Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств, 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2019

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7
С 17

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Павленко

**Смирнова, Е.Н.**

С 17 Практические занятия по теме «Функция одной переменной»: методические указания / Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 22 с.

Методические рекомендации содержат вопросы и задачи к практическим занятиям, а также задания для самостоятельной работы и литературу по дисциплине.

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Функция одной переменной» предназначены для бакалавров первого курса очной формы обучения направлений подготовки: 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, профиль «Электронные средства телекоммуникаций»; 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств, профиль «Проектирование и технология радиоэлектронных средств»; 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, профиль «Промышленная электроника»; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, профиль «Энергообеспечение предприятий»; 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, профили «Электроснабжение», «Электромеханика», «Электропривод и автоматика» по дисциплине «Математика».

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7

# Содержание

# Введение

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины Б.1.Б.10 Математика для бакалавров первого курса очной формы обучения направлений подготовки: 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, профиль Электронные средства телекоммуникаций; 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств, профиль Проектирование и технология радиоэлектронных средств; 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, профиль Промышленная электроника; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, профиль Энергообеспечение предприятий; 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, профили Электроснабжение, Электромеханика, Электропривод и автоматика.

Методические указания могут быть использованы для проведения практических занятий. Каждое практическое занятие включает задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

Для освоения дисциплины «Математика» по разделам: 7. Введение в математический анализ, 8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной, 9. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков, 10. Интегральное исчисление функций одной переменной учебным планом предусмотрены лекции (20 час.), практические занятия (18 час.), самостоятельная работа студентов (70 час.).

Предусмотрены следующие виды контроля знаний студентов:

– Оперативный контроль. Оперативный контроль проводится с целью определения качества усвоения лекционного и практического материала. Проводится в форме проверки домашних заданий и опроса студентов – еженедельно.

Для контроля усвоения теоретического материла целесообразно по усмотрению лектора проведение коллоквиума (в середине семестра) в устной или письменной форме.

– Рубежный контроль. Проводится в форме аудиторным и домашних контрольных работ (КР), расчетно-графических заданий (РГЗ).

– Итоговый контроль. Для контроля усвоения данной дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в 1 семестре и дифференцированный зачет во 2 и 3 семестрах в устной форме.

## 1 Содержание разделов дисциплины

*7 раздел* «Введение в математический анализ»

Сведения о множествах и логической символике, отображения и функции. Действительные числа: алгебраические свойства множества R действительных чисел; аксиома полноты множества R. Действия над действительными числами, принцип Архимеда. Основные принципы полноты множества R: существование точной верхней (нижней) грани числового множества. Теория пределов: предел числовой последовательности; основные свойства и признаки существования предела; предельные точки; предел монотонной последовательности; число «е», верхний и нижний пределы; критерий Коши существования предела. Топология на R; предел функции в точке; свойства пределов; бесконечно малые и бесконечно большие функции и последовательности; предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к аргументу; общая теория предела; основные свойства предела. Эквивалентные бесконечно-малые величины. Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; непрерывность функции от функции; точка разрыва; ограниченность функции, непрерывной на отрезке; существование наибольшего и наименьшего значений; прохождение через все промежуточные значения; монотонные функции, существование и непрерывность обратной функции, непрерывность элементарных функций. Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; непрерывность функции от функции; точка разрыва; ограниченность функции, непрерывной на отрезке; существование наибольшего и наименьшего значений; прохождение через все промежуточные значения; монотонные функции, существование и непрерывность обратной функции, непрерывность элементарных функций.

*8 раздел* «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Дифференциалы и производные: дифференцируемость функции в точке; производная в точке, дифференциал и их геометрический смысл; механический смысл производной; правила дифференцирования; производные и дифференциалы высших порядков; формула Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях; локальная формула Тейлора; асимптотические разложения элементарных функций; формула Тейлора с остаточным членом; применение дифференциального исчисления к исследованию функций, признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, раскрытие неопределенностей; геометрические приложения.

9 *раздел* «Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков»

Признак монотонности функции, экстремумы функции, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке; выпуклость функции, точки перегиба; асимптоты графика функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

10 *раздел* «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Неопределенный интеграл: первообразная функция, неопределенный интеграл и его основные свойства; таблица формул интегрирования; замена переменной, интегрирование по частям; интегрирование рациональных функций; интегрирование некоторых простейших иррациональных и трансцендентных функций. Определенный интеграл: задачи, приводящие к понятию определенного интеграла; критерий интегрируемости; интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва; свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении; дифференцирование по переменному верхнему пределу; существование первообразной от непрерывной функции; связь определенного интеграла с неопределенным: формула Ньютона-Лейбница; замена переменной;

интегрирование по частям; длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения; несобственные интегралы 1 и 2 рода.

## 2 Календарно-тематический план практических занятий

| № занятия | № раздела | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|---|
| 11 | 7 | Множество, его элементы. Подмножества. Декартово произведение. Логическая символика. Отображение и функция. Принцип математической индукции. Бином Ньютона. | 2 |
| 12 | 7 | Предел последовательности. Число e. Предел числовой функции. Порядок бесконечно малой функции. Замечательные пределы. Основные эквивалентности бесконечно малых. | 2 |
| 13 | 7 | Непрерывность функции. Точки разрыва. Их классификация. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке. Непрерывность элементарных функций. | 2 |
| 14 | 8 | Дифференциал и производная функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. | 2 |
| 15 | 8 | Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Локальная формула Тейлора. Асимптотические разложения элементарных функций. | 2 |
| 16 | 8 | Применение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, точки перегиба, асимптоты. Правило Лопиталя. | 2 |
| 17 | 9 | Применение дифференциального исчисления к исследованию функций. Полное исследование функции. | 2 |
| 18 | 10 | Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица формул интегрирования. Интегрирование путем замены переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных и тригонометрических функций. | 2 |
| 19 | 10 | Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Несобственные интегралы. | 2 |

# 3 План практических занятий по темам

## 3.1 Тема 1: Множество. Отображение и функция. Принцип математической индукции. Бином Ньютона (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Сведения о множествах и логической символике.
2. Подмножества.
3. Декартово произведение.
4. Отображения и функции.
5. Принцип математической индукции.
6. Бином Ньютона.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Что такое множество?
2. Как можно задать множество?
3. Дайте определение подмножества.
4. Дайте определения операций пересечения, объединения, дополнения. Какими свойствами они обладают?
5. Дополнение к пустому множеству дает какое множество?
6. Что называют декартовым произведением множеств?
7. Что называют функцией?
8. Как можно задать функцию?
9. Перечислить основные элементарные функции.
10. В чем схожесть и в чем различие между понятиями «функция» и «операция»? Какое понятие более общее?
11. Что называют биномом Ньютона?
12. Какие коэффициенты используются в биноме Ньютона? Приведите примеры.
13. Как вычисляются полиномиальные коэффициенты? Приведите примеры.

*Практические задания:*

1. Пусть $A$ – множество всех натуральных четных чисел, а $B$ – множество всех натуральных чисел, представимых в виде суммы двух нечетных натуральных чисел. Доказать, что $A=B$.

2. Выполнить операции $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times B$, $B\times A$ если: а) $A=\{a,1,2\}$, $B=\{a,b,1\}$; б) $A=(-\infty,3)$, $B=[-1, +\infty)$; в) $A=\{2n-1\setminus n\in N\}$, $B=\{-1,0,1,2,3\}$.

3. Согласно опросу 100 покупателей рынка, купивших цитрусовые, апельсины купили 29 покупателей, лимоны – 30 покупателей, мандарины – 9, только мандарины – 1, апельсины и лимоны – 10, лимоны и мандарины – 4, все три вида фруктов – 3 покупателя. Сколько покупателей не купили ни одного вида перечисленных здесь цитрусовых? Сколько покупателей купили только лимоны?

4. Если $A\subset B$, то чему равно $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$?

5. Запишите разложение $(1+x)^7$ по степеням $x$.

6. Получите разложение бинома $(2a-\frac{1}{2})^5$.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Выполните следующие операции над множествами: а) $\{1,2,3\}\cup\{2,4,6\}$; б) $\{1,2,3\}\cap\{2,4,6\}$; в) $\{1,2,3\}\setminus\{2,4,6\}$; г) $\{2,4,6\}\setminus\{1,2,3\}$; д) $\{a,c\}\setminus\{a,c\}$; е) $\{1,2,3\}\setminus\{4,5,6\}$.

3. Найдите член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий $x^3$.

**3.2 Тема 2: Предел последовательности (2 часа)**

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Последовательность.
2. Предел числовой последовательности.
3. Основные свойства и признаки существования предела.
4. Предел монотонной последовательности.
5. Число «е».
6. Критерий Коши существования предела.
7. Предел функции в точке.

8. Свойства пределов функции.

9. Бесконечно малые и их основные свойства.

10. Замечательные пределы.

11. Эквивалентные бесконечно малые величины.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Что называют последовательностью?

2. Что называют пределом последовательности?

3. Какая последовательность называется бесконечно малой, бесконечно большой?

4. Сформулируйте основные свойства и признаки существования предела последовательности.

5. Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

6. Что называют пределом функции в точке?

7. Какие пределы функции называются односторонними?

8. Сформулируйте основные свойства предела функции.

9. Какая функция называется бесконечно малой? Перечислите ее свойства.

10. Докажите 1 замечательный предел.

11. Докажите 2 замечательный предел.

13. Какие функции называются эквивалентными?

14. Перечислите основные эквивалентные функции.

*Практические задания:*

1. Найти общий член последовательности $x_n$: -2, -$\frac{5}{2}$, - $\frac{10}{30}$, - $\frac{17}{4}$, … .

2. Доказать: $a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-3}=\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+5}=1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+3}=2.$

3. Вычислить пределы последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$.

4. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x+1}{x^2-2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2^x-8}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-5x^4+2}{3x^2-9x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2-3}-x)$;

5) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$=2; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}2x}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-2})^x$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)$; 14) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$; 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Найти общий член последовательности $x_n$: $1, \frac{11}{5}, \frac{26}{10}, \frac{47}{17}, \ldots$ .

2. Вычислить пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{3x^2-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5x}{4x^3+x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+8x}{x^4-7x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^2+6x}-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\mathrm{tg}3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+8}{10+x})^{2x+3}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2})^{x^2+1}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3})$.

## 3.3 Тема 3: Непрерывность функции и точки разрыва (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Непрерывность функции.
2. Точки разрыва.
3. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
4. Непрерывность элементарных функций.
5. Непрерывность обратной функции.
6. Непрерывность сложной функции.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Какая функция называется непрерывной в точке; в области?
2. Что называют точками разрыва?

3. Какие бывают точки разрыва?

4. Какая точка называется точкой разрыва 1 рода?

5. Какая точка называется устранимой точкой разрыва?

6. Какая точка называется точкой скачка?

7. Какая точка называется точкой разрыва 2 рода?

8. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

*Практические задания:*

Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить график функции вблизи точек разрыва:

1. $y = \frac{1}{x^2-1}$; 2. $y = \frac{|x-4|}{x-4} + \frac{4}{x}$; 3. $y = \frac{3}{x^2-2x+1}$ ; 4. $y = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{2}{x}$; 5. $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

6. $y = \begin{cases} x, x \geq -1 \\ -x, < -1 \end{cases}$; 7. $y = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ 2x^2, x < 1 \end{cases}$; 8. $y = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ 2x, x \geq 0 \end{cases}$; 9. $y = \begin{cases} x + 1{,}5, x < -2 \\ \frac{1}{x}, -2 \leq x < 0 \\ 2x, x \geq 0 \end{cases}$;

10. y=$\begin{cases} \frac{|\mathrm{x}+1|}{\mathrm{x}+1}, \mathrm{x} < -1 \\ \sqrt{1-\mathrm{x}^2}, -1 \leq \mathrm{x} \leq 0 \\ 1-\mathrm{x}, \mathrm{x} > 0 \end{cases}$.

*Задания для самостоятельной работы:*

Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить график функции вблизи точек разрыва:

1. $y = \frac{5}{2x-1}$; 2. $y = \frac{|x-3|}{x-3}$; 3. $y = \begin{cases} 2x+3, x \leq 3 \\ 1-x^2, x > 3 \end{cases}$; 4. $y = \frac{x^2-6}{x-4}$ ; 5. $y = \begin{cases} 3-x, x \geq -3 \\ e^x, x < -3 \end{cases}$.

### 3.4 Тема 4: Дифференциал и производная функции. Производные и дифференциалы высших порядков (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Производная функции в точке.

2. Геометрический и физический смысл производной.

3. Правила дифференцирования.

4. Дифференциал и его геометрический смысл.

5. Производная сложной функции, функции, заданной неявно и параметрически.

6. Производные и дифференциалы высших порядков.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Что называют производной функции в точке?

2. Сформулируйте необходимое условие существования производной функции в точке.

3. Какой геометрический смысл производной; физический смысл?

4. Как найти производную суммы, произведения и частного двух функций?

5. Что называют дифференциалом функции?

6. Какой геометрический смысл дифференциалом функции?

7. Как найти производную сложной функции, функции, заданной неявно и параметрически?

8. Что называют производной $n$-го порядка?

9. Как находится дифференциал высших порядков?

*Практические задания:*

1. Найти производную функции, исходя из определения:

а) $y = x^2 - x$; б) $y = \frac{5}{3x+2}$; в) $y = -\frac{2}{5x+7}$; г) $y = \sqrt{1-3x}$.

2. Найти производные функций**:**

а) $y = 3\sqrt[3]{x}+2\cos x$; б) $y = (x+2)(2x^3 - x)$; в) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$; г) $y = -8^x + 3\ln x - \frac{7\sqrt{x^5}}{2}$; д) $y = \frac{x^2+7x}{5x-2}$; е) $y = arcsinx^2$; ж)$y = (\ln x)^x$; з) $y = x^{x^2}$; и) $y = x^{\ln x}$; к) $y = (\sin x)^{\ln x}$.

3. Найти производные функций, заданных неявно:

а) $xy + x + y = 1$; б) $\cos(x+y) = x$; в) $x^2 + y^2 = -xy$; г) $2x^3y^2 - y^3 - 3x = 0$.

4. Найти производные функций, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x = arccos2t \\ y = 5 - t^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = tg(1-2t) \\ y = arcsint \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = te^{-2t} \\ y = (1-3t)^2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x = \ln 3t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$.

5. Найти производные II порядка функций:

а) $y = arcsinx$; б) $y = x^2e^{3x}$; в) $y = \ln\cos(7x-3)$; г) $y = \sin x^2$.

6. Найти дифференциал функции:

а) $y = tg^3 4x$; б) $y = arccosx^3$; в) $y = \ln\cos x^3$; г) $y = \ln\sin x$; д)$y = \ln sin^3 5x$.

7. Найти дифференциал II-го порядка:

а) $y = \sin\ln x$; б)$y = 2^{4x}$; в) $y = \frac{1}{3}ln^3 x$; г) $y = e^{x^2}$; д) $y = \ln 3x$.

8. Вычислить приближенно при помощи дифференциала:

а) $tg46^0$; б) $\sqrt[5]{31}$; в) $(3{,}002)^4$; г) $(1{,}998)^5$.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Найти производную функции, исходя из определения:

а) $y = x^2 - 3x + 5$; б) $y = \frac{3}{2x+4}$; в) $y = -\frac{6}{5+3x}$; г) $y = \sqrt{x-1}$.

2. Найти производные функций**:**

а) $y = -\frac{7}{8}x^6 + \frac{x^7}{7} - arctgx$; б) $y = (2x-1)(4x^3+3x^2-1)$; в) $y = cos^3 7x$;

г)$y = (arcsinx)^x$; д) $e^x = xy$; е)$\begin{cases} x = \ln(1-t) \\ y = \frac{1}{t+1} \end{cases}$.

3. Найти производные II-го порядка функций:

а) $y = \sqrt{3-5x}$ ; б) $y = arctgx$.

4. Найти дифференциал функции:

а) $y = arctg\ln x$; б) $y = e^{arcsin3x}$; в) $y = sin^4 x$.

## 3.5 Тема 5: Основные теоремы дифференциального исчисления. Локальная формула Тейлора (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ролля.
2. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Лагранжа.
3. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Коши.
4. Локальная формула Тейлора.
5. Асимптотические разложения элементарных функций.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

2. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

3. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

4. Запишите локальную формулу Тейлора.

5. Запишите асимптотические разложения элементарных функций.

*Практические задания:*

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируема на интервале $(a;\ b)$ и $f(a)$=$f(b)$=0, то уравнение $f(x)$+$f'(x)$=0 имеет на промежутке $(a;\ b)$ хотя бы один корень.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;\ b]$, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ и $f(x) > 0$, $g(x)$>0, $\forall\ x \in (a;\ b)$, то уравнение $f'(x)/f(x)\ln g(x)+g'(x)/g(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на интервале $(a;\ b)$.

3. Показать, что $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+\Theta}}$, где $0<\Theta<1$.

4. Доказать, что решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y''-xy^2=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$, является возрастающей функцией.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ и $f'g - fg' \neq 0$. Доказать, что между двумя корнями уравнения $g$=0 лежит ровно один корень уравнения $f$=0 и наоборот.

2. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f''(x) \leq 0$ на $[a,b]$ и $f(a)=f(c)=f(b)$ для некоторой точки $c \in (a,b)$. Доказать, что функция $f(x)=const$ на $[a,\ b]$.

3. Доказать неравенство $e^x-1>\ln(1+x)$, $x > 0$.

**3.6 Тема 6: Применение дифференциального исчисления к исследованию функций. Правило Лопиталя (2 часа)**

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Монотонность функции.

2. Экстремумы функции.

3. Выпуклость, вогнутость графика функции.

4. Точки перегиба графика функции.

5. Асимптоты функции.

6. Правило Лопиталя.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Какая функция называется возрастающей, убывающей?

2. Сформулируйте признак возрастания, убывания функции.

3. Что называется экстремумом функции?

4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции в точке; достаточное условие.

5. Какой график функции называется выпуклым, вогнутым?

6. Сформулируйте признак выпуклости, вогнутости графика функции.

7. Что называют точками перегиба графика функции?

8. Сформулируйте необходимое условие существования точки перегиба; достаточное условие.

9. Что называют асимптотой графика функции?

10. Какие бывают асимптоты? Как находятся уравнения асимптот?

11. Сформулируйте правило Лопиталя.

*Практические задания:*

1. Найти экстремумы функции:

а) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$; б) $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$; в) $y = \frac{2}{x^2+x+1}$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = 2x^3 - 3x + 1$; б) $y = \frac{1}{x^2-1}$; в) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$.

3. Найти асимптоты графика функции:

а) $y = \frac{2}{1-x^2}$; б) $y = \frac{1}{x}2^x$; в) $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.

4. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Найти экстремумы функции:

а) $y = 2x^3 - 3x + 1$; б) $y = \frac{1}{x^2-1}$; в) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; б) $y = x + \frac{1}{x}$.

3. Найти асимптоты графика функции:

а) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$; б) $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$; в) $y = \frac{2}{x^2+x+1}$.

4. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^x$; б) $\lim\limits_{x\to0}(tgx)^x$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{\sin(x-2)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

## 3.7 Тема 7: Исследование функции и построение графика (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.
2. Полное исследование функции.

*Вопросы для самопроверки:*

Схема исследования функции для построения графика.

*Практические задания:*

Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$; б) $y = x + e^{-x}$; в) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$; г)$y = \frac{5x^3-x^4}{6}$; д) $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$; е)$y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.

*Задания для самостоятельной работы:*

Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = x^3 + 3x^2$; б) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; в)$y = \frac{2}{1-x^2}$; г) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$.

## 3.8 Тема 8: Интегрирование функций (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

2. Свойства неопределенного интеграла.

3. Таблица основных интегралов.

4. Методы интегрирования.

5. Интегрирование рациональных функций.

6. Интегрирование простейших иррациональных функций.

7. Интегрирование простейших тригонометрических функций.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Что называют первообразной функции?

2. Дайте определение неопределенного интеграла.

3. Перечислите свойства неопределенного интеграла.

4. Какие основные методы интегрирования вы знаете?

5. Запишите формулу интегрирования замены переменной.

6. Запишите формулу интегрирования по частям.

7. Какая дробь называется правильной.

8. Как вычисляются интегралы от рациональных функций?

9. Как вычисляются интегралы от иррациональных функций?

10. Как вычисляются интегралы от тригонометрических функций?

*Практические задания:*

***Вычислить интегралы:***

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$; 2. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$; 3. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\sqrt{tg 4x}}$; 4. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}dx$;

5. $\int xe^{-2x}dx$; 6. $\int x arctg x dx$. 7. $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$. 8. $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$.

9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$. 10. $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$. 11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$. 12. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

13. $\int \cos^2 5x dx$. 14. $\int tg^5 2x dx$.

*Задания для самостоятельной работы:*

***Вычислить интегралы:***

1. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1}$. 2. $\int \sqrt[3]{\cos 2x}\sin 2x dx$; 3. $\int \frac{\sqrt[5]{tg(x-1)}}{\cos^2(x-1)}dx$; 4. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx$; 5. $\int (x^2-1)e^{2x}dx$.

6. $\int \ln(4x^2+1)dx$. 7. $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx$. 8. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x^2-7x+12)(x-2)}dx$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

10. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$. 11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. 12. $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

## 3.9 Тема 9: Определенный интеграл. Несобственные интегралы (2 часа)

*Вопросы к практическому занятию:*

1. Определенный интеграл.

2. Свойства определенного интеграла.

3. Формула Ньютона-Лейбница.

4. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

5. Несобственные интегралы.

*Вопросы для самопроверки:*

1. Дайте определение определенного интеграла.

2. Перечислите свойства определенного интеграла.

3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

4. Какие методы интегрирования определенного интеграла знаете?

5. Что называют интегралом с переменным пределом интегрирования?

6. Как вычисляют несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования?

7. Как вычисляют несобственный интеграл от неограниченных функций?

8. Сформулируйте признаки сравнения несобственных интегралов.

*Практические задания:*

1. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x dx$. б) $\int_{0}^{1}\frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$. в) $\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$. г) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.

д) $\int_{0}^{\operatorname{arctg}(1/3)}\frac{(8+\operatorname{tg} x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$. е) $\int_{-\pi}^{0}2^8\sin^6 x\cos^2 x\, dx$. ж) $\int_{0}^{1}\frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{\left(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2}dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}x^2\cdot e^{-x}dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3}{\left(x^4+1\right)^3}dx$; г) $\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; д) $\int\limits_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$;

е) $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

*Задания для самостоятельной работы:*

1. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x dx.$ б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ в) $\int\limits_0^{2\pi/3}\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx.$ г) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}dx.$

д) $\int\limits_0^{\pi}2^4\cos^8 x\, dx.$

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx$; в) $\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$; г) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

## 4 Самостоятельная работа студентов

Рабочей программой дисциплины «Математика» по рассматриваемым разделам предусмотрена самостоятельная работа студентов в объеме 70 часов. Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

– выполнение индивидуального творческого задания;

– выполнение расчетно-графического задания (РГЗ);

– самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий; подготовка к практическим занятиям, коллоквиумам, контрольным работам);

– самостоятельное изучение разделов: №8 Темы: Локальная формула Тейлора; асимптотические разложения элементарных функций; формула Тейлора с остаточным членом и №10 Тема: геометрические, механические и физические приложения определенного интеграла.

С самого начала изучения дисциплины студент должен четко уяснить, что без систематической самостоятельной работы успех невозможен. Эта работа должна регулярно начинаться сразу после лекционных и практических занятий, дабы закрепить пройденный только что материал.

После усвоения теоретического материала можно приступить к самостоятельному решению задач, предложенных в данных указаниях.

## 5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 5.1 Основная литература

1 Гурьянова, К.Н. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / К.Е. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов. – Екатеинбург: Изд-во Уральского университета, 2014. – 332 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php&page=book&id=275708.

2 Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

3 Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст]: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 479 с. – ISBN 5-06-0093959-5.

### 5.2 Дополнительная литература

1 Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст]: учебник для вузов /Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 3-е изд; испр. – М.: Наука, 1988. – 431 с. : ил.

2 Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. [Текст]: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 2-е изд., перераб., доп. – М.: Наука, 1985. – 464 с.: ил.

3 Демидович, Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для

втузов: учеб. пособие для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. - М. : АСТ ; Владимир: ВКТ, 2008. - 496 с.

### 5.3 Периодические издания

Не предусмотрены

### 5.4 Интернет-ресурсы

1 “Открытое образование”, МООК: Курс по математике https://openedu.ru/course/#query=математика

2 Математический форум с обсуждением и решением задач - http://mathhelpplanet.com/

3 Математический портал «Вся математика в одном месте» - http://www.allmath.ru/

4 Общероссийский математический портал Math-Net.Ru - http://www.mathnet.ru/

5 Московский центр непрерывного математического образования - http://www.mccme.ru/