Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

В. В. Носов, И. П. Томина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

Оренбург
2019

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Н84

Рецензент – кандидат физико-математических наук Е. В. Мещерина

Носов, В. В.
Н84 Дискретная математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Носов, И. П. Томина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 144 с.
ISBN 978-5-7410-2304-4

Пособие представлено в виде конспекта лекций и домашних контрольных работ по различным темам дисциплины «Дискретная математика».

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я7

ISBN 978-5-7410-2304-4

Содержание

Введение

Известно, что многие практические задачи решаются с помощью математических моделей. Причём, в последнее время, довольно широко используются дискретные модели. Это связано с повсеместной компьютеризацией общества. Дискретные модели имеют большое число интерпретаций, и многочисленные и разнообразные дискретные задачи, как правило, могут быть описаны немногочисленными комбинаторными моделями. В свою очередь, их исследование и решение прикладных дискретных задач приводит к развитию теоретической математики и существенным продвижениям в ней. Дискретные математические модели тесно связаны с дискретными способами обработки информации, которые стали преобладающими в кибернетике. Ещё одной причиной распространения дискретных математических моделей является интенсивное развитие вычислительной техники, поскольку только она может обеспечить их изучение в связи с большим объемом вычислительной работы, необходимой для этого. Кроме того, ЭВМ, основанные на принципах дискретной математики, оказались лучше приспособленными для решения прикладных задач, чем аналоговые ЭВМ, основанные на принципах непрерывного преобразования информации.

Данное учебное пособие составлено с целью ознакомления студентов с избранными главами дискретной математики и раскрытия некоторых подходов к решению задач дискретной математики.

Учебное пособие состоит из трёх разделов: «рекуррентные уравнения», «элементы комбинаторного анализа», «основы теории графов». Каждый раздел проиллюстрирован многочисленными примерами, разъясняющими суть решаемой теоретической задачи. Учебное пособие имеет два приложения. Первое приложение содержит основные алгоритмы решения задач на графах. Описаны два основных типа алгоритма: алгоритм поиска в ширину и алгоритм поиска в глубину. По каждому изложенному разделу предусмотрена домашняя контрольная работа.

Второе приложение содержит варианты домашних контрольных работ, предназначенные для самостоятельной работы студентов. Данные домашние контрольные работы предназначены для усвоения теоретического материала по всем трём главам учебного пособия на минимальном необходимом уровне.

Раздел 1. Реккурентные уравнения

§1 Понятие конечной разности

Теория рекуррентных соотношений (уравнений) или возвратных последовательностей составляет особую главу математической дисциплины, называемой исчислением конечных разностей.

Прежде чем говорить о рекуррентных уравнениях, необходимо ввести понятие конечной разности. Пусть нам дана некоторая функция $f(x)$, определённая при всех значениях вида $x_n = a + nh$ (a, h – некоторые фиксированные числа, n – любое целое число). Составим следующее выражение

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{f(a+(n+1)h) - f(a+nh)}{h}.$$

Это выражение равно тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки (x_n, y_n) и (x_{n+1}, y_{n+1}).

Обозначим выражение $f(a+(n+1)h) - f(a+nh)$ через $\Delta_h f(x_n)$.

Определение 1.1 Назовём $\Delta_h f(x_n)$ конечной разностью первого порядка функции $f(x)$ в точке x_n.

Через конечную разность первого порядка можно определить конечную разность второго порядка и т.д.:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2 f(x_n) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_h^k f(x_n) = \Delta_h^{k-1} f(x+h) - \Delta_h^{k-1} f(x).$$

При $h = 1$ конечную разность $\Delta_h f(x_n)$ будем записывать просто $\Delta f(x_n)$.

Определение 1.2 Соотношение

$$F[x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^k f(x)] = 0, \tag{1.1}$$

где функция F задана, f – искомая, мы будем называть рекуррентным уравнением с одной неизвестной функцией порядка k, если это уравнение после замены приращений их выражениями через f явно содержит как $f(x+k)$, так и $f(x)$.

С учётом того, что $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, соотношение (1.1) можно переписать в виде

$$\Phi[x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k)] = 0.$$

Это уравнение связывает $k+1$ значение нашей функции. Отсюда, если это уравнение записать в форме

$$f(x+k) = \Phi_1[x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k-1)],$$

то, явно задав начальные значения при $x = x_0$, $f(x_0) = f_0, \ldots, f(x_0+k-1) = f_{k-1}$, мы получим значение $f(x_0+k)$.

Определение 1.3 Решением уравнения (1.1) называется такая функция $f(x)$, которая обращает левую часть в нуль тождественно.

Далее достаточно считать, $\Phi_1[x_1, y_1, \ldots, y_k]$ функцией конечной и определённой при $x=x_0+n$, $n\in \mathbf{Z}$ и y_i пробегающей все значения.

Решение рекуррентного уравнения можно записать в следующем виде

$$f(x) = P(x, f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}).$$

Определение 1.4 Рекуррентное уравнение

$$\Delta^k f(x) + P_1(x)\Delta^{k-1} f(x) + \ldots + P_k(x)f(x) = Q(x), \qquad (1.2)$$

где $Q(x)$ – заданная функция от x, a_i – данные функции от x, а $f(x)$ – искомая функция, называемая линейным уравнением порядка k; однородным, если $Q(x) \equiv 0$, и неоднородным, если $Q(x) \neq 0$.

§2 Линейное однородное уравнение порядка *k*

Линейное однородное уравнение порядка k имеет вид

$$f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)f(x) = 0. \tag{1.3}$$

Будем считать, что $x \in \mathbf{N_0}$. И пусть функции $P_i(x)$ имеют конечные и определённые значения на этом множестве, причём $P_k(x)$ не равно тождественно нулю на $\mathbf{N_0}$. Каждое решение этого уравнения определяется заданием начальных значений

$$f(0) = f_0, \ldots, f(k-1) = f_{k-1}.$$

Теорема 1.1 Если $f_1(x), f_2(x), \ldots f_p(x)$ – решения уравнения

$$P_0(x)f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)f(x) = 0,$$

то функция

$$\varphi(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_pf_p(x),$$

где C_i – постоянные, будет также решением этого уравнения.

▼ Положим $P_0(x) = 1$. Тогда

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\varphi(x+k-s) = \sum_{s=0}^{k} P_s(x)\sum_{i=1}^{p} C_i f_i(x+k-s).$$

Меняя в правой части порядок суммирования, имеем

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\varphi(x+k-s) = \sum_{i=1}^{p} C_i \sum_{s=0}^{k} P_s(x) f_i(x+k-s),$$

так как все $f_i(x)$ – частные решения нашего уравнения, значит, $\varphi(x)$ – тоже решение уравнения. ▲

В дальнейшем нам понадобится понятие линейной независимости функций. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ – функции, имеющие конечные и определённые значения на $\mathbf{N_0}$.

Определение 1.5 Функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ называются линейно зависимыми, если существуют такие, одновременно не равные нулю, числа C_1, $C_2, \ldots, C_k$, что выполняется равенство $C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_kf_k(x) = 0$. Функции

$f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ называются линейно независимыми, если равенство $C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + ... + C_kf_k(x) = 0$ выполняется только при нулевых значениях C_1, C_2, ..., C_k.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1.1 Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ линейно зависимы, тогда и только тогда, когда определитель Казоратти

$$D[f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \cdots & f_k(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \cdots & f_k(x+k-1) \end{vmatrix}$$

равен нулю при всех значениях x.

Лемма 1.2 Если хотя бы для одного значения $x \in \mathbf{N_0}$ выполнено

$$D[f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)] \neq 0, x \geq 0,$$

то и

$$D[f_1(0), f_2(0), ..., f_k(0)] \neq 0.$$

Определение 1.6 Общим решением линейного однородного уравнения порядка k называется линейная комбинация k линейно независимых частных решений.

Докажем теперь теорему об общем решении линейного однородного уравнения.

Теорема 1.2 Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ линейно независимые частные решения уравнения

$$f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + ... + P_k(x)f(x) = 0,$$

причём

$$D[f_1(0), f_2(0), ..., f_k(0)] \neq 0,$$

то общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + ... + C_kf_k(x).$$

▼ Рассмотрим k решений уравнения (1.3) $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$, определяемых начальными значениями

$$\begin{gathered} f_1(0), f_1(1), \ldots, f_1(k-1), \\ f_2(0), f_2(1), \ldots, f_2(k-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(0), f_k(1), \ldots, f_k(k-1), \end{gathered}$$

и, притом, выбранными так, чтобы определитель $D[f_1(0), f_2(0), \ldots, f_k(0)]$ был отличен от нуля.

Заданием начальных значений функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ полностью определяются на всей последовательности $\mathbf{N_0}$. Значит, по теореме 1, функция

$$\varphi(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x), + \ldots + C_k f_k(x),$$

где все C_i – постоянные, также будет решением уравнения (1.3).

Покажем, что все решения уравнения (1.3) содержатся в совокупности функций $\varphi(x)$. Пусть мы имеем произвольное решение $f(x)$. Оно определяется заданием начальных значений f_1, f_2, ..., f_k. Выберем из совокупности функций $\varphi(x)$ такую, которая имела бы те же начальные значения. Иначе говоря, нам нужно решить следующую систему уравнений относительно C_1, C_2, ..., C_k.

$$\begin{cases} f_1 = \varphi(0) = C_1 f_1(0) + C_2 f_1(1) + \ldots + C_k f(k-1), \\ f_2 = \varphi(1) = C_1 f_2(0) + C_2 f_2(1) + \ldots + C_k f(k-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k = \varphi(k-1) = C_1 f_k(0) + C_2 f_k(1) + \ldots + C_k f_k(k-1). \end{cases}$$

По условию теоремы определитель этой системы отличен от нуля, следовательно, эта система имеет единственное решение. Найдя C_1, C_2, ..., C_k, мы получим функцию $\varphi(x)$, имеющую те же начальные значения, что и $f(x)$. Но так как начальные значения определяют единственным образом функцию, удовлетворяющую уравнению (1.3), то $\varphi(x) \equiv f(x)$. ▲

§3 Неоднородное линейное рекуррентное уравнение. Метод вариации постоянных

Рассмотрим неоднородное линейное рекуррентное уравнение

$$f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)f(x) = Q(x).$$

Относительно общего решения этого уравнения имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3 Общее решение неоднородного линейного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)f(x) = Q(x)$$

представляется в виде суммы одного частного его решения $\psi(x)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $\varphi(x)$.

▼ Заменим в нашем уравнении $f(x)$ через $\varphi(x) + \psi(x)$, тогда получим

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)[\psi(x+k-s)+\varphi(x+k-s)] = Q(x).$$

Так как $\psi(x)$ – решение нашего неоднородного уравнения, то

$$\sum_{s=0}^{k} P_s(x)\psi(x+k-s) = Q(x).$$

и, значит,

$$\varphi(x+k) + P_1(x)\varphi(x+k-1) + \ldots + P_k(x)\varphi(x) = 0.$$

Но общее решение этого линейного однородного уравнения, по теореме 1.2, запишется в виде

$$\varphi(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x).$$

Откуда и следует, что

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).\blacktriangle$$

Теперь займёмся отысканием частных решений неоднородного линейного уравнения порядка k, когда нам известны k частных решений соответствующего однородного линейного уравнения.

Дадим способ нахождения частного решения методом вариации произвольных постоянных в общем решении однородного линейного уравнения, предложенный Лагранжем.

Общее решение линейного однородного уравнения

$$\varphi(x+k) + P_1(x)\varphi(x+k-1) + \ldots + P_k(x)\varphi(x) = 0$$

по теореме 2 имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x).$$

Будем теперь считать $C_1, C_2, \ldots, C_k$ функциями от x. Подберём их так, чтобы $\varphi(x)$ было частным решением неоднородного уравнения.

Выберем эти функции так, чтобы выполнялись одновременно k следующих соотношений:

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k) f_s(x+k) + P_1(x)\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k-1) f_s(x+k-1) + \ldots + P_k(x)\sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x) = Q(x),$$

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+1) f_s(x+1) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+1),$$

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+2) f_s(x+2) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k-1) f_s(x+k-1) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+k-1).$$

Из последнего уравнения имеем также что

$$\sum_{s=1}^{k} C_s(x+k) f_s(x+k) = \sum_{s=1}^{k} C_s(x) f_s(x+k) + \sum_{s=1}^{k} \Delta C_s(x) f_s(x+k).$$

Упростим первое уравнение, пользуясь остальными

$$\sum_{s=1}^{k}\Delta C_s(x)f_s(x+k)+\sum_{s=1}^{k}C_s(x)f_s(x+k)+P_1(x)\sum_{s=1}^{k}C_s(x)f_s(x+k-1)+\ldots+$$
$$+P_k(x)\sum_{s=1}^{k}C_s(x)f_s(x)=Q(x).$$

Или, меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{s=1}^{k}\Delta C_s(x)f_s(x+k)+\sum_{s=1}^{k}C_s(x)[f_s(x+k)+P_1(x)f_s(x+k-1)+\ldots+P_k(x)f_s(x)]=Q(x),$$

откуда имеем, что

$$\sum_{s=1}^{k}\Delta C_s(x)f_s(x+k)=Q(x),$$

так как $f_1(x)$, …, $f_k(x)$ – частные решения однородного уравнения.

Беря это уравнение и k–1 уравнение, которое мы получим, если заменим в первом уравнении x на x+1 и вычтем из него второе, во втором – x на x+1 и вычтем третье и т.д., мы приходим к новой системе уравнений, эквивалентной прежней:

$$\begin{cases}\Delta C_1(x)f_1(x+1)+\Delta C_2(x)f_2(x+1)+\ldots+\Delta C_k(x)f_k(x+1)=0,\\ \Delta C_1(x)f_1(x+2)+\Delta C_2(x)f_2(x+2)+\ldots+\Delta C_k(x)f_k(x+2)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta C_1(x)f_1(x+k-1)+\Delta C_2(x)f_2(x+k-1)+\ldots+\Delta C_k(x)f_k(x+k-1)=0,\\ \Delta C_1(x)f_1(x+k)+\Delta C_2(x)f_2(x+k)+\ldots+\Delta C_k(x)f_k(x+k)=Q(x).\end{cases}$$

Определителем этой системы служит

$$D(x) = D[f_1(x+1), f_2(x+1), \ldots, f_k(x+1)],$$

который для системы линейно независимых решений всегда отличен от нуля. Значит, эта последняя система имеет решение при всяком $x\in\mathbf{N_0}$. Решая эту систему методом Крамера, получим

$$C_p(z)=\sum_{x=0}^{z-1}(-1)^{k+p}Q(x)\frac{D_p(x)}{D(x)},$$

где $D_p(x)$ получается из $D(x)$ заменой p-ого столбца столбцом свободных членов.

Отсюда находим частное решение $\psi(x)$ неоднородного уравнения

$$\psi(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x) + \ldots + C_k(x)f_k(x).$$

§4 Однородное линейное рекуррентное уравнение первого порядка

Найдём в общем виде решение однородного линейного рекуррентного уравнения первого порядка

$$\Delta f(x) + P(x)f(x) = 0 \tag{1.4}$$

Замечая, что

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Перепишем уравнение (1.4) в следующем виде

$$f(x+1) = [1 - P(x)]f(x).$$

Придавая независимой переменной значения 0, 1, …, x–1, получим следующие равенства:

$$\begin{gathered} f(1) = [1 - P(0)]f(0), \\ f(2) = [1 - P(1)]f(1), \\ f(3) = [1 - P(2)]f(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x) = [1 - P(x-1)]f(x-1). \end{gathered}$$

Перемножая почленно эти равенства, после сокращения на произведение $f(1)f(2)f(3) \ldots f(x-1)$, получим искомое решение

$$f(x) = f(0)\prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)]. \tag{1.5}$$

Величина $f(0)$ есть начальное значение функции $f(x)$ и является произвольной постоянной.

Пример 1.1 Решить однородное линейное уравнение первого порядка $\Delta f(x) - xf(x) = 0$ при начальном условии $f(0) = 1$.

Решение. Перепишем это уравнение в следующем виде

$$f(x+1) = [1+x]f(x).$$

В нашем случае $P(x) = -x$, поэтому, согласно формуле (1.5), общее решение запишется в виде

$$f(x) = f(0)\prod_{t=0}^{x-1}\left[1+t\right]$$

Для отыскания частного решения, удовлетворяющего начальному условию, в общем решении заменим $f(0)$ на 1. Тогда частное решение запишется в виде

$$f(x) = \prod_{t=0}^{x-1}\left[1+t\right]$$

или

$$f(x) = x!$$

§5 Неоднородное линейное уравнение первого порядка

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение первого порядка

$$\Delta f(x) + P(x)f(x) = Q(x). \tag{1.6}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций

$$f(x) = u(x)v(x).$$

Тогда

$$\Delta f(x) = u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) = u(x+1)v(x+1)\underline{ - u(x+1)v(x) + u(x+1)v(x) } - u(x)v(x) =$$
$$= u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x), \text{ (вычли, а затем прибавили выражение } u(x+1)v(x))$$

и уравнение (1.6) примет вид

$$u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x) + P(x)u(x)v(x) = Q(x),$$

или

$$u(x+1)\Delta v(x) + v(x)[\Delta u(x) + P(x)u(x)] = Q(x). \qquad (1.7)$$

Выберем $u(x)$ таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль

$$\Delta u(x) + P(x)u(x) = 0.$$

Здесь записано линейное однородное уравнение первого порядка. На основании формулы (5) имеем

$$u(x) = C_1 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)],$$

где C_1 – произвольная постоянная. При этом уравнение (1.7) примет вид

$$u(x+1)\Delta v(x) = Q(x)$$

или

$$\Delta v(x) = \frac{Q(x)}{C_1 \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)]}.$$

Суммируя $\Delta v(s)$ в пределах от 0 до x–1, мы определим

$$v(x) = \frac{1}{C_1} \sum_{s=0}^{x-1} \frac{Q(s)}{\prod_{t=0}^{s} [1 - P(t)]} + C_2.$$

Соотношения для $u(x)$ и $v(x)$ определяют решение уравнения (1.6)

$$f(x)=\sum_{t=0}^{x-1}\left[-P(t)\right]\left[\sum_{s=0}^{x-1}\frac{Q(s)}{\prod_{t=0}^{s}\left[-P(t)\right]}+C\right].$$

Пример 1.2 Решить неоднородное линейное уравнение первого порядка $\Delta f(x) - xf(x) = x^2$ при начальном условии $f(0) = 0$.

Решение. Решение нашего уравнения будем искать в следующем виде

$$f(x) = u(x)v(x).$$

Тогда

$$\Delta f(x) = u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x).$$

Подставим выражение для $\Delta f(x)$ в наше уравнение

$$u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x) - xu(x)v(x) = x^2$$

или

$$u(x+1)\Delta v(x) + v(x)[\Delta u(x) - xu(x)] = x^2.$$

Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль

$$\Delta u(x) - xu(x) = 0.$$

Это однородное линейное уравнение первого порядка и его решение запишется в виде

$u(x) = u(0)x!$ (см. пример 1.1).

Исходя из этого, перепишем исходное уравнение в следующем виде

$$u(x+1)\Delta v(x) = x^2$$

или

$$\Delta v(x) = \frac{x^2}{u(x+1)}.$$

Зная выражение для $u(x)$, это уравнение преобразуется к виду

$$\Delta v(x) = \frac{x^2}{u(0)(x+1)!}.$$

Суммируя $\Delta v(s)$ в пределах от 0 до x–1, мы получим

$$v(x) = \frac{1}{u(0)} \sum_{s=0}^{x-1} \frac{s^2}{(s+1)!} + v(0).$$

Зная $u(x)$ и $v(x)$, найдём

$$f(x) = u(0)x! \left[\frac{1}{u(0)} \sum_{s=0}^{x-1} \frac{s^2}{(s+1)!} + v(0) \right],$$

или

$$f(x) = x! \left[\sum_{s=0}^{x-1} \frac{s^2}{(s+1)!} + u(0)v(0) \right].$$

Вспоминая, что $f(x) = u(x)v(x)$, запишем общее решение в следующем виде

$$f(x) = x! \left[\sum_{s=0}^{x-1} \frac{s^2}{(s+1)!} + f(0) \right].$$

Тогда частное решение, при начальном условии $f(0) = 0$, примет вид

$$f(x) = x! \left[\sum_{s=0}^{x-1} \frac{s^2}{(s+1)!} \right].$$

§6 Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \ldots + a_k f(x) = 0. \qquad (1.8)$$

Его решение будем искать в виде

$$f(x) = \lambda^x,$$

где число λ подлежит определению. Подставляя $f(x)$ в (1.8), имеем

$$\lambda^{x+k} + a_1\lambda^{x+k-1} + \ldots + a_k\lambda^x = 0,$$

или

$$\lambda^x(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k) = 0,$$

или, наконец,

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0, \qquad (1.9)$$

так как

$$\lambda^x \neq 0.$$

Определение 1.7 Уравнение (1.9) будем называть характеристическим уравнением для уравнения (1.8).

Уравнение (1.9) может иметь простые корни, кратные корни и комплексные корни. Докажем ряд утверждений о структуре общего решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Утверждение 1.1 Общее решение линейного однородного уравнения порядка k с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i^x,$$

в случае, когда все корни λ_i соответствующего характеристического уравнения различны.

▼ В случае, когда все k корней характеристического уравнения различны, можно указать k различных решений линейного однородного уравнения

$$\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, \lambda_k^x.$$

Покажем, что эти решения линейно независимы. Для этого составим определитель Казоратти

$$D = D[\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots \lambda_k^x] = \begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \ldots & \lambda_k^x \\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \ldots & \lambda_k^{x+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{x+k-1} & \lambda_2^{x+k-1} & \ldots & \lambda_k^{x+k-1} \end{vmatrix}.$$

Вынося из каждого столбца λ_i^x за знак определителя, получим

$$D = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Можно считать, что каждое из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ отлично от нуля, так как если хотя бы одно из этих чисел равно нулю, то равно нулю и произведение $(-1)^k(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)$, а это произведение по теореме Виета есть a_k. Но тогда уравнение (1.8) приняло бы следующий вид

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \ldots + a_{k-1} f(x+1) = 0$$

и, следовательно, было бы порядка $k-1$, так как, не нарушая общности, можно было бы заменить x через $x-1$ и перейти к уравнению

$$f(x+k-1) + a_1 f(x+k-2) + \ldots + a_{k-1} f(x) = 0.$$

Поэтому мы можем считать, что в уравнении (1.9) свободный член $a_k \neq 0$.

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

есть определитель Вандермонда, который равен произведению

$$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j).$$

Но, так как все корни характеристического уравнения различны, а также произведение всех корней отлично от нуля, то и весь определитель отличен от нуля. Значит, решения

$$\lambda_1^{\,x}, \lambda_2^{\,x}, \ \dots, \lambda_k^{\,x}$$

линейно независимы. Тогда общее решение по теореме 1.2 запишется в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i^x \,. \blacktriangle$$

Замечание. Если рекуррентное уравнение имеет действительные коэффициенты, то и соответствующее характеристическое уравнение будет иметь действительные коэффициенты. Если среди корней характеристического уравнения с действительными коэффициентами есть пара комплексных корней, то они будут сопряженными и соответствующие частные решения запишутся в виде

$$z^x = |z|^x e^{i\varphi x},$$
$$\overline{z}^x = |z|^x e^{-i\varphi x}.$$

Если мы хотим получить действительные решения, то, воспользовавшись формулами Эйлера, в качестве первого частного решения можно взять

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = |z|^x \cos x\varphi,$$

а в качестве второго

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = |z|^x \sin x\varphi,$$

которые являются линейными комбинациями частных решений, следовательно, по теореме 1.1 сами являются частными решениями. Таким образом, общее решение, составится из выражений, вида

$$\lambda^x,\ |z|^x\cos x\varphi,\ |z|^x\sin x\varphi.$$

Пример 1.3 Решить однородное линейное уравнение третьего порядка $f(x+3) = 3f(x+2) - 4f(x+1) + 2f(x)$ с начальными условиями $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение для этого рекуррентного уравнения имеет следующий вид

$$y^3 - 3y^2 + 4y - 2 = 0.$$

Корнями этого уравнения будут числа 1, $1+i$, $1-i$.

Тогда общее решение этого уравнения запишется в виде

$$f(x) = C_1 + C_2(1+i)^x + C_3(1-i)^x.$$

Если мы хотим получить общее действительное решение, то сделаем следующее. Запишем комплексные корни характеристического уравнения в показательной форме

$$z = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$\bar{z} = \sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

а затем составим выражения

$$\frac{z^x + \overline{z}^x}{2} = 2^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\pi x}{4},$$
$$\frac{z^x - \overline{z}^x}{2i} = 2^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\pi x}{4}.$$

Так как эти функции являются линейными комбинациями частных решений, то по теореме 1.1 они так же будут частными решениями нашего уравнения, причём линейно независимыми. В этом несложно убедиться, вычислив определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\pi x}{4} & 2^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\pi x}{4} \\ 1 & 2^{\frac{x+1}{2}} \sin\frac{\pi(x+1)}{4} & 2^{\frac{x+1}{2}} \cos\frac{\pi(x+1)}{4} \\ 1 & 2^{\frac{x+2}{2}} \sin\frac{\pi(x+2)}{4} & 2^{\frac{x+2}{2}} \cos\frac{\pi(x+2)}{4} \end{vmatrix} = -2^x.$$

Тогда, с учётом замечания, общее решение уравнения запишется в виде

$$f(x) = C_1 + C_2 2^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\pi x}{4} + C_3 2^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\pi x}{4}.$$

Для отыскания частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} f(0) = C_1 + C_2, \\ f(1) = C_1 + C_2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + C_3 \sin\frac{\pi}{4}, \\ f(2) = C_1 + C_2 2\cos\frac{\pi}{2} + C_3 2\sin\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -1 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_1 + C_2 + C_3, \\ 2 = C_1 + C_3 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём $C_1 = -2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$. Зная C_1, C_2, C_3, запишем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$f^*(x) = -2 + 2^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\pi x}{4} + 2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi x}{4}.$$

Утверждение 1.2 Если λ_1 корень кратности s характеристического уравнения линейного однородного уравнения $f(x+k) + a_1f(x+k-1) + \ldots + a_kf(x) = 0$, то функции λ_1^x, $x\lambda_1^x$, $x^2\lambda_1^x$, ..., $x^{s-1}\lambda_1^x$ также будут решениями этого уравнения.

▼ Пусть у нас имеется корень λ_1 кратности $s > 1$. Тогда одно из решений ряда λ_1^x, λ_2^x, ..., λ_k^x будет тождественно совпадать с некоторыми другими.

Построим новые решения, не совпадающие с найденными в этом ряду и пополняющие число недостающих решений из-за кратности корня λ_1.

Новые решения будем искать в виде

$$f(x) = \varphi(x)\lambda^x,$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция.

Подставляя $\varphi(x)\lambda^x$ в линейное однородное уравнение, и деля на λ^x, имеем

$$\varphi(x+k)\lambda^k + a_1\varphi(x+k-1)\lambda^{k-1} + \ldots + a_k\varphi(x)=0, \tag{1.10}$$

Для того чтобы можно было использовать кратность корня, преобразуем последнее уравнение, заменив $\varphi(x+k)$, $\varphi(x+k-1)$, ..., $\varphi(x)$ разложением по формуле Ньютона через конечные разности

$$\varphi(x+k) = \varphi(x) + k\Delta\varphi(x) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2\varphi(x) + \ldots + \Delta^k\varphi(x),$$

$$\varphi(x+k-1) = \varphi(x) + (k-1)\Delta\varphi(x) + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2}\Delta^2\varphi(x) + \ldots + \Delta^{k-1}\varphi(x),$$

……………………………………………………………..

$$\varphi(x+2) = \varphi(x) + 2\Delta\varphi(x) + \Delta^2\varphi(x),$$

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x).$$

Умножим первое из равенств на λ^k, второе – на $a_1\lambda^{k-1}$ и т.д. до последнего, которое умножим на a_k. Затем полученные равенства сложим почленно. В левой части получим левую часть уравнения (1.10). Правую часть приравняем к нулю. $(i+1)$-й столбец при почленном сложении выражений даёт

$$C_k^i\lambda^k + C_{k-1}^i\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-i}\lambda^i = \lambda^i(C_k^i\lambda^{k-i} + C_{k-1}^i a_1\lambda^k + \ldots + a_{k-i}) =$$
$$= \lambda^i/i![k(k-1)\ldots(k-i+1)\lambda^{k-1} + (k-1)(k-2)\ldots(k-i)\lambda^{k-i-1}a_1 + \ldots + i!a_{k-1}] = \lambda^i/i!P^{(i)}(\lambda),$$

где через $P(\lambda)$ обозначена левая часть характеристического уравнения.

После всех преобразований имеем уравнение

$$P(\lambda)\varphi(x) + \lambda P'(\lambda)\Delta\varphi(x) + \frac{\lambda^2}{2!}P''(\lambda)\Delta^2\varphi(x) + \ldots + \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!}P^{(s-1)}(\lambda)\Delta^{s-1}\varphi(x) +$$
$$+ \frac{\lambda^s}{s!}P^{(s)}(\lambda)\Delta^s\varphi(x) + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}P^{(k)}(\lambda)\Delta^k\varphi(x) = 0, \tag{1.11}$$

равносильное (1.10).

Этот вид удобен тем, что он позволяет использовать кратность корней характеристического уравнения. Если λ_1 – корень кратности s, тогда

$$P(\lambda_1) = P^{(1)}(\lambda_1) = \ldots = P^{(s-1)}(\lambda_1) = 0,$$

но

$$P^{(s)}(\lambda_1) \neq 0,$$

и уравнение (1.11) обращается в следующее

$$\frac{\lambda_1^s}{s!}P^{(s)}(\lambda_1)\Delta^s\varphi(x) + \frac{\lambda_1^{s+1}}{(s+1)!}P^{(s+1)}(\lambda_1)\Delta^{s+1}\varphi(x)\ldots + \frac{\lambda_1^k}{k!}P^{(k)}(\lambda_1)\Delta^k\varphi(x) = 0.$$

Этому уравнению можно удовлетворить, выбирая в качестве функции $\varphi(x)$ любой многочлен степени ниже s, в частности, любую из степеней x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}.$$

Вспоминая, что произведение $\varphi(x)\lambda^x$ даёт решение уравнения (1.8), мы можем утверждать, что в случае корня кратности s функции

$$\lambda_1^{\,x},\, x\lambda_1^{\,x},\, x^2\lambda_1^{\,x},\, \ldots,\, x^{s-1}\lambda_1^{\,x} \tag{1.12}$$

будут частными решениями уравнения (1.8). ▲

Замечание. Если характеристическое уравнение, кроме корня λ кратности s, имеет ещё корни кратности выше единицы, то можно также указать функции вида (1.12) соответственно числу, выражающему кратность корня, которые являются решениями уравнения (1.8). Другими словами, в случае кратных корней удаётся восстановить число решений до порядка уравнения. Остаётся показать, что все эти решения линейно независимы.

Утверждение 1.3 Если $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ – корни характеристического уравнения кратностей $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_p$, то функции

$$\lambda_1^x, x\lambda_1^x, \ldots, x^{s_1-1}\lambda_1^x, \lambda_2^x, x\lambda_2^x \ldots, x^{s_2-1}\lambda_2^x, \ldots, \lambda_p^x, x\lambda_p^x \ldots, x^{s_p-1}\lambda_p^x$$

линейно независимы.

▼ Всякому корню λ_i кратности s будет соответствовать сумма вида

$$(C_1 + C_2x + \ldots + C_{s-1}x^{s-1})\lambda_i^{\,x},$$

а общее решение составится из сумм подобного типа, причём, в случае, когда корень λ_p – простой, соответствующее слагаемое будет вида $C_p\lambda_p^{\,x}$.

Пусть характеристическое уравнение (1.9) имеет p различных корней, кратностей $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_p$ соответственно. Тогда $s_1 + s_2 + \ldots + s_p = k$.

Нам нужно доказать невозможность соотношения

$$C_{11}\lambda_1^x + \ldots + C_{s_1 1}x^{s_1-1}\lambda_1^x + \ldots + C_{1p}\lambda_p^x + \ldots + C_{s_p p}x^{s_p-1}\lambda_p^x \equiv 0 \tag{1.13}$$

при постоянных C_{ij}, $i = 1,\ \ldots,s_j$, $j = 1,\ \ldots,p$, отличных от нуля в совокупности.

Не нарушая общности, можно считать, что числа λ_1, λ_2, ... , λ_p расположены в порядке убывания модулей, а числа, равные по модулю, расположены в порядке убывания их кратностей, т.е. если $|\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_q|$ и $|\lambda_q| > |\lambda_{q+1}|$, то $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_q$.

Так как чисел C_{ij} – конечное число, то существуют два числа M_1 и M_2, положительные и такие, что $0 < M_1 \leq |C_{ij}| \leq M_2$.

Допустим, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_q| = \rho$, $|\lambda_q| > |\lambda_{q+1}|$, $q \leq p$, и что $s_1 = s_2 = ... = s_m = s$, $s_m > s_{m+1}$, $m \leq q$. Тогда функции $x^{s_1-1}\lambda_1^x, x^{s_2-1}\lambda_2^x, \ldots, x^{s_m-1}\lambda_m^x$ будут наиболее быстро растущими или медленно убывающими в ряде наших функций

$$\lambda_1^x, x\lambda_1^x, \ldots, x^{s_1-1}\lambda_1^x, \ldots, \lambda_p^x, x\lambda_p^x, \ldots, x^{s_p-1}\lambda_p^x.$$

Выделив эти функции, мы можем, для всякой другой функции, не принадлежащей к нашим m функциям, установить при больших x неравенство

$$\frac{|x^i\lambda_j^x|}{x^{s-1}\rho^x} < \frac{N}{x}, \; x \geq x_0,$$

где N – постоянная, так как или $\left|\frac{\lambda_j}{\rho}\right| < 1$, или, если $|\lambda_j| = \rho$, то $s - 1 > i$.

Соотношение (1.9) может быть переписано теперь в виде

$$C_{s_1 1}x^{s_1-1}\lambda_1^x + \ldots + C_{s_m m}x^{s_m-1}\lambda_m^x = -(\Sigma' C_{ij}x^{i-1}\lambda_j^x), \tag{1.14}$$

где знак Σ' обозначает сумму, стоящую в левой части тождества (1.13) без выделенных нами функций наибольшего относительного роста. Так как

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_m| = \rho, \text{ то } \lambda_1 = \rho e^{i\varphi_1}, \lambda_2 = \rho e^{i\varphi_2}, \ldots, \lambda_m = \rho e^{i\varphi_m},$$

и все числа $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_m}$ должны быть различны между собой, так как различны между собой все числа λ_1, λ_2, ..., λ_m.

Разделив обе части равенства (1.14) на $x^{s-1}\rho^x$ и принимая во внимание ранее установленные неравенства, мы получим верное при $x \geq x_0$ неравенство

$$\left|C_{s_1}e^{i\varphi_1 x}+C_{s_2}e^{i\varphi_2 x}+\ldots+C_{s_m}e^{i\varphi_m x}\right|<\frac{NM_2k}{x}.$$

Рассмотрим теперь определитель

$$D(x)=\begin{vmatrix} e^{i\varphi_1 x} & e^{i\varphi_2 x} & \ldots & e^{i\varphi_m x} \\ e^{i\varphi_1 (x+1)} & e^{i\varphi_2 (x+1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (x+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{i\varphi_1 (x+m-1)} & e^{i\varphi_2 (x+m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (x+m-1)} \end{vmatrix}.$$

Вынося в каждом столбце $e^{i\varphi_j x}$, мы получим

$$D(x)=e^{i\varphi_1 x}e^{i\varphi_2 x}\ldots e^{i\varphi_m x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_2} & \ldots & e^{i\varphi_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{i\varphi_1 (m-1)} & e^{i\varphi_2 (m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (m-1)} \end{vmatrix}.$$

Но, так как x – действительное число, то $\left|e^{i\varphi_j x}\right|=1$ для любого $j=\overline{1,m}$, и, значит,

$$\left|D(x)\right|=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\varphi_1} & e^{i\varphi_2} & \ldots & e^{i\varphi_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{i\varphi_1 (m-1)} & e^{i\varphi_2 (m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (m-1)} \end{matrix}\right\|=\prod_{r>t}(e^{i\varphi_r}-e^{i\varphi_t})>0,$$

так как все $e^{i\varphi_r}, r=\overline{1,m}$ различны между собой. Итак, $|D(x)|$ не зависит от x и больше нуля. С другой стороны, по основному свойству определителей имеем равенство

$$C_{s_1}D(x)=\begin{vmatrix} A_1 & e^{i\varphi_2 x} & \ldots & e^{i\varphi_m x} \\ A_2 & e^{i\varphi_2 (x+1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (x+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & e^{i\varphi_2 (x+m-1)} & \ldots & e^{i\varphi_m (x+m-1)} \end{vmatrix},$$

где

$$A_k = C_{s_1} e^{i\varphi_1(x+k-1)} + \ldots + C_{s_m} e^{i\varphi_m(x+k-1)}.$$

Модули членов первого столбца этого определителя меньше чем $\frac{NM_2k}{x}$ при $x \geq x_0$, а модули всех остальных его членов равны единице. Разложив этот определитель по элементам первого столбца и пользуясь тем обстоятельством, что модуль определителя порядка m–1, если модули его элементов не превышают единицу, не может быть больше $(m-1)!$, мы получим неравенство

$$\left|C_{s_1}\right|\left|D(x)\right| < \frac{NM_2km!}{x},\ x \geq x_0 .$$

Так как по предположению $\left|C_{s_1}\right| > 0$, то отсюда непосредственно следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left|D(x)\right| = 0$. Но $|D(x)|$ не зависит от x, значит $D(x) = 0$. Мы получили противоречие, так как с одной стороны $D(x) > 0$, а с другой, $D(x) = 0$. Значит, соотношение (1.13) невозможно. ▲

Пример 1.4 Найти общее решение однородного линейного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами $f(x+4) = 2f(x+2) - f(x)$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$y^4 - 2y^2 + 1 = 0.$$

Несложно заметить, что это уравнение преобразуется к следующему виду

$$(y^2 - 1)^2 = 0,$$

и его корнями будут числа 1 и –1, причём оба корня кратности 2. На основании утверждения 1.2 частными решениями этого уравнения будут функции

$$1^x,\ x1^x,\ (-1)^x,\ x(-1)^x,$$

линейную независимость которых установим, вычислив определитель Казоратти

$$\begin{vmatrix} 1 & x & (-1)^x & (-1)^x x \\ 1 & x+1 & (-1)^{x+1} & (-1)^{x+1}(x+1) \\ 1 & x+2 & (-1)^{x+2} & (-1)^{x+2}(x+2) \\ 1 & x+3 & (-1)^{x+3} & (-1)^{x+3}(x+3) \end{vmatrix} = 16(-1)^{2x+1} = -16.$$

Этот определитель отличен от нуля при любых $x \in \mathbf{N_0}$.

Тогда общее решение этого уравнения запишется в виде линейной комбинации частных решений:

$$f(x) = C_1 + C_2x + C_3(-1)^x + C_4x(-1)^x.$$

Решать неоднородные рекуррентные линейные уравнения с постоянными коэффициентами можно с помощью метода вариации произвольных постоянных, но этот метод очень громоздкий. Поэтому при решении практических задач пользуются методом неопределенных коэффициентов, исходя из вида правой части уравнения.

Пример 1.5 Найти частное решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения $f(x+2) - 4f(x+1) + 3f(x) = -4x$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Решение. Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$\psi(x+2) - 4\psi(x+1) + 3\psi(x) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

имеет корни 1 и 3, поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\psi(x) = C_1 + C_23^x.$$

Для нахождения одного частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как 1 является корнем соответствующего характеристического уравнения, то в качестве искомой линейная функция не подойдёт, поэтому решение будем искать в виде $\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C$. Подставив $\varphi(x)$ в исходное уравнение, получим

$$A(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C - 4[A(x+1)^2 + B(x+1) + C] + 3[Ax^2 + Bx + C] = -4x.$$

Приведя подобные слагаемые при различных степенях x, получим

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения примет вид

$$\varphi(x) = x^2.$$

Общее решение неоднородного уравнения по теореме 1.3 запишется в виде

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = C_1 + C_2 3^x + x^2.$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, решим систему уравнений

$$\begin{cases} f(0) = 0 = C_1 + C_2, \\ f(1) = 1 = C_1 + 3C_2 + 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0.$$

Откуда, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$f^*(x) = x^2.$$

Пример 1.6 Решить неоднородное рекуррентное уравнение $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 12x^2$ с начальными условиями $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $y^2 - 2y + 1 = 0$ имеет корень 1 кратности 2. Значит, общее решение соответствующего однородного рекуррентного уравнения

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$$

имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 + xC_2.$$

Найдём одно частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов. Так как характеристическое уравнение имеет корень 1 кратности 2, то решение будем искать в виде

$$\psi(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Подставляя $\psi(x)$ в исходное уравнение, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 12A = 12, \\ 24A + 6B = 0, \\ 14A + 6B + 2C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим $A = 1$, $B = -4$, $C = 5$. Общее решение неоднородного рекуррентного уравнения принимает вид

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + C_1 + C_2x.$$

Зная начальные значения, которым должна удовлетворять искомая функция, составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} f(0) = -1 = C_1, \\ f(1) = -1 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Значит, $C_1 = -1$, $C_2 = 0$.

Запишем частное решение неоднородного рекуррентного уравнения, удовлетворяющее начальным значениям.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 1.$$

Пример 1.7 Найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного уравнения $f(x+2) - 7f(x+1) + 12f(x) = x6^x$.

Решение. Так как характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет корни 3 и 4, то общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$\varphi(x) = C_1 3^x + C_2 4^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\psi(x) = (Ax+B)6^x.$$

Подставим $\psi(x)$ в исходное уравнение

$$[A(x+2)+B]6^{x+2} - 7[A(x+1)+B]6^{x+1} + 12[Ax+B]6^x = x6^x.$$

Приведя подобные слагаемые, получим:

$$x6^x[A - 7A + 12A] = x6^x,$$
$$6^x[2A+B-7A-7B+12B] = 0.$$

Откуда получаем, что $A = \dfrac{1}{6}, B = -\dfrac{5}{6}.$

И общее решение неоднородного уравнения запишется в виде:

$$f^*(x) = C_1 \cdot 3^x + C_2 \cdot 4^x + (x-5) \cdot 6^{x-1}.$$

§7 Суммы и рекуррентные уравнения

Пусть нам требуется найти сумму первых нескольких элементов последовательности

$$u_0,\ u_1,\ \ldots u_n, \tag{1.15}$$

заданной линейным рекуррентным уравнением порядка k

$$P_0(x)f(x+k) + P_1(x)f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)f(x) = Q(x).$$

Если $f(x)$ – частное решение этого уравнения, отвечающее начальным условиям

$$f(0) = u_0,\ f(1) = u_1,\ \ldots,\ f(k-1) = u_{k-1},$$

то

$$f(x) = u_x \text{ для любого } x \in \mathbf{N_0}.$$

Составим последовательность частичных сумм членов последовательности (1.15):

$$s(0) = u_0,$$
$$s(1) = u_0 + u_1,$$
$$s(2) = u_0 + u_1 + u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s(x) = \sum_{i=0}^{x} u_i.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Заметим, что

$$s(x) = s(x-1) + u_x,$$

поэтому

$$f(x) = s(x) - s(x-1).$$

Подставляя найденное выражение в исходное рекуррентное уравнение, получим уравнение порядка $k+1$

$$P_0(x)[s(x+k) - s(x+k-1)] + P_1(x)[s(x+k-1) - s(x+k-2)] + \ldots + P_k(x)[s(x) - s(x-1)] = Q(x)$$

или

$$P_0(x)s(x+k) + [P_1(x) - P_0(x)]s(x+k-1) + \ldots + [P_k(x) - P_{k-1}(x)]s(x) - P_k(x)s(x-1) = Q(x).$$

Получаем суммирующее рекуррентное уравнение того же типа, что и начальное, но на порядок выше. Решая это уравнение, найдём общее решение, которое является суммирующей функцией. Зная начальные значения последовательности (1.15), можно найти начальные члены суммирующей последовательности $s(0)$, $s(1)$, …, $s(k)$. Зная эти значения, можно найти частное решение суммирующего уравнения, удовлетворяющее начальным значениям $s(0)$, $s(1)$, …, $s(k)$.

Пример 1.8 Найти сумму первых 5 членов последовательности, заданной рекуррентным уравнением $f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0$, удовлетворяющей начальным условиям $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

Решение. Обозначим через $s(x)$ сумму первых x элементов заданной последовательности. Тогда $f(x) = s(x) - s(x-1)$, и наше уравнение перепишется в виде

$$s(x+2) - s(x+1) - 5[s(x+1) - s(x)] + 6[s(x) - s(x-1)] = 0$$

или, после замены x на $x+1$,

$$s(x+3) - 6s(x+2) + 11s(x+1) - 6s(x) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни 1, 2, 3. Тогда общее решение запишется в виде $s(x) = C_1 + C_2 2^x + C_3 3^x$.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего нашей задаче, найдём $s(0)$, $s(1)$, $s(2)$:

$$s(0) = f(0) = 1,$$
$$s(1) = f(0) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$
$$s(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 2, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1, \end{cases}$$

находим

$$C_1 = -\frac{3}{2}, C_2 = 4, C_3 = -\frac{3}{2}.$$

Откуда окончательно получаем

$$s(x) = -\frac{3}{2} + 4 \cdot 2^x - \frac{3}{2} \cdot 3^x.$$

Осталось вычислить $s(4) = -59$.

§8 Асимптотический метод решения рекуррентных уравнений

Рассмотрим множество формальных степенных рядов вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

На этом множестве введем операции сложения

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

и умножения

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} x^i.$$

Рассмотрим линейное однородное рекуррентное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \ldots + a_k f(x) = 0$$

и рассмотрим его характеристический многочлен

$$g(y) = y^k + a_1 y^{k-1} + \ldots + a_k = (y-\alpha_1)^{r_1}(y-\alpha_2)^{r_2}\cdots(y-\alpha_s)^{r_s},$$

где α_i – корень характеристического многочлена кратности r_i.

С каждым решением $f(x)$ однородного линейного рекуррентного уравнения свяжем ряд

$$h(y) = f(0) + f(1)y + f(2)y^2 + \ldots,$$

который назовём производящей функцией для $f(x)$. Положим

$$\varphi(y) = y^k f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - a_1 y - a_2 y^2 - \ldots - a_k y^k$$

и рассмотрим произведение

$$h(y)\varphi(y) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i)y^i\right)(1 - a_1 y - a_2 y^2 - \ldots - a_k y^k) = b_0 + b_1 y + \ldots b_{k-1} y^{k-1} = \psi(y).$$

Тогда

$$h(y) = \frac{\psi(y)}{\varphi(y)} = \frac{\psi(y)}{(1-\alpha_1 y)^{r_1}(1-\alpha_2 y)^{r_2}\cdots(1-\alpha_s y)^{r_s}}.$$

Правая часть этого равенства представляет собой правильную дробь и, следовательно, разложима в сумму простейших дробей.

$$h(y) = \frac{\beta_{11}}{(1-\alpha_1 y)} + \frac{\beta_{12}}{(1-\alpha_1 y)^2} + \ldots + \frac{\beta_{1r_1}}{(1-\alpha_1 y)^{r_1}} + \ldots + \frac{\beta_{s1}}{(1-\alpha_s y)} + \frac{\beta_{s2}}{(1-\alpha_s y)^2} + \ldots + \frac{\beta_{sr_s}}{(1-\alpha_s y)^{r_s}}.$$

Раскладывая дробь $\frac{\beta}{(1-\alpha y)^t}$ в ряд Маклорена, имеем

$$\frac{\beta}{(1-\alpha y)^t} = \beta + \sum_{x=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \beta \cdot \alpha^x \cdot y^x.$$

Приравнивая коэффициенты при y^n в последнем выражении и в выражении для $h(y)$, имеем $f(x) = q_1(x)\alpha_1^x + \ldots + q_s(x)\alpha_s^x$.

Пример 1.9 Найти частное решение однородного линейного рекуррентного уравнения $f(x+2) - 11f(x+1) + 30f(x) = 0$ с начальными условиями $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.

Решение. Характеристический многочлен $g(y) = y^2 - 11y + 30$ имеет корни 5 и 6.

Многочлен $\varphi(y) = y^2 g(y^{-1})$ примет следующий вид

$$\varphi(y) = y^2(y^{-2} - 11y^{-1} + 30) = 1 - 11y + 30y^2.$$

Обозначим производящую функцию через $h(y)$, тогда

$$h(y) = f(0) + f(1)y + f(2)y^2 + \ldots$$

Найдём $\psi(y) = h(y)\varphi(y) = f(0) + (f(1)-11f(0))y = 12y - 1$.

Тогда $h(y) = \dfrac{\psi(y)}{\varphi(y)} = \dfrac{12y-1}{(1-5y)(1-6y)}$.

Разложив эту дробь в сумму элементарных дробей, получим

$$h(y) = \frac{12y-1}{(1-5y)(1-6y)} = \frac{6}{1-6y} - \frac{7}{1-5y}.$$

Разложив каждую из этих дробей в ряд Маклорена, получим

$$\sum_{x=0}^{\infty} (6 \cdot 6^x - 7 \cdot 5^x) \cdot y^x.$$

Тогда $(x+1)$-ое слагаемое ряда производящей функции представляет собой выражение для искомой функции $f(x)$:

$$f(x) = 6 \cdot 6^x - 7 \cdot 5^x.$$

Раздел 2. Элементы комбинаторного анализа

§1 Введение в комбинаторику

В последнее время принято считать, что комбинаторный анализ можно условно разделить на три части:

1) Теория перечисления, включающая в себя такие разделы как «производящие функции», «теоремы обращения» и «исчисление конечных разностей»;

2) Теория порядка, включающая разделы: «конечные упорядоченные множества и решётки», «матроиды»;

3) Теория конфигураций, включающая разделы: «графы и блок-схемы», «группы подстановок», «теория кодирования».

В данном учебном пособии излагается раздел, посвящённый теории перечисления. Основным вопросом этой главы является вопрос «Сколько?». Основным способом ответа на этот вопрос является установление биективного соответствия между множеством, в котором нам предстоит сосчитать число элементов, и множеством, в котором число элементов известно.

§2 Отображения. Классы отображений

Определение 2.1 Соответствием φ, заданным на паре множеств X и Y, назовём произвольное подмножество декартового произведения этих множеств.

$$\varphi \subseteq X \times Y = \{(x,y) |\ x \in X,\ y \in Y\}$$

Соответствие между множествами X и Y будем обозначать так

$$\varphi \colon X \to Y$$

Определение 2.2 Если $\varphi = \{(x,y) |\ x \in X,\ y \in Y\}$, то соответствие ψ называется обратным к φ, если $\psi = \{(y,x) |\ x \in X,\ y \in Y\}$.

Обозначим через R множество всех соответствий между X и Y

$$R = \{\varphi |\ \varphi \subseteq X \times Y\}.$$

Определение 2.3 Для соответствия $\varphi \in R$ множество X будем называть областью отправления, а множество Y будем называть областью прибытия соответствия φ.

Определение 2.4 Бинарным отношением, заданным на множестве X, называется произвольное подмножество декартового квадрата данного множества.

Определение 2.5 Бинарное отношение $\alpha \subseteq X^2$ называют отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

1) для любого $x \in X$, пара $(x,x) \in \alpha$. (рефлексивность),

2) для любых $x,y \in X$, если $(x,y) \in \alpha$, то $(y,x) \in \alpha$ (симметричность),

3) для любых $x,y,z \in X$, из того, что $(x,y) \in \alpha$ и $(y,z) \in \alpha$ следует, что $(x,z) \in \alpha$ (транзитивность).

Определение 2.6 Разбиением конечного n-множества X называется набор $\pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ подмножеств множества X таких, что одновременно выполняются следующие условия:

1) $X_i \neq \varnothing$, для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$,

2) $X_i \cap X_j = \begin{cases} X_i, i = j, \\ \varnothing, i \neq j. \end{cases}$

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i = X.$

Отношение эквивалентности, заданное на множестве X, естественным образом индуцирует разбиение этого множества на непересекающиеся подмножества, которые называют классами эквивалентности.

Пример 2.1 Отношение сопряжения, заданное на элементах группы, разбивает множество элементов этой группы на непересекающиеся классы сопряжённых элементов. Значит, отношение сопряжения в группе является отношением эквивалентности.

Пример 2.2 Пусть Y является подмножеством множества X, причём на множестве X действует некоторая группа G, т.е. задано отображение $(X,G) \to X$. Говорят, что Y является орбитой группы G, если для любых двух элементов y_1, y_2 из Y найдётся такой элемент $g \in G$, что $y_1^g = y_2$. Очевидно, что орбиты группы являются классами эквивалентности на множестве X, относительно введённого отношения эквивалентности:

$$y_1 \approx y_2 \Leftrightarrow \exists g \in G\colon\ y_1^g = y_2.$$

Определение 2.7 Бинарное отношение $\alpha \subseteq X^2$ называют отношением нестрогого частичного порядка, если оно удовлетворяет свойствам:

1) $\forall\ a \in X,\ (a, a) \in \alpha$. (рефлексивность),

2) $\forall\ x, y \in X$, если $(x, y) \in \alpha$ и $(y, x) \in \alpha$, то $x = y$. (антисимметричность),

3) $\forall\ x, y, z \in X$, из того, что $(x, y) \in \alpha$ и $(y, z) \in \alpha$ следует, что $(x, z) \in \alpha$ (транзитивность).

Пример 2.3 Примером отношения нестрогого частичного порядка является отношение делимости на множестве натуральных чисел.

Определение 2.8 Бинарное отношение $\alpha \subseteq X^2$ называют цепью, если оно удовлетворяет свойствам нестрогого частичного порядка, а также условию линейности: для $x, y \in X$ либо $(x, y) \in \alpha$, либо $(y, x) \in \alpha$.

Определение 2.9 Порядок α, заданный на множестве X, называется полным, если любые два элемента этого множества сравнимы в этом отношении.

Пример 2.4 Примером цепи является отношение сравнения «$\leq$» на множестве натуральных чисел.

Определение 2.10 Отображением из множества X во множество Y назовём такое соответствие $f \in R$, что каждый элемент x из множества отправления X встречается один и только один раз во множестве пар из f.

Множество всех отображений из X в Y будем обозначать Map(X, Y).

Определение 2.11 Если $(x, y) \in f$, то элемент $y \in Y$ называют образом элемента $x \in X$, а элемент x называют прообразом элемента $y \in Y$ под действием отображения f (часто пишут $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$).

Определение 2.12 Образом отображения f будем называть множество всех элементов y области прибытия Y, попавших во множество пар f.

$$\mathrm{Im}f = \{y \in Y | (x, y) \in f\}.$$

Определение 2.13 Областью определения отображения f назовём подмножество множества X, состоящее из прообразов каждого элемента области прибытия.

$$\mathrm{Dom}f = \{x \in X | (x, y) \in f\}.$$

Определение 2.14 Отображение f называется сюръективным, если каждый элемент области прибытия является образом хотя бы одного элемента из области отправления (т.е. область прибытия f совпадает с образом f.)

Множество всех сюръективных отображений из X в Y будем обозначать $\mathrm{Sur}(X,Y)$, причём $\mathrm{Sur}(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$.

Определение 2.15 Отображение f называется инъективным, если каждый элемент области прибытия является образом для не более чем одного элемента из области отправления.

Множество всех инъективных отображений из X в Y будем обозначать $\mathrm{Inj}(X,Y)$, причём $\mathrm{Inj}(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$.

Определение 2.16 Отображение f называется биективным, если каждый элемент области прибытия является образом точно для одного элемента области отправления.

Множество всех биективных из X в Y отображений будем обозначать $\mathrm{Bij}(X,Y)$, причём $\mathrm{Bij}(X,Y) = \mathrm{Sur}(X,Y) \cap \mathrm{Inj}(X,Y)$.

Определение 2.17 Если множества X и Y каким-либо образом упорядочены, то отображение $f{:}X\to Y$ называется монотонным, если оно сохраняет отношение порядка.

Множество всех монотонных отображений из X в Y будем обозначать Mon(X,Y), причём $f\in\mathrm{Mon}(X,Y) \Leftrightarrow \{x\in X,\ y\in Y,\ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)\}$, и, стало быть, $\mathrm{Mon}(X,Y) \subseteq \mathrm{Map}(X,Y)$.

§3 Аксиомы комбинаторики и элементарные следствия

В качестве аксиом примем следующие утверждения:

1) Отрезок натурального ряда $[1;\,n]$ содержит n элементов;

2) «Основной принцип комбинаторики». Если A и B – множества и между ними существует биекция $\varphi{:}A\to B$, то $|A| = |B|$.

3) $|\varnothing| = 0$.

Определение 2.18 Говорят, что отрезок натурального ряда $[1;\,n]$ нумерует множество A, если существует биективное отображение $[1;\,n]\to A$.

Лемма 2.1 Если отрезок $[1;\,n]$ нумерует множество A, то $|A| = n$.

▼ Если отрезок $[1;\,n]$ нумерует множество A, то по определению между отрезком $[1;\,n]$ и множеством A существует биекция. Согласно аксиоме 1 имеем $|[1;n]| = n$, а из аксиомы 2 следует $|[1;\,n]| = |A| = n$. ▲

Определение 2.19 Множество A называется конечным, если существует такое натуральное число n, что отрезок $[1;\,n]$ нумерует A.

Лемма 2.2 Число элементов в конечном множестве определено однозначно.

▼ Нам нужно показать, что существует единственное число n для каждого конечного множества A.

Предположим существование двух отрезков, нумерующих множество A.

$$\varphi_1\colon [1;\,n_1]\to A;\ \varphi_2\colon [1;\,n_2]\to A,$$

где φ_1, φ_2 – биективные отображения.

Рассмотрим отображение $\psi = \varphi_2^{-1}\bullet\varphi_1$, которое также является биективным.

Тогда ψ: $[1; n_1]\to[1; n_2]$, следовательно $|[1; n_1]| = |[1; n_2]|$. ▲

§4 Правило суммы

Теорема 2.1 Если A и B – конечные непересекающиеся множества, то $|A\cup B|=|A|+|B|$.

▼ Зафиксируем φ_A: $[1; |A|] \to A$, φ_B: $[1; |B|] \to B$ – нумерации A и B соответственно. Теперь рассмотрим отображение

$$\varphi_{A\cup B}\colon [1; |A|+|B|] \to A\cup B,$$

заданное правилом:

$$\varphi_{A\cup B}(i)=\begin{cases}\varphi_A(i), & 1\le i\le |A|,\\ \varphi_B(i-|A|), & |A|<i\le |A|+|B|.\end{cases}$$

Отображение $\varphi_{A\cup B}$ является биективным, тогда на основании аксиомы 2 получаем

$$|A\cup B|=|A|+|B|. \blacktriangle$$

Следствие 2.1 Если A и B – конечные множества, то $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

▼ Имеем $|A\cup B| = A\cup(B\backslash A)$, и множества A и $B\backslash A$ не пересекаются. Тогда по теореме 2.1 имеем $|A\cup B| = |A| + |B\backslash A|$.

Очевидно, $B = (A\cap B) \cup (B\backslash A)$ и множества $A\cap B$ и $B\backslash A$ не пересекаются. Тогда, по теореме 2.1, имеем $|B| = |A\cap B| + |B\backslash A|$.

Подставляя это выражение для $|B\backslash A|$ в выражение для $|A\cup B|$, получим $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. ▲

Следствие 2.2 (правило включения-исключения) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества, тогда справедлива следующая формула

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

▼ Докажем формулу включения-исключения методом математической индукции по n. Справедливость этой формулы при $n = 2$, доказана в следствии 2.1. Предположим, что эта формула верна для n–1 множества. Докажем её справедливость для n множеств.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| \text{(по следствию 1).}$$

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| &= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-2} \left|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right| &+ |A_n| - \underline{\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|}.\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Последнее слагаемое есть мощность объединения n–1 множеств вида $A_i \cap A_n$ и, следовательно, к нему можно применить предположение индукции.

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right| &= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \le i \le j \le n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| &- \ldots + (-1)^{n-2} \left|\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|.\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Подставляя равенство (2.2) в равенство (2.1) с учётом следующих тождеств

$$(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) = A_i \cap A_j \cap A_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

имеем

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\ + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.\end{aligned} \qquad (2.3)$$ ▲

Следствие 2.3 (правило суммы) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные попарно непересекающиеся множества, (т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$) тогда справедлива следующая формула

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

▼ Так как $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то в формуле (2.3) все слагаемые, за исключением первого $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$, обращаются в нуль. Тогда имеем $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$. ▲

§5 Декартово произведение множеств. Правило произведения

Определение 2.20 Декартовым произведением множеств A и B называется множество, обозначаемое через $A \times B$, элементами которого являются упорядоченные пары (a,b), где $a \in A$, $b \in B$.

Определение 2.21 Две пары (a_1,b_1) и (a_2,b_2) назовём равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Теорема 2.2 (правило произведения) Если X, Y – конечные множества, то $X \times Y$ так же конечно и выполняется равенство $|X \times Y| = |X||Y|$.

▼ Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. Зафиксируем в X и Y нумерацию

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}.$$

Сначала докажем, что если $n = 1$, то $|X \times Y| = |Y|$. Для этого построим отображение φ: $(x_1,y_i) \rightarrow y_i$.

Отображение φ является биективным, и, следовательно, равенство $|X \times Y| = |\{x_1\} \times Y| = |Y|$ выполнено. Теперь, если $n > 1$, то для каждого x_i $(1 \leq i \leq n)$, выполнено равенство $|X \times Y| = |\{x_i\} \times Y| = |Y| = m$. Но, так как множества $\{x_i\} \times Y$ при различных i попарно не пересекаются, то по правилу суммы имеем

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(\{x_i\}\times Y\right)\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\{x_i\}\times Y\right| = \sum_{i=1}^{n} m = nm. \blacktriangle$$

Следствие 2.4 Если X_1, X_2, …, X_n – конечные множества, причём $n < \infty$, то множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, так же конечно и $\left|X_1 \times X_2 \times \ldots X_n\right| = \prod_{i=1}^{n}\left|X_i\right|$.

▼ Докажем это утверждение методом математической индукции. При $n = 2$ справедливость этого утверждения доказана теоремой 2.2. Предположим, что наше утверждение верно для $n–1$ конечного множества, т.е.

$$\left|X_1 \times X_2 \times \ldots X_{n-1}\right| = \prod_{i=1}^{n-1}\left|X_i\right|.$$

Рассмотрим теперь два множества $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1}$ и X_n. Применяя к ним теорему 2.2, получим заключение следствия. ▲

Определение 2.22 Пусть X – конечное множество и $n \in \mathbf{N_0}$. Множество упорядоченных n-ок назовем n-ой декартовой степенью множества X.

n-ую декартову степень будем обозначать X^n. Тогда по определению

$$X^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\, x_i \in X,\ 1 \le i \le n\}.$$

Следствие 2.5 Если X – конечное множество, то $|X^n| = |X|^n$.

▼ Для доказательства этого утверждения достаточно в следствии 2.1 теоремы 2.2 положить $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$. ▲

Определение 2.23 Мультимножество на множестве M – это пара (M, ρ), где $\rho: M \to \mathbf{N_0}$ – функция, задающая кратность элементов множества M.

Мультимножество будем обозначать так $\kappa = \{x^{\rho(x)} \mid x \in M\}$, где $\rho(x)$ – кратность элемента $x \in M$.

Понятия, определённые для множеств, можно перенести и на мультимножества.

Пусть $\kappa = \{x^{\rho_\kappa(x)} \mid x \in M\}$, $\eta = \{x^{\rho_\eta(x)} \mid x \in M\}$, тогда $\kappa \subseteq \eta \Leftrightarrow \rho_\kappa(x) \le \rho_\eta(x)$ для любого $x \in M$.

$$\kappa \cap \eta = \left\{ x^{\min\{\rho_\kappa(x), \rho_\eta(x)\}} \mid x \in M \right\}.$$

$$\kappa \cup \eta = \left\{ x^{\max\{\rho_\kappa(x), \rho_\eta(x)\}} \mid x \in M \right\}.$$

Определение 2.24 Произвольное подмножество мультимножества назовём выборкой.

Т.е. $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ – выборка множества $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \le \beta_i$, при всех $0 \le i \le n$.

Определение 2.25 Упорядоченная n-ка $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ называется спецификацией выборки $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ или спецификацией мультимножества, если $\alpha_i = \beta_i$ при всех $0 \le i \le n$.

§6 Числа классов отображений

Для классификации отображений и их перечисления введём некоторые вспомогательные определения.

Определение 2.26 Комбинаторной конфигурацией назовём тройку (X,Y,f), где X, Y – конечные множества, $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$.

Это определение слишком общее для изучения комбинаторных конфигураций и соответствующих комбинаторных чисел. Накладывая различные ограничения, как на множества, так и на отображения, т.е. вводя соответствующие отношения эквивалентности, мы будем получать различные комбинаторные конфигурации и числа отображений.

У каждого отображения $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$ ($|X| = n$, $|Y| = m$) есть две полезные интерпретации: словесная и урновая.

Словесная интерпретация

Рассмотрим элементы множества X как номера букв в некотором слове. Говорим, что на месте с номером $x \in X$ стоит буква $y \in Y$, если $f(x) = y$. Тогда отображение f можно рассматривать как некоторое слово длины n в алфавите из m символов.

Определение 2.27 Два слова $a = a_1a_2...a_n$ и $b = b_1b_2...b_m$ называются равными, если $m = n$ и $a_i = b_i$.

Урновая интерпретация

Упорядочим все элементы множества Y при помощи некоторого отношения полного порядка и будем смотреть на них как на урны. На элементы множества X будем смотреть как на шары. Если $f(x) = y$, то будем говорить, что шар x помещён в урну y.

Определение 2.28 Отображение $f \in \mathrm{Inj}(X,Y)$ называется точным словом, а $f \in \mathrm{Sur}(X,Y)$ – полным заполнением.

Для выяснения введения отношения эквивалентности на множестве Map(X,Y), воспользуемся урновой интерпретацией отображения. Элементы множества X будем считать шарами, а элементы множества Y – урнами. Отображение $f{:}X \to Y$ означает что мы помещаем шары множества X в урны множества Y. Тут вполне естественно возникает вопрос о том, различимы ли шары и урны. Для того чтобы различить шары, на рисунке 2.1 они помечены цифрами. С этой же целью урны помечены буквами латинского алфавита. Отображения обозначены буквами греческого алфавита.

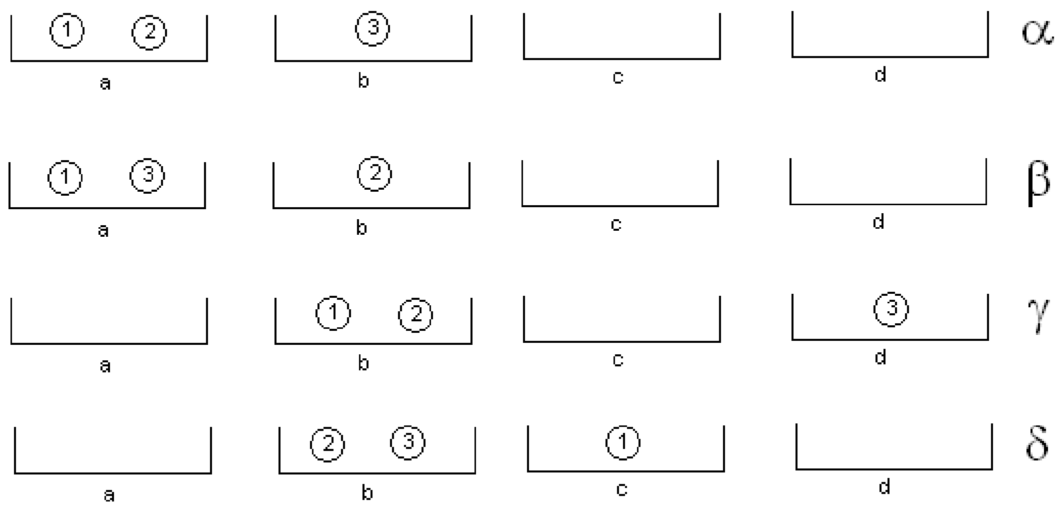


Рисунок 2.1 – Все четыре отображения различны и неэквивалентны

Предположим, что все шары одинаковые, а урны по-прежнему различны. Это соответствует стиранию меток с шаров, но не с урн.

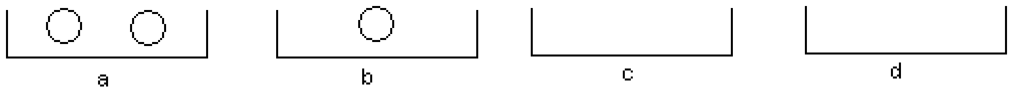


Рисунок 2.2 – Эквивалентность отображений α и β

В этом случае отображения α и β становятся эквивалентными. Однако α, γ, δ – не эквивалентны.

Предположим теперь, что стёрты метки с урн, но не с шаров. Т.е. все урны одинаковы, но все шары различны.

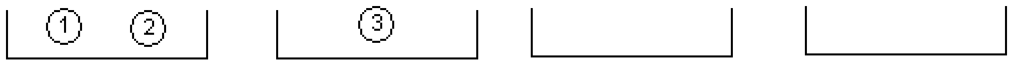


Рисунок 2.3 – Эквивалентность отображений α и γ

В этом случае отображения α и γ – эквивалентны, но α, β, δ – не эквивалентны.

И наконец, все шары и все урны можно считать одинаковыми, т.е. стёрты все метки как с шаров, так и с урн.

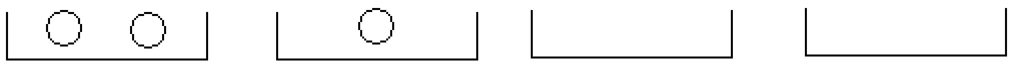


Рисунок 2.4 – Эквивалентность всех отображений

В этом случае все четыре отображения α, β, γ, δ эквивалентны между собой.

Формализуем понятие эквивалентности отображений при помощи понятия орбиты группы.

Определение 2.29 Говорят, что элементы множества Ω полностью различимы, если на этом множестве задано действие единичной группы $E(\Omega)$.

Определение 2.30 Говорят, что элементы множества Ω полностью неразличимы, если на этом множестве задано транзитивное действие симметрической группы $S(\Omega)$ (т.е. всё множество Ω является одной орбитой симметрической группы).

Определение 2.31 Говорят, что два отображения $f,g:X\to Y$ эквивалентны с неразличимым множеством X, если существует подстановка $\pi\in S(X)$, такая, что $f(\pi(x)) = g(x)$, $x\in X$.

Определение 2.32 Говорят, что два отображения $f,g:X\to Y$ эквивалентны с неразличимым множеством Y, если существует подстановка $\sigma\in S(Y)$, такая что $\sigma(f(x)) = g(x)$, $x\in X$.

Определение 2.33 Говорят, что два отображения $f,g:X\to Y$ эквивалентны с неразличимыми множествами X и Y, если существуют подстановки $\pi\in S(X)$, $\sigma\in S(Y)$, такие, что $\sigma(f(\pi(x))) = g(x)$, $x\in X$.

Таким образом, возникают четыре типа ограничений, накладываемых на множества X и Y:

1) $E(X)$, $E(Y)$ – шары различимы, урны различимы;
2) $S(X)$, $E(Y)$ – шары неразличимы, урны различимы;
3) $E(X)$, $S(Y)$ – шары различимы, урны неразличимы;
4) $S(X)$, $S(Y)$ – шары неразличимы, урны неразличимы.

Данные определения индуцируют на множестве Map(X,Y) отношения эквивалентности: $f\approx g\Leftrightarrow\exists\,\tau\in S(\text{Map}(X,Y))$, при условии, что на множестве X действует группа G, а на множестве Y действует группа H.

Определение 2.34 Под комбинаторным числом мы будем понимать число орбит группы $G(\text{Map}(X,Y))$, действующей на множестве всех отображений из множества X во множество Y при условии, что на множестве X действует группа G_1, а на множестве Y – группа G_2.

По сути, число различных отображений (или комбинаторное число) из множества X во множество Y – это число различных классов эквивалентности, на которые разбивается множество Map(X,Y).

В этом определении не накладывается никаких ограничений на группы G_1, G_2. Для дальнейшего изучения комбинаторных чисел в качестве групп G_1, G_2 будем брать единичные и полные симметрические.

Ограничения, накладываемые на отображения, следующие: инъективные отображения, сюръективные отображения, биективные отображения, а также отображения, не относящиеся к перечисленным и которые мы будем называть произвольными отображениями.

В приведённой ниже таблице перечислены основные комбинаторные конфигурации и соответствующие комбинаторные числа.

$$|X| = n < \infty,\ |Y| = m < \infty.$$

Таблица 2.1 – Основные комбинаторные конфигурации

X	Y	$\lvert\mathrm{Map}(X,Y)\rvert$	$\lvert\mathrm{Inj}(X,Y)\rvert$	$\lvert\mathrm{Sur}(X,Y)\rvert$	$\lvert\mathrm{Bij}(X,Y)\rvert$
$E(X)$	$E(Y)$	m^n	$(m)_n$	$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$	$n!$
$S(X)$	$E(Y)$	$\dfrac{\langle m\rangle_n}{n!}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
$E(X)$	$S(Y)$	$\sum_{k=1}^{m}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$	$0,\ n>m,$ $1,\ n\le m$	$\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$	1
$S(X)$	$S(Y)$	$\sum_{k=1}^{m}P(n,k)$	$0,\ n>m,$ $1,\ n\le m$	$P(n,m)$	1

§7 Число инъективных отображений

Теорема 2.3 Пусть X, Y – конечные непустые множества. Для того чтобы $\mathrm{Inj}(X,Y) \neq \varnothing$ необходимо и достаточно чтобы $|X|\le|Y|$.

▼(Необходимость)

Так как $\mathrm{Inj}(X,Y) \neq \varnothing$, то найдётся, по крайней мере, одно инъективное отображение $f\in\mathrm{Inj}(X,Y)$. Тогда Y представится в виде объединения двух непересекающихся подмножеств

$$Y = f(X) \cup (Y\backslash f(X)).$$

Так как $f \in \mathrm{Inj}(X,Y)$, то $|f(X)| = |X|$. Поэтому

$$|Y| = |f(X)| + |Y \backslash f(X)| = |X| + |Y \backslash f(X)| \geq |X|.$$

(Достаточность)

По условию теоремы $|X| \leq |Y|$. Зафиксируем нумерации множеств X и Y

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\},\ Y = \{y_1, \ldots, y_m\}, \text{ причём } m \geq n.$$

Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, заданное по правилу $\varphi(x_i) = y_i$. Это отображение инъективно, а потому $\mathrm{Inj}(X,Y) \neq \varnothing$.▲

Теорема 2.4 Пусть X, Y – непустые конечные множества, причём элементы множеств X и Y полностью различимы, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \leq m$, тогда

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

▼ Проведём доказательство теоремы методом математической индукции по n.

I шаг. Пусть $n = 1$. Тогда число всех инъективных отображений совпадает с числом всех отображений из множества X во множество Y.

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = m = \frac{m!}{(m-1)!}.$$

Пусть $n = 2$. Тогда $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Введём на множестве $\mathrm{Inj}(X,Y)$ отношение эквивалентности следующим образом. Два отображения f_1 и f_2 попадут в один класс $\mathrm{Inj}(X,Y)_i$ тогда и только тогда, когда $f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_i$. Тогда

$$\mathrm{Inj}(X,Y) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Inj}(X,Y)_i.$$

Причём каждое отображение однозначно определяется своим ограничением на $X \backslash \{x_2\}$, поэтому $|\mathrm{Inj}(X,Y)_i| = m-1$ в силу инъективности отображения. Тогда по правилу суммы имеем

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = \left|\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{Inj}(X,Y)_i\right| = \sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Inj}(X,Y)_i| = m|\mathrm{Inj}(X,Y)_i| = m(m-1) = \frac{m!}{(m-2)!},$$

соответствуя случаю, когда $n = 2$.

II шаг. Предположим, что утверждение верно для любого n-элементного множества X

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Докажем, что утверждение верно и для любого (n+1)-элементного множества X.

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = \frac{m!}{(m-(n+1))!}.$$

III шаг. Пусть $|X| = n+1$, $|Y| = m$, причём, $n+1 \le m$. Тогда $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Введём на множестве $\mathrm{Inj}(X,Y)$ отношение эквивалентности следующим образом. Два отображения f_1 и f_2 попадут в один класс $\mathrm{Inj}(X,Y)_i$ тогда и только тогда, когда $f_1(x_{n+1}) = f_2(x_{n+1}) = y_i$. Тогда

$$\mathrm{Inj}(X,Y) = \bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{Inj}(X,Y)_i.$$

Так как $\mathrm{Inj}(X,Y)_i$ – множество отображений из n-элементного множества $X\backslash\{x_n\}$ в (m–1)-элементное множество $Y\backslash\{y_i\}$, то для подсчета числа элементов во множестве $\mathrm{Inj}(X,Y)_i$ можно воспользоваться предположением индукции

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)_i| = \frac{(m-1)!}{((m-1)-n)!}.$$

Тогда имеем

$$|\mathrm{Inj}(X,Y)| = \left|\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{Inj}(X,Y)_i\right| = \sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Inj}(X,Y)_i| = \sum_{i=1}^{m}\frac{(m-1)!}{((m-1)-n)!} = \frac{m!}{(m-(n+1))!}. \blacktriangle$$

Определение 2.35 Выражение $m(m–1)(m–2)\cdots(m–n+1)$ будем называть убывающим факториалом числа m, длины n.

Убывающий факториал числа m длины n будем обозначать так

$$(m)_n = m(m–1)(m–2)\cdots(m–n+1).$$

Замечание. Убывающий факториал числа m длины n имеет следующий комбинаторный смысл: это число точных слов длины n в алфавите из m символов. В современной литературе это число называют числом размещений из m по n.

Пример 2.5 Сколько существует слов длины 2 в алфавите из 4 символов {a,b,c,d}?

Их число равно $\dfrac{4!}{(4-2)!}=12.$

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc.

Теорема 2.5 Пусть X и Y – непустые конечные множества, причём элементы множества X полностью неразличимы, а элементы множества Y полностью различимы, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \le m$, тогда

$$\left|\mathrm{Inj}(X,Y)\right| = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

▼ Пусть X – некоторое m-элементное множество. Обозначим через $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ множество всех n-подмножеств некоторого m-множества. Рассмотрим множество $\mathrm{Inj}([1; n],X)$.

Введём на этом множестве отношение эквивалентности: два инъективных отображения f_1 и f_2 попадают в один класс эквивалентности F_i тогда и только тогда, когда $f_1([1; n]) = f_2([1; n])$ (т.е. образы областей определения совпадают).

Образ отрезка натурального ряда при инъективном отображении является n-элементным подмножеством X.

Так как эти отображения инъективны, то каждое n-элементное подмножество X является образом хотя бы одного инъективного отображения натурального ряда

[1; n] в X. Таким образом, мы получим столько классов эквивалентности, сколько существует n-элементных подмножеств во множестве X.

В каждом классе находятся все инъективные отображения отрезка [1; n] в X, дающие один и тотже образ области определения и их ровно столько, сколько существует биективных отображений из [1; n] в этот образ, т.е. n! Применяя правило суммы, получим

$$(m)_n = \sum_{i=1}^{\binom{m}{n}} |F_i| = \binom{m}{n} n!$$

Отсюда, получим

$$\binom{m}{n} = \frac{(m)_n}{n!}. \blacktriangle$$

Замечание. Каждое такое отображение имеет в качестве прообраза n-множество, которое отображается в m-множество в качестве некоторого подмножества. Отсюда понятен комбинаторный смысл данного числа отображений: это число n-элементных подмножеств в m-множестве.

Пример 2.6 Сколько существует 3-подмножеств в 4-множестве {a, b, c, d}?

Их существует $\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$.

{a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, {a, c, d}.

Определение 2.36 Число n-подмножеств, m-множества называется числом сочетаний из m по n.

Следствие 2.6 Число инъективных отображений из X в Y при условии, что элементы множества X полностью различимы, а элементы Y полностью неразличимы ($|X| = n$, $|Y| = m$), равно 1, если $n \le m$ и равно 0, если $n > m$.

$\blacktriangledown$Пусть $n > m$, тогда по теореме 2.3 $|\mathrm{Inj}(X,Y)| = 0$.

Пусть теперь $n \le m$. Тогда полностью различимое n-множество X отображается в полностью неразличимое m-множество Y. Поскольку образы неразличимы, то, фактически, существует только одно отображение из X в Y.$\blacktriangle$

Следствие 2.7 Число инъективных отображений из X в Y при условии, что элементы множеств X и Y полностью неразличимы ($|X| = n$, $|Y| = m$), равно 1, если $n \le m$ и равно 0, если $n > m$.

▼Пусть $n > m$, тогда по теореме 2.3 $|\mathrm{Inj}(X,Y)| = 0$.

Пусть теперь $n \le m$. Тогда полностью неразличимое n-множество X отображается в полностью неразличимое m-множество Y. Поскольку образы неразличимы, то, фактически, существует только одно отображение из X в Y.▲

Следствие 2.8 Число сочетаний из m по n удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}. \tag{2.4}$$

▼

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} =$$
$$= \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n-1)!}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m-n}\right) = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.$$

▲

Следствие 2.9 Имеет место следующее равенство

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}. \tag{2.5}$$

▼ Воспользуемся рекуррентным уравнением (2.4) из следствия 2.8.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Применим к первому слагаемому правой части равенства (2.5) следствие 2.8. Получим

$$\binom{m-1}{n} = \binom{m-2}{n} + \binom{m-2}{n-1}. \tag{2.6}$$

Подствим (2.6) в (2.4):

$$\binom{m}{n} = \binom{m-2}{n} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-1}{n-1}. \tag{2.7}$$

Опять применим к первому слагаемому правой части равенства (2.5) следствие 2.8. Получим

$$\binom{m-2}{n} = \binom{m-3}{n} + \binom{m-3}{n-1}. \tag{2.8}$$

Подставим (2.8) в (2.7):

$$\binom{m}{n} = \binom{m-3}{n} + \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Продолжая эту операцию до тех пор, пока первое слагаемое не станет равным $\binom{n}{n}$, которое, в свою очередь равно $\binom{n-1}{n-1}$, получим искомое равенство

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}. \ \blacktriangle$$

§8 Число биективных отображений

Пусть X и Y – множества, обозначим через Bij(X,Y) – множество всех биективных отображений из множества X во множество Y. Напомним, что отображение будет биективным, если оно сюръективно и инъективно одновременно.

$$\mathrm{Bij}(X,Y) = \mathrm{Sur}(X,Y) \cap \mathrm{Inj}(X,Y).$$

Теорема 2.6 (критерий непустоты Bij(X,Y)) Пусть X и Y – непустые конечные множества. Для того чтобы $\mathrm{Bij}(X,Y) \neq \varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы $|X|=|Y|$.

▼(Необходимость)

Пусть $\mathrm{Bij}(X,Y) \neq \varnothing$ и $f\in\mathrm{Bij}(X,Y)$. Так как f – сюръективно, то $f(X) = Y$. Так как f – инъективно, то $|f(X)| = |X|$. Следовательно, $|X| = |Y|$.

(Достаточность)

Пусть $|X| = |Y| = n$. Зафиксируем нумерации X и Y.

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\},\ Y = \{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Рассмотрим отображение, заданное правилом $f(x_i) = y_i$. Тогда $f\in\mathrm{Bij}(X,Y)$ и $\mathrm{Bij}(X,Y) \neq \varnothing$.▲

Теорема 2.7 Пусть X и Y – непустые конечные полностью различимые множества, причём $|X| = |Y| = n$. *Тогда* $|\mathrm{Bij}(X,Y)| = n!$

▼Так как $|\mathrm{Bij}(X,Y)| = |\mathrm{Inj}(X,Y)|$ при $|X| = |Y|$ и элементы множеств X и Y полностью различимы, то по теореме 2.5, имеем

$$\left|\mathrm{Bij}(X,Y)\right| = \left|\mathrm{Inj}(X,Y)\right| = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \qquad (2.9)▲$$

Замечание. По определению факториала 0! = 1.

Определение 2.37 Число всех биективных отображений из одного n-множества X в другое n-множество Y называется числом перестановок n символов.

Пример 2.7 Сколько существует перестановок на 3 символах {1,2,3}?

Их ровно 3! = 6.

(1)(2)(3), (1,2,3), (1,3,2), (1,2)(3), (1,3)(2), (1)(2,3).

Следствие 2.10 Существует только одно отображение из полностью неразличимого n-множества X в полностью различимое n-множество Y.

▼ Поскольку образ полностью неразличимого n-множества есть полностью различимое n-множество, то все такие биективные отображения эквивалентны между собой.▲

Следствие 2.11 Существует только одно отображение из полностью различимого n-множества X в полностью неразличимое n-множество Y.

▼ Поскольку образ полностью различимого n-множества есть полностью неразличимое n-множество, то все такие биективные отображения эквивалентны между собой.▲

Следствие 2.12 Существует только одно отображение из полностью неразличимого n-множества X в полностью неразличимое n-множество Y.

▼ Поскольку образ полностью неразличимого n-множества есть полностью неразличимое n-множество, то все такие биективные отображения эквивалентны между собой.▲

§9 Число произвольных отображений

Пусть нам дано множество всех отображений с областью определения X и областью прибытия Y

$$F = \{f | f : X \to Y\} = \mathrm{Map}(X, Y).$$

Далее, пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. Для подсчета числа элементов во множестве F докажем следующую теорему.

Теорема 2.8 Пусть X и Y – конечные непустые, полностью различимые множества, причём $|X| = n$, $|Y| = m$, тогда $|F| = m^n$.

▼ Докажем эту теорему методом математической индукции по n.

I шаг. Пусть $n = 1$. Зафиксируем нумерации множеств $X = \{x_1\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Занумеруем элементы множества F следующим образом

$$(x_1, y_1) = f_1, \ldots, (x_1, y_m) = f_m.$$

Ясно, что отрезок $[1; m]$ нумерует множество F и $|F| = m$, соответствуя случаю, когда $n = 1$.

Докажем утверждение при $n = 2$. Тогда $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Введём на множестве F отношение эквивалентности следующим образом. Два отображения f_1 и f_2 попадут в один класс F_i тогда и только тогда, когда $f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_i$. Тогда

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i.$$

Причём каждое отображение однозначно определяется своим ограничением на $X \backslash \{x_2\}$, поэтому $|F_i| = m$, соответствуя случаю, когда $n = 1$. Тогда по правилу суммы имеем

$$|F| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |F_i| = m|F_i| = m^2,$$

соответствуя случаю $n = 2$.

II шаг. Предположим, что при $k = n$ утверждение теоремы верно, т.е. выполнено равенство $|F| = m^n$.

Докажем утверждение при $k = n+1$.

III шаг. Введём на множестве F отношение эквивалентности следующим образом. Два отображения f_1 и f_2 попадут в один класс F_i тогда и только тогда, когда $f_1(x_{n+1}) = f_2(x_{n+1}) = y_i$. И общее число классов равно m.

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i.$$

Так как каждое отображение однозначно определяется своим ограничением на $X \backslash \{x_{n+1}\}$, то $|F_i| = m^n$ по предположению индукции. Имеем равенство

$$|F| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |F_i| = \sum_{i=1}^{m} m^n = m^{n+1}. \blacktriangle$$

Определение 2.38 Множество Map(X,Y) называют множеством размещений m элементов по n с повторениями, а |Map(X,Y)| – числом размещений m элементов по n с повторениями.

Пример 2.8 Сколько существует слов длины 4 в алфавите из двух символов $A = \{0,1\}$?

Их существует $2^4 = 16$ штук.

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Следствие 2.13 Число всех подмножеств некоторого n-множества M равно 2^n.

▼ Пусть $N = \{0,1\}$. Для каждого $A \subseteq M$ определим характеристическую функцю ψ с областью значений N.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ } если \text{ } x \in A, \\ 0, \text{ } если \text{ } x \notin A. \end{cases}$$

Тогда мы имеем биективное отображение между Map(M, N) и множеством всех подмножеств множества M. По теореме 2.8 получаем, что число всех подмножеств множества M равно 2^n.▲

Замечание. Так как формула для числа сочетаний из m по n выражает число n-подмножеств m-множества, то просуммировав все сочетания из m по n, когда n принимает значения от 0 до m, мы получим число всех подмножеств m-множества

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m.$$

Пример 2.9 Сколько существует всего подмножеств во множестве из 3 элементов множества $A = \{a,b,c\}$?

Их существует $2^3 = 8$.

Во множестве A существует точно одно пустое подмножество $\binom{3}{0} = 1$,

точно 3 одноэлементных подмножества $\binom{3}{1} = 3$,

точно 3 двухэлементных подмножества $\binom{3}{2} = 3$, точно 1 трёхэлементное подмножество $\binom{3}{3}=1.$

Итого получаем 1+3+3+1=8.

Теорема 2.9 Пусть X – полностью неразличимое множество, Y – полностью различимое множество, причём $|X| = n$, $|Y| = m$, тогда

$$|\mathrm{Map}(X,Y)| = \binom{m+n-1}{n}.$$

▼Зафиксируем нумерацию множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Причём $x_1 \le \ldots \le x_n$, $y_1 \le \ldots \le y_m$. Пусть искомое число вычисляется при помощи функции $f(m,n)$. Каждое отображение либо содержит y_i в качестве образа, либо нет. Каждое отображение, содержащее y_i в качестве образа, может содержать его от 1 до n раз.

Во всех случаях, когда число появлений элемента y_i в качестве образа уменьшается на единицу, мы получим $f(m,n–1)$ таких отображений. Число отображений, не содержащих y_i в качестве образа, равно $f(m–1,n)$.

Следовательно, мы имеем следующее рекуррентное уравнение

$$f(m,n) = f(m,n-1) + f(m-1,n).$$

Если $n = 1$, то $f(m,1) = m$, поскольку в этом случае имеется ровно m отображений из X в Y.

Если $m = 1$, то при любом значении n, возможно лишь одно отображение из X в Y, поскольку элементы множества X – неразличимы. Поэтому $f(1,n) = 1$.

Докажем методом математической индукции по n формулу

$$f(m,n) = \binom{m+n-1}{n}.$$

I шаг. Пусть $n = 2$. Пользуясь равенством $f(m,n) = f(m,n–1) + f(m–1,n)$, получим

$$f(m,2) = f(m,1) + \underline{f(m-1,2)} = f(m,1) + \underline{f(m-1,1) + f(m-2,2)} = f(m,1) + \underline{f(m-1,1) +}$$

$$\underline{+ f(m-2,1) + f(m-2,2)} = m+(m-1)+(m-2)+\ldots+1 = \frac{m(m+1)}{2} = \binom{m+1}{2}.$$

II шаг. Пусть формула $f(m,n) = \binom{m+n-1}{n}$ верна для всех $k \le n$.

III шаг. Докажем равенство

$$f(m,n+1) = \binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n-2}{n} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{m+n}{n+1}.$$

По определению для функции $f(m,n)$ имеет место равенство

$$f(m,n+1) = f(m,n) + \underline{f(m-1,n+1)} = f(m,n) + \underline{f(m-1,n) + f(m-2,n+1)} = \ldots =$$

$$= f(m,n) + f(m-1,n) + \ldots + f(n,n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+n-i}{n}.$$

По следствию 2.9 из теоремы 2.5 имеем

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m+n-i}{n} = \binom{m+n}{n+1}.$$

Нами доказано следующее равенство

$$\binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{n!(m-1)!}. \blacktriangle$$

Замечание. Каждое отображение из полностью неразличимого n-множества X в полностью различимое m-множество Y можно представить словом $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$. Показатель степени элемента y_i обозначает количество прообразов у этого элемента. Поэтому каждое такое отображение есть m-мультимножество, где кратность каждого элемента может принимать значения от 0 до n. Более того, поскольку $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$, то задача подсчёта таких отображений сводится к задаче подсчёта числа способов разложить число n в сумму точно m слагаемых.

Определение 2.39 Выражение $\langle m\rangle_n = m(m+1)\cdots(m+n-1)$ называют возрастающим факториалом числа *m* длины *n*.

Замечание. Поскольку множество *Y* полностью различимо, то на нём можно ввести отношение порядка и, следовательно, расположить элементы по возрастанию. Тогда любое отображение из полностью *n*-неразличимого множества *X* в полностью различимое *m*-множество *Y* монотонно. Следовательно

$$|\mathrm{Map}(X,Y)| = |\mathrm{Mon}(X,Y)| = \frac{\langle m\rangle_n}{n!}. \qquad (2.10)$$

Пример 2.10 Сколько существует монотонных слов длины 3 в алфивите из 2 символов A = {a,b}?

Их существует ровно $\frac{\langle 2\rangle_3}{3!} = \binom{3+2-1}{3} = 4$ штуки.

aaa, aab, abb, bbb.

§10 Число сюрьективных отображений

Число всех сюръективных отображений из множества *X* на множество *Y* мы договорились обозначать Sur(*X*,*Y*). Обозначим через Sur*(*X*,*Y*) множество тех отображений из Map(*X*,*Y*), которые не являются сюръективными.

Очевидно, что Map(*X*,*Y*) = Sur(*X*,*Y*) $\cup$ Sur*(*X*,*Y*) и в случае конечности множеств *X* и *Y* имеем равенство |Sur(*X*,*Y*)| = |Map(*X*,*Y*)| – |Sur*(*X*,*Y*)|.

Для отыскания числа всех сюръективных отоюражений из множества *X* на множество *Y*, найдём число всех несюръективных отображений из *X* в *Y*.

Теорема 2.10 Пусть *X*, *Y* – непустые конечные, полностью различимые множества. Тогда число сюръективных отображений из множества *X* на множество *Y* равно

$$|\mathrm{Sur}(X,Y)| = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}(m-(m-2))^n + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}. \tag{2.11}$$

▼ Зафиксируем нумерацию множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Пусть $A_M = \{f \in \mathrm{Map}(X,Y) | f^{-1}(M) = \varnothing, M \subset Y\}$.

Тогда

$$\mathrm{Sur}^*(X,Y) = \bigcup_{M \in \binom{Y}{i}} A_M,$$

где $\binom{Y}{i}$ – i-элементное подмножество множества Y, причём i пробегает значения от 1 до m.

Множества A_M не являются попарно непересекающимися, поэтому воспользуемся правилом включения-исключения.

$$|\mathrm{Sur}^*(X,Y)| = \left|\bigcup_{M \in \binom{Y}{i}} A_M\right| = \sum_{M \in \binom{Y}{1}} |A_M| - \sum_{M \in \binom{Y}{2}} |A_M| + \ldots + (-1)^{m-2} \sum_{M \in \binom{Y}{m-1}} |A_M| + (-1)^{m-1}|A_M|.$$

Учитывая равенства $A_Y = \varnothing$ и $|A_M| = |\mathrm{Map}(X,(Y \backslash M))| = (|Y| - |M|)^n = (m - i)^n$, получим

$$\sum_{M \in \binom{Y}{i}} |A_M| = \binom{m}{i}(m-i)^n.$$

Отсюда

$$|\mathrm{Sur}^*(X,Y)| = \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^{m-3}\binom{m}{m-2}(m-(m-2))^n + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}. \quad ▲$$

Следствие 2.14 Пусть X, Y – непустые конечные множества, причём $|X| = |Y|$. Тогда число сюръективных (биективных) отображений из множества X на множество Y равно

$$\begin{aligned} m! = m^m - \binom{m}{1}(m-1)^m + \binom{m}{2}(m-2)^m + \ldots \\ + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}(m-(m-2))^m + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Если $1 \leq |X| < |Y|$, то $\mathrm{Sur}(X,Y) = \varnothing$, и мы получаем

Следствие 2.15 Пусть X, Y – непустые конечные множества, причём $1 \leq |X| < |Y|$. Тогда число всех отображений из множества X во множество Y равно

$$\begin{aligned} m^n = \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \ldots + (-1)^{m-3}\binom{m}{m-2}2^m + \\ + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-1}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Замечание. Числу всех сюръективных отображений из полностью неразличимого n-множества в полностью различимое m-множество можно придать комбинаторный смысл. Это число всевозможных разбиений n-множества на m полностью различимых подмножеств.

Пример 2.11 Сколько существует сюръективных отображений из полностью различимого множества $X = \{1, 2, 3\}$ в полностью различимое множество $Y = \{a,b\}$?

Их существует $2^3 - \binom{2}{1} = 6$ штук. На рисунке 2.5 перечисленны все такие отображения.

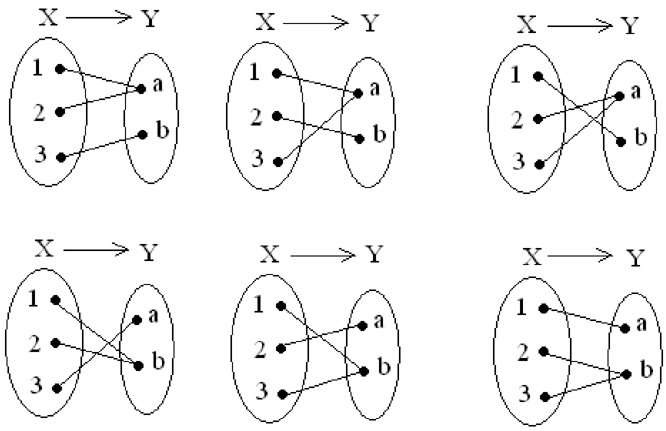


Рисунок 2.5 – Все сюръективные отображения

Следствие 2.16 Пусть X полностью различимое n-множество, Y – полностью неразличимое m-множество. Тогда число сюръективных отображений из множества X на множество Y равно

$$\left|\mathrm{Sur}(X,Y)\right| = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n. \qquad (2.14)$$

▼ Пусть X полностью различимое n-множество, Y – полностью неразличимое m-множество. Напомним, что $m \le n$. Введём отношение эквивалентности на множестве Sur(X,Y) следующим образом. Два отображения назовём эквивалентными, если спецификации соответствующих мультимножеств совпадают. Таких отображений будет ровно m! Отсюда следует, что для подсчёта числа сюръективных отображений из полностью различимого n-множества X на полностью неразличимое m-множество Y, необходимо общее число сюръективных отображений разделить на количество элементов в классе нами введённого отношения эквивалентности. Мы доказали справедливость формулы

$$\left|\mathrm{Sur}(X,Y)\right| = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n. \ ▲$$

Определение 2.40 Число $\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$ мы будем называть числом Стирлинга второго рода.

Замечание. У чисел Стирлинга второго рода есть комбинаторный смысл. Это число разбиений некоторого n-множества на m частей.

Пример 2.12 Сколько существует разбиений 3-множества на 2 части?

Их существует ровно $\frac{1}{2!}\left[2^3 - \binom{2}{1}\right] = 3$.

На рисунке 2.6 представлена урновая схема разбиения 3-множества на 2 части.

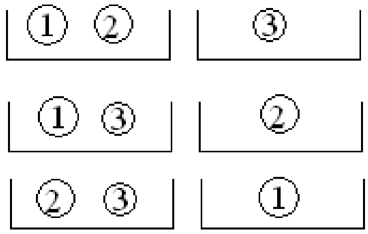


Рисунок 2.6 – Разбиения 3-множества на 2 части

Следствие 2.17 Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют следующему рекуррентному уровнению

$$\left\{ n \atop m \right\} = m \left\{ n-1 \atop m \right\} + \left\{ n-1 \atop m-1 \right\}. \tag{2.15}$$

▼ Чтобы получить разбиение n-множества на m частей, можно разбить (n–1)-множество на m частей и добавить последний элемент в эти m частей $m\left\{ n-1 \atop m \right\}$ способами. Но последний элемент может образовать еще одну часть $\left\{ n-1 \atop m-1 \right\}$ способами. По правилу суммы имеем $\left\{ n \atop m \right\} = m \left\{ n-1 \atop m \right\} + \left\{ n-1 \atop m-1 \right\}$. ▲

Замечание. Начальные условия для рекуррентного уравнения (2.15) следующие

$$\left\{ n \atop 1 \right\} = 1, \left\{ 0 \atop m \right\} = 0, \left\{ n \atop 0 \right\} = 0, \left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1, \left\{ n \atop n \right\} = 1.$$

Возвращаясь к примеру 2.12, имеем $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$

Таблица 2.2 – Таблица чисел Стирлинга

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3035	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34501	42525	22827	5880	750	45	1

Вычисление чисел Стирлинга второго вода по формуле (2.15) представляет определённые технические трудности. Проще, используя рекуррентное уравнение (2.14) для конкретной пары (n,m), построить таблицу чисел Стирлинга второго рода. В таблице 2.2 отображены некоторые значения чисел Стирлинга второго рода для первых десяти значений n и m. Пустые клетки таблицы – это нули.

Следствие 2.18 Число произвольных отображений из полностью различимого n-множества X в полностью неразличимое m-множество Y равно $\sum_{i=1}^{m} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$.

▼ Для подсчёта числа произвольных отображений в полностью неразличимое m-множество будем считать число сюръективных отображений в 1-, 2-, 3-, …, m-элементное множество. Поскольку такие отображения в силу сюръективности не пересекаются, то множно воспользоваться правилом суммы. ▲

Замечание. Сумма чисел Стирлинга второго рода есть число разбиений n-множества не более чем на m частей.

Пример 2.13 Сколько существует разбиений 4-множества A = {a,b,c,d} не более чем на три части?

Существует только одно разбиение множества A на одну часть {a,b,c,d}.

Существует семь разбиений множества A на две части: $\{a\}\cup\{b,c,d\}$, $\{b\}\cup\{a,c,d\}$, $\{c\}\cup\{b,a,d\}$, $\{d\}\cup\{b,c,a\}$, $\{a,b\}\cup\{c,d\}$, $\{a,c\}\cup\{b,d\}$, $\{a,d\}\cup\{c,b\}$.

Существует шесть разбиений множества A на три части: $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c,d\}$, $\{a,b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$, $\{a,c\}\cup\{b\}\cup\{d\}$, $\{a,d\}\cup\{b\}\cup\{c\}$, $\{a\}\cup\{b,c\}\cup\{d\}$, $\{a\}\cup\{b,d\}\cup\{c\}$.

Итого получаем 1+7+6=14. Т.е. всего существует 14 разбиений 4-множества на не более чем 3 части.

Сосчитаем теперь число сюръективных отображений из полностью неразличимого n-множества X в полностью различимое m-множество Y. У таких отображений есть следующая «числовая» интерпретация. Поскольку множество X полностью неразличимо, то мы имеем только количество элементов в нём. Поскольку отображения сюръективны, то всякое такое отображение есть разложение числа n на m неотрицательных различных слагаемых.

Теорема 2.11 Число сюръективных отображений из полностью неразличимого n-множества X в полностью различимое m-множество Y равно $\binom{n-1}{m-1}$.

▼ Для доказательства воспользуемся числовой интерпретацией. Всякому разложению $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ поставим в соответствие такую последовательность ($n1$, n_1+n_2, …, $n_1+\ldots+n_{m-1}$). Эта последовательность нумеруется отрезком [1; m–1] и каждая сумма не превосходит n–1.

Отображение числа на последовательность обратимо:

$$(s_1,s_2,\ldots,s_{m-1}) \to s_1+(s_2-s_1)+\ldots+(n-s_{m-1}).$$

Итак, мы построили биекцию между всевозможными суммами длины m и последовательностями длины m–1 полностью различимых чисел от 1 до n–1.

Следовательно, искомое число равно $\binom{n-1}{m-1}$. ▲

Пример 2.14 Сколько существует упорядоченных разложений числа 5 на 2 слагаемых?

Их существует $\binom{5-1}{2-1} = 4.$

5=1+4, 5=2+3, 5=3+2, 5=4+1.

Данную задачу можно решить, пользуясь урновой интерпретацией. Напомним, что шары неразличимы, а урны полностью различимы.

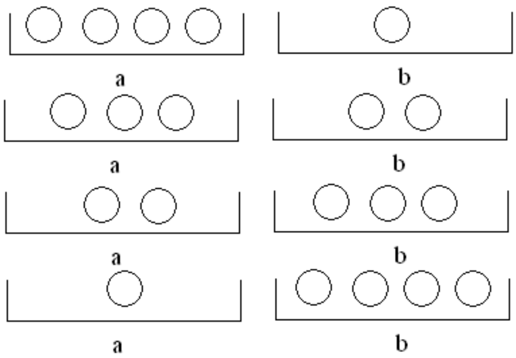


Рисунок 2.7 – Разложение числа 5 на два слагаемых

Найдём число сюръективных отображений из полностью неразличимого множества X в полностью неразличимое множество Y. Поскольку область определения каждого такого отображения – полностью неразличимое множество, то мы опять можем воспользоваться числовой интерпретацией и раскладывать число n в сумму теперь уже неуорядоченных неотрицательных m слагаемых, поскольку множество Y также неразличимо.

Для данных чисел найти явное выражение технически трудно, зато сравнительно легко найти рекуррентное выражение для них.

Обозначим через $P(n,m)$ число разложений числа n на m неотрицательных слагаемых.

Теорема 2.12 Число сюръективных отображений из полностью неразличимого n-множества X в полностью неразличимое m-множество Y равно числу $P(n,m)$, которое удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$P(n,m) = P(n,m–1) + P(n–m,m), P(0,n) = 1, P(n,1) = 1.$$

▼ Для доказательства воспользуемся числовой интерпретацией. Возьмём число n, которое может быть разбито на слагаемые n_1, n_2, …, n_m. Каждое из этих слагаемых может принимать значения от 0 до n. Если число $n_m = 1$ не использовано в качестве слагаемого, то это можно сделать $P(n–1,m–1)$ способами. Если же число n_m использовано, то это можно сделать $P(n–m,m)$ способами. По правилу суммы имеем

$$P(n,m) = P(n–1,m–1) + P(n–m,m).$$

Замечание. По определению полагаем $P(0,m) = 1$. Равенство $P(n,1) = 1$ следует из здравого смысла, так как число n можно представить в виде одного неотрицательного слагаемого единственным способом.

Пример 2.15 Найти число различных разложений числа 10 ровно на 3 слагаемых.

Согласно таблице 2.3, приведённой ниже, их число равно 8:

10=1+1+8, 10=2+2+6, 10=1+2+7, 10=2+3+5, 10=1+3+6, 10=2+4+4, 10=1+4+5, 10=3+3+4.

Зная рекуррентное уравнение для числа разбиений натурального числа n на m слагаемых, можно составить таблицу значений функции $P(n,m)$.

Таблица 2.3 – Числа разложений

m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	1	1							
4	1	2	1	1						
5	1	2	2	1	1					
6	1	3	3	2	1	1				
7	1	3	4	3	2	1	1			
8	1	4	5	5	3	2	1	1		
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Следствие 2.19 Число произвольных отображений из полностью неразличимого n-множества X в полностью неразличимое m-множество Y равно

$$\sum_{i=1}^{m} P(n,m).$$

▼ Для подсчёта числа всех отображений из полностью неразличимого n-множества в полностью неразличимое m-множество разобъём их на классы эквивалентности. В класс F_i отнесём все сюръективные отображения из полностью неразличимого n-множества в полностью неразличимое i-множество Y_i, $1 \le i \le m$. Поскольку для каждого i, $F_i \in \mathrm{Sur}(X,Y_i)$, то $|F_i| = P(n,i)$ и общее число отображений

$$Map(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} P(n,m). \text{ ▲}$$

Раздел 3. Основы теории графов

§1 Основные понятия теории графов

Определение 3.1 Графом Γ называется пара (V,E), где V – любое непустое множество, а $E\subseteq V^2$ – бинарное отношение, называемое смежностью.

Определение 3.2 Элементы множества V будем называть вершинами графа, а элементы множества E – его рёбрами.

Определение 3.3 Если множество V конечно, а отношение E симметрично и антирефлексивно, то граф будем называть обыкновенным.

Определение 3.4 Граф $\Gamma^* = (V,E^*)$ называется дополнительным к графу $\Gamma = (V,E)$, если $E^* = V^2\backslash E$.

Опишем традиционную геометрическую интерпретацию графа. Пусть $\Gamma = (V,E)$ – некоторый граф и $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,\ldots e_m\}$. Фиксируем на плоскости произвольным образом n точек и произвольным образом дадим им в качестве имен имена вершин данного графа; в итоге на плоскости возникнут точки, обозначенные как v_1, …, v_n. Затем для каждой пары точек v_i,v_j таких, что $\{v_i,v_j\}\in E$, проведём кривую, соединяющую точки v_i,v_j. В результате таких действий возникнет некоторый рисунок, который и называется геометрической интерпретацией графа. Заметим, что одному и тому же графу соответствует много рисунков, которые могут быть его геометрическими интерпретациями.

Пример 3.1 Построим геометрическую интерпретацию графа на пяти вершинах.

$$V=\{1,2,3,4,5\},\ E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,5\},\{1,4\},\{3,1\}\}.$$

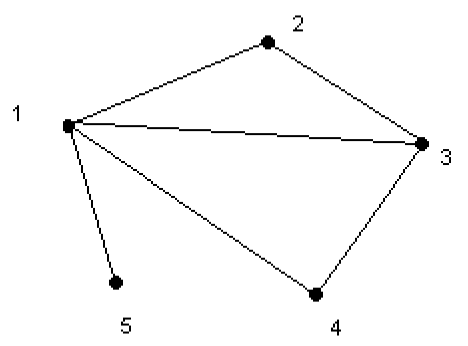


Рисунок 3.1 – Геометрическая интерпретация графа

Для построения дополнительного графа перечислим множество E^{*} = $\{\{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$. На рисунке 3.2. изображён граф дополнительный к графу *Г*.

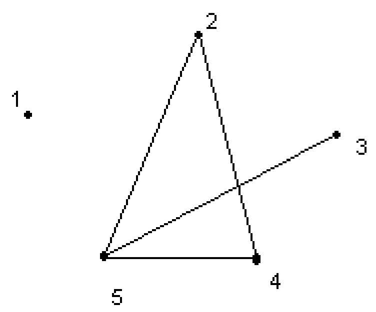


Рисунок 3.2 – Дополнительный граф

Графы вовсе не обязаны быть всегда обыкновенными. Например, на рисунке 3.3 изображён граф, отношение смежности в котором не обладает свойствами симметричности и антирефлексивности. Более того, если множество *V* графа *Г* является мультимножеством, то граф может обладать кратными рёбрами. Граф, обладающий кратными рёбрами, называют мультиграфом.

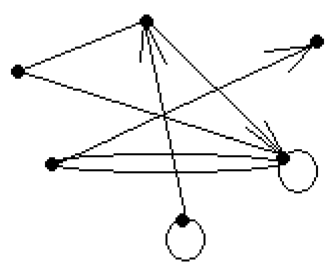


Рисунок 3.3 – Граф с петлями и кратными рёбрами

В дальнейшем под графом мы будем понимать обыкновенный граф, если не оговорено противное.

Определение 3.5 Вершины v_i,v_j графа $Г$, такие что $\{v_i,v_j\}\notin E$, называются смежными.

Определение 3.6 Смежные вершины v_i,v_j графа $Г$ называются инцидентными ребру $\{v_i,v_j\}$, а ребро $\{v_i,v_j\}$ называется инцидентным каждой из вершин v_i,v_j.

Определение 3.7 Граф $Г_1 = (V_1,E_1)$ называется рёберным графом графа $Г_2 = (V_2,E_2)$, если $V_1 = E_2$ и $E_1 = V_2$.

Т.е. вершинами нового графа объявляются рёбра старого графа, и две вершины нового графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра старого графа инцидентны одной вершине.

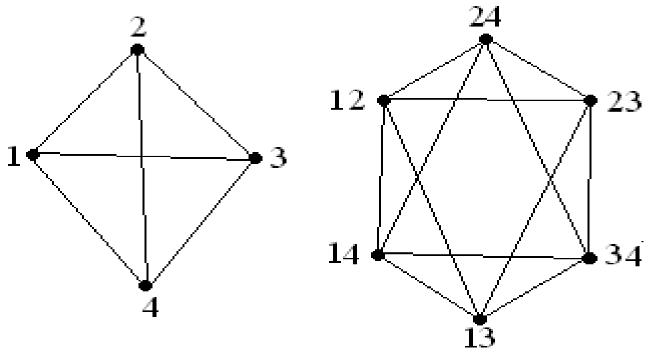


Рисунок 3.4 – Граф и рёберный граф

На рисунке 3.4 слева изображён граф тетраэдра, а справа изображён рёберный граф к графу тетраэдра – граф октаэдра.

Количество ребер, инцидентных данной вершине a, называется её степенью; степень вершины a будем обозначать через $d(a)$. В графе на рисунке 3.1 степень вершины «1» равна 4, степень вершины «2» равна 2, степень вершины «3» равна 3, степень вершины «4» равна 2, степенны вершины «5» равна 1.

Теорема 3.1 (о рукопожатиях) Пусть $Г$ – произвольный граф, тогда сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер этого графа.

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m\,,$$

где m – число рёбер графа Г.

▼ При подсчёте суммы степеней ребро $\{v_i,v_j\}$ будет учитываться дважды: как $d(v_i)$ и как $d(v_j)$.▲

Следствие 3.1 Произвольный граф содержит чётное число вершин нечётной степени.

▼ Пусть V_1 и V_2 – множества вершин чётной и нечётной степени соответственно. Тогда по теореме 3.1 запишем равенство

$$\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = 2m,$$

где m – число ребер графа. Очевидно, что первое слагаемое – чётно, значит, и второе слагаемое – чётно. А поскольку второе слагаемое есть сумма нечётных чисел, следовательно, их число – чётно. ▲

Определение 3.8 Граф Γ называется регулярным графом степени k, если степень каждой его вершины равна k.

Следствие 3.2 Для регулярного графа степени k на n вершинах и m рёбрах, справедливо следующее равенство

$$m = \frac{nk}{2}.$$

Определение 3.9 Вершины степени нуль называются изолированными.

На рисунке 3.2 вершина 1 – изолированная.

Определение 3.10 Вершины степени один называют висячими.

На рисунке 3.2 вершина 3 – висячая.

Определение 3.11 Пусть $\Gamma_1 = (V_1,E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2,E_2)$ – два графа таких, что $V_1 \subseteq V_2$ и $E_1 \subseteq E_2$, тогда говорят, что Γ_1 является подграфом графа Γ_2.

Определение 3.12 Пусть $\Gamma_1 = (V_1,E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2,E_2)$ – два графа таких, что $V_1 \subseteq V_2$ и $E_1 \subseteq E_2$, причём отношение смежности на множестве вершин V_1 есть ограничение отношения смежности на V_2, то говорят, что Γ_1 индуцированный подграфом графа Γ_2.

Рисунок 3.5 – Индуцированный подграф

Граф, изображённый слева на рисунке 3.5, является индуцированным подграфом графа, приведённого в примере 3.1, а граф, изображённый на рисунке справа, является подграфом графа, приведённого на рисунке 3.1, но не является его индуцированным подграфом.

Определение 3.13 Если в некотором графе $\Gamma = (V,E)$ любые две вершины смежны и $|V| = n$, то граф называется полным графом на n вершинах или n-кликой. n-клику будем обозначать K_n.

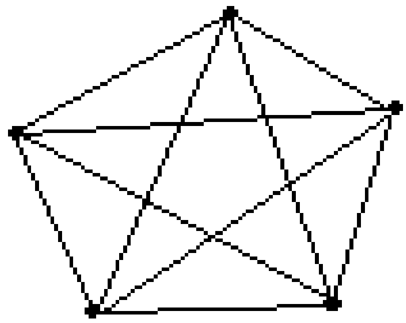


Рисунок 3.6 – 5-клика

На рисунке 3.6 изображён граф K_5.

Определение 3.14 Граф, дополнительный к полному графу на n вершинах, называется n-кокликой.

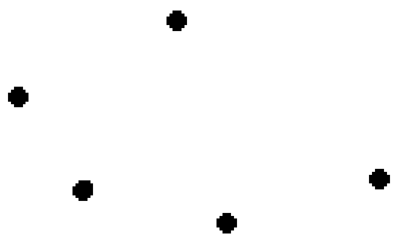


Рисунок 3.7 – 5-коклика

Граф, дополнительный к графу K_5, изображён на рисунке 3.7.

Определение 3.15 Граф называется многодольными, если его вершины можно разбить на несколько непересекающихся коклик, называемых долями, таким образом, чтобы смежные вершины находились в разных кокликах.

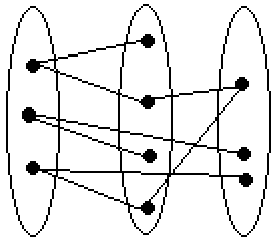


Рисунок 3.8 – Многодольный граф

На рисунке 3.8 изображён трёхдольный граф.

Определение 3.16 Граф называется полным многодольными, если любые две вершины смежны тогда и только тогда, когда они принадлежат разным долям.

Полный n-дольный граф с долями мощности n_1, n_2, …, n_k обозначают так $K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

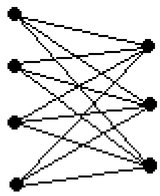


Рисунок 3.9 – Двудольный граф

На рисунке 3.9 изображён полный двудольный граф $K_{3,4}$.

Пусть $\Gamma = (V,E)$ – граф. Построим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае обычного графа эта матрица симметрична. Она называется матрицей смежности графа $\Gamma = (V,E)$. В приведённом выше примере 3.1 матрица смежности такова:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопоставим графу $\Gamma = (V,E)$ ещё одну матрицу B. Будем считать, что $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ – по-прежнему множество вершин и пусть $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ – множество рёбер. Определим матрицу $B = (b_{ij})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, a_i \in b_j, \\ 0. a_i \notin b_j. \end{cases}$$

Введённая так матрица B называется матрицей инцидентности данного графа.

Очевидно, вид матрицы смежностей и вид матрицы инцидентности существенно зависит от того, как именно занумерованы вершины и рёбра. Если в приведенном выше примере 3.1 графа считать, что

$$b_1=\{1,2\},\ b_2=\{1,3\},\ b_3=\{1,4\},\ b_4=\{1,5\},\ b_5=\{2,3\},\ b_6=\{3,4\},$$

то матрица инцидентности будет такой:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы инцидентности всегда ровно две единицы, остальные элементы равны нулю. Если в графе все вершины имеют степень ноль, то матрица инцидентности – это матрица, сплошь состоящая из одних нулей.

Наконец, введём одно из важнейших понятий в теории графов – понятие изоморфизма графов.

Определение 3.17 Если существует биективное отображение $f:V_1 \to V_2$ графов $\Gamma_1 = (V_1,E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2,E_2)$, которое сохраняет отношение смежности в графе, то графы $\Gamma_1 = (V_1,E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2,E_2)$ называются изоморфными.

Т.е. для любых $v_i,v_j \in V_1$ найдётся $f \in \mathrm{Bij}(V_1,V_2)$, что выполнено $(v_i,v_j)^f = ((v_i)^f,(v_j)^f)$.

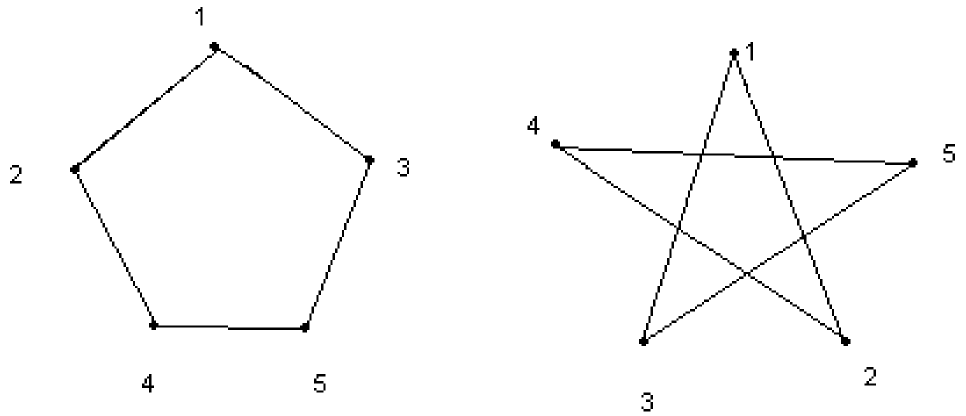


Рисунок 3.10 – Изоморфные графы

На рисунке 3.10 изображены два изоморфных графа. Вершины пронумерованы так, что изоморфизм этих графов задаётся единичным элементом группы S_5.

На самом деле, установить изоморфизм двух графов представляет собой довольно трудную задачу. Нетрудно заметить, что при изоморфизме каждая вершина переходит в вершину с той же степенью. Поэтому наверняка неизоморфны графы, в списке локальных степеней которых есть резкие отличия (например, в одном графе есть вершина со степенью 3, а в другом такой степени вообще нет).

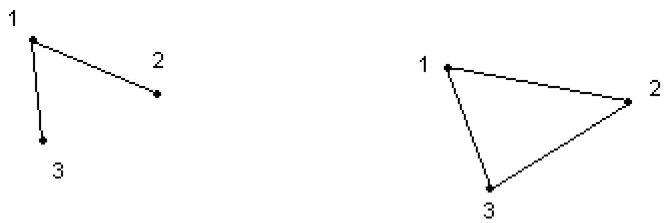


Рисунок 3.11 – Неизоморфные графы

На рисунке 3.11 изображены два неизоморфных графа. У графа слева есть две вершины степени 1, а в графе справа вершин степени 1 вообще нет.

Однако проверка двух графов на изоморфизм представляет собой намного более трудную задачу, чем простое сравнение степеней.

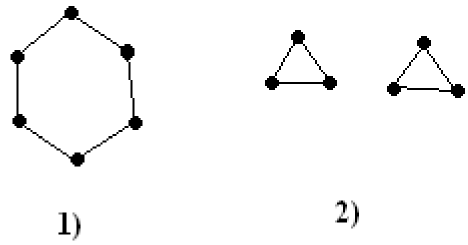


Рисунок 3.12 – Неизоморфные графы

На рисунке 3.12 изображены два регулярных графа на шести вершинах степени два; один – граф шестиугольника, другой – объединение двух изолированных 3-клик. Эти графы, очевидно, не изоморфны.

Пусть *Г* – произвольный граф, *H* – его подграф, *v* – вершина графа *Г*, *e* – ребро графа *Г*.

Определение 3.18 Подграф *H–v* получается из подграфа *H* путём удаления вершины *v* и всех рёбер, ей инцидентных.

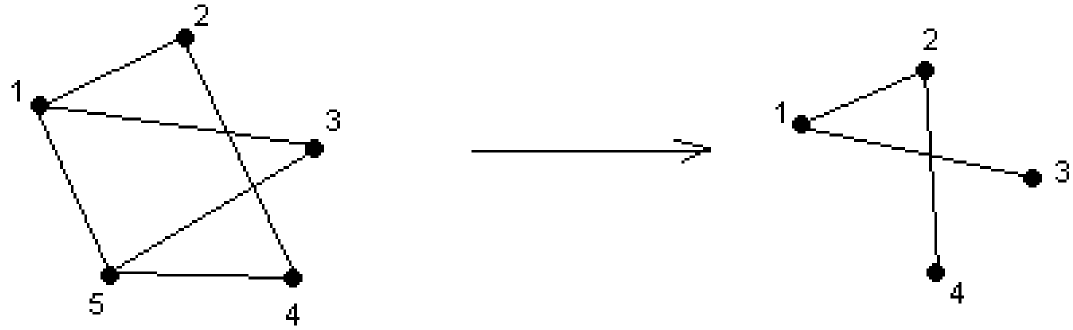


Рисунок 3.13 – Операция удаления вершины 5

На рисунке 3.13 изображён граф до удаления вершины 5 и после удаления вершины 5.

Отметим, что если *v* не лежит в подграфе *H*, то *H–v* = *H*.

Определение 3.19 Подграф *H–e* получается из графа *H* удалением ребра *e*.

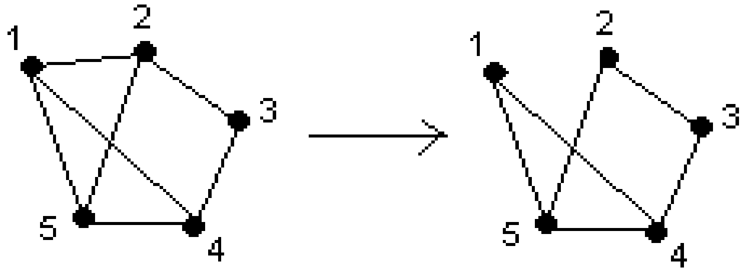


Рисунок 3.14 – Операция удаления ребра

На рисунке 3.14 изображён граф до удаления ребра $\{1,2\}$ и после удаления ребра $\{1,2\}$.

Отметим, что если ребро e не лежит в подграфе H, то $H–e = H$.

Определение 3.20 Подграф $H+e$ получается добавлением нового ребра e и вершин, ему инцидентных, к графу H.

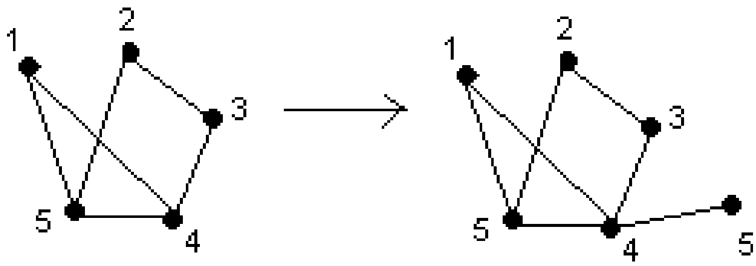


Рисунок 3.15 – Операция добавления ребра

На рисунке 3.15 изображён граф перед добавлением ребра $\{4,5\}$ и после добавления ребра $\{4,5\}$.

Отметим, что если ребро e принадлежит графу H, то $H+e = H$.

Определение 3.21 Два ребра $\{v_1,v_2\}$, $\{v_3,v_4\}$ назовём смежными, если $\{v_1,v_2\} \cap \{v_3,v_4\} \neq \varnothing$.

Определение 3.22 Последовательность рёбер графа $Г$ вида $\{v_1,v_2\}$, $\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\},\{v_k,v_{k+1}\}$ называется маршрутом или путём. При этом точки v_1, v_{k+1} называются концевыми. Если $v_1 = v_{k+1}$, то маршрут называется замкнутым.

Маршрут часто записывают так $v_1,v_2,v_3,\ldots, v_{k-1}, v_k,v_{k+1}$.

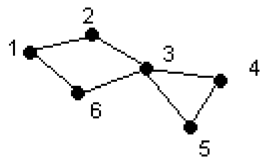


Рисунок 3.16 – Маршрут в графе

На рисунке 3.16 показан маршрут 1, 2, 3, 4, 5, 3, 6.

В произвольном маршруте любое ребро и любая вершина могут повторяться.

Определение 3.23 Маршрут без повторяющихся ребер называют цепью.

На рисунке 3.16 показана цепь 1, 2, 3, 4, 5, 3.

Определение 3.24 Цепь называется простой, если в ней нет повторяющихся вершин, кроме, может быть, концевых.

На рисунке 3.16 показана простая цепь 1, 2, 3, 4, 5.

Определение 3.25 Замкнутая простая цепь называется циклом.

На рисунке 3.16 показан цикл 1, 2, 3, 6, 1.

Теорема 3.2 Если в графе Γ для некоторых вершин v_i,v_j существует (v_i,v_j)-маршрут, то существует и простая (v_i,v_j)-цепь.

▼ Рассмотрим в графе (v_i,v_j)-маршрут наименьшей длины. Покажем, что этот маршрут является простой цепью. Если в нём имеется повторяющаяся вершина v, то заменяя часть маршрута от первого вхождения v до второго вхождения на одну вершину v, мы получим более короткий (v_i,v_j)-маршрут. ▲

Теорема 3.3 Если степень каждой вершины графа Γ не меньше двух, то граф Γ содержит цикл.

▼ Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда граф Γ – связен. Так как степень каждой вершины v_1 больше двух, то она смежна, по крайней мере, с двумя другими точками v_2, v_3. В свою очередь, вершина v_2 смежна, по крайней мере, с двумя другими точками v_1, v_4. Таким образом, в графе возникает маршрут $v_1,v_2,v_4,\ldots,v_t$. В силу того, что степень каждой вершины не меньше двух, то данный маршрут можно построить таким образом, чтобы в нём не было повторяющихся рёбер. Следовательно, данный маршрут является цепью. Так как число вершин в графе конечно, то построенная цепь будет замкнутой. Если эта цепь не является простой, скажем, вершина x встречается два раза, то удалим часть этой цепи, начиная с первого вхождения этой вершины и до второго вхождения данной вершины, причём сама вершина останется в построенной цепи. Построенная цепь является циклом. ▲

§2 Связные графы

Определение 3.26 Если между любыми двумя вершинами подграфа H графа $Г$ найдётся, по крайней мере, один путь, то подграф H называют компонентой связности графа $Г$. Если при этом H совпадает с $Г$, то $Г$ называют связным графом.

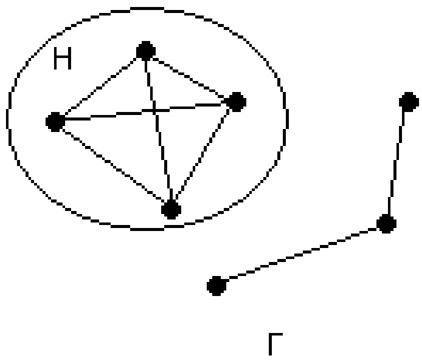


Рисунок 3.17 – Компоненты связности графа

На рисунке 3.17 граф $Г$ не связен. Подграф H графа $Г$ является компонентой связности графа Г.

Граф на n вершинах, m рёбрах и имеющий k компонент связности будем обозначать так $Г(n,m,k)$ или (n,m,k)-граф.

Определение 3.27 Разрезающим множеством рёбер графа называется множество рёбер, удаление которого из графа приводит к увеличению числа компонент связности.

Определение 3.28 Минимальное по включению разрезающее множество рёбер графа называется его разрезом.

Определение 3.29 Мостом графа называется ребро, составляющее одноэлементный разрез.

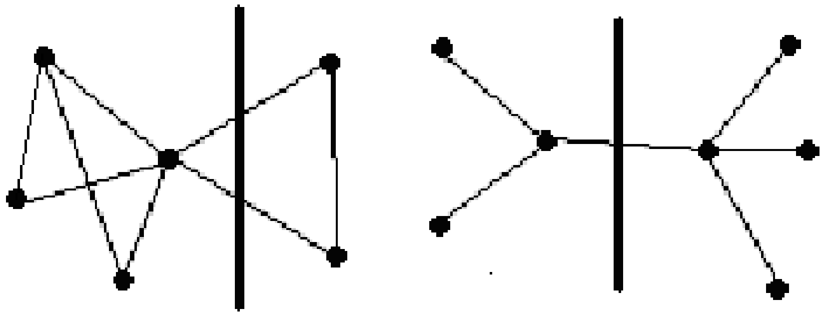


Рисунок 3.18 – Разрез графа

На рисунке 3.18 показаны примеры разрезов графов, причём справа показан мост.

Теорема 3.4 При удалении из графа моста, число компонент связности увеличивается точно на единицу.

▼ По определению мост – это ребро, удаление которого приводит к увеличению компонент связности графа *Г*. Докажем, что при удалении моста число компонент связности увеличится точно на единицу. Для этого достаточно рассмотреть связный граф *Г*, в котором ребро $e=uv$ является мостом. Пусть x – произвольная вершина графа Г, для которой существует простая (x,v)-цепь. Если в этой простой цепи не встречается ребро e, то вершины x,v лежат в одной компоненте связности графа $Г–e$. Если в этой цепи встречается ребро e, тогда эта цепь имеет вид: $x,...,u,v$, где последние две вершины u и v соединены ребром e. Удаление этого ребра приведёт к тому, что вершины x и u останутся в одной компоненте связности. ▲

Следствие 3.3 При удалении из графа рёбер его разреза число компонент связности увеличивается точно на единицу.

▼ Пусть множество рёбер $\{e_1,\ldots,e_k\}$ является разрезом графа *Г*, причём $k > 1$. Случай, когда $k = 1$, разобран в теореме 3.3. По определению разреза удаление рёбер $\{e_1,\ldots,e_{k-1}\}$ не приводит к увеличению числа компонент связности графа *Г*. Применяя теорему 3.3 к графу $Г–e_1–\ldots–e_{k-1}$, получим требуемое. ▲

Теорема 3.5 Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле.

▼(Необходимость)

Пусть $e = uv$ – мост графа Γ. Если e содержится в некотором цикле, тогда удаление ребра e не изменит числа компонент связности графа. Противоречие с тем, что e – мост.

(Достаточность)

Пусть ребро $e = uv$ содержится в некотором цикле, тогда удаление этого ребра не изменит числа компонент связности графа, следовательно, e – не мост. ▲

Определение 3.30 Вершина v графа Γ называется точкой сочленения, если граф $\Gamma – v$ имеет больше компонент связности, чем граф Γ.

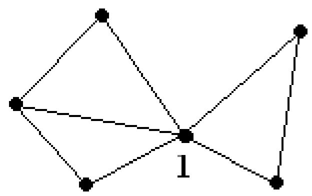


Рисунок 3.19 – Вершина 1 – точка сочленения

На рисунке 3.19 точка 1 является точкой сочленения.

Определение 3.31 Связный граф называется неразделимым, если он не содержит точек сочленения.

Определение 3.32 Блоком графа называется любой его максимальный неразделимый подграф.

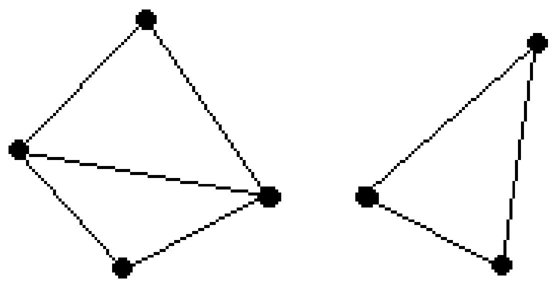


Рисунок 3.20 – Блоки графа

На рисунке 3.20 показаны блоки графа, изображённого на рисунке 3.19.

Очевидно, что любой неразделимый подграф графа Γ, содержится в некотором его блоке. Следовательно, любое ребро графа Γ, также лежит в некотором блоке. То же самое относится и к произвольному циклу.

Теорема 3.6 Пусть v – произвольная вершина некоторого связного графа Γ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) v – точка сочленения;

2) существует разбиение множества вершин графа Γ–v на два непустых подмножества U и W такое, что для любых $u \in U$ и $w \in W$ вершина v принадлежит любой простой (u,w)-цепи;

3) существуют различные вершины u, w, не равные v, такие, что v принадлежит любой простой (u,w)-цепи.

▼1)→2). Так как v – точка сочленения, то её удаление приведёт к тому, что граф Γ–v потеряет свойство связности. Обозначим через U множество вершин одной компоненты связности, а через W – множество остальных вершин. Тогда любые две вершины $u \in U$ *и* $w \in W$ лежат в разных компонентах связности графа Γ–v. Отсюда следует, что любая простая (u,w)-цепь проходит через вершину v.

2)→3). Очевидно.

3)→1). Поскольку вершины $u \in U$ и $w \in W$ лежат в разных компонентах связности графа Γ–v, то v – точка сочленения. ▲

Теорема 3.7 Любые два различные блока связного графа Γ имеют не более одной общей вершины, которая является точкой сочленения.

▼ Пусть два различных блока имеют две общие вершины u,v. Пусть u – точка сочленения. Тогда граф Γ–u – связен. Противоречие с тем, что u – точка сочленения. Если два различных блока имеют одну общую точку, то её удаление приведёт к тому, что граф утратит свойство связности. ▲

Теорема 3.8 Пусть Γ – (n,m,k)-граф. Тогда выполнено двойное неравенство.

$$n-k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

▼ Обозначим через H граф, представляющий собой объединение k клик и имеющий m^* рёбер $H=H_1\cup\ldots\cup H_k$.

При помощи графа H оценим сверху число рёбер в графе Γ.

Не нарушая общности, можно считать, что $|H_1| = n_1 \geq \ldots \geq |H_k| = n_k$. Докажем, что $n_2 = 1$. Пусть $n_2 > 1$ и вершина x есть вершина графа H_2. Удалим $n_2–1$ рёбер, смежных с x, из H_2. Затем добавим n_1 рёбер, соединяющих вершину x со всеми вершинами из H_1. Поскольку $n_1 > n_2–1$, то мы получим граф, имеющий n вершин, k компонент связности и больше, чем m^* рёбер. Это противоречит тому, что $n_2 > 1$. Следовательно, $n_2 = \ldots = n_k = 1$. Т.е. все ребра графа H содержатся в H_1. Поэтому

$$m^* = \frac{n_1(n_1-1)}{2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Теперь оценим снизу число рёбер в (n,m,k)-графе. Проведём доказательство методом математической индукции по числу рёбер.

I шаг. Если $m = 0$, то $n = k$ и требуемое неравенство очевидно.

II шаг. Предположим, что наше неравенство выполняется при всех числах рёбер, не превосходящих m.

III шаг. Рассмотрим (n,m,k)-граф. Пусть граф $H = Г–e$, где e – некоторое ребро графа. Тогда H является $(n,m–1,k_1)$-графом, где $k_1 \leq k+1$ в силу теоремы 3.4. Следовательно, $m–1 \geq n–k_1 \geq n–k–1$, т.е. $m \geq n–k$. ▲

Следствие 3.4 Пусть $Г$ – обыкновенный (n,m)-граф. Если выполнено неравенство

$$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

то граф $Г$ – связен.

В обыкновенном графе в любой его компоненте связности можно ввести понятие расстояния между двумя вершинами. Две вершины v_i, v_j находятся на расстоянии d, если в кратчайшем пути, соединяющим эти две вершины, точно d рёбер.

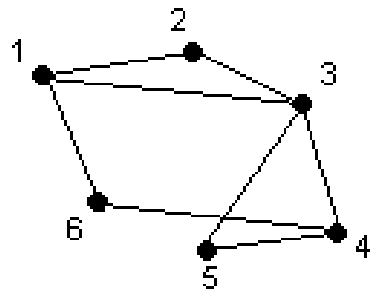


Рисунок 3.21 – Вершины 1 и 4 находятся на расстоянии 2

Определение 3.33 Множество вершин графа, смежных с данной вершиной a, называется окрестностью этой вершины и обозначается $\Gamma_1(a)$.

Множество всех вершин, находящихся на расстоянии i от фиксированной вершины a, будем обозначать так $\Gamma_i(a)$. На рисунке 3.21 $\Gamma_1(1) = \{2,3,6\}$, $\Gamma_2(1) = \{4,5\}$.

Определение 3.34 Диаметром графа называют натуральное число, равное наибольшему из всех расстояний в данном графе.

На рисунке 3.21 изображен граф диаметра 2.

§3 Эйлеровы графы

Своё название эйлеровы графы получили в честь Л. Эйлера, который первым рассмотрел такие графы в 1736 году в своей знаменитой работе о кенигсбергских мостах. Этой работой Эйлер, по существу, положил начало новому разделу математики – теории графов.

Задача о кенигсбергских мостах состояла в следующем. На реке Прегель в Кенигсберге было два острова, соединённых между собой и с берегами семью мостами, как показано на рисунке 3.22. Спрашивается, можно ли, начиная с некоторого места суши, обойти все мосты по одному разу и вернуться назад?

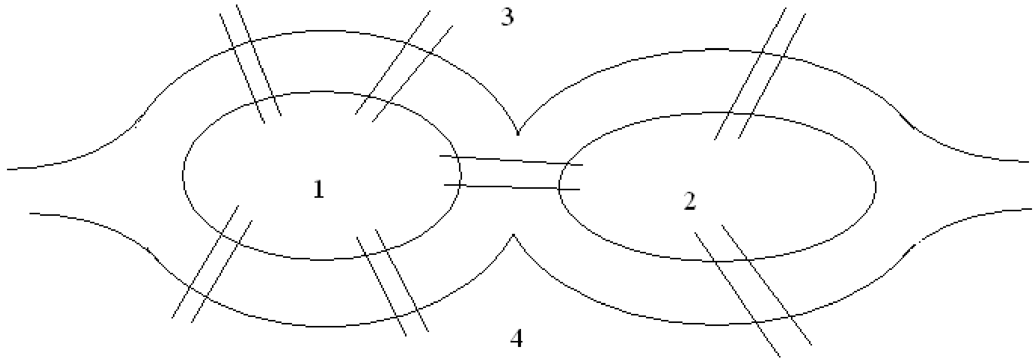


Рисунок 3.22 – Схема мостов

Для решения этой задачи Эйлер предложил рассмотреть граф, изображённый на рисунке 3.23.

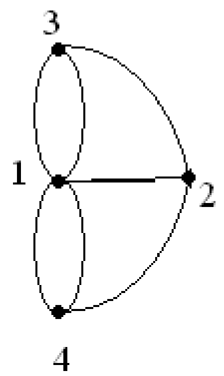


Рисунок 3.23 – Граф

Определение 3.35 Замкнутая цепь, содержащая все рёбра графа, называется эйлеровой цепью.

Определение 3.36 Граф, содержащий эйлерову цепь, будем называть эйлеровым графом.

Иными словами, эйлеров граф – это связный граф, в котором имеется замкнутая цепь, проходящая точно один раз через каждое его ребро.

Из этих определений следует, что решение задачи о кенигсбергских мостах сводится к поиску эйлеровой цепи в этом графе.

Теорема 3.9 (Эйлер, 1736) Для неодноэлементного связного графа Γ следующие утверждения эквивалентны:

1) Γ – эйлеров граф;
2) каждая вершина графа Γ имеет чётную степень.

▼ 1)→2). Пусть P – эйлерова цепь графа $Г$ с начальной вершиной v_0. Двигаясь по цепи P, будем подсчитывать степени вершин. Прохождение каждой промежуточной вершины в цепи P вносит число 2 в её степень. Первое и последнее ребро цепи P дают вклад 2 в степень вершины v_0. Так как цепь P содержит каждое ребро графа точно один раз, отсюда следует чётность степеней всех вершин графа $Г$.

2)→1). Возьмём некоторую вершину a_0 графа $Г$ и рассмотрим максимальную цепь P_1, исходящую из вершины a_0. Так как $Г$ – связный и степень каждой вершины чётная, то P_1 проходит через все вершины и заканчивается в a_0. Поэтому P_1 – цикл. Если этот цикл не является эйлеровым, то он содержит вершину b_0 инцидентную ребру, не принадлежащему P_1. Исходя из вершины b_0, построим новую цепь P_2, используя рёбра, не принадлежащие P_1. Это возможно благодаря тому, что степень каждой вершины графа $Г$ чётная. Новый цикл P_2 закончится в вершине b_0. Но тогда мы сможем построить цикл больший, чем P_1. Будем двигаться от вершины a_0 по циклу P_1 до вершины b_0, затем пойдём по циклу P_2 и вернёмся к вершине b_0, а затем продолжим путь по циклу P_1 до вершины a_0. Таким образом, нам удалось построить цикл, содержащий рёбра, не принадлежащие циклу P_1. Если этот новый цикл снова не является эйлеровым, то опять повторим процедуру, до тех пор, пока не будут задействованы все рёбра графа $Г$. ▲

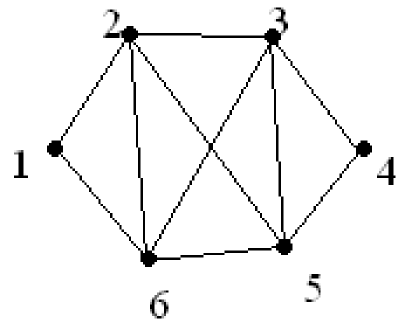


Рисунок 3.24 – Граф

На рисунке 3.24 приведён пример эйлерова графа. Эйлеров цикл может быть, например, следующим 1, 6, 2, 5, 6, 3, 5, 4, 3, 2, 1.

Следствие 3.5 Пусть Γ произвольный граф, содержащий $2l$ вершин нечётной степени, где $l > 1$. Тогда множество всех рёбер графа можно разбить на l цепей, каждая из которых соединяет две вершины нечётной степени.

▼ Очевидно, утверждение достаточно доказать для случая, когда граф Г связен. Пусть u_1, u_2, …, u_{2l} – все вершины нечётной степени связного графа Γ. Рассмотрим граф G, полученный из Γ добавлением l новых ребер e_1, ..., e_l таких, что $e_i = u_{2i-1}u_{2i}$; $(1 \le \mathrm{i} \le l)$. Граф G, очевидно, связен и степень каждой его вершины чётное число. Поэтому в G существует эйлерова цепь.

Можно считать, что цепь P начинается с ребра e_1. Удаляя из P все ребра e_i $(1 \le i \le l)$ мы, очевидно, получим l нужных нам цепей.▲

Определение 3.37 Цепь в графе Γ называется полуэйлеровой, если она содержит все рёбра и все вершины графа.

Определение 3.38 Граф называется полуэйлеровым, если в нём существует полуэйлерова цепь.

Иными словами, полуэйлеров граф – это связный граф, в котором имеется цепь (возможно, незамкнутая), проходящая точно один раз через каждое ребро.

Следствие 3.6 Связный граф Γ является полуэйлеровым графом тогда и только тогда, когда Γ содержит не более двух вершин нечётной степени.

Следствие 3.7 Пусть связный граф Γ содержит две вершины нечётной степени u, v. Тогда существует (u,v)-цепь, содержащая все рёбра графа Γ.

§4 Гамильтоновы графы

Определение 3.39 Гамильтоновой цепью графа называется его простая цепь, которая проходит через каждую вершину графа точно один раз.

Определение 3.40 Цикл графа, проходящий через каждую его вершину, называется гамильтоновым циклом.

Определение 3.41 Граф называется гамильтоновым, если он обладает гамильтоновым циклом.

Указанные названия цепей и циклов связаны с именем Уильяма Гамильтона, который в 1859 году предложил следующую игру-головоломку: требуется, переходя по очереди от одной вершины додекаэдра к другой вершине по его ребру, обойти все 20 вершин по одному разу и вернуться в начальную вершину.

Сначала дадим необходимые определения и докажем одну вспомогательную лемму.

Пусть граф Γ имеет n вершин $v_1, v_2, ..., v_n$. Положим d_i = d(v_i) ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) и будем считать, что вершины графа упорядочены таким образом, что $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$.

Определение 3.42 Последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$ называют числовой последовательностью степеней графа Γ.

Определение 3.43 Будем говорить, что числовая последовательность $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ мажорируется числовой последовательностью $d`_1 \le d`_2 \le \ldots \le d`_n$, если $d_i \le d`_i$, для любого $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Лемма 3.1 Пусть обыкновенный граф Γ' получен из обыкновенного графа Γ добавлением одного нового ребра e. Тогда последовательность степеней графа Γ мажорируется последовательностью степеней графа Γ'.

▼ Ясно, что при добавлении к графу нового ребра $e = uv$, где $u \ne v$, точно у двух вершин u и v степени увеличатся на единицу. Новую последовательность степеней можно привести к неубывающему виду. Полученая таким образом неубывающая последовательность, очевидно, будет мажорировать исходную.▲

Теорема 3.10 (Хватал, 1972) Пусть Γ обыкновенный граф, $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ – его последовательность степеней и $n > 3$. Если для любого k верно, что из $d_k \le k < n/2$ следует $d_{n-k} \ge n-k$ (*), то граф Γ – гамильтонов.

▼ Сделаем сначала три очевидных замечания.

1) Если $d_k \le k$, то число вершин, степень которых не превосходит k, больше или равно k. Очевидно, верно и обратное утверждение.

2) Если $d_{n-k} \ge n-k$, то число вершин, степень которых не меньше $n-k$, больше или равно k+1 (достаточно заметить, что в последовательности $d_{n-k}, d_{n-k+1}, \ldots, d_n$ имеется k+1 чисел). Верно и обратное утверждение.

3) Если условие (*) верно для некоторой последовательности степеней, то оно верно и для мажорирующей её последовательности.

Пусть существует обыкновенный n-граф, где $n > 3$, который удовлетворяет условию (*), но не является гамильтоновым графом. Будем добавлять к нему новые рёбра до тех пор, пока не получим максимальный негамильтонов обыкновенный граф $Г=(V,E)$. В силу 3) граф G удовлетворяет условию (*).

Заметим, что граф K_n гамильтонов при $n > 3$. Будем считать, что граф G – это максимальный негамильтонов остовный подграф графа K_n.

Возьмём две такие несмежные вершины a и b графа $Г$, что сумма $\mathrm{d}(a)+\mathrm{d}(b)$ является наибольшей из возможных. Без ограничения общности, будем считать, что $\mathrm{d}(a) \le \mathrm{d}(b)$. Добавим к $Г$ новое ребро $e = ab$. Тогда граф $Г+e$ гамильтонов.

Рассмотрим гамильтонов цикл графа $Г+e$. В нём обязательно присутствует ребро e. Отбрасывая ребро e из цикла, получим гамильтонову (a,b)-цепь в графе $Г$: $a = a_1, a_2, ..., a_n = b$.

Положим $A = \{i, e_i = a_1a_{i+1}\in E\}$, $B = \{i, d_i = a_ia_n\in E\}$.

Покажем, что $A \cap B = \varnothing$. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то найдётся такой индекс $j\in A\cap B$, что в графе $Г$ имеется гамильтонов цикл: $a_1 , a_{j+1} , a_{j+2} ,..., a_n, a_j , a_{j-1} ,..., a_1$.

Из определения A и B следует $A\cup B\subseteq\{1, 2, ..., n-1\}$, поэтому $2\mathrm{d}(a) \le \mathrm{d}(a)+\mathrm{d}(b) = =|A|+|B| = |A\cup B| < n$. В частности $\mathrm{d}(a) < n/2$.

Так как $A\cap B = \varnothing$, ни одна вершина a_j, где $j\in A$, не смежна с $b = u_n$. Отсюда в силу выбора a и b имеем $\mathrm{d}(a_j) \le \mathrm{d}(a)$. Обозначим через k степень вершины a. Тогда имеется, по крайней мере, k вершин, степень которых не превосходит k. В силу 1) выполняется $d_k \le k < n/2$.

По условию (*) получаем $d_{n-k} \ge n-k$.

В силу 2) имеется, по крайней мере, k+1 вершин, степень которых не меньше $n-k$.

Вершина a может быть смежна, самое большее, с k из этих k+1 вершин, так как $k = \mathrm{d}(a)$. Следовательно, существует вершина c, не смежная с a, для которой $\mathrm{d}(c) \ge n-k$. Тогда получаем $\mathrm{d}(a) + \mathrm{d}(c) \ge k+ (n-k) = n > \mathrm{d}(a)+\mathrm{d}(b)$, что противоречит выбору a и b.▲

Ввиду сложности решения задачи о гамильтоновых графах, сформулируем ещё несколько достаточных признаков гамильтоновости графа без доказательства.

Теорема 3.11 (теорема Дирака, 1952) Пусть $Г$ – обыкновенный граф, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ – его последовательность степеней и $n > 3$. Граф $Г$ гамильтонов, если выполнено условие: $d_k \geq n/2$.

Теорема 3.12 (теорема Оре, 1960) Пусть $Г$ – обыкновенный граф, u,v – две различные несмежные вершины. Граф $Г$ – гамильтонов, если выполнено условие: $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v) \geq n$.

Теорема 3.13 Пусть $Г$ – обыкновенный граф, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ – его последовательность степеней и $n > 3$. Граф $Г$ – гамильтонов, если выполнено условие: $d_k > k$ для любого натурального числа k, $1 \leq k < n/2$.

В заключении заметим, что задача о гамильтоновом цикле является двойственной к задаче об эйлеровом цикле, поскольку, если в задаче о гамильтоновом графе, поменять слово «вершины» на слово «рёбра», то мы получим задачу об эйлеровых графах. Однако оказалось, что проблемы нахождения эффективных критериев существования таких эйлеровых и гамильтоновых циклов имеют принципиально различную сложность. В предыдущем параграфе был сформулирован и доказан очень простой критерий эйлерова графа. Задача отыскания подобного критерия для гамильтонова графа на сегодняшний день является одной из труднейших нерешённых задач теории графов. Например, граф пятиугольной призмы, изображённый на рисунке 3.25. Так как в нём 10 вершин, а степень каждой вершины равна 3, то к нему нельзя применить ни один из указанных достаточных признаков гамильтоновости графа. Однако он является гамильтоновым, так как в нём можно указать гамильтонов цикл 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 8, 6, 4, 1.

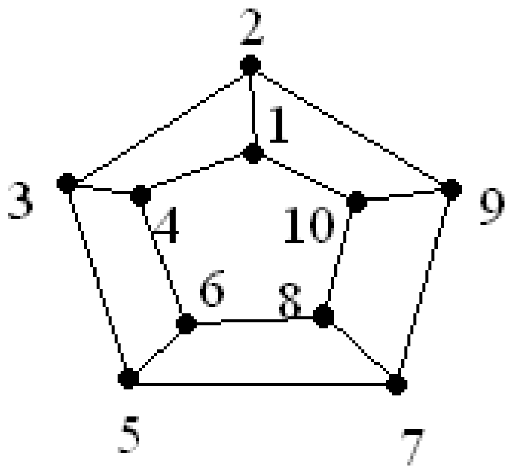


Рисунок 3.25 – Пример гамильтонового графа

§5 Укладки графов

Пусть имеется некоторое пространство P (евклидова плоскость, трёхмерное евклидово пространство, сфера в трёхмерном евклидовом пространстве, тор и т.п.), в котором определено понятие жордановой кривой, т.е. непрерывной кривой без точек самопересечения. Жордановы кривые на плоскости обладают следующим важным свойством.

Если L замкнутая жорданова кривая на плоскости и u, v – две различные точки на ней, то любая жорданова кривая, соединяющая u и v, либо целиком лежит внутри области, ограниченной кривой L, за исключением точек u и v, либо вне этой области, за исключением точек u и v, либо пересекает L в некоторой точке, отличной от u и v.

Замкнутая жорданова кривая L разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две области – внутреннюю и внешнюю, причём любая жорданова кривая, соединяющая точку внутренней области с точкой внешней области, обязательно пересекает кривую L, т.е. имеет с ней общую точку.

Говорят, что граф обладает укладкой в пространстве P, если он изоморфен графу, вершинами которого являются некоторые точки пространства, а рёбрами — жордановы кривые из P, соединяющие соответствующие вершины, причём:

1) кривая, являющаяся ребром, не проходит через другие вершины графа, кроме вершин, которые она соединяет;

2) две кривые, являющиеся рёбрами, пересекаются лишь в вершинах, инцидентных одновременно обоим этим рёбрам.

В таком случае кратко говорят, что кривые, представляющие рёбра, «не имеют лишних пересечений». Соответствующий граф, составленный из точек пространства и жордановых кривых, называют укладкой исходного графа.

Вопрос об укладке произвольного графа в пространство $\mathbf{R}^3$ решает следующая теорема.

Теорема 3.14 Любой граф обладает укладкой в трёхмерном евклидовом пространстве.

▼ Построим укладку для заданного графа. Возьмём в пространстве некоторую прямую l и рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через l. Вершинам графа поставим в соответствие взаимно однозначным образом некоторые точки прямой l. Для каждого ребра графа выделим отдельную плоскость, проходящую через l. Изобразим ребро графа в его плоскости полуокружностью, соединяющей две, соответствующие концам ребра, точки прямой l, если ребро не является петлей, и окружностью, проходящей через точку, соответствующую вершине v, если ребро является петлей в вершине v.

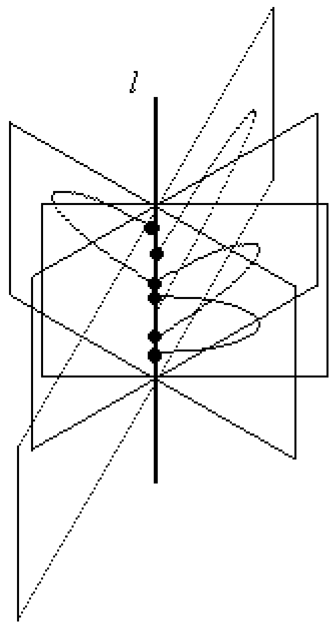


Рисунок 3.26 – Каждое ребро в отдельной плоскости

Очевидно, мы получим укладку исходного графа. ▲

Определение 3.44 Граф называется планарным или плоским, если он обладает укладкой на плоскости.

Теорема 3.15 Граф *Г* планарен тогда и только тогда, когда он обладает укладкой на сфере.

▼ Рассмотрим укладку графа *Г* на сфере. Возьмём на сфере точку *N*, не лежащую ни на одном из рёбер укладки и не являющуюся вершиной. Назовём точку *N* северным полюсом. В южном полюсе (который определяется естественным образом) проведём касательную плоскость к сфере. Спроектируем из точки *N* на плоскость все точки сферы, проводя всевозможные лучи из *N* через точки сферы до плоскости. Ясно, что проекция укладки на сфере даст нам укладку исходного графа на плоскости.

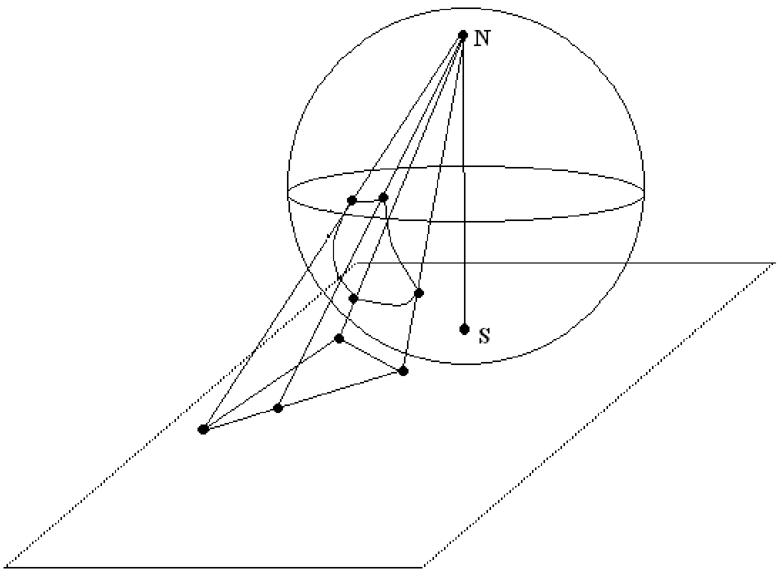


Рисунок 3.27 – Проекция сферы на плоскость

Обратно, рассмотрим укладку графа *Г* на плоскости. Возьмём сферу, которая касается данной плоскости. Назовём точку касания южным полюсом. Северный полюс обозначим через *N*. Спроектируем теперь все точки плоскости на сферу, проводя всевозможные лучи от точек плоскости через точки сферы до точки *N*. Ясно, что при этом укладка графа *Г* с плоскости будет перенесена на некоторую укладку графа *Г* на сфере. ▲

Определение 3.45 Плоский граф Γ разбивает плоскость на несколько областей, называемых его гранями.

Отметим, что одна из граней неограниченна. Ее называют внешней гранью, а остальные грани называют внутренними гранями.

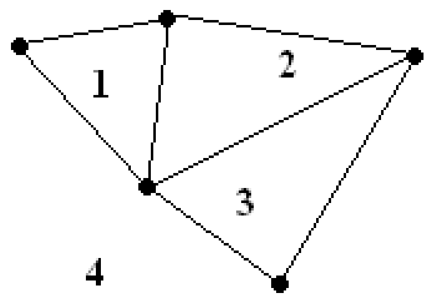


Рисунок 3.28 – Грани графа

На рисунке 3.28 изображён граф с четырьмя гранями. Грань 4 – внешняя, остальные – внутренние.

Необходимый признак планарности графа даёт теорема Эйлера.

Теорема 3.16 (Эйлер) Пусть Γ – плоский (n,m,k)-граф, имеющий p граней, тогда справедливо следующее равенство

$$m+k = p+n-1.$$

▼ Если $m = 0$, то $n = k$ и $p = 1$, что согласуется с доказываемой формулой. Пусть формула верна для любого плоского графа, содержащего менее m рёбер. Рассмотрим (n,m,k)-граф Γ, имеющий p граней. Предположим, что в графе имеется ребро e, не являющееся мостом. Тогда оно содержится в некотором цикле и обязательно лежит на границе двух граней, и в графе $\Gamma-e$ эти грани сольются в одну грань. Граф $\Gamma-e$ – это $(n,m-1,k)$-граф, имеющий $p-1$ грань. Тогда по предположению индукции для графа $\Gamma-e$ выполнено равенство

$$(m-1)+k = (p-1)+n-1, \text{ т.е. } m+k=p+n-1. \ ▲$$

Следствие 3.8 Пусть n, m, p – соответственно число вершин, число рёбер и число граней некоторого выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве. Тогда $n–m+p=2$.

▼ Проектируя многогранник на сферу, получим $(n,m,1)$-граф, содержащий p граней. Применяя к нему теорему, получим требуемое. ▲

Следствие 3.9 Пусть $Г$ – связный, планарный граф на n вершинах и m рёбрах, имеющий p граней, причём $n \geq 3$. Тогда $m \leq 3n–6$.

▼ Так как каждая грань графа $Г$ содержит, по меньшей мере, 3 ребра, то двигаясь вдоль границы i-ой грани, мы пройдём m_i рёбер. Очевидно, имеет место следующее равенство $m_1+m_2+\ldots+m_p = 2m$. Так как $m_i \geq 3$, мы получаем, что $3p \leq 2m$. Так как в силу теоремы $p = m–n+2$, то $3p = 3m–3n+6$. Таким образом, $3m–3n+6 \leq 2m$, или $m \leq 3n–6$. ▲

Следствие 3.10 Пусть $Г$ – связный, планарный (n,m)-граф, тогда в нём найдётся вершина, степень которой не превосходит пяти.

▼ Если степень каждой из n вершины больше либо равна 6, то имеем $6n \leq 2m$, где m – число рёбер графа. Откуда следует двойное неравенство $3n \leq m \leq 3n–6$. Противоречие. ▲

Определение 3.46 Графы $Г_1$ и $Г_2$ назовём гомеоморфными, если граф $Г_2$ получается из графа $Г_1$ путём включения или исключения конечного числа вершин степени два.

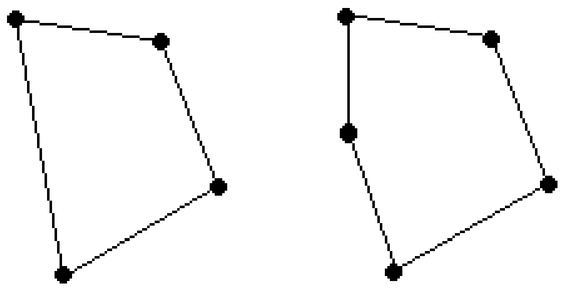


Рисунок 3.29 – Гомеоморфные графы

Примером двух гомеоморфных графов являются графы многоугольников. На рисунке 3.29 граф пятиугольника гомеоморфен графу четырёхугольника, так как получен из него путём добавления вершины степени 2.

Очевидно, что отношение гомеоморфизма на множестве графов является отношением эквивалентности.

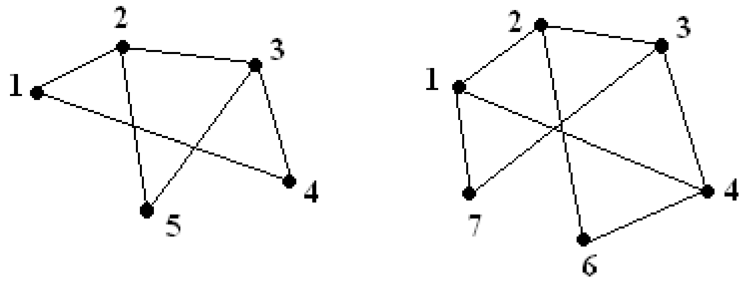


Рисунок 3.30 – Гомеоморфные графы

На рисунке 3.30 приведён менее тривиальный пример пары гомеоморфных графов. На графе, изображенном справа, удалена вершина 5 степени 2, и включены две новые вершины 6 и 7 степени 2.

Следующая теорема исчерпывающим образом решает вопрос о планарности графов.

Теорема 3.17 (Понтрягин, Куратовский) Граф, планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Пользуясь этой теоремой, покажем, что граф Петерсена не планарен.

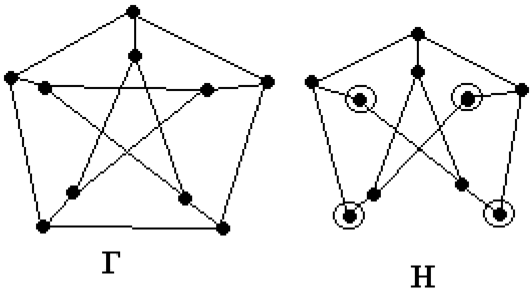


Рисунок 3.31 – Гомеоморфизм графов Петерсена и графа $K_{3,3}$

На рисунке 3.31 граф H является подграфом графа $Г$, причём граф H гомеоморфен графу $K_{3,3}$.

Иной подход к решению вопроса о планарности графа, даёт понятие стягиваемости графа. Пусть $e = \{x,y\}$ – ребро графа $Г$. Удалим это ребро из графа, а вершины x и y отождествим. Полученный граф обозначим $Г$` и будем говорить, что граф $Г$` получен стягиванием из графа $Г$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.18 (Вагнер, Харари, Татт) Граф, планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов стягиваемых к K_5 или $K_{3,3}$.

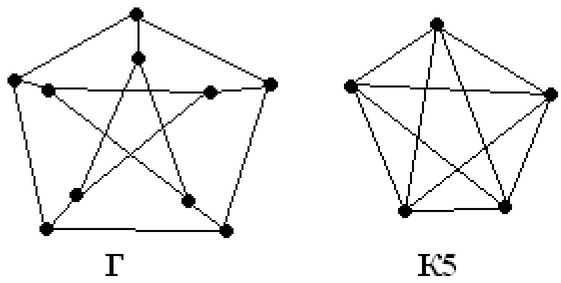


Рисунок 3.32 – Гомеоморфизм графа петерсена и 5-клики

Очевидно, что граф Петерсена, изображенный на рисунке 3.32, стягивается к графу K_5, а потому не планарен.

Замечание. Понятия гомеоморфизма и стягиваемости графа не эквивалентны. Граф Петерсена не гомеоморфен графу K_5, но гомеоморфен графу $K_{3,3}$.

§6 Леса, деревья, остовы

Определение 3.47 Граф без циклов называется лесом.

Определение 3.48 Компонента связности леса называется деревом.

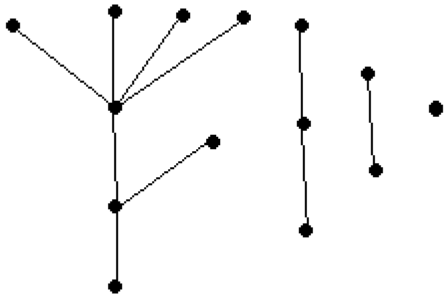


Рисунок 3.33 – Лес

На рисунке 3.33 изображен лес. Любая компонента связности этого леса является деревом.

Теорема 3.19 Следующие утверждения эквивалентны для графа *Г:*

1) *Г* – дерево;

2) в графе *Г* каждое ребро является мостом;

3) *Г* – максимальный ациклический граф, т.е. *Г* – ациклический граф и если x, y – несмежные вершины *Г*, то добавление ребра $\{x,y\}$ к графу *Г* ведёт к появлению в нём цикла.

▼ 1)→2). Пусть $Г = (V,E)$ – дерево и $e = \{x,y\} \in E$. Тогда граф $Г–e$ не содержит пути $xz_1 \ldots z_ky$, т.к. иначе *Г* содержит цикл. Таким образом, $Г–e$ – несвязный граф.

2)→3). Пусть *Г* – минимальный связный граф и $xz_1 \ldots z_ky$ – цикл в нём. Тогда $Г–\{x,y\}$ – связный граф, т.к. в любом пути, соединяющем вершины x, y ребро $\{x,y\}$ заменяется на путь $xz_1 \ldots z_ky$. Противоречие с тем, что каждое ребро – мост. Т.е. *Г* – дерево.

Если a, b – две его несмежные вершины, то существует путь $az_1 \ldots z_kb$ в *Г*. Следовательно, граф $Г+\{a,b\}$ содержит цикл $az_1 \ldots z_kb$. Это доказывает, что *Г* – максимальный ациклический граф.

3)→1). Предположим, что *Г* – несвязный граф и a, b – его вершины, принадлежащие разным компонентам связности. Рассмотрим граф $Г+\{a,b\}$. Он должен содержать цикл $az_1 \ldots z_kb$. Но это означает, что *Г* содержит (a,b)-маршрут. Противоречие. ▲

Теорема 3.20 Пусть $Г = (V,E)$ – связный граф, тогда он содержит подграф, являющийся деревом на том же множестве вершин, что и граф *Г*.

▼ Пусть $n = |V|$ и $x \in V$. Положим T_1 – подграф, состоящий из одной вершины x. Предположим, что мы построили цепь деревьев $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_k \subset Г$ такую, что $|T_i|=i$. Если $k < n$, то, ввиду связности, существует вершина y графа Г, не принадлежащая T_k, инцидентная некоторой вершине z из T_k. Пусть T_{k+1} – подграф, полученный из T_k присоединением этой вершины z и ребра $\{y, z\}$. Тогда T_{k+1} является снова связным графом, в котором ребро $\{y,z\}$ не является ребром никакого цикла, т.е. T_{k+1} – ациклический граф. Продолжая этот процесс, мы построим искомое дерево T_n.▲

Замечание. Из теоремы 3.20 следует, что в любом связном графе (порядка n) есть дерево, содержащее все вершины графа. Оно называется остовным (каркасным) деревом графа. Остовное дерево строится следующим образом. Если исходный граф Γ не содержит циклов, то он сам является деревом. Иначе, возьмем любой цикл и удалим любое ребро из него. Мы не нарушим связность этого нового графа, но уменьшим в нём число циклов. Продолжая этот алгоритм, мы получим остовное дерево графа. Число удалённых ребер при применении этого алгоритма называется циклическим рангом (или цикломатическим числом) графа Γ и обозначается через $\gamma(\Gamma)$. Ясно, что $\gamma(\Gamma) = m - n + 1$, где $m = |E|$, $n = |V|$. Применяя этот алгоритм к произвольному (не обязательно связному графу Γ), мы получи остовное дерево, циклический ранг $\gamma(\Gamma)$ которого равен $\gamma(\Gamma) = m - n + k$, где k – число связных компонент. Число $x(\Gamma) = n - k$ (число рёбер в остовном лесе) называется коциклическим рангом.

Следствие 3.11 Пусть Γ – (n,m)-дерево. Тогда $m = n - 1$.

▼ Воспользуемся методом математической индукции по m.

I шаг. Если $n = 1$, то $m = 0$. Если $n = 2$, то $m = 1$.

II шаг. Предположим, что для всех деревьев с меньшим, чем m, числом рёбер требуемое равенство выполнено.

III шаг. Рассмотрим (n,m)-граф Γ и ребро e. Поскольку Γ – дерево, то граф Γ–e имеет две компоненты связности $\Gamma_1 = (n_1,m_1)$ и $\Gamma_2 = (n_2,m_2)$, в каждой из которых число рёбер меньше числа вершин на единицу, т.е. $m_1 = n_1–1$, $m_2 = n_2–1$. Складывая почленно эти равенства, получим $m_1+m_2=n–2$. Добавляя ещё одно ребро e, окончательно получим: $m = n–1$.▲

Следствие 3.12 Пусть Γ – (n,m,k)-лес. Тогда $m = n - k$.

▼ Пусть лес Γ имеет k компонент связности, каждая из которых представляет собой (n_i,m_i)-дерево $(1 \leq i \leq k)$. Тогда по следствию 3.11 имеем равенство $m_i = n_i–1$. Суммируя это равенство по всем i, окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k. \blacktriangle$$

Следствие 3.13 Пусть Γ – (n,m)-дерево и $n \geq 2$. Тогда Γ содержит (по меньшей мере) две висячие вершины.

▼ Действительно, пусть $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ – неубывающая последовательность степеней вершин дерева Γ. Допустим противное. Тогда $d_2 \geq 2$ и $2m = 2(n - 1) =$ $= d_1 + (d_2 + \ldots + d_n) \geq 1 + 2(n - 1)$. Противоречие. ▲

§7 Перечисление графов

Задача перечисления графов формулируется следующим образом. Сколько существует графов, обладающих заданным свойством? Задача перечисление графов является одной из тех задач теории графов, которые на сегодняшний день, в общем виде не решена. Тем не менее, эта задача имеет частное решение для специальных видов графов. В основе решения задачи перечисления графов лежит теория перечисления Пойя. Эта теория, в свою очередь, основывается на таких разделах математики, как теория конечных групп, теория рядов, теория рекуррентных уравнений.

В данном разделе мы ограничимся перечислением только «помеченных» графов, так как общая задача перечисления графов выходит далеко за пределы данного учебного пособия.

Определение 3.49 Конечный граф $\Gamma = (V, E)$ на n вершинах назовём помеченным, если все его вершины «помечены» целыми числами от 1 до n, т.е. существует биекция φ: $\{v_1, \ldots, v_n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Числа $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ называются метками вершин $v_1, \ldots, v_n$.

Определение 3.50 Два помеченных графа Γ_1 и Γ_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм между нашими графами, который сохраняет распределение меток.

Теорема 3.21 Число помеченных (n,m)-графов равно $\binom{\binom{n}{2}}{m}$.

▼ Заметим, что в графе на n вершинах максимально возможное число рёбер равно $\binom{n}{2}$. В помеченном графе на m ребрах каждое ребро выбирается из этих $\binom{n}{2}$ рёбер. Следовательно, число таких графов $\binom{\binom{n}{2}}{m}$. ▲

Следствие 3.14 Число всех помеченных графов на n вершинах равно $2^{\binom{n}{2}}$.

▼ Чтобы сосчитать число всех помеченных графов на n вершинах, необходимо просуммировать число всех помеченных графов на m рёбрах по всем значениям m.

$$\sum_{m=1}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{m} = 2^{\binom{n}{2}}. ▲$$

Приведём примеры всех помеченных неизоморфных графов на 2, 3 вершинах:

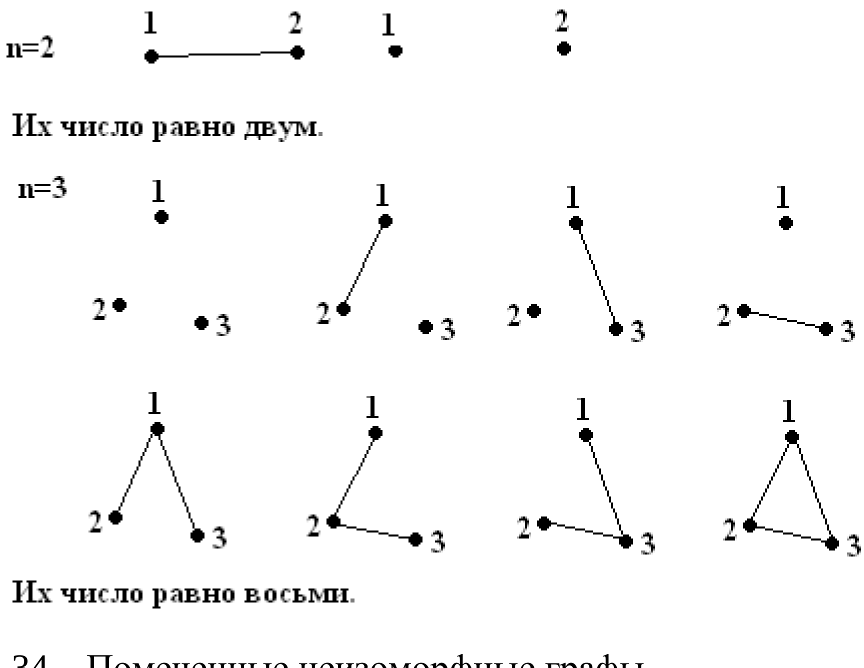


Рисунок 3.34 – Помеченные неизоморфные графы

Таким образом, число графов на 2 вершинах с одним ребром равно 1, без ребра – 1. Число графов на трёх вершинах без ребер – 0, с одним ребром – 3, с двумя ребрами – 3, с тремя ребрами – 1. Данные, нетривиальные, но простые примеры прекрасно иллюстрируют справедливость теоремы 3.11 и её следствия.

Поскольку деревья – довольно важный класс графов, сосчитаем число деревьев на n вершинах.

Теорема 3.22 (А.Кэли, 1889) Число различных помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}.

▼Пусть $T(n, k)$ – число помеченных деревьев на n вершинах, в которых фиксированная вершина v имеет степень k. Докажем равенство (*):

$$(n-1)(k-1)T(n, k) = (n-k)T(n, k-1).$$

Возьмём сначала любое помеченное дерево A на n вершинах, в котором $d(v) = k-1$.

Возьмём в нём любое ребро $\{w, z\}$, не инцидентное v, и удалим его.

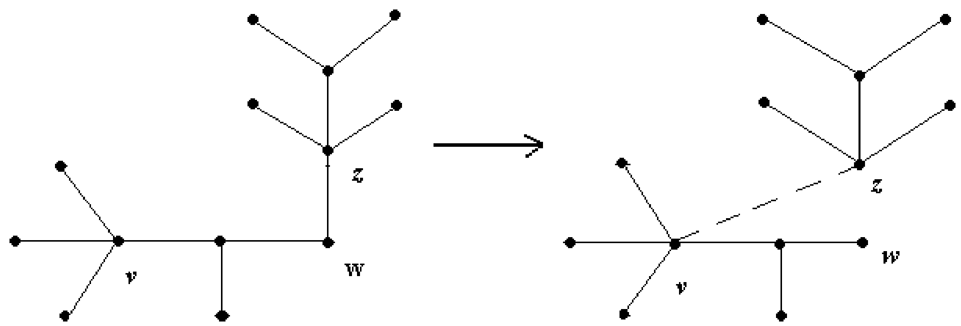


Рисунок 3.35 – Удаление ребра

Из предыдущего следует, что удалённое ребро являлось мостом. Соединим вершину v новым ребром с вершиной z из другой связной компоненты. Тогда получим снова дерево B, в котором $d(v) = k$. Такую пару (A, B) мы будем называть связкой. Сколько таких связок? Дерево A можно выбрать $T(n, k-1)$ способами. Для каждого дерева A удаляемое из него ребро $\{w, z\}$ можно выбрать $(n-1) - (k-1) =$ $= n-k$ способами. Следовательно, число всех таких связок равно $(n-k)T(n, k-1)$.

Возьмём теперь любое помеченное дерево B порядка n, в котором $d(v) = k$. Пусть T_1, T_2, ..., T_k – поддеревья, полученные из B удалением вершины v с каждым из инцидентных ей рёбер.

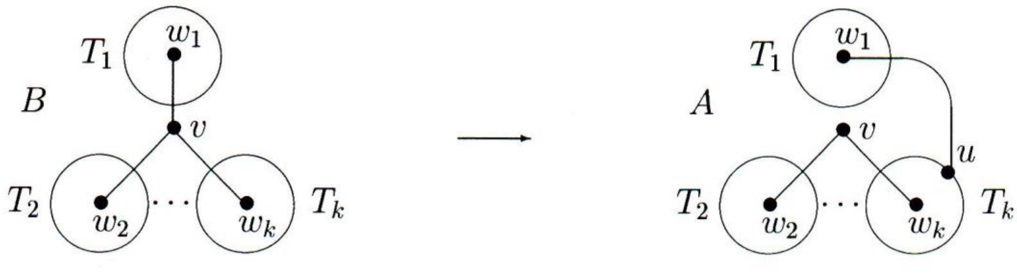


Рисунок 3.36 – Новый граф

Удаляя, например, ребро $\{v, w_1\}$ и соединяя w_1 ребром с любой вершиной любого из оставшихся деревьев, мы получим дерево A, в котором $d(v) = k - 1$. Т.е. получается связка (A, B) (и все связки получаются таким образом!). Подсчитаем другим способом число этих связок. Дерево B можно выбрать $T(n, k)$ способами. Для каждого такого выбора ребро $\{w_1, u\}$ можно получить $(n_2 + n_3 + \ldots + n_k) = (n - n_1 - 1)$ способами; ребро $\{w_2, u\}$ можно получить $(n - n_2 - 1)$ способами и т.д. Т.е. рёбра $\{w_i, u\}$ можно получить $(n-n_1-1 + n-n_2-1 + \ldots + n-n_k - 1) = nk-k-(n-1) = (n-1)(k-1)$ способами (мы использовали равенство $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n - 1$, где n_i – порядок дерева T_i, $i \le k$). Следовательно, число всех связок равно $(n-1)(k-1)T(n, k)$, и формула (*) доказана. Так как $T(n, n - 1) = 1$, то из (*) следует равенство

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1}.$$

Число $T(n)$ всех помеченных деревьев порядка n равно

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}. \blacktriangle$$

Приведём примеры всех помеченных неизоморфных деревьев порядка 2, 3, 4.

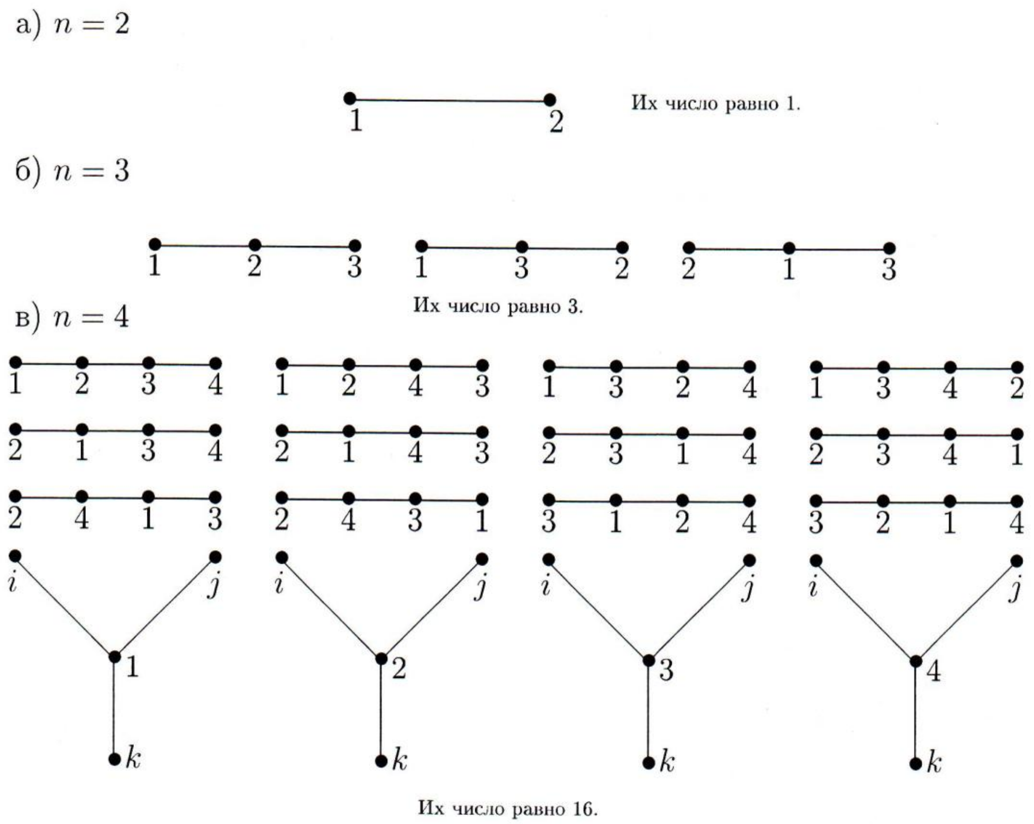


Рисунок 3.37 – Помеченные деревья

§8 Раскраски графов

В этом параграфе мы обсудим проблему раскраски графов и некоторые её частные решения. Пусть $\Gamma = (V,E)$ – некоторый граф и $C = \{c_1, \dots, c_t\}$ – некоторое конечное множество, которое мы для определенности будем называть множеством красок.

Определение 3.51 t-раскраской графа Γ называется такое отображение $\varphi{:}V \to C$, что для любых двух смежных вершин x, y графа Γ, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Т.е. любые две смежные вершины имеют разные цвета.

Заметим, что отображение φ не обязано быть сюръективным. Другими словами, в t-раскраске некоторого графа вовсе не обязаны участвовать все t цветов.

Из определения непосредственно следует проблема: каково наименьшее возможное число красок, в которое можно раскрасить данный граф? В данном параграфе мы установим некоторые ограничения как на структуру графа с минимальной t-раскраской, так и на число красок, в которое данный граф можно раскрасить.

Определение 3.52 Граф, обладающий t-раскраской, ещё будем называть t-раскрашиваемым.

Определение 3.53 Граф называется t-хроматическим, если он является t-раскрашиваемым, но не является $(t–1)$-раскрашиваемым. Число t в этом случае называют хроматическим числом графа и обозначают $\chi(\Gamma)$.

Теорема 3.23 (Кёниг) Граф Γ является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечётной длины.

▼ (Необходимость)

Пусть Γ – некоторый граф. Зафиксируем некоторую его 2-раскраску. Так как концы ребра имеют различную раскраску, то цвета вершин в любом цикле будут чередоваться. А, следовательно, любой цикл имеет чётную длину.

(Достаточность)

Пусть любой цикл в графе Γ имеет чётную длину. Разобьём множество вершин этого графа на два множества Γ_1 и Γ_2. Зафиксируем вершину a, которую отнесём во множество Γ_1. Во множество Γ_1 отнесём также все вершины b, такие что минимальные (a,b)-пути чётны. Во множество Γ_2 отнесём такие вершины c, что минимальные (a,c)-пути нечётны. Покажем, что Γ_1 и Γ_2 – коклики. Пусть в Γ_1 есть ребро $e = \{a,b\}$, соединяющее вершины a и b. Тогда кратчайший путь, соединяющий эти вершины, есть ребро e. Противоречие с тем, что по построению вершины, находящиеся на нечётном расстоянии, находятся в различных подмножествах.

Таким образом, мы построили двудольный граф с долями Γ_1 и Γ_2. Раскрасим все вершины множества Γ_1 в цвет c_1, а все вершины множества Γ_2 в цвет c_2. Мы получим 2-раскраску нашего графа. ▲

Следствие 3.15 Любое неодноэлементное дерево является 2-хроматическим графом.

Теорема 3.24 Если наибольшая из степеней вершин графа Γ равна k, то граф Γ – $(k+1)$-раскрашиваем.

▼ Зафиксируем вершину a в графе $Г$ такую, что её степень в графе $Г$ максимальна и равна k. Тогда множество всех вершин, смежных с вершиной а, можно раскрасить в k цветов. Саму же вершину a раскрасим в $(k+1)$-ый цвет. ▲

Теорема 3.25 (Брукс, 1941) Пусть $Г$ – связный, обыкновенный граф, не являющийся полным, k – наибольшая из степеней его вершин и $k \geq 3$. Тогда хроматическое число графа не превосходит k.

Одной из частных задач о раскрасках графа является задача о раскраске карт. Формулируется она следующим образом. Пусть имеется карта, на которой изображены границы различных государств. Требуется раскрасить эту карту таким образом, чтобы любые два государства, имеющие общую границу, имели разные цвета. Эту задачу можно перевести на язык теории графов. Вершинами графа назовём государства. Две вершины назовём смежными тогда и только тогда, когда эти государства имеют общую границу. Если два государства соприкасаются на карте только в одной точке, то соответствующие вершины в графе смежными не будут. Очевидно, что такой граф государств является планарным. Следовательно, задача о раскраске графа государств является задачей о раскраске планарного графа.

Задача о раскраске планарного графа решается следующими теоремами.

Теорема 3.26 (Хивуд, 1890) Любой планарный граф 5-раскрашиваем.

▼ Докажем утверждение теоремы методом математической индукции по числу вершин $n > 5$. При $n = 5$ утверждение очевидно. Пусть утверждение теоремы верно для числа вершин, не превосходящих n. Пусть $Г$ – плоский граф на $n+1$ вершине. По следствию 3.10 из теоремы 3.16 в графе $Г$ найдётся вершина степени 5 или меньше. По предположению индукции плоский граф $Г–v$ 5-раскрашиваем.

Рассмотрим приписывание цветов вершинам графа $Г–v$, при котором получается 5-раскраска. Цвета будем обозначать c_i, $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Если некоторый цвет не используется в раскраске окрестности вершины v, то раскрасив вершину v в этот цвет, получим искомую раскраску.

Пусть $d(v) = 5$ и все вершины из окрестности v раскрашены во все 5 цветов. Обозначим через $Г_{ij}$ – подграф графа $Г–v$, порождённый всеми вершинами с цветами c_i и c_j. Если вершины, смежные с v и имеющие цвета c_i и c_j, принадлежат различным компонентам связности графа Γ_{ij}, то 5-раскраску графа $\Gamma - v$ можно получить, поменяв друг с другом c_i и c_j цвета вершин той компоненты графа Γ_{ij}, которая содержит вершину, окрашенную в цвет c_j. В этой 5-раскраске уже нет вершин, смежных с v и окрашенных в цвет c_j. Поэтому окрасив вершину v в цвет c_j, получим искомую 5-раскраску графа.

Если вершины, окрашенные в цвета c_i и c_j, принадлежат одной и той же компоненте связности графа Γ_{ij}, то в Г между этими вершинами существует простая цепь, состоящая из вершин, окрашенных в цвета c_i и c_j. Эта цепь, вместе с вершиной v образует простой цикл, который в силу планарности окружит какую-нибудь другую вершину из окрестности v, скажем, вершину, окрашенную в цвет c_k. Тогда эту вершину и вершину с цветом c_l нельзя соединить простой цепью. Рассматривая подграф Γ_{kl}, графа $\Gamma - v$, заключаем, что вершины с цветами c_k и c_l принадлежат разным компонентам связности графа Γ_{kl}. Меняя цвета у вершин в компоненте графа Γ_{kl}, содержащей вершину цвета c_k, получим 5-раскраску графа $\Gamma - v$, в которой ни одна вершина, смежная с v, не имеет цвета c_k. Окрашивая вершину v в цвет c_k, получим 5-раскраску графа Γ. ▲

Теорема 3.27 (Хейкен, Апель. 1976) Любой планарный граф 4-раскрашиваем.

Эта теорема приводится без доказательства ввиду того, что часть доказательства была проведена авторами с помощью компьютера.

Раздел 4. Алгоритмы на графах

§1 Поиск в ширину

В этом приложении мы проведём обзор алгоритмов для решения различных задач на графах. С помощью приведённых алгоритмов можно решать задачи анализа графов с целью выявления их структуры и вычисления метрических характеристик. Многие задачи такого рода могут быть решены путем систематического обхода графа с посещением всех его вершин и исследованием всех его рёбер. Такой обход можно выполнить многими способами, в действительности же широкое распространение благодаря своей простоте, а в большей степени своей полезности, получили две стратегии – поиск в глубину и поиск в ширину. Рассмотрение этих алгоритмов и примеров их применения к задачам анализа графов составляет содержание приложения 1.

Процедура поиска в ширину

Работа всякого алгоритма обхода состоит в последовательном посещении вершин и исследовании рёбер. Какие именно действия выполняются при посещении вершины и исследовании ребра – зависит от конкретной задачи, для решения которой производится обход. В любом случае, однако, факт посещения вершины запоминается, так что с момента посещения и до конца работы алгоритма она считается посещённой. Вершину, которая еще не посещена, будем называть новой. В результате посещения вершина становится открытой и остаётся такой, пока не будут исследованы все инцидентные ей ребра. После этого она превращается в закрытую.

Алгоритм поиска в ширину будем обозначать BFS (от английского названия этого алгоритма – Breadth First Search). Идея поиска в ширину состоит в том, чтобы посещать вершины в порядке их удаленности от некоторой заранее выбранной или указанной стартовой вершины a. Иначе говоря, сначала посещается сама вершина a, затем все вершины, смежные с a, т.е. находящиеся от неё на расстоянии 1, затем вершины, находящиеся от a на расстоянии 2, и т.д.

Рассмотрим алгоритм поиска в ширину с заданной стартовой вершиной a. Вначале все вершины помечаются как новые. Первой посещается вершина a, она становится единственной открытой вершиной. В дальнейшем каждый очередной шаг начинается с выбора некоторой открытой вершины x. Эта вершина становится активной. Далее исследуются рёбра, инцидентные активной вершине. Если такое ребро соединяет вершину x с новой вершиной y, то вершина y посещается и превращается в открытую. Когда все рёбра, инцидентные активной вершине, исследованы, она перестает быть активной и становится закрытой. После этого выбирается новая активная вершина, и описанные действия повторяются. Процесс заканчивается, когда множество открытых вершин становится пустым.

Основная особенность поиска в ширину, отличающая его от других способов обхода графов, состоит в том, что в качестве активной вершины выбирается та из открытых, которая была посещена раньше других. Именно этим обеспечивается главное свойство поиска в ширину: чем ближе вершина к старту, тем раньше она будет посещена. Для реализации такого правила выбора активной вершины удобно использовать для хранения множества открытых вершин очередь – когда новая вершина становится открытой, она добавляется в конец очереди, а активная выбирается в её начале.

Задачи, решаемые процедурой поиска в ширину

1 **Отыскание компонент связности.** В качестве первого примера применения поиска в ширину для графа рассмотрим задачу выявления компонент связности. Допустим, мы хотим получить ответ в виде таблицы, в которой для каждой вершины x указан номер $N(x)$ компоненты, которой принадлежит эта вершина. Компоненты будут получать номера в процессе обхода. Для решения этой задачи достаточно ввести переменную c со значением, равным текущему номеру компоненты, и каждый раз при посещении новой вершины x полагать $N(x) = c$. Значение c первоначально устанавливается равным 0 и модифицируется при каждом вызове процедуры.

2 **Вычисление расстояний.** Другая простая задача, для решения которой можно применить поиск в ширину, – построение каркаса. Напомним, что каркасом

графа называется остовный лес, у которого области связности совпадают с областями связности графа. Каркас связного графа – остовное дерево.

Рёбра, исследуемые в процессе обхода графа, можно разделить на две категории: если ребро соединяет активную вершину x с новой вершиной y, то оно классифицируется как прямое, в противном случае – как обратное. В зависимости от решаемой задачи прямые и обратные рёбра могут подвергаться различной обработке.

Предположим, что алгоритм поиска в ширину применяется к связному графу. Покажем, что в этом случае по окончании обхода множество всех прямых рёбер образует дерево. Действительно, допустим, что на некотором шаге работы алгоритма обнаруживается новое прямое ребро $\{x,y\}$, а множество прямых рёбер, накопленных к этому шагу, образует дерево F. Тогда вершина x принадлежит дереву F, а вершина y не принадлежит ему. Поэтому при добавлении к дереву F ребра $\{x,y\}$ связность сохранится, а циклов не появится.

Итак, если применить поиск в ширину к связному графу и запомнить все прямые рёбра, то получим каркас графа. Для произвольного графа будет получен лес, также, очевидно, являющийся каркасом.

Построенное таким образом дерево (мы будем его называть BFS-деревом), можно рассматривать как корневое дерево с корнем в стартовой вершине a. Построенное дерево с заданным корнем a, вообще говоря, не единственное – зависит от того, в каком порядке просматриваются окрестности вершин. Однако всякое дерево, построенное при помощи алгоритма поиска в ширину, обладает свойством, на котором и основаны наиболее важные применения поиска в ширину. Каркас $T(\Gamma)$ связного графа Γ с корнем a назовём геодезическим деревом, если для любой вершины x путь из x в a в дереве $T(\Gamma)$ является кратчайшим путём между x и a в графе Γ.

Теперь мы можем применить поиск в ширину для вычисления расстояний от стартовой вершины a до всех остальных вершин графа – нужно только в процессе обхода для каждой посещаемой вершины y определять расстояние от y до a в

BFS-дереве. Это сделать легко: $d(a,y) = d(a,x)+1$, где x – активная вершина. Вначале устанавливаем $d(a,a) = 0$.

Если граф несвязен, некоторые расстояния будут бесконечными. Чтобы учесть эту возможность, положим вначале $d(a,x) = \infty$ для всех $x \neq$ a. Пока вершина x остаётся новой, для неё сохраняется значение $d(a,x) = \infty$, когда же она посещается, $d(a,x)$ становится равным расстоянию между a и x и больше не меняется. Таким образом, бесконечность расстояния можно использовать как признак того, что вершина новая. Если по окончании работы $d(a,x) = \infty$ для некоторой вершины x, это означает, что x не достижима из a, т. е. принадлежит другой компоненте связности.

Для того чтобы не только определять расстояния, но и находить кратчайшие пути от a до остальных вершин, достаточно для каждой вершины y знать её отца $F(y)$ в BFS-дереве. Очевидно, что $F(y)$, где x – вершина, активная в момент посещения вершины y. Заполнение таблицы F фактически означает построение BFS-дерева.

Пример 4.1 На рисунке 4.1 изображён граф. Построить для него BFS-дерево и вычислить все расстояния от вершины 1.

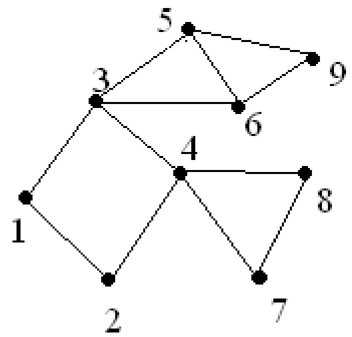


Рисунок 4.1 – Граф

Построим для данного графа BFS-дерево, начиная из вершины 1, которое, по изложенному выше, является геодезическим.

На рисунке 4.2 каркасное BFS-дерево построено, начиная из вершины 1. Рёбра этого дерева выделены жирными линиями.

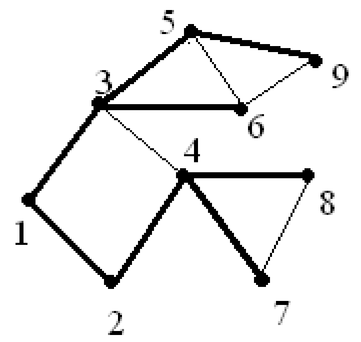


Рисунок 4.2 – BFS-дерево

Теперь легко вычислить расстояния от вершины 1 до всех оставшихся вершин данного графа. Например, $d(1,9) = 3$.

Пользуясь BFS-деревом, можно легко найди и диаметр графа – это в точности наибольшее из всех расстояний в данном графе. В нашем примере, диаметр графа равен 4.

§2 Поиск в глубину

Алгоритм поиска в глубину будем обозначать DFS (от английского Depth First Search). Поиск в глубину – вероятно, наиболее важная, ввиду многочисленности приложений, стратегия обхода графа. Идея этого метода – идти вперёд в неисследованную область, пока это возможно, если же вокруг всё исследовано, отступить на шаг назад и искать новые возможности для продвижения вперёд. Метод поиска в глубину известен под разными названиями, например, "бэктрекинг", "поиск с возвращением".

Понятия новой, открытой, закрытой и активной вершин для поиска в глубину имеют такой же смысл, как и для поиска в ширину. Отметим, что всегда имеется не более чем одна активная вершина.

Обход начинается с посещения заданной стартовой вершины a, которая становится активной и единственной открытой вершиной. Затем выбирается инцидентное вершине a ребро $\{a,b\}$ и посещается вершина b. Она становится открытой и активной. Заметим, что при поиске в ширину вершина a оставалась активной до тех пор, пока не были исследованы все инцидентные ей рёбра. В дальнейшем, как и при поиске в ширину, каждый очередной шаг начинается с выбора активной вершины из множества открытых вершин. Если все рёбра, инцидентные активной вершине b, уже исследованы, она превращается в закрытую вершину. В противном случае выбирается одно из неисследованных рёбер $\{b,c\}$, которое затем исследуется. Если вершина c новая, то она посещается и превращается в открытую вершину.

Главное отличие от поиска в ширину состоит в том, что при поиске в глубину в качестве активной выбирается та из открытых вершин, которая была посещена последней. Для реализации такого правила выбора наиболее удобной структурой хранения множества открытых вершин является стек: открываемые вершины складываются в стек в том порядке, в каком они открываются, а в качестве активной выбирается последняя вершина.

Ещё раз обратим внимание на основное отличие этой процедуры от аналогичной процедуры поиска в ширину. При поиске в ширину вершина, став активной, остаётся ею, пока не будет полностью исследована её окрестность, после чего она становится закрытой. При поиске в глубину, если в окрестности активной вершины x обнаруживается новая вершина y, то y помещается в стек и при следующем повторении цикла станет активной. При этом x остаётся в стеке и через какое-то время снова станет активной. Иначе говоря, рёбра, инцидентные вершине x, будут исследованы не подряд, а с перерывами.

DFS-дерево

Поиск в глубину можно применить для нахождения компонент связности графа или для построения каркаса точно таким же образом, как поиск в ширину. Понятия прямого и обратного ребра определяются так же, как в предыдущем разделе и так же доказывается, что прямые рёбра при поиске в глубину образуют каркас графа. Для связного графа каркас, получаемый поиском в глубину, называется DFS-деревом. DFS-дерево рассматривается как корневое дерево с корнем в стартовой вершине a. Это дерево обладает особыми свойствами, на использовании которых основаны многочисленные применения метода поиска в глубину. Рассмотрим наиболее важное из этих свойств.

Относительно любого корневого остовного дерева все рёбра графа, не принадлежащие дереву, можно разделить на две категории. Ребро назовём продольным, если одна из его вершин является предком другой, в противном случае ребро назовём поперечным. На рисунке 4.3. рёбра каркаса выделены жирными линиями, корень обозначен цифрой 9. Обратные рёбра показаны тонкими линиями, из них продольными являются ребра {1,7}, {2,9}, {3,8}, а поперечными – рёбра {1,2}, {2,5}, {3,5}.

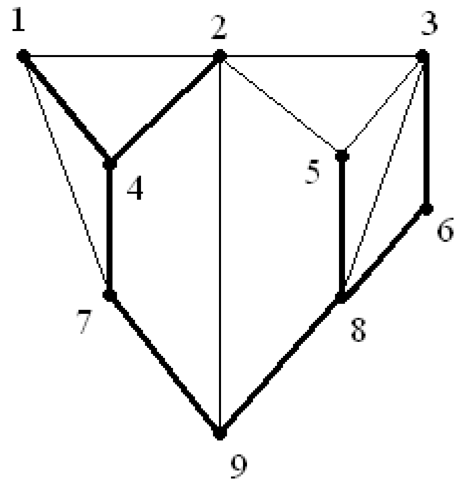


Рисунок 4.3 – DFS-дерево

Глубинная нумерация

Ввиду важности этого метода опишем ещё два варианта алгоритма поиска в глубину. Первый из них – рекурсивный, и, как обычно, рекурсия даёт возможность представить алгоритм в наиболее компактной форме. Для того чтобы алгоритм выполнял какую-то полезную работу, будем нумеровать вершины в том порядке, в каком они встречаются при обходе. Номер, получаемый вершиной *x*, обозначается через $D_{num}(x)$ и называется её глубинным номером. Вначале полагаем $D_{num}(x) = 0$ для всех *x*. Это нулевое значение сохраняется до тех пор, пока вершина не становится открытой, в этот момент ей присваивается её настоящий глубинный номер. Таким образом, нет необходимости в какой-либо специальной структуре для запоминания новых вершин – они отличаются от всех других нулевым значением D_{num}. Переменная *c* хранит текущий номер. Рекурсивная процедура DFSR обходит одну компоненту связности, а алгоритм 1 обходит весь граф и присваивает вершинам глубинные номера.

Построение каркаса

Следующий вариант алгоритма поиска в глубину отличается тем, что не использует стека для хранения открытых вершин. Стек нужен для того, чтобы в момент, когда окрестность активной вершины b исследована и необходимо сделать "шаг назад", можно было определить вершину, в которую нужно вернуться. Но это та вершина, которая является отцом вершины b в DFS-дереве. Поэтому, если решение задачи предусматривает построение DFS-дерева, то это дерево можно использовать и для организации "возвратных движений" в процессе обхода. Описываемый ниже алгоритм строит каркас произвольного графа, каждая компонента связности этого каркаса является DFS-деревом соответствующей компоненты связности графа. Через $F(b)$ обозначается отец вершины b в этом DFS-дереве, при этом для корня дерева (стартовой вершины) a полагаем $F(a) = a$. Здесь и далее в описаниях алгоритмов инструкция "открыть (закрыть) вершину" означает, что вершина каким-то образом помечается как открытая (закрытая).

Пример 4.2 Построим DFS-дерево графа, изображённого на рисунке 4.1, начиная из вершины 1.

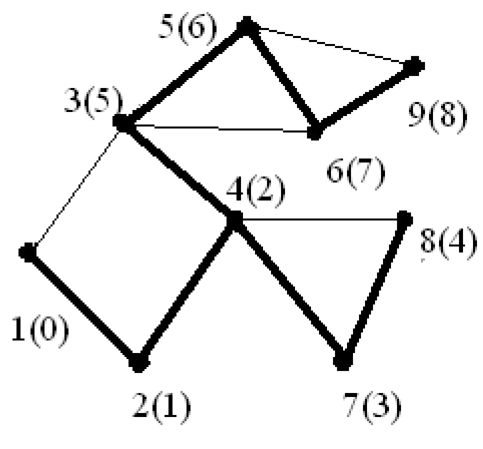


Рисунок 4.4 – Каркас

На рисунке 4.4 изображено DFS-дерево, где каждой вершине приписан её глубинный номер. Рёбра DFS-дерева выделены жирной линией. Тонкой линией обозначены обратные рёбра.

Круг задач, решаемых процедурой поиска в глубину, довольно широк. Отметим некоторые из них. Поиск точек сочленения и блоков в графе, поиск эйлеровых и гамильтоновых путей. Но даже для таких алгоритмов, существуют вариации. Некоторые из них более эффективны, некоторые менее. Но, так или иначе, задачи алгоритмической теории графов являются не менее важными и интересными, нежели задачи классической теории графов.

Список использованных источников

1. Айгнер, М. Комбинаторная теория: пер. с англ. / М. Айгнер. - Москва: Мир, 1982. - 558 с.: ил.

2. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. - 288 с.: ил.

3. Берж, К. Теория графов и её применения: пер. с фр. / К. Берж. - Москва: Изд-во иностран. лит., 1962. - 320 с.: ил.

4. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. - Москва, 1969. - 328 с.: ил.

5. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин. - Москва: Наука, 1975. - 208 с.: ил.

6. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. - Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. - 400 с.: ил.

7. Грэхем, Р. Конкретная математика. Основания информатики: пер. с англ. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Поташник. - Москва: Мир, 1998. - 703 с.: ил.

8. Гульден, Я. Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. / Я. Гульден, Д. Джексон. - Москва: Наука, 1990. - 504 с.

9. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. - Москва: Вузовская книга, 2000. - 280 с.: ил.

10. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику: пер. с фр. / А. Кофман. - Москва: Наука, 1975. - 480 с.: ил.

11. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход: пер. с англ. / Н. Кристофидес. - Москва: Мир, 1978. - 432 с.: ил.

12. Мальцев, Ю. Н. Введение в дискретную математику. Элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования: учеб. пособие / Ю. Н. Мальцев, Е. П. Петров. - Барнаул: Изд-во АлГУ, 1997. - 144 с.: ил.

13. Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. - Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. - 48 с.

14. Райзер, Г. Дж. Комбинаторная математика: пер. с англ. / Г. Дж. Райзер. - Москва: Мир, 1966. - 154 с.

15. Риордан, Дж. Введение в комбинаторный анализ: пер. с англ. / Дж. Риордан. - Москва: Изд-во иностран. лит., 1963. - 288 с.

16. Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные мотоды дискретной математики / В. Н. Сачков. - Москва: Наука, 1982. - 384 с.: ил.

17. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. / Р. Стенли. - Москва: Мир, 1990. - 440 с.: ил.

18. Татт, У. Теория графов: пер. с англ. / У. Татт. - Москва: Мир, 1988. - 424 с.: ил.

19. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. - Москва: Мир, 1973. - 300 с.: ил.

20. Харари, Ф. Перечисление графов: пер. с англ. / Ф. Харари, Э. Палмер. - Москва: Мир, 1977. - 327 с.: ил.

21. Холл, М. Комбинаторика: пер. с англ. / М. Холл. - Москва: Мир, 1970. - 424 с.: ил.

22. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. - Москва: Наука, 1986. - 384 с.

Приложение А

(обязательное)

Индивидуальные домашние задания

Приложение содержит индивидуальные домашние задания по курсу «Дискретная математика». Всего по данному курсу предусмотрено три домашние контрольные работы, которые студент обязан защитить прежде, чем быть допущенным до экзамена по данной дисциплине.

Домашняя контрольная работа №1 «Рекуррентные уравнения».

Домашняя контрольная работа №2 «Элементы комбинаторного анализа».

Домашняя контрольная работа №3 «Элементы теории графов».

Каждая домашняя контрольная работа содержит 10 заданий. Каждое задание имеет 10 вариантов. Каждый студент должен выполнить все 10 заданий каждой контрольной работы в соответствии со своим вариантом. Каждое задание имеет двойной номер. Первый номер означает номер задания. Второй номер означает номер варианта. Если, например, у студента 4-ый вариант, то каждое задание каждой контрольной работы он выполняет под номером 4: 1.4, 2.4, …, 10.4. И так для каждой контрольной работы.

Домашняя контрольная работа №1 «Рекуррентные уравнения»

1 Найти общее решение однородного линейного рекуррентного уравнения первого порядка.

1.1 $\Delta f(x) + \mathrm{tg}x f(x) = 0$;

1.2 $\Delta f(x) - \sin x f(x) = 0$;

1.3 $\Delta f(x) + x^3 f(x) = 0$;

1.4 $\Delta f(x) + x^{1/3} f(x) = 0$;

1.5 $\Delta f(x) - 3^x f(x) = 0$;

1.6 $f(x+1) - (1+\cos x)f(x) = 0$;

1.7 $f(x+1) + \mathrm{ctg}^{-1}x f(x) = 0$;

1.8 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = 0$;

1.9 $f(x+1) = xf(x) / (1+x^2)$;

1.10 $f(x+1) = xf(x) / (1+x)^{1/2}$.

2 Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения первого порядка.

2.1 $f(x+1) - (1+\cos x)f(x) = x$;

2.2 $\Delta f(x) - 3^x f(x) = \sin x$;

2.3 $f(x+1) = xf(x) / (1+x^2) - \sin x$;

2.4 $\Delta f(x) + \mathrm{tg}x f(x) = x^{1/2}$;

2.5 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = \sin x$;

2.6 $\Delta f(x) + x^{1/3} f(x) = 1$;

2.7 $f(x+1) + \mathrm{ctg}^{-1}x f(x) = 1+\mathrm{x}^2$;

2.8 $\Delta f(x) - \sin x f(x) = \cos x$;

2.9 $\Delta f(x) + x^3 f(x) = \lg x^2$;

2.10 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = -2\mathrm{x}$.

3 Найти частное решение однородного линейного рекуррентного уравнения с начальным условием.

3.1 $\Delta f(x) - \sin x f(x) = 0$, $f(0) = 1$;

3.2 $\Delta f(x) + x^{1/3} f(x) = 0$, $f(0) = 2$;

3.3 $f(x+1) - (1+\cos x)f(x) = 0,\ f(0) = 0;$

3.4 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = 0,\ f(0) = 3;$

3.5 $f(x+1) = xf(x) / (1+x)^{1/2},\ f(0) = 1;$

3.6 $\Delta f(x) + \operatorname{tg}x f(x) = 0,\ f(0) = 2;$

3.7 $\Delta f(x) + x^3 f(x) = 0,\ f(0) = 5;$

3.8 $\Delta f(x) - 3^x f(x) = 0,\ f(0) = 10;$

3.9 $f(x+1) + \operatorname{ctg}^{-3}x f(x) = 0,\ f(0) = 2;$

3.10 $f(x+1) = xf(x) / (1+x^2),\ f(0) = 0.$

4 Найти частное решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения с начальным условием.

4.1 $\Delta f(x) - 3^x f(x) = \sin x,\ f(0) = 1;$

4.2 $\Delta f(x) + \operatorname{tg}x f(x) = x^{1/2},\ f(0) = 2;$

4.3 $\Delta f(x) + x^{1/3} f(x) = 1,\ f(0) = -5;$

4.4 $\Delta f(x) - \sin x f(x) = \cos x,\ f(0) = -1;$

4.5 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = -2x,\ f(0) = -6;$

4.6 $f(x+1) - (1+\cos x)f(x) = x,\ f(0) = 0;$

4.7 $f(x+1)=xf(x)/(1+x^2)-\sin x,\ f(0) = -2;$

4.8 $f(x+1) - \ln^{-2}x f(x) = \sin x,\ f(0) = 4;$

4.9 $f(x+1) + \operatorname{ctg}^{-3}x f(x) = 1+x^2,\ f(0) = 2;$

4.10 $\Delta f(x) + x^3 f(x) = \lg x^2,\ f(0) = 5.$

5 Найти общее решение однородного линейного рекуррентного уравнения с постоянными коэффициентами. Доказать линейную независимость частных решений.

5.1 $f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x) = 0;$

5.2 $f(x+2) + 5f(x+1) + 6f(x) = 0;$

5.3 $f(x+2) - 7f(x+1) + 12f(x) = 0;$

5.4 $f(x+2) + 7f(x+1) + 10f(x) = 0;$

5.5 $f(x+2) - 12f(x+1) + 35f(x) = 0;$

5.6 $f(x+2) - 12f(x+1) + 32f(x) = 0;$

5.7 $f(x+2) + 12f(x+1) + 20f(x) = 0;$

5.8 $f(x+2) + 12f(x+1) - 13f(x) = 0;$

5.9 $f(x+2) + 4f(x+1) - 3f(x) = 0;$

5.10 $f(x+2) - 8f(x+1) - 48f(x) = 0.$

6 Найти частное решение однородного линейного рекуррентного уравнения с постоянными коэффициентами.

6.1 $f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = 0,$

$f(0) = 1,\ f(1) = -1;$

6.6 $f(x+1) - 4f(x) + 4f(x-1) = 0,$

$f(0) = 0,\ f(1) = -1;$

6.2 $f(x+2) + 4f(x+1) + 4f(x) = 0,$

$f(0) = -1,\ f(1) = 1;$

6.3 $f(x+1) - 8f(x) + 16f(x-1) = 0,$

$f(0) = 0,\ f(1) = -1;$

6.4 $9f(x+2) - 3f(x+1) + f(x) = 0,$

$f(0) = 1,\ f(1) = 1;$

6.5 $9f(x+1) + 12f(x) + 4f(x-1) = 0,$

$f(0) = 2,\ f(1) = 0;$

6.7 $25f(x+2) + 20f(x+1) + 4f(x) = 0,$

$f(0) = 1,\ f(1) = 2;$

6.8 $4f(x+1) + 12f(x) + 9f(x-1) = 0,$

$f(0) = 1,\ f(1) = -2;$

6.9 $16f(x+2) - 24f(x+1) + 9f(x) = 0,$

$f(0) = -1,\ f(1) = -1;$

6.10 $49f(x) - 28f(x-1) + 4f(x-2) = 0,$

$f(0) = 2,\ f(1) = 2.$

7 Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения.

7.1 $f(x+2) + 5f(x+1) + 6f(x) = x+1;$

7.2 $f(x+2) + 7f(x+1) + 10f(x) = x^2;$

7.3 $f(x+2) - 12f(x+1) + 32f(x) = 2^x;$

7.4 $f(x+2) + 12f(x+1) - 13f(x) = x;$

7.5 $f(x+2) - 8f(x+1) - 48f(x) = 1;$

7.6 $f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x) = 2;$

7.7 $f(x+2) - 7f(x+1) + 12f(x) = x2^x;$

7.8 $f(x+2) - 12f(x+1) + 35f(x) = x^2-1;$

7.9 $f(x+2) + 12f(x+1) + 20f(x) = x-1;$

7.10 $f(x+2) + 4f(x+1) - 3f(x) = x^2 3^x.$

8 Найти частное решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения с начальными условиями.

8.1 $f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = -4x$,

$f(0) = 0$, $f(1) = -1$;

8.2 $f(x+1) - 8f(x) + 7f(x-1) = x+1$,

$f(0) = 0$, $f(1) = -1$;

8.3 $8f(x+1) - 12f(x) + 4f(x-1) = 2^x$,

$f(0) = 2$, $f(1) = 0$;

8.4 $4f(x+1) + 12f(x) - 16f(x-1) = x^2+2x$,

$f(0) = 1$, $f(1) = -2$;

8.5 $4f(x) - 8f(x-1) + 4f(x-2) = x3^x$,

$f(0) = 2$, $f(1) = 2$;

8.6 $f(x+2) - 6f(x+1) + 5f(x) = 2$,

$f(0) = 1$,$f(1) = -1$;

8.7 $f(x+2) + 4f(x+1) - 5f(x) = 2^x(x-1)$,

$f(0) = -1$, $f(1) = 1$;

8.8 $9f(x+2) - 3f(x+1) - 6f(x) = x^2+x-1$,

$f(0) = 1$, $f(1) = 1$;

8.9 $25f(x+2) - 10f(x+1) + f(x) = \mathrm{x}^2-1$,

$f(0) = 1$, $f(1) = 2$;

8.10 $16f(x+2) - 24f(x+1) - 8f(x) = 1$,

$f(0) = -1$, $f(1) = -1$.

9 Найти сумму членов последовательности с номерами от n_1 до n_2, если последовательность задана однородным рекуррентным уравнением.

9.1 $8f(x) + 16f(x-1) = 0$,

$f(0) = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$;

9.2 $12f(x) + 9f(x-1) = 0$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$;

9.3 $6f(x+1) + 9f(x) = 0$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$;

9.4 $-3f(x+1) + f(x) = 0$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$;

9.5 $-24f(x+1) + 9f(x) = 0$,

$f(0) = -1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$;

9.6 $4f(x) + 4f(x-1) = 0$,

$f(0) = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$;

9.7 $12f(x) + 4f(x-1) = 0$,

$f(0) = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 7$;

9.8 $-28f(x-1) + 4f(x-2) = 0$,

$f(0) = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$;

9.9 $4f(x+1) + 4f(x) = 0$,

$f(0) = -1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$;

9.10 $20f(x+1) + 4f(x) = 0$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$.

10 Найти сумму членов последовательности с номерами от n_1 до n_2, если последовательность задана неоднородным рекуррентным уравнением.

10.1 $12f(x) + 9f(x-1) = -x-2$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$;

10.2 $-3f(x+1) + f(x) = x^2-2x$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$;

10.3 $4f(x) + 4f(x-1) = 2^x$,

$f(0) = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$;

10.4 $-28f(x-1) + 4f(x-2) = 1$,

$f(0) = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$;

10.5 $20f(x+1) + 4f(x) = 2x$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$;

10.6 $8f(x) + 16f(x-1) = -6x^2$,

$f(0) = 0$,$n_1 = 2$, $n_2 = 5$;

10.7 $6f(x+1) + 9f(x) = -x^2-2x$,

$f(0) = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$;

10.8 $-24f(x+1) + 9f(x) = x4^x$,

$f(0) = -1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$;

10.9 $12f(x) + 4f(x-1) = -2$,

$f(0) = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 7$;

10.10 $4f(x+1) + 4f(x) = x$,

$f(0) = -1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$.

Домашняя контрольная работа №2 «Элементы комбинаторного анализа»

1 Правило произведения

1.1 Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если никакой телефонный номер не может начинаться с нуля?

1.2 Сколько существует различных десятизначных телефонных номеров, если никакой телефонный номер не может начинаться с нуля?

1.3 Из пункта А в пункт В имеется 5 дорог. Из В в С имеется 6 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт С?

1.4 Из пункта А в пункт В имеется 4 дорог. Из В в С имеется 7 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт С?

1.5 Из пункта А в пункт В имеется 5 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно?

1.6 Из пункта А в пункт В имеется 6 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно?

1.7 Из пункта А в пункт В имеется 5 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно при условии, что дороги туда и обратно будут разными?

1.8 Из пункта А в пункт В имеется 6 дорог. Сколько существует вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно при условии, что дороги туда и обратно будут разными?

1.9 Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если ни в каком телефонном номере нет нуля?

1.10 Сколько существует различных десятизначных телефонных номеров, если ни в каком телефонном номере нет 1, и номер не может начинаться с нуля?

2 Правило суммы

2.1 Из 100 студентов университета, английский знают 28, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трёх языков?

2.2 Преподавательский состав кафедры состоит из 25 преподавателей. Из них: знают английский 14 человек, немецкий – 12 человек, французский – 8 человек. Знают точно один английский – 8, один немецкий – 7, один французский –3. Знают все 3 языка – 2 человека. Сколько человек знают точно 2 языка: английский и немецкий?

2.3 На загородную прогулку поехало 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 7 человек, с сыром – 38, с ветчиной 42, с сыром и колбасой – 28, с колбасой и ветчиной – 31 человек, с сыром и ветчиной – 26 человек. Несколько человек вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

2.4 Преподавательский состав кафедры состоит из 25 преподавателей. Из них: знают английский 14 человек, немецкий – 13 человек, французский – 8 человек. Знают точно один английский – 8, один немецкий – 7, один французский –3. Знают все 3 языка – 2 человека. Сколько человек знают точно 2 языка: английский и французский?

2.5 Преподавательский состав кафедры состоит из 25 преподавателей. Из них: знают английский 14 человек, немецкий – 12 человек, французский – 8 человек. Знают точно один английский – 8, один немецкий – 7, один французский –3. Знают все 3 языка – 2 человека. Сколько человек знают точно 2 языка: французский и немецкий?

2.6 Преподавательский состав кафедры состоит из 25 преподавателей. Из них: знают английский 12 человек, немецкий – 11 человек, французский – 7 человек. Знают английский и французский – 4, английский и немецкий – 4, французский и немецкий – 3. Сколько человек знают все 3 языка?

2.7 Преподавательский состав кафедры состоит из 67 преподавателей. Из них: знают английский 47 человек, немецкий – 35 человек, оба языка знают 23 человека. Сколько человек не знают ни одного языка?

2.8 Из 100 студентов университета, английский знают 31, немецкий – 27, французский – 45, английский и немецкий – 13, английский и французский – 12, немецкий и французский – 11, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трёх языков?

2.9 Из 100 студентов университета, английский знают 31, немецкий – 27, французский – 45, английский и немецкий – 13, английский и французский – 12, не знают ни одного языка 30 человек, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов знают немецкий и французский язык?

2.10 Из 100 студентов университета, английский знают 31, немецкий – 27, французский – 45, немецкий и французский – 11, английский и французский – 12, не знают ни одного языка 30 человек, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов знают немецкий и английский язык?

3 Сочетания

3.1 В киоске продают 8 видов конвертов и 6 вида марок. Сколькими способами можно купить 3 различных конверта и 4 различные марки?

3.2 В киоске продают 9 видов конвертов и 5 вида марок. Сколькими способами можно купить 7 различных конвертов и 3 различные марки?

3.3 Сколько имеется шестизначных чисел, если первая цифра может быть нулём, цифры не должны повторяться и последние две цифры должны быть 7 или 8?

3.4 Сколько имеется пятизначных чисел, если первая цифра не может быть нулём, цифры не должны повторяться и последние две цифры должны быть 5 или 6?

3.5 Сколько имеется шестизначных чисел, если первая цифра может быть нулём, цифры не должны повторяться и последние две цифры не должны быть 7 или 8?

3.6 Сколько имеется пятизначных чисел, если первая цифра не может быть нулём, цифры не должны повторяться и последние две цифры должны быть 5 и 6?

3.7 Из колоды в 36 карт берутся 6 карт. Найти число способов взятия 6 карт, содержащих хотя бы 1 туз.

3.8 Из колоды в 36 карт берутся 7 карт. Найти число способов взятия 6 карт, содержащих 2 туза.

3.9 В урне находится 15 шаров: 6 – красных, 5 – зелёных, 4– синих. Сколькими способами из урны можно извлечь 2 красных, 2 зелёных и 2 синих шара?

3.10 В урне находится 15 шаров: 3 – красных, 5 – зелёных, 7– синих. Сколькими способами из урны можно извлечь 2 красных, 3 зелёных и 4 синих шара?

4 Размещения

4.1 Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначении каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза?

4.2 Сколько различных четырёхзначны натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если в обозначении каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза?

4.3 На плоскости даны 10 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько можно провести различных не замкнутых 5-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

4.4 На плоскости даны 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько можно провести различных не замкнутых 4-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

4.5 На плоскости даны 12 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько можно провести различных замкнутых 7-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

4.6 На плоскости даны 11 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько можно провести различных замкнутых 6-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

4.7 Местком состоит из 7 человек. Выбирается президиум в составе 3 человек: председателя, заместителя председателя, секретаря. Сколько существует различных способов образования президиума?

4.8 На 9 карточках записаны цифры от 1 до 9. Располагая любые три карточки в строку, получим трёхзначное число. Сколько различных трёхзначных чисел можно получить при помощи этих 9 карточек?

4.9 Из колоды в 36 карт берут по одной карте три раза, без возвращения. Сколько существует различных способов получения 3 карт, среди которых на первых двух местах бубны, а на третьем – пика?

4.10 Из колоды в 36 карт берут по одной карте четыре раза, без возвращения. Сколько существует различных способов получения 4 карт, среди которых на первых двух местах бубны, а на третьем – пика, на четвёртом – черви?

5 Перестановки

5.1 Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?

5.2 Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

5.3 Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры числа 9854?

5.4 Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры числа 9857?

5.5 Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры числа 3213?

5.6 Пять пар идут в кино. Сколькими способами они могут занять места, если все пять пар сидят подряд?

5.7 Сколько существует способов рассадить за круглым столом 5 мужчин и 5 женщин, если никакие двое мужчин не должны сидеть рядом?

5.8 Сколько существует способов расставить в ряд 5 мальчиков и 6 девочек, если никакие две девочки и никакие два мальчика не должны стоять радом?

5.9 Имеется 5 различных книг по математике, 2 различные книги по физике и 6 различных книг по информатике. Сколькими способами их можно расположить на одной полке?

5.10 Имеется 5 различных книг по математике, 2 различные книги по физике и 6 различных книг по информатике. Сколькими способами их можно расположить на одной полке, если книги по одной дисциплине должны стоять вместе?

6 Размещения с повторениями

6.1 Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

6.2 Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть цифра 7, или тех, в записи которых её нет?

6.3 Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?

6.4 Сколько разрядных чисел может содержать 10-разрядное слово в троичной системе счисления?

6.5 Монета подбрасывается 4 раза. Сколько существует различных комбинаций выпадения «герба» и «решки»?

6.6 В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные премии?

6.7 Время работы агрегата в сутки задается часами, минутами и секундами. Сколько разных временных интервалов может быть задано для работы агрегата?

6.8 Сколько разрядных чисел может содержать 9-разрядное слово в четверичной системе счисления?

6.9 Сколько восьмизначных чисел не содержат цифры 3?

6.10 Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечётная цифра?

7 Сочетания с повторениями

7.1 У Алёши есть кубики четырёх цветов. Сколько пирамидок, высоты 3 из 15 кубиков он сможет построить?

7.2 В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые премии?

7.3 В кондитерской продаются 5 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 12 пирожных?

7.4 Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают значения 4, 5, 6, 7?

7.5 В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькми способами можно купить 8 открыток?

7.6 У Никиты есть кубики 5 цветов. Сколько пирамидок, высоты 3, из 10 кубиков он сможет построить?

7.7 В конкурсе по 4 номинациям участвуют 12 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые премии?

7.8 В кондитерской продаются пирожные 7 видов. Сколькими способами можно купить 10 пирожных?

7.9 Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают значения 5, 6, 7, 9?

7.10 В почтовом отделении продаются открытки 11 видов. Сколькми способами можно купить 9 открыток?

8 Разбиения множества

8.1 Бросают n игральных костей. Сколько может получиться различных результатов, если результаты, отличающиеся друг от друга лишь порядком очков, считаются одинаковыми, а на каждой кости нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков?

8.2 Сколькими способами можно раздать 19 различных предметов 5 участникам так, чтобы четверо из них получили по 4 предмета, а пятый – 2 предмета?

8.3 Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку при условии, что каждый должен получить по одной карте каждой масти?

8.4 Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку при условии, что один игрок имеет карты всех четырех мастей, а остальные – карты одной масти?

8.5 Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из n попарно различных бусин, на k частей (резать можно только между бусинами)?

8.6 Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками по 7 костяшек?

8.7 Между 4 игроками распределили 28 игральных костей домино по 7 костяшек. Сколько среди этих способов таких, что игрок А получает 7 «дублей»?

8.8 Между 4 игроками распределили 28 игральных костей домино по 7 костяшек. Сколько способов распределения, при которых хоть один из игроков получает 7 «дублей»?

8.9 Между 4 игроками распределили 28 игральных костей домино по 7 костяшек. Во скольких случаях игрок А получит 6 «дублей»?

8.10 Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку?

9 Разбиение числа на слагаемые

9.1 Сколькими способами можно представить число 1958 в виде суммы последовательных натуральных чисел?

9.2 Сколькими способами можно разбить натуральное число на сумму n неотрпцательных целых слагаемых (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

9.3 Сколькими способами можно разложит в два кармана 9 монет различного достоинства?

9.4 Сколькими способами можно представить число 215 в виде суммы последовательных 5 натуральных чисел?

9.5 Сколькими способами можно представить число 117 в виде суммы последовательных 8 натуральных чисел?

9.6 Десять человек разбились на 3 различные группы. Сколькими способами это можно сделать?

9.7 Сколько разложений числа 9 состоит лишь из чисел 1 и 3?

9.8 Сколько раз встречается в упорядоченных разложениях числа 7 на 3 слагаемых, число 2?

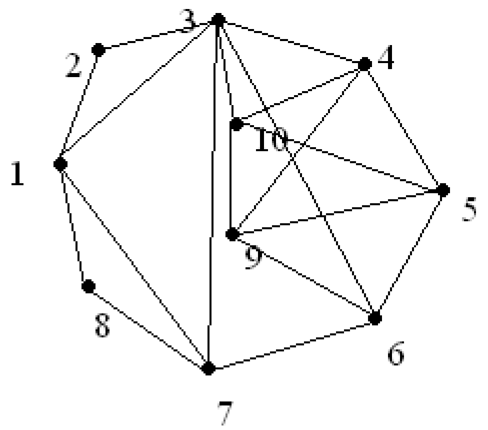
9.9 Двенадцать человек разбились на 3 различные группы. Сколькими способами это можно сделать?

9.10 Сколько раз встречается в произвольных разложениях числа 8 на 3 слагаемых, число 3?

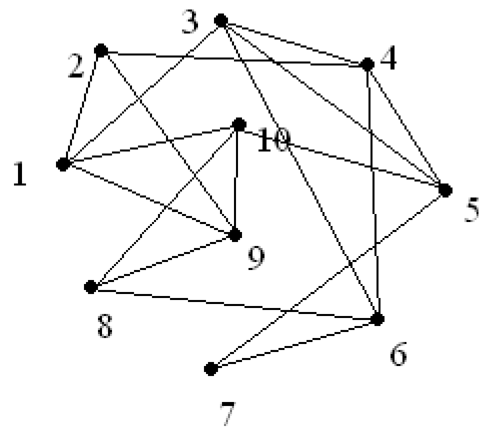
Домашняя контрольная работа №3 «Элементы теории графов»

Дана геометрическая интерпретация графа. Требуется:

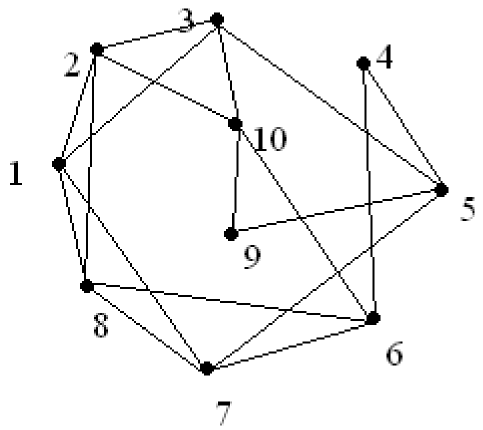
1) Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности данного графа;
2) Найти все расстояния между вершинами и диаметр графа;
3) Построить все остовные деревья графа;
4) Найти все точки сочленения графа;
5) Найти все блоки графа;
6) Ответить на вопрос, является ли граф планарным?;
7) Ответить на вопрос, является ли граф эйлеровым?;
8) Ответить на вопрос, является ли граф гамильтоновым?;
9) Определить хроматическое число графа;
10) Привести пример раскраски данного графа.



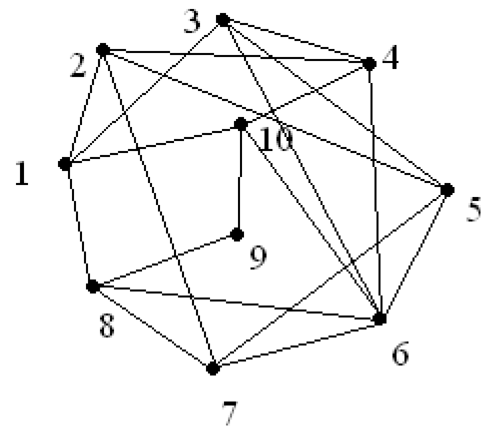
1



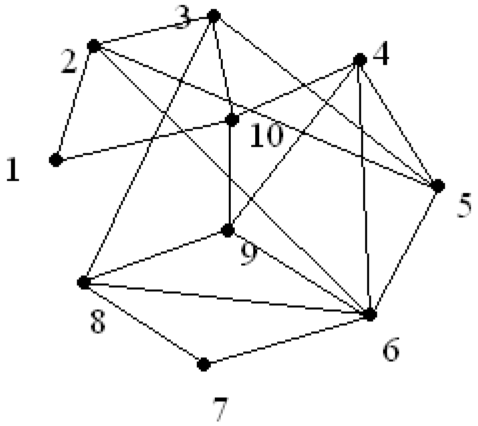
3



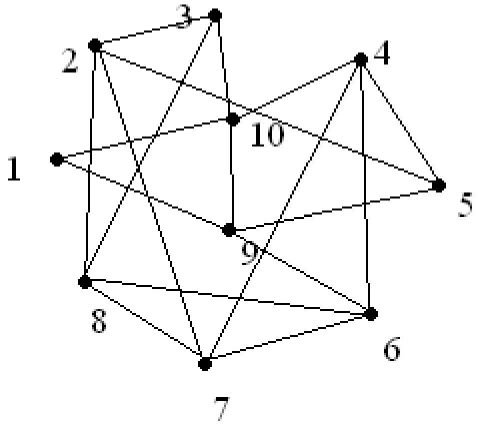
2



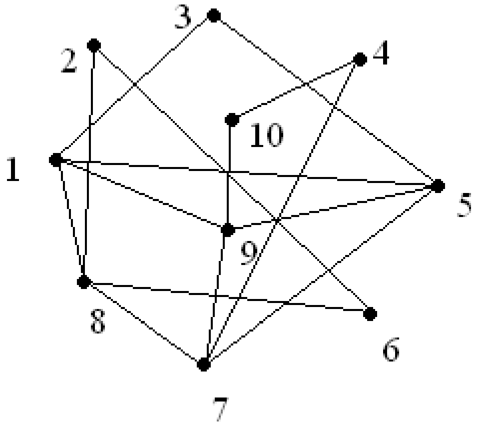
4


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

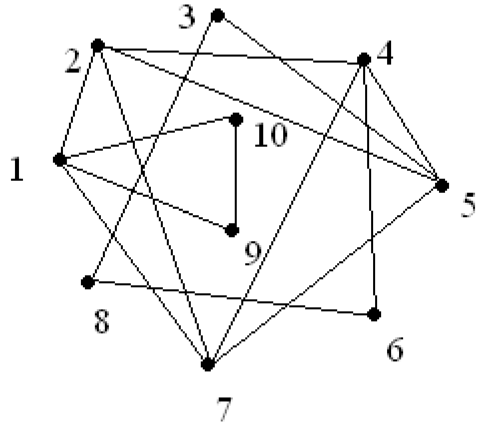
5


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

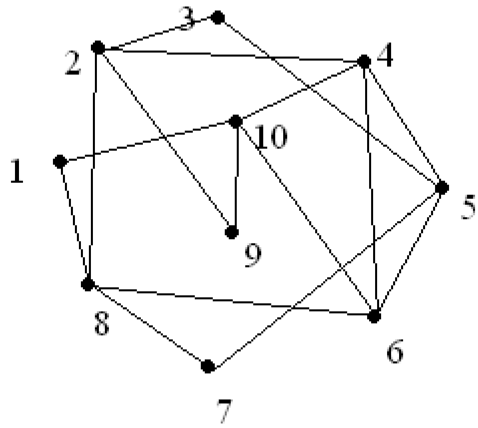
6


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

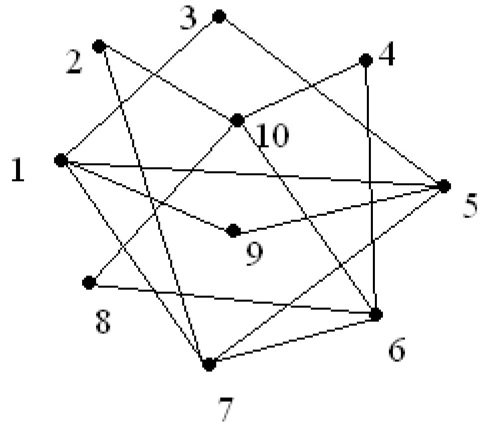
7


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

8


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

9


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

10