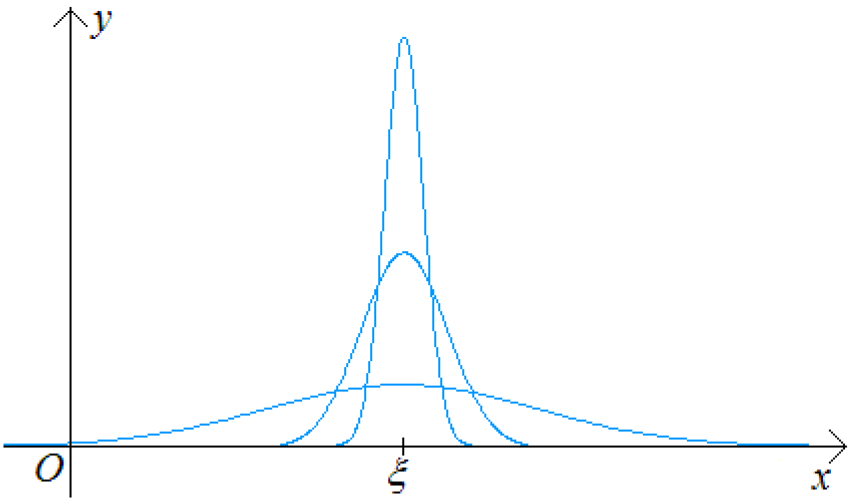

Рисунок 9

Таким образом, можно считать, что в некотором смысле

$$G(x,\xi,0)=\delta(x-\xi).$$

Отсюда следует, что функция $G(x,\xi,t)$ является решением следующей задачи Коши для бесконечного стержня без источников тепла.

УЧП: $u_t=a^2u_{xx}$ $(-\infty<x<+\infty,\ t>0)$;
НУ: $u(x,0)=\delta(x-\xi)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Получаем, что функция $G(x,\xi,t)$ является откликом на мгновенный единичный тепловой импульс, произошедший в точке $x-\xi$ в момент времени $t=0$.

Рассмотрим теперь задачу Коши для бесконечного стержня без источников тепла вида:

УЧП: $u_t=a^2u_{xx}$ $(-\infty<x<+\infty,\ t>0)$;
НУ: $u(x,0)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Здесь функция $f(x)$ задает распределение температур точек стержня в начальный момент $t=0$.

Решение последней задачи можно будет найти, просуммировав воздействия, вызываемые функцией $f(x)$ в каждой точке стержня. Так как имеем непрерывное изменение переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$, то искомое решение задачи получим с помощью интегрирования

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi.$$

Используя дифференцирование интеграла по параметру [11], легко показать, что данная функция является решением уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$. Кроме того, эта функция удовлетворяет и начальному условию $u(x,0) = f(x)$. Действительно, используя, что $G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi)$, будем иметь

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G(x,\xi,0) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(x-\xi) d\xi = f(x).$$

Более подробно о приложениях дельта-функции теории уравнений математической физики можно ознакомиться в [1].

3 Индивидуальные задания

3.1 Варианты индивидуальных заданий

Задача 1. Найти интеграл

1.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-3x+5)\delta(x+5)dx$.

1.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(5x+7)\delta(x-1)dx$.

1.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-2x-3)\delta(x+4)dx$.

1.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(4x+7)\delta(x-2)dx$.

1.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-8x-1)\delta(x+3)dx$.

1.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(3x+9)\delta(x-3)dx$.

1.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-4x-6)\delta(x+2)dx$.

1.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2x+3)\delta(x-4)dx$.

1.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-5x-1)\delta(x+1)dx$.

1.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x+6)\delta(x-5)dx$.

1.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-5\right)\delta(x+5)dx$.

1.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+7\right)\delta(x-1)dx$.

1.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-3\right)\delta(x+4)dx$.

1.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+4\right)\delta(x-2)dx$.

1.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-1\right)\delta(x+3)dx$.

1.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+3\right)\delta(x-3)dx$.

1.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-6\right)\delta(x+2)dx$.

1.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+3\right)\delta(x-4)dx$.

1.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-1\right)\delta(x+1)dx$.

1.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+6\right)\delta(x-5)dx$

Задача 2. Упростить

2.1. $(4x-3)\delta(x+1)$.

2.2. $(5x+2)\delta(x+2)$.

2.3. $(3x-1)\delta(x+3)$.

2.4. $(6x+4)\delta(x+4)$.

2.5. $(7x-5)\delta(x+5)$.

2.6. $(x+9)\delta(x-5)$.

2.7. $(4x+3)\delta(x-4)$.

2.8. $(5x-1)\delta(x-3)$.

2.9. $(8x-2)\delta(x-2)$.

2.10. $(9x+2)\delta(x-1)$.

2.11. $(-8x-2)\delta(x+1)$.

2.12. $(-7x+3)\delta(x+2)$.

2.13. $(-3x-7)\delta(x+3)$.

2.14. $(-x+9)\delta(x+4)$.

2.15. $(-6x-4)\delta(x+5)$.

2.16. $(-9x+1)\delta(x-5)$.

2.17. $(-2x-8)\delta(x-4)$.

2.18. $(-4x+6)\delta(x-3)$.

2.19. $(-5x-5)\delta(x-2)$.

2.20. $(-8x+9)\delta(x-1)$.

Задача 3. Упростить

3.1. $\delta(2x+8)$. 3.2. $\delta(3x-6)$.

3.3. $\delta(4x+12)$. 3.4. $\delta(5x-10)$.

3.5. $\delta(6x+12)$. 3.6. $\delta(7x-21)$.

3.7. $\delta(8x+8)$. 3.8. $\delta(9x-18)$.

3.9. $\delta(4x-20)$. 3.10. $\delta(3x+27)$.

3.11. $\delta(-2x+8)$. 3.12. $\delta(-3x-6)$.

3.13. $\delta(-4x+12)$. 3.14. $\delta(-5x-10)$.

3.15. $\delta(-6x+12)$. 3.16. $\delta(-7x-21)$.

3.17. $\delta(-8x+8)$. 3.18. $\delta(-9x-18)$.

3.19. $\delta(-4x-20)$. 3.20. $\delta(-3x+27)$.

Задача 4. Упростить

4.1. $\delta(x^2-3x-18)$. 4.2. $\delta(x^2-x-2)$.

4.3. $\delta(x^2-4x-5)$. 4.4. $\delta(x^2+2x-8)$.

4.5. $\delta\left(x^2+x-12\right)$.

4.6. $\delta\left(x^2-2x-3\right)$.

4.7. $\delta\left(x^2-3x-4\right)$.

4.8. $\delta\left(x^2-3x-10\right)$.

4.9. $\delta\left(x^2-2x-8\right)$.

4.10. $\delta\left(x^2-5x-6\right)$.

4.11. $\delta\left(x^2-x-20\right)$.

4.12. $\delta\left(x^2-2x-15\right)$.

4.13. $\delta\left(x^2-4\right)$.

4.14. $\delta\left(x^2-x-6\right)$.

4.15. $\delta\left(x^2-2x-24\right)$.

4.16. $\delta\left(x^2-4x-12\right)$.

4.17. $\delta\left(x^2-x-12\right)$.

4.18. $\delta\left(x^2-9\right)$.

4.19. $\delta\left(x^2-16\right)$.

4.20. $\delta\left(x^2+x-6\right)$.

Задача 5. Найти интеграл

5.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-x-5\right)\delta'(x+5)dx$.

5.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+5x+7\right)\delta'(x-1)dx$.

5.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-2x-3\right)\delta'(x+4)dx$.

5.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+4x+4\right)\delta'(x-2)dx$.

5.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-3x-1\right)\delta'(x+3)dx$.

5.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+3x+3\right)\delta'(x-3)dx$.

5.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-4x-6\right)\delta'(x+2)dx$.

5.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+2x+3\right)\delta'(x-4)dx$.

5.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-5x-1\right)\delta'(x+1)dx$.

5.10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+x+6\right)\delta'(x-5)dx$.

5.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-x-5\right)\delta'(x+5)dx$.

5.12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+5x+7\right)\delta'(x-1)dx$.

5.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-2x-3\right)\delta'(x+4)dx$.

5.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+4x+4\right)\delta'(x-2)dx$.

5.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-3x-1\right)\delta'(x+3)dx$.

5.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+3x+3\right)\delta'(x-3)dx$.

5.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-4x-6\right)\delta'(x+2)dx$.

5.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+2x+3\right)\delta'(x-4)dx$.

5.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2-5x-1\right)\delta'(x+1)dx$.

5.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-x^2+x+6\right)\delta'(x-5)dx$

Задача 6. Получить функцию Грина для данной краевой задачи

6.1. $\begin{cases} y''-y'=f(x), \\ y(0)=0,\ y(\ln 4)=0. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} y''+y'=f(x), \\ y(0)=0,\ y(\ln 4)=0. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} y'' - 2y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} y'' + 2y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} y'' - 3y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} y'' + 3y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} y'' - 4y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} y'' + 4y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} y'' - 5y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} y'' + 5y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 4) = 0. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} y'' - y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} y'' + y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} y'' - 2y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} y'' + 2y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} y'' - 3y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} y'' + 3y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} y'' - 4y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} y'' + 4y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} y'' - 5y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} y'' + 5y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 0. \end{cases}$

Задача 7. Решить краевую задачу, используя ее функцию Грина.

7.1. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 6x + 5, \\ y(0) = 0,\ y(2) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\xi - 2),\ 0 \le x < \xi \le 2; \\ \dfrac{\xi}{2}(x - 2),\ 0 \le \xi < x \le 2. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 5x + 4, \\ y(0) = 0,\ y(3) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}(\xi - 3),\ 0 \le x < \xi \le 3; \\ \dfrac{\xi}{3}(x - 3),\ 0 \le \xi < x \le 3. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 4x + 3, \\ y(0) = 0,\ y(4) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}(\xi - 4),\ 0 \le x < \xi \le 4; \\ \dfrac{\xi}{4}(x - 4),\ 0 \le \xi < x \le 4. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 3x + 2, \\ y(0) = 0,\ y(5) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{5}(\xi - 5),\ 0 \le x < \xi \le 5; \\ \dfrac{\xi}{5}(x - 5),\ 0 \le \xi < x \le 5. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 2x + 1, \\ y(0) = 0,\ y(6) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}(\xi - 6),\ 0 \le x < \xi \le 6; \\ \dfrac{\xi}{6}(x - 6),\ 0 \le \xi < x \le 6. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = x + 5, \\ y(0) = 0,\ y(2) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\xi - 2),\ 0 \le x < \xi \le 2; \\ \dfrac{\xi}{2}(x - 2),\ 0 \le \xi < x \le 2. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 6x + 7, \\ y(0) = 0,\ y(3) = 0. \end{cases}$ $\quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}(\xi - 3),\ 0 \le x < \xi \le 3; \\ \dfrac{\xi}{3}(x - 3),\ 0 \le \xi < x \le 3. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 5x+6, \\ y(0)=0,\ y(4)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{4}(\xi-4),\ 0 \le x < \xi \le 4; \\ \dfrac{\xi}{4}(x-4),\ 0 \le \xi < x \le 4. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 4x+5, \\ y(0)=0,\ y(5)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{5}(\xi-5),\ 0 \le x < \xi \le 5; \\ \dfrac{\xi}{5}(x-5),\ 0 \le \xi < x \le 5. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 3x+4, \\ y(0)=0,\ y(6)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}(\xi-6),\ 0 \le x < \xi \le 6; \\ \dfrac{\xi}{6}(x-6),\ 0 \le \xi < x \le 6. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 2x+3, \\ y(0)=0,\ y(2)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}(\xi-2),\ 0 \le x < \xi \le 2; \\ \dfrac{\xi}{2}(x-2),\ 0 \le \xi < x \le 2. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = x+2, \\ y(0)=0,\ y(3)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}(\xi-3),\ 0 \le x < \xi \le 3; \\ \dfrac{\xi}{3}(x-3),\ 0 \le \xi < x \le 3. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 6x-5, \\ y(0)=0,\ y(4)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{4}(\xi-4),\ 0 \le x < \xi \le 4; \\ \dfrac{\xi}{4}(x-4),\ 0 \le \xi < x \le 4. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 5x-4, \\ y(0)=0,\ y(5)=0. \end{cases}$ $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{5}(\xi-5),\ 0 \le x < \xi \le 5; \\ \dfrac{\xi}{5}(x-5),\ 0 \le \xi < x \le 5. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 4x - 3, \\ y(0) = 0,\ y(6) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}(\xi - 6),\ 0 \le x < \xi \le 6; \\ \dfrac{\xi}{6}(x - 6),\ 0 \le \xi < x \le 6. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 3x - 2, \\ y(0) = 0,\ y(2) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\xi - 2),\ 0 \le x < \xi \le 2; \\ \dfrac{\xi}{2}(x - 2),\ 0 \le \xi < x \le 2. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 2x - 1, \\ y(0) = 0,\ y(3) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}(\xi - 3),\ 0 \le x < \xi \le 3; \\ \dfrac{\xi}{3}(x - 3),\ 0 \le \xi < x \le 3. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = x - 6, \\ y(0) = 0,\ y(4) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}(\xi - 4),\ 0 \le x < \xi \le 4; \\ \dfrac{\xi}{4}(x - 4),\ 0 \le \xi < x \le 4. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 6x - 7, \\ y(0) = 0,\ y(5) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{5}(\xi - 5),\ 0 \le x < \xi \le 5; \\ \dfrac{\xi}{5}(x - 5),\ 0 \le \xi < x \le 5. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 5x - 6, \\ y(0) = 0,\ y(6) = 0. \end{cases}$ $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}(\xi - 6),\ 0 \le x < \xi \le 6; \\ \dfrac{\xi}{6}(x - 6),\ 0 \le \xi < x \le 6. \end{cases}$

3.2 Решения задач типового варианта индивидуального задания

Задача 1. Найти интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-3x+1\right)\delta(x-2)dx\,.$$

Решение.

Используя свойство 1 (пункт 1.2), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2-3x+1\right)\delta(x-2)dx=\left(x^2-3x+1\right)\Big|_{x=2}=2^2-3\cdot 2+1=-1.$$

Задача 2. Упростить

$$\left(x^2-3x+1\right)\delta(x-2)$$

Решение.

Так как функция $\delta(x-2)$ не равна 0 только при $x=2$, то тогда множитель $\left(x^2-3x+1\right)$ можно заменить его значением в точке $x=2$:

$$\left(x^2-3x+1\right)\delta(x-2)=\left(x^2-3x+1\right)\Big|_{x=2}\cdot\delta(x-2)=\left(2^2-3\cdot 2+1\right)\delta(x-2)=-\delta(x-2).$$

Задача 3. Упростить

$$\delta(-2x+10).$$

Решение.

Используя свойство 2 (пункт 1.2), получим

$$\delta(-2x+10)=\delta[-2(x-5)]=\frac{1}{|-2|}\delta(x-5)=\frac{1}{2}\delta(x-5).$$

Задача 4. Упростить

$$\delta\left(x^2+5x+6\right).$$

Решение.

Используя замечание к свойству 3 (пункт 1.2), получим

$$\delta\left(x^2+5x+6\right)=$$

►Функция $f(x)=x^2+5x+6$ обращается в 0 в точках $x_1=-3$ и $x_2=-2$.◄

$$=\frac{1}{|f'(-3)|}\cdot\delta(x+3)+\frac{1}{|f'(-2)|}\cdot\delta(x+2)=$$

► $f'(x)=2x+5$, $f'(-3)=2(-3)+5=-1$, $f'(-2)=2(-2)+5=1$.◄

$$=\frac{1}{|-1|}\cdot\delta(x+3)+\frac{1}{|1|}\cdot\delta(x+2)=\delta(x+3)+\delta(x+2).$$

Задача 5. Найти определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3x^2+x-6\right)\delta'(x-2)dx.$$

Решение.

Используя свойство 4 (пункт 1.2), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3x^2+x-6\right)\delta'(x-2)dx=\left(3x^2+x-6\right)\Big|_{x=2}=-(6x+1)\Big|_{x=2}=-13.$$

Задача 6. Получить функцию Грина для данной краевой задачи

$$\begin{cases} y''-2y'=f(x), \\ y(0)=0,\ y(\ln 2)=0. \end{cases}$$

Решение.

1. Найдем фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

имеет два простых действительных корня $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$, то тогда получаем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1,\ y_2(x) = e^{2x}.$$

2. Функцию Грина данной краевой задачи будем искать в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(x) + c_2(\xi)y_2(x), a \le x < \xi \le b; \\ d_1(\xi)y_1(x) + d_2(\xi)y_2(x), a \le \xi < x \le b. \end{cases}$$

Тогда получим

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi) + c_2(\xi)e^{2x}, 0 \le x < \xi \le \ln 2; \\ d_1(\xi) + d_2(\xi)e^{2x}, 0 \le \xi < x \le \ln 2. \end{cases}$$

3. Используем, что функция Грина должна удовлетворять краевым условиям. Используя краевое условие $G(0,\xi) = 0$, будем иметь:

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = 0,\ c_1(\xi) = -c_2(\xi).$$

С целью упрощения обозначений, положим: $c_1(\xi) = -c(\xi),\ c_2(\xi) = c(\xi)$.

Используя краевое условие $G(\ln 2, \xi) = 0$, будем иметь:

$$d_1(\xi) + d_2(\xi)e^{2\ln 2} = 0,\ d_1(\xi) + 4d_2(\xi) = 0,\ d_1(\xi) = -4d_2(\xi).$$

С целью упрощения обозначений, положим: $d_2(\xi) = d(\xi)$, $d_1(\xi) = -4d(\xi)$.

Тогда

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c(\xi)\left(e^{2x} - 1\right), 0 \le x < \xi \le \ln 2; \\ d(\xi)\left(e^{2x} - 4\right), 0 \le \xi < x \le \ln 2. \end{cases}$$

5. Так как функция Грина должна при $x = \xi$ быть непрерывной, то тогда получим:

$$c(\xi)\left(e^{2\xi} - 1\right) = d(\xi)\left(e^{2\xi} - 4\right),\ \left(e^{2\xi} - 4\right)d(\xi) - \left(e^{2\xi} - 1\right)c(\xi) = 0.$$

6. Найдем частную производную

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} = \begin{cases} 2c(\xi)e^{2x}, 0 \le x < \xi \le \ln 2; \\ 2d(\xi)e^{2x}, 0 \le \xi < x \le \ln 2. \end{cases}$$

Используем, что функция $\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ при $x = \xi$ терпит разрыв первого рода:

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} = 1,\ 2d(\xi)e^{2\xi} - 2c(\xi)e^{2\xi} = 1,\ d(\xi) - c(\xi) = \frac{1}{2e^{2\xi}}.$$

7. Таким образом, из пунктов 5 и 6 получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\left(e^{2\xi}-4\right)d(\xi)-\left(e^{2\xi}-1\right)c(\xi)=0,\\ d(\xi)-c(\xi)=\dfrac{1}{2e^{2\xi}}.\end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера:

1) $\Delta=\begin{vmatrix}e^{2\xi}-4 & -e^{2\xi}+1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0$ - система имеет единственное решение;

2) $\Delta_d=\begin{vmatrix}0 & -e^{2\xi}+1\\ \dfrac{1}{2e^{2\xi}} & -1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-2\xi}}{2},\ d(\xi)=\dfrac{\Delta_d}{\Delta}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{e^{-2\xi}}{6};$

3) $\Delta_c=\begin{vmatrix}e^{2\xi}-4 & 0\\ 1 & \dfrac{1}{2e^{2\xi}}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}-2e^{-2\xi},\ c(\xi)=\dfrac{\Delta_c}{\Delta}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{2e^{-2\xi}}{3}.$

8. Тогда функция Грина данной задачи имеет вид

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}e^{-2\xi}\right)\left(e^{2x}-1\right), 0\le x<\xi\le \ln 2;\\ \left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}e^{-2\xi}\right)\left(e^{2x}-4\right), 0\le \xi<x\le \ln 2.\end{cases}$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\left(1-4e^{-2\xi}\right)\left(e^{2x}-1\right), 0\le x<\xi\le \ln 2;\\ \dfrac{1}{6}\left(1-e^{-2\xi}\right)\left(e^{2x}-4\right), 0\le \xi<x\le \ln 2.\end{cases}$$

Задача 7. Известно, что краевая задача

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 6x - 2, \\ y(0) = 0,\ y(2) = 0. \end{cases}$$

имеет функцию Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\xi - 2),\ 0 \le x < \xi \le 2; \\ \dfrac{\xi}{2}(x - 2),\ 0 \le \xi < x \le 2. \end{cases}$$

Найти решение данной краевой задачи.

Решение.

Найдем решение данной краевой задачи по формуле

$$y = \int_0^L G(x,\xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{\xi}{2}(x-2)(6\xi - 2)d\xi + \int_x^2 \frac{x}{2}(\xi - 2)(6\xi - 2)d\xi =$$

$$= \frac{x-2}{2}\int_0^x \xi(6\xi - 2)d\xi + \frac{x}{2}\int_x^2 (\xi - 2)(6\xi - 2)d\xi = \frac{x-2}{2}\int_0^x \left(6\xi^2 - 2\xi\right)d\xi + \frac{x}{2}\int_x^2 \left(6\xi^2 - 14\xi + 4\right)d\xi =$$

$$= \frac{x-2}{2}\cdot\left(2\xi^3 - \xi^2\right)\Big|_0^x + \frac{x}{2}\cdot\left(2\xi^3 - 7\xi^2 + 4\xi\right)\Big|_x^2 = \frac{x-2}{2}\cdot\left(2x^3 - x^2\right) + \frac{x}{2}\cdot\left(-2x^3 + 7x^2 - 4x - 4\right) =$$

$$= x^3 - x^2 - 2x\,.$$

Список использованных источников

1 Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. - М.: Наука, 1976. - 280 с.: ил. - (Современные физико-технические проблемы). - Библиогр.: с. 276-280.

2 Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций: монография / С. Л. Соболев; отв. ред. С. В. Успенский. - М.: Наука, 1989. - 254 с. - Библиогр.: с. 248-250. - ISBN 5-02-000052-3.

3 Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. - М.: Добросвет, 2000. - 412 с. - Библиогр.: с. 406-407. - Алф. указ.: с. 408-412. - ISBN 5-7913-0044-1.

4 Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике: учеб. пособие для вузов / А. Д. Мышкис. - М.: Наука, 1973. - 640 с.

5 Зельдович, Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис.- 4-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2002. - 592 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Предм. указ.: с. 584-591. - ISBN 5-9511-0015-1.

6 Мышкис, А. Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы: [учеб. пособие] / А. Д. Мышкис .- 2-е изд. - СПб.: Лань, 2002. - 640 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 621-625. - Алф. указ.: с. 626-632. - ISBN 5-8114-0395-X.

7 Черняев, А. П. Ряды Фурье. Интегралы, зависящие от параметра, и обобщенные функции: курс лекций / А. П. Черняев. - М.: Пресс, 2004. - 149 с. - (Естественные науки. Математика. Информатика) - ISBN 5-94073-064-7.

8 Микусинский, Я. Элементарная теория обобщенных функций: пер. с англ. / Я. Микусинский, Р. Сикорский. - М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 80 с. (Библиотека сборника "Библиотека")

9 Дьяконов, В. П. MathCAD 11/12/13 в математике: справочник / В. П. Дьяконов. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. - 958 с.: ил. + 1 электрон. опт. диск

(CD-ROM). - Прил.: с. 905-931. - Библиогр.: с. 932-935. - ISBN 5-93517-332-8.

10 Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский.- 5-е изд., стер. - М.: Академия, 2005. - 720 с. - (Высшее образование). - Прил.: с. 676-692. - Предм. указ.: с. 693-713. - ISBN 5-7695-2312-3.

11 Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: учеб. для вузов / Г. М. Фихтенгольц. - СПб.: Лань, 2001. - (Учебники для вузов. Специальная литература). Кн. 2. - 464 с - ISBN 5-8114-0191-4.