Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

М.Р. Расовский, В.Н. Степанов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Рекомендовано учёным советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 03.03.02 Физика, 03.03.03 Радиофизика

Оренбург
2019

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я7
Р24

Рецензент – доцент, доктор физико-математических наук Т.М. Чмерева

Р24 **Расовский, М.Р.**
Сборник задач повышенной трудности по физике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.Р. Расовский, В.Н. Степанов; Оренбургский гос. ун-т. - Оренбург: ОГУ, 2019.
ISBN 978-5-7410-2316-7

Учебное пособие содержит задачи повышенной трудности с подробными решениями по всем основным разделам школьного курса физики. Пособие ставит своей целью улучшить знание физики у студентов младших курсов физических факультетов университетов обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 03.03.02 Физика, 03.03.03 Радиофизика.

Оно может также использоваться абитуриентами при подготовке к поступлению в университет на специальности, связанные с углублѐнным изучением физики.

Пособие может быть полезно и преподавателям, ведущим на младших курсах университета семинарские занятия по физике.

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я7

ISBN 978-5-7410-2316-7

Содержание

Введение ... 4

1 Механика ... 5

1.1 Кинематика ... 5

Задачи для самостоятельного решения ... 17

1.2 Динамика ... 19

Задачи для самостоятельного решения ... 36

2 Электричество и магнетизм ... 38

2.1 Электростатика ... 38

Задачи для самостоятельного решения ... 53

2.2 Постоянный ток ... 54

Задачи для самостоятельного решения ... 70

3 Магнитное поле. Электромагнитная индукция. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях ... 73

Задачи для самостоятельного решения ... 89

4 Оптика ... 91

4.1 Геометрическая оптика ... 91

Задачи для самостоятельного решения ... 107

4.2 Элементы волновой оптики ... 108

Задачи для самостоятельного решения ... 119

5 Элементы атомной и ядерной физики ... 121

Задачи для самостоятельного решения ... 136

Список использованных источников ... 138

Введение

Данное пособие предназначено для студентов младших курсов физических и технических факультетов университетов. Не секрет, что вчерашние школьники, поступившие в вуз, где физика является одной из главных изучаемых дисциплин, нередко демонстрируют недостаточно глубокое и во многом формальное знание предмета. Такой студент, быть может, и неплохо выучил формулировки законов и определения основных физических величин, однако при встрече с нестандартной задачей, требующей серьезных размышлений и сообразительности, порой встает в тупик, не зная даже, с чего начать решение. Подобного студента совершенно необходимо уже на младших курсах научить решать задачи, выходящие за рамки стандартных. В противном случае он столкнется с непреодолимыми трудностями при изучении сложных университетских курсов.

В предполагаемом учебном пособии рассмотрены задачи по всем основным разделам общего курса физики. Эти задачи, как правило, не выходят за рамки школьной программы, однако требуют для своего решения достаточно глубокого понимания и умелого применения основных физических законов. Учитывая сказанное выше, ко многим задачам даются подробные решения. Кроме того, в каждом разделе имеются задачи для самостоятельного решения, к которым приведены ответы.

Большая часть условий задач взяты нами из сборника «3800 задач по физике» Н.В. Турчина, Л.И. Рудаковой и др. Решения всех задач принадлежат авторам данного пособия.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 03.03.03 Радиофизика, 03.03.02 Физика. Оно может быть также рекомендовано к использованию преподавателями и учащимися физико-математических школ, кружков и факультативов.

1 Механика

1.1 Кинематика

1.1 С какой скоростью должна двигаться нефть в трубопроводе сечением S = 100 см^2, чтобы в течение часа протекало V = 18 м^3 нефти ?

<u>Решение</u>

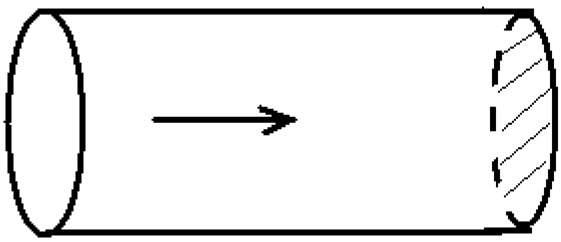

Рисунок 1.1

Объем нефти, протекающей за 1 с. через поперечное сечение трубопровода, равен (рисунок 1.1)

$$V_t = S \cdot \upsilon,$$

где υ - искомая скорость. Тогда за время t протечет объем нефти, равный

$$V = S \cdot \upsilon \cdot t \quad ,$$

откуда $$\upsilon = \frac{V}{S \cdot t} = \frac{18}{10^{-2} \cdot 3600} = 0,5 (\text{м/с}).$$

1.2 Найти среднюю скорость самолета, если первую треть пути он летел со скоростью υ_1 = 700 км/ч, вторую треть- со скоростью υ_2 = 500 км/ч , а последнюю треть – со скоростью, вдвое большей средней скорости на первых двух участках пути.

Решение

Пусть времена прохождения самолетом названных участков равны соответственно t_1 , t_2 и t_3 , а длина каждого участка S.

Тогда $t_1 = \dfrac{S}{\upsilon_1}$; $t_2 = \dfrac{S}{\upsilon_2}$, и средняя скорость самолета на первых двух участках равна

$$\upsilon_{12} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\dfrac{S}{\upsilon_1} + \dfrac{S}{\upsilon_2}} = \frac{2\upsilon_1 \cdot \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}.$$

По условию, скорость на третьем участке,

$$\upsilon_3 = 2\upsilon_{12} = \frac{4 \cdot \upsilon_1 \cdot \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2},$$

а время его прохождения

$$t_3 = \frac{S}{\vec{\upsilon}_3} = \frac{S \cdot (\upsilon_1 + \upsilon_2)}{4 \cdot \upsilon_1 \cdot \upsilon_2}.$$

Искомая средняя скорость на всем пути

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{3 \cdot S}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3 \cdot S}{\dfrac{S}{\upsilon_1} + \dfrac{S}{\upsilon_2} + \dfrac{S \cdot (\upsilon_1 + \upsilon_2)}{4 \cdot (\upsilon_1 \cdot \upsilon_2)}} =$$

$$= \frac{12 \cdot \upsilon_1 \cdot \upsilon_2}{5 \cdot (\upsilon_1 + \upsilon_2)} = \frac{12 \cdot 700 \cdot 500}{5 \cdot (700 + 500)} = 700\left(\text{км/ч}\right).$$

1.3 Расстояние между двумя пристанями на реке катер проходит в одну сторону за время t_1 = 3 часа, а в обратную – за время t_2 = 6 часов. Какое время потребуется катеру, чтобы пройти это расстояние с выключенным мотором? Скорость катера относительно воды постоянна.

Решение

Пусть S – указанное расстояние, υ – скорость катера относительно воды, u – скорость течения реки. Тогда

$$t_1 = \frac{S}{\upsilon + u}; \qquad t_2 = \frac{S}{\upsilon - u};$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \upsilon + u = \dfrac{S}{t_1} \\ \upsilon - u = \dfrac{S}{t_2} \end{cases}$$

из которой находим:

$$u = \frac{S}{2} \cdot \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

Искомое время $t = \dfrac{S}{u} = \dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2} \right)} = \dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} \right)} = 12$ (часов).

1.4 Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за время t_1 = 3 мин, а по движущемуся вверх эскалатору – за время t_2 = 2 мин. Сможет ли он подняться по эскалатору, движущемуся с той же скоростью вниз? Если сможет, то за какое время?

Решение

Введем обозначения: l – длина подъема;
υ – скорость человека относительно лестницы эскалатора;

u – скорость движения лестницы.

Тогда $t_1 = \dfrac{l}{\upsilon}$; $t_2 = \dfrac{l}{\upsilon + u}$.

Найдем отношение скоростей, разделив 1-ое уравнение на 2-ое:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\upsilon + u}{\upsilon} = 1 + \frac{u}{\upsilon}, \qquad \text{откуда}$$

$$\frac{u}{\upsilon} = \frac{t_1}{t_2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку, как мы видим, $\upsilon \geq u$, то человек сможет подняться по движущейся вниз лестнице. Для этого ему потребуется время

$$t_3 = \frac{l}{\upsilon - u}.$$

Имеем : $\dfrac{t_1}{t_3} = \dfrac{\upsilon - u}{\upsilon} = 1 - \dfrac{u}{\upsilon}$, откуда искомое время

$$t_3 = \frac{t_1}{1 - \dfrac{u}{\upsilon}} = \frac{t_1}{1 - \dfrac{t_1}{t_2} + 1} = \frac{t_1 \cdot t_2}{2 \cdot t_2 - t_1} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 3} = 6\,(\text{мин}).$$

1.5 Два лодочника должны переплыть реку из пункта *A* в пункт *B*. Один из них направляет лодку по прямой *AB* и, достигнув противоположного берега, оказывается в точке *C* (рисунок 1.2). Для того чтобы попасть в пункт *B*, он движется против течения от пункта *C* к пункту *B*. Второй лодочник направляет лодку так, что сразу, достигнув противоположного берега, оказывается в пункте B. Кто из них попадет в пункт B быстрее и во сколько раз? Скорость лодки относительно воды в обоих случаях одинакова и равна $\upsilon = 5{,}2$ м/с, скорость течения $u = 1{,}2$ м/с.

Рисунок 1.2

Решение

а) движение 1-го лодочника (рисунок 1.3)

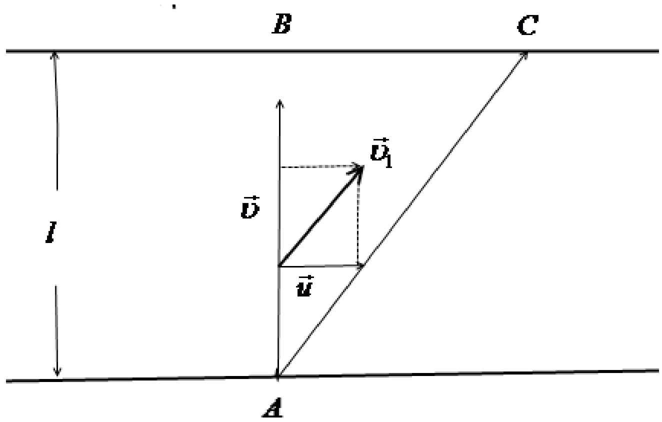

Рисунок 1.3

$$t_1 = \frac{AB}{\upsilon} + \frac{CB}{\upsilon - u}$$

Из подобия треугольников: $\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{u}{\upsilon}$, поэтому

$$BC = \frac{u}{\upsilon} \cdot AB = \frac{u \cdot l}{\upsilon}.$$

Следовательно, $$t_1 = \frac{l}{\upsilon} + \frac{u \cdot l}{\upsilon \cdot (\upsilon - u)}.$$

б) движение 2-го лодочника (рисунок 1.4)

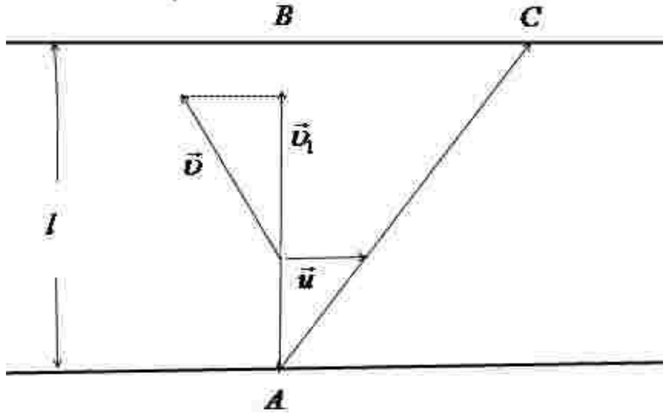

Рисунок 1.4

$$t_1 = \frac{AB}{\sqrt{\upsilon^2 - u^2}} = \frac{l}{\sqrt{\upsilon^2 - u^2}}.$$

Поэтому искомое отношение

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\upsilon^2 - u^2} \cdot \left(\frac{1}{\upsilon} + \frac{u}{\upsilon(\upsilon - u)} \right) = \sqrt{\frac{\upsilon + u}{\upsilon - u}} = \sqrt{\frac{5,2 + 1,2}{5,2 - 1,2}} = 1,265$$

1.6 Самолет, двигаясь равноускоренно, пробегает по взлетной полосе расстояние S = 790 м. При отрыве от полосы его скорость составила υ = 240 км/ч. Какое время продолжался разбег и чему равно ускорение самолета?

Решение

Путь, пройденный при равноускоренном движении, может быть выражен формулой

$$S = \upsilon_{\text{ср}} \cdot t = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \cdot t$$

Поскольку в нашем случае $\upsilon_0 = 0$, то искомое время разбега самолета

$$t = \frac{2S}{\upsilon} = \frac{2 \cdot 790}{66,7} = 23,7 \text{ (с)}$$

Ускорение самолета найдем по формуле

$$a = \frac{\upsilon^2 - \upsilon^2_0}{2S} = \frac{\upsilon^2}{2S} = \frac{66,7^2}{2 \cdot 790} = 2,8 \text{ (м/с}^2\text{)} .$$

1.7 Частица проходит путь S = 2 м равномерно, а затем тормозит с ускорением $a = 5 \cdot 10^5$ м/с^2. При какой скорости частицы время её движения от вылета до остановки будет наименьшим?

Решение

На этапе от x = 0 до x = S движение равномерное; время движения

$$t_1 = \frac{S}{\upsilon}.$$

На этапе от x = S до остановки движение частицы равнозамедленное

$$t_2 = \frac{\upsilon}{a}$$

Общее движение частицы

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\upsilon} + \frac{\upsilon}{a}.$$

Введем функцию

$$f(\upsilon) = \frac{S}{\upsilon} + \frac{\upsilon}{a}.$$

и найдем её минимум с помощью производной:

$$f'(\upsilon) = -\frac{S}{\upsilon^2} + \frac{1}{a} = 0,$$

откуда искомая скорость

$$\upsilon_m = \sqrt{a \cdot S} = \sqrt{5 \cdot 10^5 \cdot 2} = 10^3 \text{ м/с.}$$

Замечание. Минимум функции можно было бы найти и без дифференцирования, использовав известную математическую теорему: если произведение двух функций постоянно, то их сумма минимальна в том и только том случае, когда эти функции равны. В нашем случае:

$$\frac{S}{\upsilon} \cdot \frac{\upsilon}{a} = \frac{S}{a} = const,$$

откуда

$$\frac{S}{\upsilon_m} = \frac{\upsilon_m}{a},$$

и мы приходим к уже известному результату

$$\upsilon_m = \sqrt{a \cdot S}.$$

1.8 С какой начальной скоростью нужно бросить вертикально вниз тело с высоты h = 19,6 м, чтобы оно упало на $\Delta t = 1$с раньше, чем тело, свободно падающее с той же высоты?

Решение

Свободно падающее без начальной скорости тело упадет с высоты h за время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \ .$$

Для тела, брошенного вниз с начальной скоростью υ_0, можем записать:

$$h = \upsilon_0 \cdot t_2 + \frac{g \cdot t_2^2}{2},$$

откуда время его падения

$$t_2 = \frac{-\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^{\ 2} + 2 \cdot h \cdot g}}{g}$$

(знак « – » перед радикалом отбрасываем, поскольку, очевидно, $t_2 > 0$). Следовательно, разница времён

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} - \frac{\sqrt{\upsilon_0^{\ 2} + 2 \cdot h \cdot g} - \upsilon_0}{g}.$$

Из этого уравнения находим начальную скорость тела:

$$\upsilon_0 = \frac{g \cdot h}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h} - g \cdot \Delta t} - \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h} - g \cdot \Delta t}{2} = \frac{g \cdot h}{A} - \frac{A}{2},$$

где введено обозначение

$$A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} - g \cdot \Delta t = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 19{,}6} - 9{,}8 \cdot 1 = 9{,}8 \text{(м/с)} \ ;$$

тогда

$$\upsilon_0 = \frac{9{,}8 \cdot 19{,}6}{9{,}8} - \frac{9{,}8}{2} = 14{,}7 \ \text{(м/с)}$$

1.9 С воздушного шара, опускающегося вертикально вниз с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с, бросили вертикально вверх камень со скоростью $\upsilon_2 = 10$ м/с относительно земли. Каким будет максимальное расстояние между шаром и камнем?

Решение

Пусть ось y направлена вертикально вверх с началом у поверхности земли. Уравнения движения шара и камня соответственно будут при таком выборе иметь вид

$$y_1(t) = -\upsilon_1 \cdot t - h,$$

$$y_2(t) = \mathrm{h} + \upsilon_2 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2},$$

где h – высота, с которой брошен камень. Расстояние между шаром и камнем в момент времени t равно

$$S(t) = \mathrm{y}_2(t) - y_1(t) = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Для нахождения максимума этой функции приравняем нулю производную:

$$S'(t) = \upsilon_1 + \upsilon_2 - g \cdot t = 0,$$

откуда момент времени, отвечающий максимальному расстоянию, равен

$$t_m = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{g}.$$

Следовательно, искомое максимальное расстояние между шаром и камнем

$$S_{\max} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2 \cdot g}.$$

Замечание. Максимальное значение функции S(t) можно найти и без дифференцирования, если переписать её выражение, выделяя полный квадрат:

$$S(t) = -\frac{g}{2} \cdot \left\{ t^2 - \frac{2 \cdot (\upsilon_1 + \upsilon_2)}{g} \cdot t + \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{g^2} - \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{g^2} \right\} = -\frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{g} \right)^2 + \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2 \cdot g}.$$

Очевидно, что максимальное значение этого выражения, достигаемое при

$$t = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{g}$$

равно

$$S_{\max} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2 \cdot g}.$$

1.10 Мяч свободно падает с высоты h = 15 м на горизонтальную поверхность. При каждом отскоке его скорость уменьшается в n = 2 раза. Найти путь, пройденный мячом до полной остановки.

Решение

Поскольку высота подъема мяча после отскока квадратично зависит от скорости отскока:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2 \cdot g},$$

- то каждая следующая высота подъема в n^2 раз меньше предыдущей высоты подъёма. Имеем :

$$h_1 = \frac{h}{n^2}, \quad h_2 = \frac{h_1}{n^2} = \frac{h}{n^4}, \text{ и т.д.}$$

Весь путь, пройденный мячом до остановки, тогда равен

$$S = h + h_1 + h_2 + \ldots = h\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \ldots\right).$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{n^2}$ равна

$$\sum \; = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \ldots = \frac{b_1}{1 - g} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 - 1}.$$

Следовательно, весь путь мяча $S = \dfrac{h \cdot n^2}{n^2 - 1} = \dfrac{15 \cdot 4}{4 - 1} = 20$ (м).

Задачи для самостоятельного решения

1.11 По бикфордову шнуру пламя распространяется с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}8$ см/с. Какой длины шнур необходимо взять, чтобы поджигающий его человек успел отбежать на безопасное расстояние S = 120 м, пока не произошел взрыв? Скорость человека $\upsilon = 4$ м/с.

[Ответ : 0,24 м.]

1.12 Найти среднюю скорость поезда, если известно, что на прохождение отдельных участков дистанции, длины которых относятся как 1:3:4:2, потребовались промежутки времени, находящиеся в отношении 2:4:3:1, и на последнем участке скорость поезда $\upsilon = 80$ км/ч. Считать, что на каждом из участков поезд двигался равномерно.

[Ответ : 40 км/ч.]

1.13 Человек бежит по движущемуся эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1 = 50$ ступенек; второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью относительно эскалатора втрое большей, он насчитал $n_2 = 75$ ступенек. Сколько ступенек человек насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

[Ответ : $n_3 = 100$ ступенек.]

1.14 За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом, втрое больше пути, пройденного им за предыдущую секунду, если движение – равноускоренное без начальной скорости.

[Ответ : за 2-ую секунду.]

1.15 С какой начальной скоростью нужно бросить вертикально вниз тело с высоты h = 19.6 м, чтобы оно упало на $\Delta t = 1$с раньше тела, свободно падающего с той же высоты?

[Ответ : $\upsilon_0 = 14.7$ м/с.]

1.2 Динамика

1.16 Тело движется по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту (рисунок 1.5). Найти ускорение тела, если его масса *m*, а коэффициент трения между телом и плоскостью μ . При каком значении силы F движение будет равномерным?

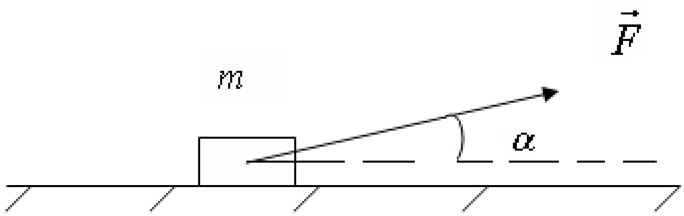

Рисунок 1.5

Решение

Изобразим на чертеже силы, действующие на тело (рисунок 1.6)

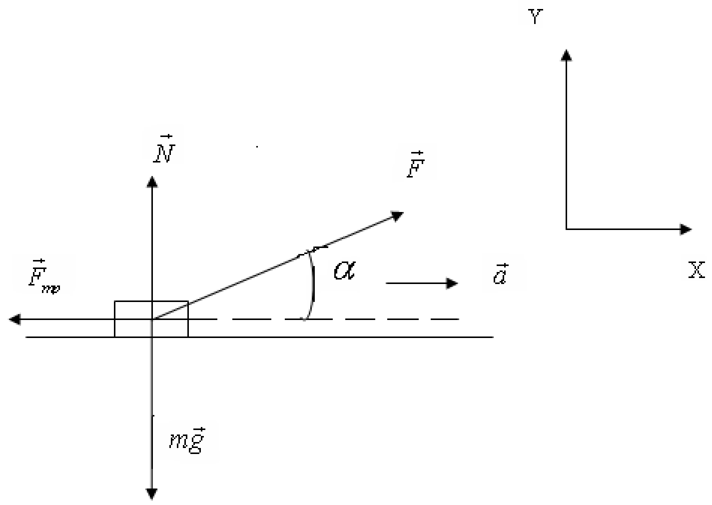

Рисунок 1.6

По 2-му закону Ньютона,

$$\vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m \cdot \vec{a} .$$

Запишем в проекциях на выбранные координатные оси.

$$ox: F\cdot\cos\alpha - F_{\text{тр}} = m\cdot a \quad (1)$$

$$oy: F\cdot\sin\alpha + N = m\cdot g \quad (2)\ .$$

Здесь

$$F_{\text{тр}} = \mu\cdot N$$

Из уравнения (2) получаем:

$$N = m\cdot g - F\cdot\sin\alpha;$$

тогда

$$F_{\text{тр}} = \mu\cdot(m\cdot g - F\cdot\sin\alpha)$$

Подстановка в (1) дает:

$$F\cdot\cos\alpha - \mu\cdot(m\cdot g - F\cdot\sin\alpha) = m\cdot a\ ,$$

откуда искомое ускорение тела

$$a = \frac{F}{m}\cdot(\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha) - \mu\cdot g.$$

Видим, что движение тела будет равномерным (a = 0), если

$$F_1 = \frac{\mu\cdot m\cdot g}{\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha}.$$

1.17 Магнит массой m = 5 кг притягивается к стенке с силой $\vec{F}_1 = 5$Н. Если к магниту приложить ещё силу $\vec{F}_2 = 20$ Н, составляющую угол $\alpha = 30^\circ$ со стенкой (рисунок 1.7) то куда и с каким ускорением будет двигаться магнит? Коэффициент трения между стенкой и магнитом равен $\mu = 0,2$.

При каких значениях μ магнит не будет двигаться?

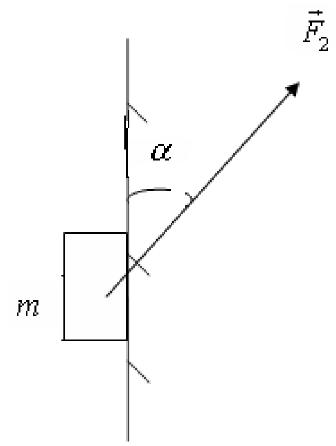

Рисунок 1.7

Решение

Покажем на рисунке 1.8 все силы, действующие на магнит. Если магнит движется (вверх или вниз), то сила трения $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$, где, как видно из рисунка (для определенности показано, что магнит движется вниз),

$$N = F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha .$$

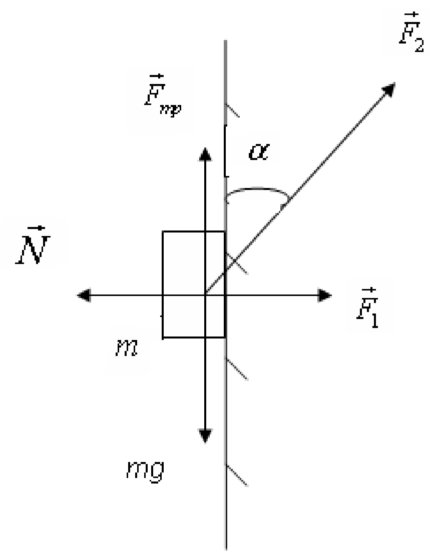

Рисунок 1.8

Предположим, что магнит движется вниз, тогда можно записать для проекции силы, направленной вдоль стенки вверх:

$$F_{\text{тр}} + F_2 \cdot \cos\alpha = \mu \cdot (F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha) + F_2 \cdot \cos\alpha = 0,2 \cdot (5 + 20 \cdot 0,5) + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20,3 \text{ (Н)};$$

проекция силы, направленной вниз:

$$m \cdot g = 5 \cdot 9,8 = 49 \text{ (Н)}$$

Из сравнения этих двух величин следует, что магнит действительно движется вниз. Ускорение магнита по величине равно:

$$a = \frac{m \cdot g - \mu \cdot (F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha) - F_2 \cdot \cos\alpha}{m} = \frac{49 - 20,3}{5} = 5,7 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Магнит не будет двигаться, если

$$F_{\text{тр}} + F_2 \cdot \cos\alpha \geq m \cdot g, \quad \text{или}$$

$$\mu \cdot (F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha) + F_2 \cdot \cos\alpha \geq m \cdot g.$$

Отсюда получаем условие для коэффициента трения:

$$\mu \geq \frac{m \cdot g - F_2 \cdot \cos\alpha}{F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha} = \frac{5 \cdot 9,8 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 + 20 \cdot 0,5} = 2,1.$$

Т.о., магнит останется в покое при $\mu \geq 2,1$.

1.18 Каков должен быть минимальный коэффициент трения между шинами и поверхностью дороги с уклоном $\alpha = 30^\circ$, чтобы автомобиль мог двигаться по ней вверх с ускорением $a = 0{,}5$ м/ с^2?

Решение

При подъеме автомобиля в гору сила трения шин о дорогу, приложенная к автомобилю, должна быть направлена вперед, по ходу движения (рисунок 1.9).

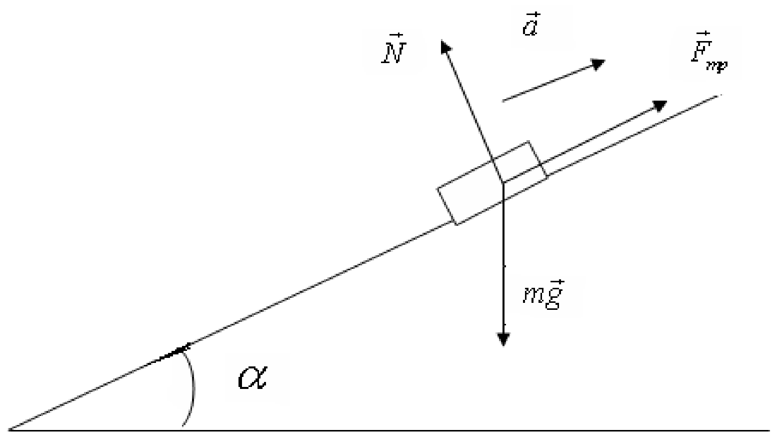

Рисунок 1.9

Автомобиль сможет двигаться вверх с ускорением a при условии

$$ma = F_{тр} - m \cdot g \cdot \sin\alpha,$$

где сила трения

$$F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Имеем:

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha).$$

Отсюда искомый минимальный коэффициент трения

$$\mu_{\min} = \frac{a}{g \cdot \cos\alpha} + tg\alpha = \frac{0,5}{9,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,64.$$

1.19 К телу массой $m_1 = 10$ кг подвешено на веревке тело массой $m_2 = 5$ кг. Масса веревки $m = 2$ кг. Вся система движется ускоренно вверх под действием силы $F = 300$ Н, приложенной к верхнему телу (рисунок 1.10). Найти натяжение веревки в её середине и в точках закрепления тел.

Решение

Покажем на рисунке 1.10 все силы, действующие на систему.

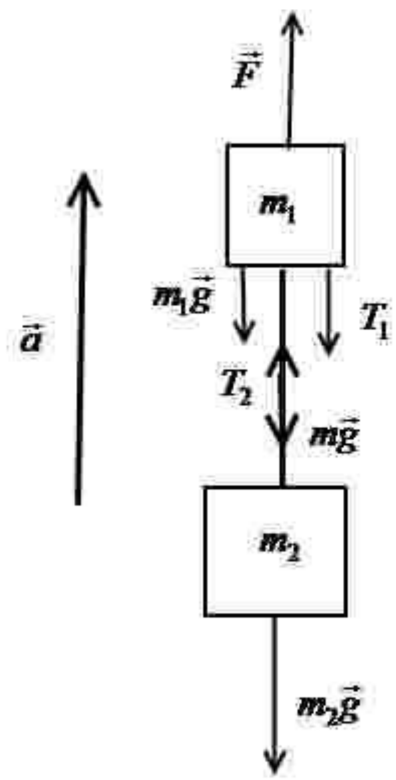

Рисунок 1.10

Для нахождения ускорения системы запишем для неё 2-ой закон Ньютона (в проекциях на вертикальное направление):

$$(m_1+m_2+m)\cdot a=F-(m_1+m_2+m)\cdot g,$$

откуда

$$a=\frac{F}{m_1+m_2+m}-g.$$

Чтобы найти натяжение T_1 , запишем уравнение движения верхнего тела:

$$m_1\cdot a=F-m_1\cdot g-T_1;\quad \text{отсюда}$$

для нижнего тела имеем аналогично:

$$m_2\cdot a=T_2-m_2\cdot g\ ,\ \text{откуда}$$

$$T_2=m_2\cdot(a+g)=\frac{m_2\cdot F}{m_1+m_2+m_3}=\frac{5\cdot 300}{10+5+2}==88{,}2\ (\text{Н})$$

$$T_1=F-m_1\cdot(\text{g}+a)=F\cdot\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2+m}\right)=300\cdot\left(1-\frac{10}{10+5+2}\right)=123{,}5\,(\text{Н}).$$

Для нахождения силы натяжения в середине верёвки запишем уравнение движения для тела, состоящего из нижнего груза и нижней половины верёвки:

$$\left(m_2+\frac{m}{2}\right)\cdot a=T_c-\left(m_2+\frac{m}{2}\right)\cdot g\ ,\ \text{откуда}$$

$$T_c=\left(m_2+\frac{m}{2}\right)\cdot(a+g)=\left(m_2+\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{F}{m_1+m_2+m_3}=\left(5+\frac{2}{2}\right)\cdot\frac{300}{10+5+2}=105{,}9\ (\text{Н})$$

1.20 На покоящееся тело массы m начинает действовать сила $\vec{F}$, величина которой убывает со временем по линейному закону (смотри рисунок 1.11). Какую скорость приобретет тело?

Решение

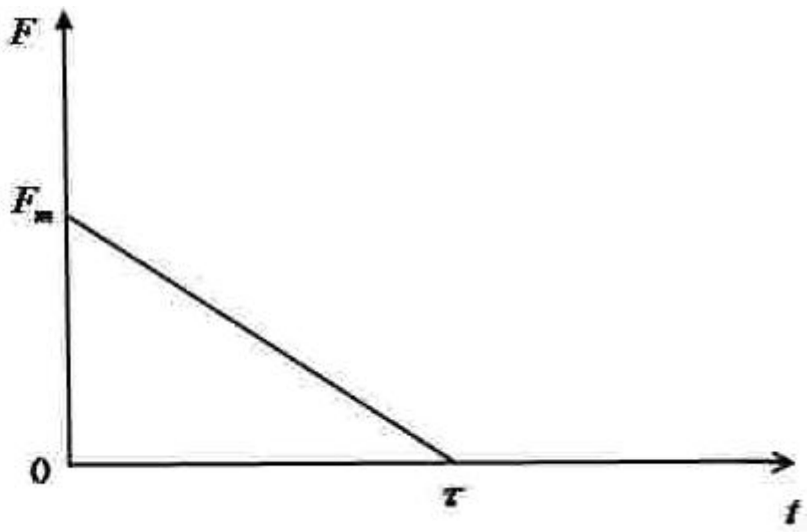

Рисунок 1.11

По второму закону Ньютона

$$m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = F \quad ,$$

откуда после интегрирования получаем:

$$m \cdot (\upsilon - \upsilon_0) = \int_0^{\tau} F(t)dt \quad .$$

В нашем случае $\upsilon_0 = 0$, воспользовавшись геометрическим смыслом интеграла как площади под графиком функции $F(t)$, находим конечную скорость тела:

$$\upsilon = \frac{1}{m} \cdot \frac{F_m \cdot \tau}{2} = \frac{F_m \cdot \tau}{2 \cdot m} \quad .$$

1.21 Клин с углом при вершине 90° и углами при основании α и β находится на гладком столе. По его боковым граням одновременно начинают скользить без трения бруски 1 и 2 массой *m*. Выяснить, будет ли клин скользить по столу, если трение отсутствует

Решение

Изобразим на чертеже (см. рисунок 1.12) все силы, действующие на бруски и на клин: $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные реакции клина (приложены к брускам 1 и 2 соответственно); $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ –силы нормального давления на клин со стороны брусков (приложены к клину). По 3-му закону Ньютона,

$$N_1 = P_1 = m \cdot g \cdot \cos\alpha;$$
$$N_2 = P_2 = m \cdot g \cdot \cos\beta.$$

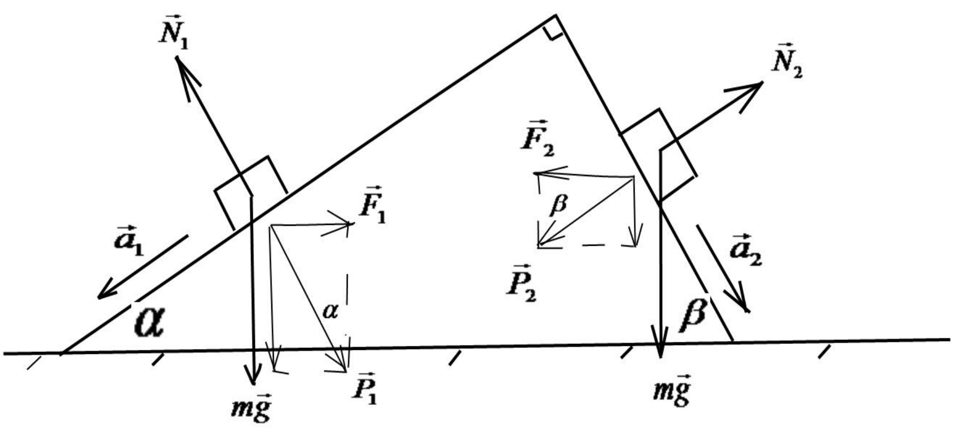

Рисунок 1.12

Чтобы определить, будет ли клин скользить по столу, надо сравнить по величине силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, являющимися горизонтальными проекциями сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Имеем:

$$F_1 = P_1 \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$F_2 = P_2 \cdot \sin\beta = m \cdot g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta$$

А так как по условию клин прямоугольный, то α+β=90°, поэтому $\cos\alpha = \sin\beta$, $\cos\beta = \sin\alpha$. Учитывая это, получаем: $\vec{F}_1$ = $\vec{F}_2$, т.е. клин будет покоиться относительно стола.

1.22 С вершины ледяной горы, длина которой l = 10 м, а высота h = 2 м, без начальной скорости скатывается мальчик. Какое время t будет скользить мальчик до основания горки, если коэффициент трения между его валенками и льдом μ = 0,2? Какую скорость υ будет иметь мальчик у основания горки?

Решение

На рисунке 1.13 изображены все силы, действующие на мальчика в задаче. Из чертежа видно, что

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = \frac{\sqrt{10^2 - 2^2}}{10} = 0{,}9798,$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{2}{10} = 0{,}2\ .$$

Запишем 2-ой закон Ньютона в проекциях на ось x:

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_{\text{тр}},$$

где m – масса мальчика, a – величина его ускорения, $F_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения.

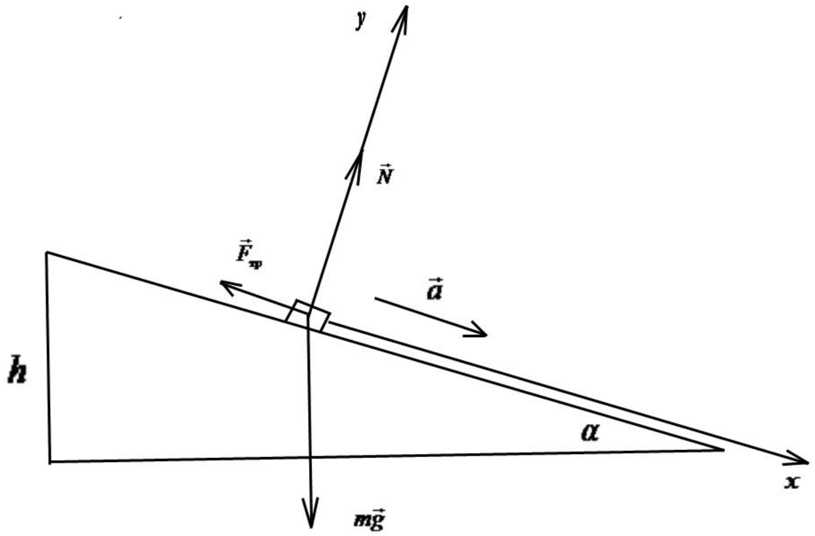

Рисунок 1.13

Значение последней найдем по формуле

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha\ .$$

Тогда ускорение мальчика

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

Время скольжения с горки

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}} = 22,2\,(\text{с})\ .$$

Скорость мальчика у основания горки

$$\upsilon = a \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)} = 0,9 \text{ м/с.}$$

1.23 Тележка массы M = 20 кг может катиться без трения по горизонтальному пути. На тележке лежит брусок массы m (смотри рисунок 1.14). Коэффициент трения между бруском и тележкой μ = 0,25. К бруску приложена горизонтальная сила $\vec{F}$: один раз F_1 = 1,96 Н, а другой раз F_2 = 19,6 Н. Определить силу трения между бруском и тележкой, а также ускорение бруска и тележки в обоих случаях.

Решение

Изначально неясно, будет ли брусок скользить по тележке или же они будут под действием силы $\vec{F}$ двигаться как единое целое с общим ускорением $\vec{a}$.

Предположим, что брусок скользит относительно тележки. В этом случае на него со стороны тележки должна действовать сила трения скольжения, направленная против движения и равная

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot m \cdot g = 0,25 \cdot 2 \cdot 9,8 = 4,9\ (\text{Н})\ .$$

Из этого результата следует, что при F_1=1,96 Н брусок не сможет скользить по тележке, так как в этом случае $F_{\text{тр}} > F_1$. Имеем два случая.

1) $F = F_1 = 1{,}96$ Н. При этом брусок и тележка движутся как одно целое с ускорением

$$a = \frac{F_1}{M+m} = \frac{1{,}96}{20+2} = 0{,}09 \text{ (м/с}^2\text{)} .$$

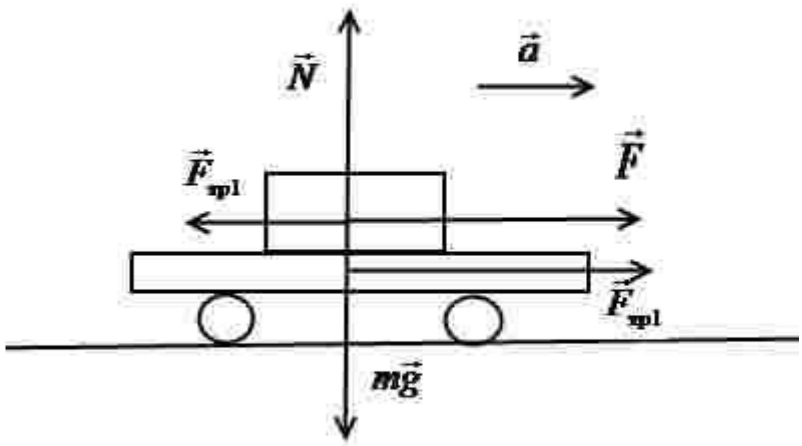

Рисунок 1.14

На тележку со стороны бруска действует сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}_1}$, и точно такая же по величине сила $\vec{F}'_{\text{тр}_1}$ действует на брусок со стороны тележки. Запишем для обоих тел 2-ой закон Ньютона в проекциях на направление движения:

$$\begin{cases} ma = F - \vec{F}_{\text{тр}_1} \\ Ma = \vec{F}_{\text{тр}_1} \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим силу трения

$$\vec{F}_{тр_1} = \frac{M \cdot F_1}{M + m} = \frac{20 \cdot 1{,}96}{20 + 2} = 1{,}78 \text{ (Н).}$$

2) $F = F_2 = 19{,}6$ Н.

В этом случае брусок будет скользить по тележке. Запишем для каждого из тел уравнение движения в проекциях на направление ускорений (рисунок 1.15) :

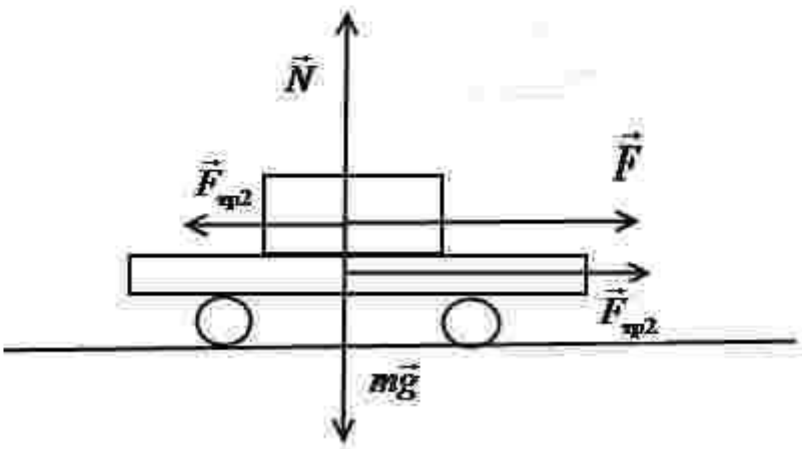

Рисунок 1.15

$$\begin{cases} m \cdot a_{бр} = F - F_{тр_2} = F - \mu \cdot m \cdot g \\ M \cdot a_{тел} = F_{тр_2} = \mu \cdot m \cdot g \end{cases}$$

Из решения системы уравнений находим ускорение бруска и тележки:

$$a_{бр} = \frac{F_2 - \mu \cdot m \cdot q}{m} = \frac{19{,}6 - 0{,}25 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{2} = 7{,}35 (\text{м/с}^2)$$

$$a_{тел} = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{M} = \frac{0{,}25 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{20} = 0{,}245 \text{ (м/с}^2)$$

Сила трения между бруском и тележкой при этом равна

$$F_{тр_2} = \mu \cdot m \cdot g = 4{,}9 \quad (Н).$$

1.24 Шары с массами m_1, m_2, m_3 подвешены к потолку с помощью двух невесомых пружин и легкой нити (смотри рисунок 1.16). Система покоится.

1 Определить натяжение нити.

2 Определить ускорение (направление и модуль) шара массой m_1 сразу после пережигания нити.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на каждый из шаров.

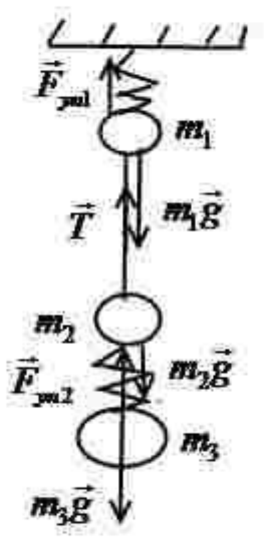

Рисунок 1.16

Здесь $\vec{F}_{упр_1}$ и $\vec{F}_{упр_2}$ – силы упругости пружин,

$\vec{T}$ – сила натяжения нити.

Поскольку по условию задачи система покоится, то можно записать для каждого шара уравнение равновесия (в проекциях на вертикальное направление):

$$\begin{cases} F_{упр_1} = m_1 \cdot g + T \\ T = m_2 \cdot g + F_{упр_2} \\ F_{упр_2} = m_3 \cdot g \end{cases}$$

Отсюда находим натяжение нити:

$$T = m_2 \cdot g + F_{упр_2} = (m_2 + m_3) \cdot g \quad .$$

После пережигания нити сила $\vec{T}$ исчезнет, а груз m_1 начнёт двигаться вверх с ускорением $\vec{a}_1$. Тогда можем записать уравнение движения:

$$m_1 \cdot a_1 = F_{упр_1} - m_1 \cdot g, \text{ откуда}$$

$$a_1 = \frac{F_{упр_1}}{m_1} - g \quad .$$

Силу $F_{упр}$ найдем из 1-го уравнения равновесия:

$$F_{упр_1} = m_1 \cdot g + T = m_1 \cdot g + (m_2 + m_3) = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \; .$$

Таким образом, ускорение груза m_1 равно

$$a_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \mathrm{g}}{m_1} - g = \frac{m_2 + m_3}{m_1} \cdot g$$

и направлено вверх.

1.25 Призма находится на горизонтальной поверхности шероховатого стола (смотри рисунок 1.17). На поверхность призмы, наклонённую под углом α к горизонту, положили груз массы m и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой равен μ. Найти силу трения между призмой и столом.

Решение

Покажем на рисунке все силы, действующие на брусок и на призму.

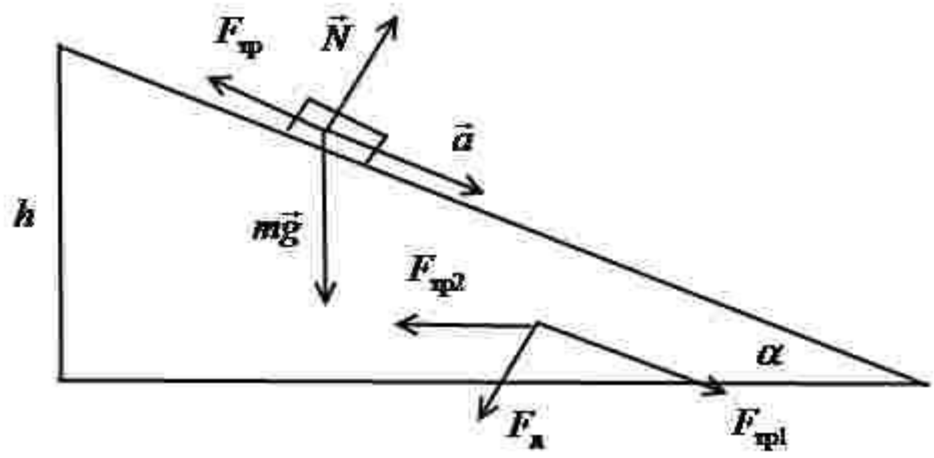

Рисунок 1.17

К призме со стороны бруска приложены две силы: сила давления $\vec{F}_д$ и сила трения $\vec{F}_{тр1}$, суммарная проекция этих двух сил на ось *x* должна, по условию задачи, уравновешивать искомую силу трения $\vec{F}_{тр2}$ между призмой и столом. Имеем:

$$\left|\vec{F}_д\right| = \left|\vec{N}\right| = m \cdot g \cdot \cos\alpha;$$

$$\left|\vec{F}'_{тр1}\right| = \left|\vec{F}_{тр2}\right| = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Проекции этих сил на ось *x*

$$\left(\vec{F}'_{\text{тр1}}\right)_x = F_{\text{тр1}} \cdot \cos\alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos^2\alpha;$$

$$\left(\vec{F}_{\text{д}}\right)_x = -F_{\text{д}} \cdot \sin\alpha = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Отсюда искомая сила трения

$$F_{\text{тр}} = \left(\vec{F}'_{\text{тр1}}\right)_x + \left(\vec{F}_{\text{д}}\right)_x = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos^2\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha(\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha).$$

Задачи для самостоятельного решения

1.26 Бруски с массами m_1 и m_2 соединены лёгкой нитью и прикреплены с помощью невесомой пружины к упору А, закреплённому на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α. Система покоится .

1. Найти силу натяжения нити.
2. Найти ускорение (направление и модуль) бруска массой m_1 сразу после пережигания нити.

[Ответ: $T = m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha$; $a = \dfrac{m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha}{m_1}$]

1.27 На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ удерживаются неподвижно тележка и брусок. Их отпускают. Какое расстояние будет между тележкой и бруском к моменту, когда тележка пройдет расстояние L = 50 см? Коэффициент трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью μ = 0,3. Массу колёс тележки и трение качения не учитывать.

[Ответ : 26 см].

1.28 К телу массы m_1 = 10 кг подвешено на веревке тело массы m_2 = 5 кг. Масса верёвки m = 2 кг. На тело m_1 действует сила F = 300 Н, направленная вверх. Найти натяжение в середине верёвки и в точках прикрепления тел.

Ответ [$T_с$ = 105,9 Н; T_1 = 123,5 Н; T_2 = 88,2 Н;]

1.29 На гладком столе лежит доска массой M = 5 кг, на краю которой удерживается брусок массой m = 1 кг. К бруску с помощью невесомой нерастяжимой нити; перекинутой через легкий блок, подвешен груз массой m_1 Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}2$. При какой минимальной массе груза $m_{1мин}$ брусок будет скользить по доске, если тела освободить? Через какое время после начала движения брусок упадёт с доски, если m_1 = 2 $m_{1мин}$, а длина доски l = 2 м?

[Ответ : $m_{1мин} = \dfrac{\mu \cdot m \cdot (m + M)}{M - \mu \cdot m} = 0{,}25 кг$;

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot M \cdot (m_1 + m)}{g \cdot [M \cdot m_1 - \mu \cdot m \cdot (M + m + m_1)}} = 1{,}6 с$$]

1.30Маляр массой M = 72 кг работает на подвесном кресле. Ему понадобилось срочно подняться наверх. Он начинает тянуть верёвку с такой силой, что сила давления на кресло уменьшается до F = 400 Н. Масса кресла m =12 кг. Чему равно ускорение маляра? Чему равна нагрузка на блок?

[Ответ : $a = \dfrac{2 \cdot F}{M - m} - g = 3{,}5$ м/с^2 ; $N = 2 \cdot F \cdot \dfrac{M + m}{M - m} = 1{,}1 \cdot 10^3 Н$]

2 Электричество и магнетизм

2.1 Электростатика

2.1 В двух противоположных вершинах квадрата со стороной a = 1 м расположены точечные заряды q_1 = 8· 10^{-8} Кл и q_2 = - 6· 10^{-8} Кл . Найти значение напряжённости и потенциала электростатического поля в двух других вершинах.

Решение

Изобразим на чертеже векторы напряжённости электрического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2.Согласно принципу суперпозиции, поле в каждой точке представляет собой векторную сумму полей, созданных в этой точке каждым из имеющихся зарядов.

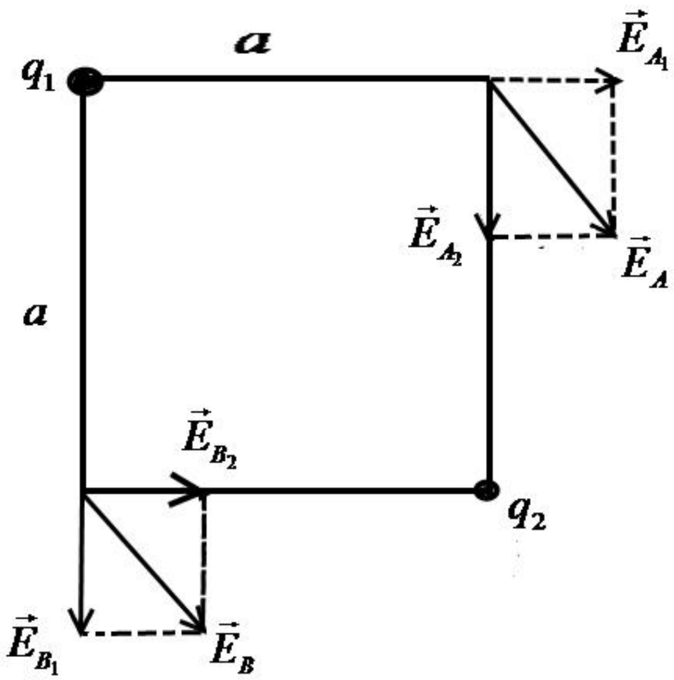

Рисунок 2.1

Величины полей от каждого из зарядов вычисляем с помощью закона Кулона:

$$E_{A_1} = E_{B_1} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-8}}{1^2} = 720\ (\text{В/м});$$

$$E_{A_2} = E_{B_2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_2|}{a^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot6\cdot10^{-8}}{1^2} = 540\ (\text{В/м});$$

$$E_A = E_B = \sqrt{E_{A_1}^2 + E_{A_2}^2} = 900\ (\text{В/м}).$$

Для нахождения потенциала φ электрического поля также воспользуемся принципом суперпозиции: потенциал в любой точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым из зарядов по отдельности. Имеем:

$$\varphi_{A_1} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a} = \frac{9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-8}}{1} = 720(\text{В});$$

$$\varphi_{A_2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{a} = \frac{9\cdot10^9\cdot\left(-6\cdot10^{-8}\right)}{1} = -540(\text{В});$$

$$\varphi_A = \varphi_{A_1} + \varphi_{A_2} = 720 - 540 = 180(\text{В});$$

$$\varphi_B = \varphi_A = 180\text{В}.$$

2.2 Сравнить по величине силы взаимодействия двух точечных положительных зарядов q и $3q$, находящихся на расстоянии R друг от друга, и двух проводящих шаров с радиусами $R/2$ и $R/4$ и зарядами q и $3q$ соответственно, если расстояние между центрами шаров равно R.

Решение

1) Сила взаимодействия двух точечных зарядов согласно закону Кулона равна

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot 3q}{R^2} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

2) Заряд проводящего шара равномерно распределён по его поверхности. В силу сферической симметрии такого распределения взаимодействие двух проводящих шаров в данной задаче можно свести к взаимодействию зарядов шаров, как если бы эти заряды были точечными и располагались в центрах шаров (рисунок 2.2).

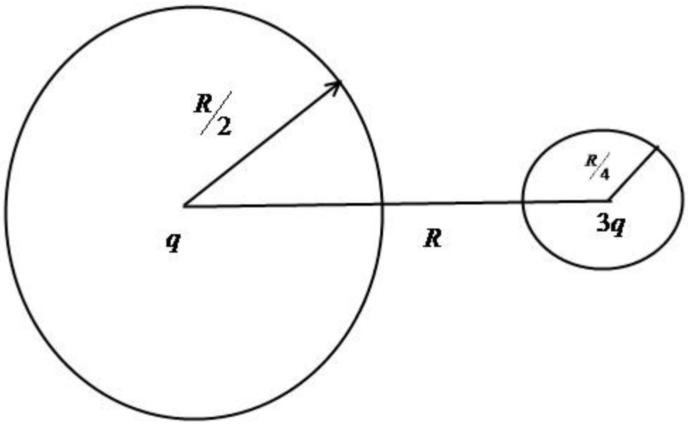

Рисунок 2.2

Мы видим, таким образом, что сила взаимодействия шаров будет точно такой же, как и сила взаимодействия точечных зарядов в первом случае:

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot 3q}{R^2} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = F_1 \quad .$$

2.3 В центре сферы радиуса R находится точечный заряд $q > 0$. По сфере распределён равномерно заряд (-5q). Найти векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, и потенциалы φ_1 и φ_2 на расстояниях $r_1 = R/4$ и $r_2 = 3R$ от центра круга.

Решение

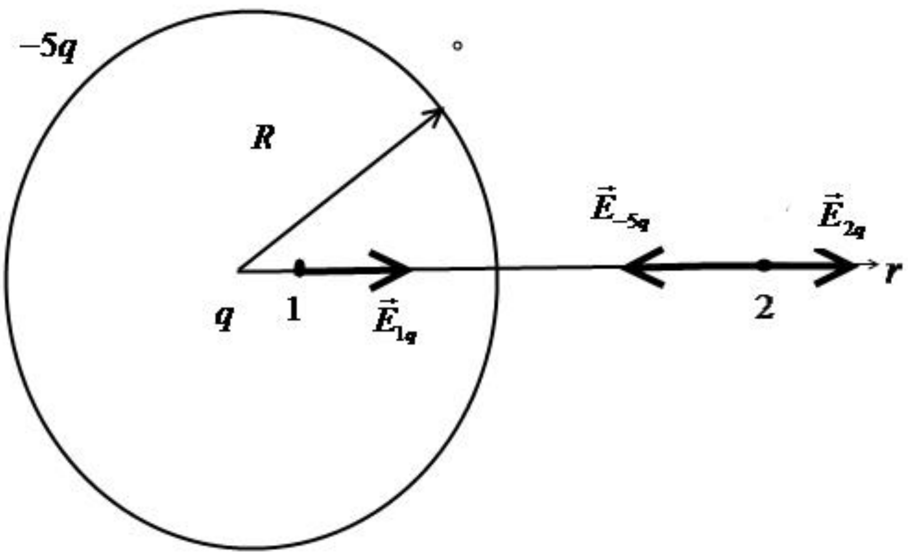

Рисунок 2.3

Снова воспользуемся принципом суперпозиции, а также тем свойством, что равномерно распределенный по сфере заряд создаёт вне сферы такое же поле $\vec{E}$ как и точечный заряд, помещенный в центр сферы; в то же время внутри сферы этот заряд не создаёт никакого поля. С учетом сказанного найдем поле $\vec{E}$ в заданных точках 1 и 2:

$$E_1 = E_{1q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{16q}{4\pi\varepsilon_0 R^2};$$

$$E_2 = E_{-5q} - E_{2q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{5q}{r_2^2} - \frac{q}{r_2^2}\right) = \frac{q}{9\pi\varepsilon_0 R^2} \quad .$$

При этом, как видно из чертежа, вектор $\vec{E}_1$ направлен по радиусу от заряда q, вектор $\vec{E}_2$ – по радиусу к центру сферы.

При вычислении потенциала φ в точках1 и 2 воспользуемся, помимо принципа суперпозиции, тем свойством, что распределённый равномерно по сфере заряд создаёт в точках вне сферы такой же потенциал, как если бы этот заряд был сосредоточен в центре сферы; в то же время равномерно распределённый по сфере заряд создаёт во всех точках внутри сферы один и тот же потенциал, равный потенциалу на сфере. Получаем:

$$\varphi_1 = \varphi_{1q} + \varphi_{1,-5q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{5q}{R}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2q} + \varphi_{2,-5q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} - \frac{5q}{R}\right) = -\frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R} .$$

2.4 Равномерно заряженные пластины параллельны и находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем их размеров. Найти поверхностные плотности зарядов σ_1 и σ_2 на пластинах, если напряжённости поля в точках А и С вблизи пластин $E_A = 1000$В/м, $E_C = 3000$В/м (смотри рисунок 2.4).

Решение

Поскольку расстояние между заряженными плоскостями, согласно условию задачи, очень мало по сравнению с размерами плоскостей, то плоскости можно считать практически бесконечными и при вычислении электрического поля, создаваемого плоскостью с находящимся на ней зарядом σ (поверхностная плотность заряда), воспользуемся известной формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad .$$

При этом вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно заряженной плоскости от неё (если σ > 0) или к ней (если σ < 0).

В нашем случае имеются две заряженные плоскости, причем плотности зарядов на них σ_1 и σ_2 неизвестны ни по величине, ни по знаку. Однако нетрудно сообразить, что заданные в точках А и С результирующие векторы поля $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_C$ с учетом принципа суперпозиции могут быть только в случае $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$. С учетом этого изобразим на рисунке векторы поля, создаваемые каждой плоскостью в отдельности.

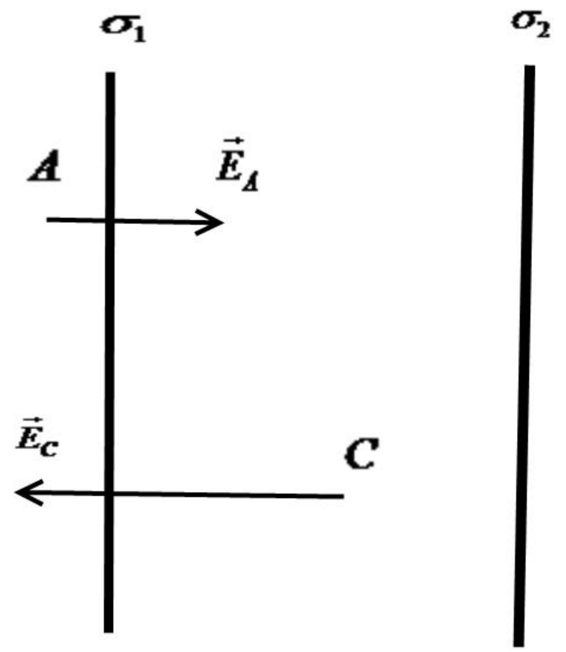

Рисунок 2.4

С учетом принципа суперпозиции и направлений всех векторов можем записать:

$$E_A = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(|\sigma_1| - \sigma_2\right);$$

$$E_C = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(|\sigma_1| + \sigma_2\right).$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 2\varepsilon_0 E_A = |\sigma_1| - \sigma_2 \\ 2\varepsilon_0 E_C = |\sigma_1| + \sigma_2 \end{cases}$$

находим поверхностные плотности заряда на каждой из плоскостей:

$$\sigma_1 = -|\sigma_1| = -\varepsilon_0(E_A + E_C) = -3,5\cdot 10^{-8}\,\text{Кл/м}^2$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0(E_C - E_A) = 1,7\cdot 10^{-8}\,\text{Кл/м}^2.$$

2.5 Электрон при движении в неоднородном электростатическом поле по участку криволинейной траектории между точками А и В уменьшил свою скорость с $\upsilon_A = 4000$км/с до $\upsilon_B = 1000$км/с. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками А и В.

Решение

Когда заряженная частица (электрон) находится в электростатическом поле, оно совершает работу по перемещению частицы. А так как электростатическое поле потенциально, то эту работу можно найти как разность потенциальных энергий в начальной и конечной точках:

$$A_{AB} = U_A - U_B = -|e| \cdot (\varphi_A - \varphi_B).$$

С другой стороны, согласно теореме об изменении кинетической энергии, эта работа равна

$$A_{AB} = \frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2},$$

где m – масса электрона.

Приравнивая оба выражения, находим пройденную электроном разность потенциалов:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{m}{2e}\left(\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2\right) = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\left\{\left(4 \cdot 10^6\right)^2 - \left(1 \cdot 10^6\right)^2\right\} = 42{,}6 \text{ (В).}$$

2.6 В двух наиболее удалённых друг от друга вершинах ромба закреплены точечные заряды q и $2q$. Длина диагоналей ромба a и $2a$. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы переместить точечный заряд $3q$ из третьей вершины ромба в его центр?

Решение

Изобразим на рисунке 2.5 ромб и расположенные в его трёх вершинах точечные заряды:

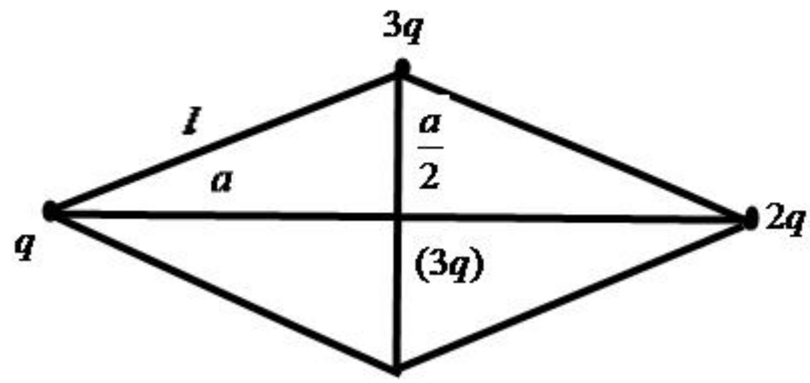

Рисунок 2.5

Как известно, диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой их пересечения (центром ромба) пополам. Отсюда легко найти сторону ромба *l*

$$l=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\cdot\sqrt{5}}{2} \quad .$$

В силу потенциальности электростатического поля, искомая работа равна разности энергий начальной и конечной конфигурации зарядов:

$$A=W_1-W_2 \quad .$$

При этом электростатическая энергия W заданной конфигурации зарядов даётся формулой

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_i q_i \cdot \varphi_i \ ,$$

где q_i – точечный i-й заряд,

φ_i – потенциал, созданный в точке нахождения i-го заряда всеми остальными имеющимися зарядами. С учётом сказанного можем записать:

$$W_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left\{ q\left(\frac{3q}{l} + \frac{2q}{a}\right) + 2q\left(\frac{q}{2a} + \frac{3q}{l}\right) + 3q\left(\frac{q}{l} + \frac{2q}{l}\right) \right\} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{18 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} ;$$

$$W_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left\{ q\left(\frac{3q}{a} + \frac{2q}{2a}\right) + 3q\left(\frac{q}{a} + \frac{2q}{a}\right) + 2q\left(\frac{q}{2a} + \frac{3q}{a}\right) \right\} = \frac{5q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} .$$

Отсюда искомая минимальная работа по перемещению заряда равна

$$A = W_1 - W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \left(\frac{18 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 10 \right).$$

2.7 На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора емкостью C = 100 мкФ, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе $U_1 = 20$ кВ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение t = 2 мин подзаряжать током I = 0.1A?

Решение

Первоначальное значение силы, действующей на частицу в однородном поле конденсатора $E_1 = \frac{U_1}{d}$ равно $F_1 = q \cdot E_1 = \frac{U_1 \cdot q}{d}$,где d – расстояние между пластинами. Первоначальный заряд конденсатора равен $Q_1 = C \cdot U_1$. После подзарядки заряд конденсатора увеличится на $\Delta Q = I \cdot t$ и станет равен

$$Q_2 = Q_1 + \Delta Q = C \cdot U_1 + I \cdot t.$$

Новое значение напряжения на конденсаторе

$$U_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{C \cdot U_1 + I \cdot t}{C} \quad .$$

Напряженность поля между обкладками станет равна

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{C \cdot U_1 + I \cdot t}{C \cdot d} \quad .$$

На частицу после подзарядки конденсатора станет действовать сила

$$F_2 = q \cdot E_2 = \frac{q \cdot (C \cdot U_1 + I \cdot t)}{C \cdot d}$$

Следовательно, искомое отношение

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{C \cdot U_1 + I \cdot t}{C \cdot U_1} = 1 + \frac{I \cdot t}{C \cdot U_1} = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 120}{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4} = 7 \quad .$$

2.8 Одну пластину незаряженного конденсатора ёмкостью C = 1 нФ заземляют, а другую присоединяют длинным тонким проводом к удаленному проводящему шару радиусом R = 20 см, имеющему заряд Q = 92 мкКл. Какой заряд останется на шаре ?

Решение

Потенциал заземленной пластины равен нулю, потенциал другой пластины равен потенциалу шара $\varphi = \frac{k \cdot Q}{R}$ Таким образом, разность потенциалов между пластинами конденсатора будет равна

$$U = \varphi - 0 = \frac{k \cdot Q}{R}$$

На конденсаторе возникнет заряд

$$q = C \cdot U = \frac{k \cdot C \cdot Q}{R}$$

Поэтому заряд, оставшийся на шаре, будет равен

$$Q^{'} = Q - q = Q \cdot \left(1 - \frac{k \cdot C}{R}\right) = 92 \cdot \left(1 - \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-9}}{0,2}\right) = -4141 \text{ (мкКл).}$$

2.9 Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику напряжения. Внутрь одного из них вносят диэлектрик (ε = 3), заполняющий все пространство между обкладками. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе ?

Решение,

Схема электрической цепи показана на рисунке 2.6. Первоначально, т.е. до внесения диэлектрика, напряжения на конденсаторах были одинаковы и равны

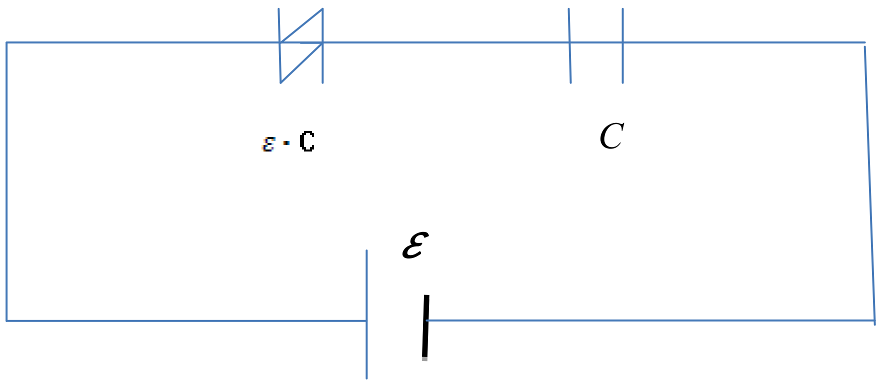

Рисунок 2.6

$$U_1 = U_2 = \frac{\mathrm{E}}{2} \quad ,$$

где $\mathcal{E}$–ЭДС источника. Напряженность поля в каждом из конденсаторов была равна

$$E_1 = E_2 = \frac{\mathrm{E}}{2 \cdot d} \quad ,$$

где d – расстояние между обкладками.

После того как во второй конденсатор внесли диэлектрик, его емкость стала равна $\varepsilon \cdot C$ (смотри рисунок 2.6) и на конденсаторах установились новые напряжения $U_1^{'}$ и $U_2^{'}$ такие, что

$$\frac{U_1^{'}}{U_2^{'}} = \frac{\varepsilon \cdot C}{C} = \varepsilon$$

При этом

$$U_1^{'} + U_2^{'} = \mathrm{E}$$

Из этих двух уравнений находим:

$$U_2^{'} = \frac{\text{E}}{\varepsilon + 1} \quad ,$$

а напряженность поля

$$E_2^{'} = \frac{U_2^{'}}{d} = \frac{\text{E}}{(\varepsilon + 1) \cdot d} \quad .$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{E_2}{E_2^{'}} = \frac{\varepsilon + 1}{2} = 2 \quad .$$

2.10 Плоский конденсатор ёмкостью C =5 пФ с расстоянием между пластинами d = 2 мм подключен к источнику напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$ = 2 В. В пространство между обкладками вводят параллельно им плоскую металлическую пластинку толщиной d_1 = 1 мм так, что она полностью перекрывает полость внутри конденсатора. Определить величину заряда, который пройдет через источник при введении пластины.

Решение

Изобразим на чертеже расположение пластины внутри конденсатора (рисунок 2.7). До введения пластины на конденсаторе был заряд $q = C{\cdot}\text{E}$. После введения металлической пластины ёмкость конденсатора увеличилась за счет уменьшения просвета между обкладками (электрическое поле внутри металлической пластины отсутствует). Новая ёмкость будет равна

$$C^{'} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d - d_1} = \frac{C \cdot d}{d - d_1},$$

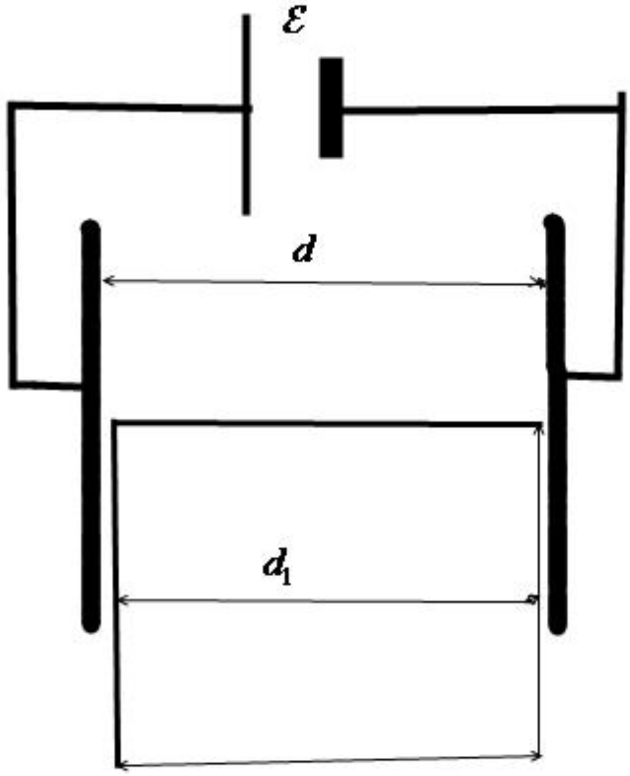

Рисунок 2.7

а новый заряд конденсатора (напряжение между пластинами при подключенном источнике по-прежнему равно $\mathcal{E}$)

$$q^{'} = C^{'} \cdot \varepsilon = \frac{C \cdot \mathrm{E} \cdot d}{d - d_1}.$$

Следовательно, при введения пластины через источник протечет заряд

$$\Delta q = q^{'} - q = C \cdot \mathrm{E} \cdot \left(\frac{d}{d - d_1} \right) = 5 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2-1} \right) = 10 \text{ (пКл).}$$

Задачи для самостоятельного решения

3.11 Два металлических шара, заряженных одинаковыми зарядами, имеют потенциалы 20 В и 30 В. Каким станет потенциал этих шаров, если соединить их проволокой? Ёмкостью проволоки пренебречь, расстояние между шарами считать большим по сравнению с их радиусами.

[Ответ : 24 В.]

3.12 В трёх вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника закреплены одинаковые точечные заряды по 20 нКл каждый. Посредине гипотенузы помещают заряженную частицу массой 3 мг и зарядом 10 нКл и отпускают. Какую скорость приобретет частица на большом расстоянии от зарядов? Гипотенуза треугольника равна 5 см.

[Ответ : 24 м/с.]

3.13 Три одинаковых шарика, несущие одинаковые заряды 2мкКл, соединены попарно тремя одинаковыми пружинами и удерживаются на расстоянии 5 см друг от друга. Шарики отпускают, и они приходят в движение. Найти жёсткость каждой пружины, если в начальном положении они не деформированы, а максимальное расстояние между шариками в процессе движения в три раза больше начального.

[Ответ : 96 Н/м.]

3.14 Внутри конденсатора, расстояние между обкладками которого 1 мм, находится пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$ и толщиной также 1 мм. С какой силой давят обкладки на пластину, если заряд конденсатора 2 мкКл, а напряжение на нём 200 В ?

[Ответ : 0.2 Н.]

3.15 Два конденсатора, ёмкость которых 2 и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения с ЭДС 75 В. Найти разность потенциалов на конденсаторе большей ёмкости.

[Ответ : 25 В.]

2.2 Постоянный ток

2.16 Плоский конденсатор с площадью квадратных пластин $S = 400$ см^2 и расстоянием между ними $d = 2$ мм подключен к источнику с напряжением $U = 120$ В. В пространство между обкладками конденсатора со скоростью $\upsilon = 10$ см/с вдвигают пластину с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Определить величину тока, протекающего в цепи.

Решение

Покажем схему рассматриваемого конденсатора (рисунок 2.8).

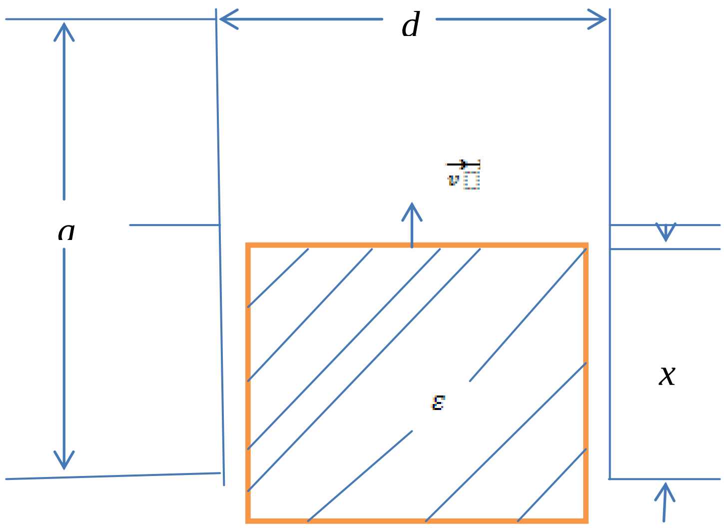

Рисунок 2.8

Стороны квадрата $a = \sqrt{S}$. В каждый момент времени система представляет собой два параллельно соединенных конденсатора с общей ёмкостью

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) \quad ,$$

где

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{S} \cdot x}{d}; \qquad x = x(t) \quad .$$

Заряд системы в момент t равен

$$q = C \cdot U = (C_1 + C_2) \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{S} \cdot U}{d} \cdot \left[\sqrt{S} + (\varepsilon - 1) \cdot x \right]$$

Следовательно, ток, протекающий по цепи,

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{S} \cdot U}{d} \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \sqrt{S} \cdot U \cdot (\varepsilon - 1)}{d} \cdot \upsilon =$$
$$= \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-2}} \cdot 120 \cdot (2-1) \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^{-3}} = 10{,}6(\text{нА})$$

2.17 Из проволоки сопротивлением R = 25 Ом сделано кольцо. Где следует присоединить провода, подводящие ток (рисунок 2.9), чтобы сопротивление кольца было r = 4 Ом ? Длина проволоки l .

Решение

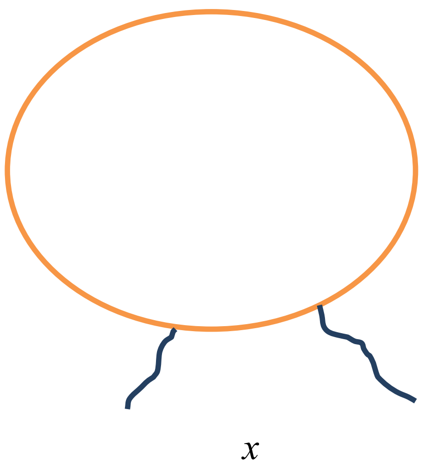

Рисунок 2.9

Изображенное на рисунке 2.9 кольцо представляет собой два параллельно соединенных участка проволоки, сопротивления которых равны

$$R_x = \frac{R}{l} \cdot x \quad \text{и} \quad R_{l-x} = \frac{R}{l} \cdot (l - x)$$

Тогда сопротивление кольца

$$r = \frac{R_x \cdot R_{l-x}}{R_x + R_{l-x}} = \frac{R}{l^3} \cdot x \cdot (l - x) \quad .$$

Последнее выражение есть квадратное уравнение относительно *x*:

$$x^2 - l \cdot x + \frac{r \cdot l^2}{R} = 0 \quad ,$$

корни которого равны: $x_1 = \frac{1}{5} l; \qquad x_1 = \frac{4}{5} l$.

Т.о. контакты должны быть расположены на расстоянии $x = \frac{1}{5} l$ друг от друга.

2.18 Найти сопротивление бесконечной цепочки (рисунок 2.10).

Решение

Очевидно, что если от бесконечной цепочки, состоящей из повторяющихся звеньев, отнять одно звено, то общее сопротивление цепочки не изменится.

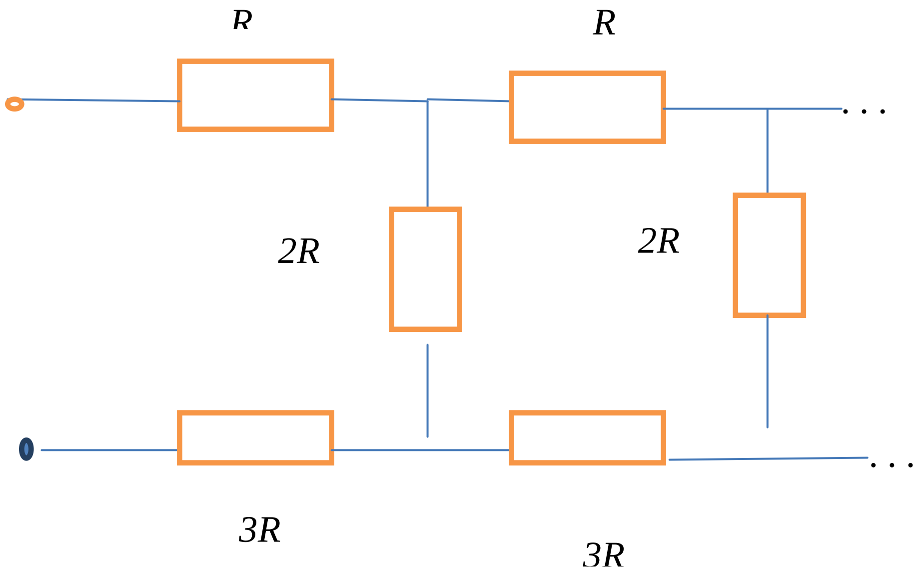

Рисунок 2.10

Поэтому можем начертить эквивалентную схему цепочки (рисунок 2.11), где R_0 – искомое общее сопротивление . Имеем

$$R_0 = R + \frac{2R \cdot R_0}{2R + R_0} + 3R \text{ , или } R_0 = \frac{8 \cdot R^2 + 6 \cdot R \cdot R_0}{2R + R_0} \text{ .}$$

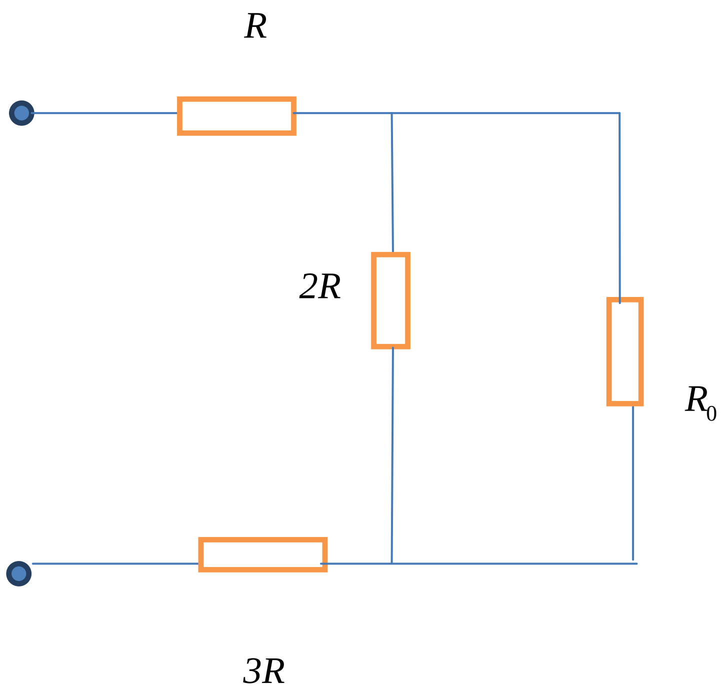

Рисунок 2.11

Получаем квадратное уравнение для определения R_0:

$$R^2_0 - 4 \cdot R \cdot R_0 - 8 \cdot R^2 = 0 \quad ,$$

Из которого находим : $$R_0 = 2 \cdot R + \sqrt{4 \cdot R^2 + 8 \cdot R^2} = 2 \cdot R \cdot (1 + \sqrt{3}) .$$

(Отрицательный корень отброшен как не имеющий физического смысла.)

2.19 Конденсатор емкостью C = 200 мкФ, заряженный до напряжения U = 100В, подключают к параллельно соединенным сопротивлениям R_1 = 10 Ом и R_2 = 20 Ом (рисунок 2.12).Какое количество тепла выделяется в каждом сопротивлении при полной разрядке конденсатора?

Решение

После замыкания ключа по цепи протекут токи, и суммарное количество тепла, выделившегося на сопротивлениях, будет равно энергии, первоначально

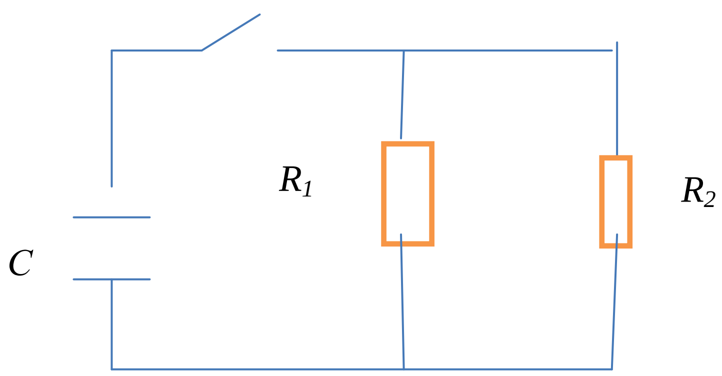

Рисунок 2.12

запасенной в конденсаторе:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{C \cdot U^2}{2} \ ,$$

где $\qquad Q_1 = \dfrac{U^2 \cdot t}{R_1} \ ; \qquad Q_2 = \dfrac{U^2 \cdot t}{R_2},$

t – время протекания токов в цепи.

Отсюда $\qquad \dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \ .$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \\ Q_1 + Q_2 = \dfrac{C \cdot U^2}{2} \end{cases} ,$$

решая которую, находим:

$$Q_1 = \frac{C \cdot U^2 \cdot R_2}{2 \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 20}{2 \cdot (10 + 20)} = 0{,}67 \ (\text{Дж})$$

$$Q_2 = \frac{C \cdot U^2 \cdot R_1}{2 \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 10}{2 \cdot (10 + 20)} = 0{,}33 (\text{Дж}) \ .$$

2.20 При присоединении к источнику тока резистора R_1 = 18 Ом на нем выделяется мощность P_1 = 18 Вт, а при подсоединении резистора R_2 = 3 Ом выделяется мощность P_2 = 12 Вт. Найти ток короткого замыкания.

Решение

Схема цепи имеет вид, показанный на рисунке 2.13.

Согласно закону Ома,

$$I = \frac{\mathrm{E}}{R + r},$$

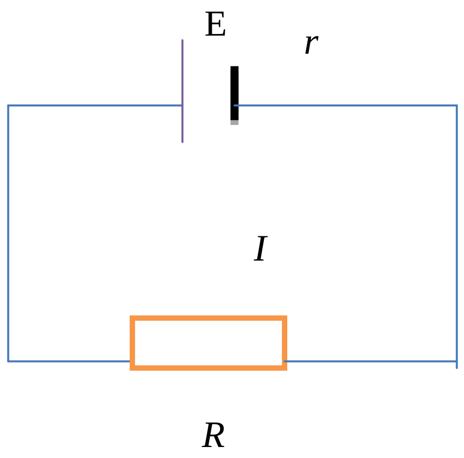

Рисунок 2.13

Напряжение на резисторе

$$U = I \cdot R = \frac{\mathrm{E} \cdot R}{R + r}.$$

Мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, для двух упомянутых случаев равна:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = \frac{\mathrm{E}^2 \cdot R_1}{(R_1 + r)^2} \quad ; \quad P_2 = U_2 \cdot I_2 = \frac{\mathrm{E}^2 \cdot R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r} \right)^2 \text{, откуда}$$

$$\frac{R_2 + r}{R_1 + r} = \sqrt{\frac{P_1 \cdot R_2}{P_2 \cdot R_1}} \equiv a$$

(введем такое обозначение для упрощения выкладок).

Из последнего уравнения находим внутреннее сопротивление источника:

$$r = \frac{a \cdot R_1 - R_2}{1 - a} = \frac{\sqrt{R_1 \cdot \left(\sqrt{P_1 \cdot R_1 \cdot R_2} - R_2 \cdot \sqrt{P_2} \right)}}{\sqrt{P_2 \cdot R_1} - \sqrt{P_1 \cdot R_2}}.$$

Из формулы для мощности выражаем ЭДС источника:

$$\mathrm{E} = \left(R_1 + r \right) \cdot \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \frac{R_1 - R_2}{1 - a} \cdot \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \frac{\left(R_1 - R_2 \right) \cdot \sqrt{P_1 \cdot P_2}}{\sqrt{P_2 \cdot R_1} - \sqrt{P_1 \cdot R_2}}.$$

Следовательно, ток короткого замыкания равен

$$I_{кз} = \frac{Е}{r} = \sqrt{\frac{P_1 \cdot P_2}{R_1 \cdot R_2}} \cdot \frac{(R_1 - R_2) \cdot \left(\sqrt{P_1 \cdot R_1} + \sqrt{P_2 \cdot R_2}\right)}{P_1 \cdot R_1 - P_2 \cdot R_2} =$$

$$= \sqrt{\frac{18 \cdot 12}{18 \cdot 3}} \cdot (18 - 3) \cdot \frac{\sqrt{18 \cdot 18} + \sqrt{12 \cdot 2}}{18 \cdot 18 - 12 \cdot 3} = 2{,}5(\text{А})$$

2.21 Замкнутая цепь состоит из источника тока с ЭДС Е и внутренним сопротивлением r и нагрузки – реостата (рисунок 2.14). При изменении сопротивления реостата R изменяется сила тока в цепи. Выразить мощность P, выделяемую на нагрузке, как функцию силы тока I; при каком значении тока $I_м$ мощность, выделяемая на нагрузке будет максимальной? Найти эту мощность. Определить КПД источника η и построить график зависимости $\eta(I)$.

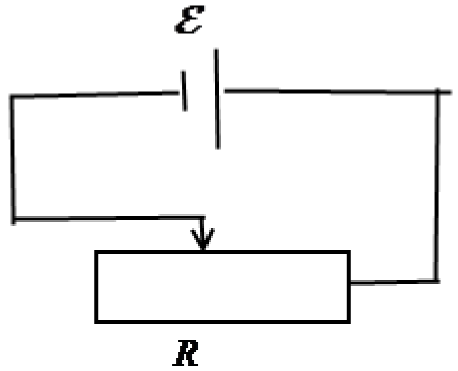

Рисунок 2.14

Решение

Мощность, выделяемая на нагрузке, равна

$$P = I^2 \cdot R \qquad (1) \;,$$

где сила тока I определяется законом Ома:

$$I=\frac{\mathrm{E}}{R+r}. \qquad (2)$$

Выражая R из второй формулы и подставляя в первую, получим:

$$R=\frac{\mathrm{E}}{I}-r; \qquad P=I^2\cdot\left(\frac{\mathrm{E}}{I}-r\right)=-r\cdot I^2+\mathrm{E}\cdot I$$

Т.о., кривая $P(I)$ представляет собой параболу (рисунок 2.15).

Из уравнения параболы находим I_m и P_m:

$$I_m=\frac{\mathrm{E}}{2r} \quad ; \; P_m=\frac{\mathrm{E}^2}{4r}$$

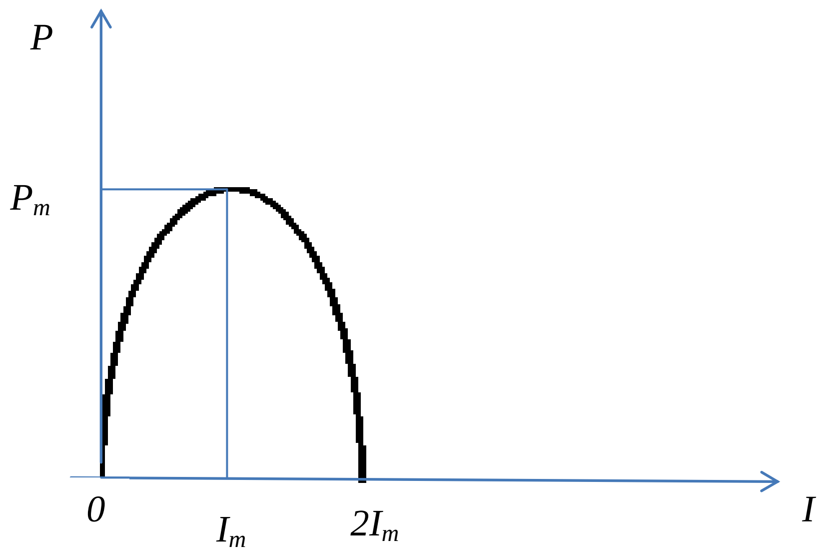

Рисунок 2.15

КПД источника тока $$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{\frac{\text{E}}{I} - r}{\frac{\text{E}}{I}} = 1 - \frac{r}{\text{E}} \cdot I.$$

График зависимости $\eta(I)$ показан на рисунке 2.16

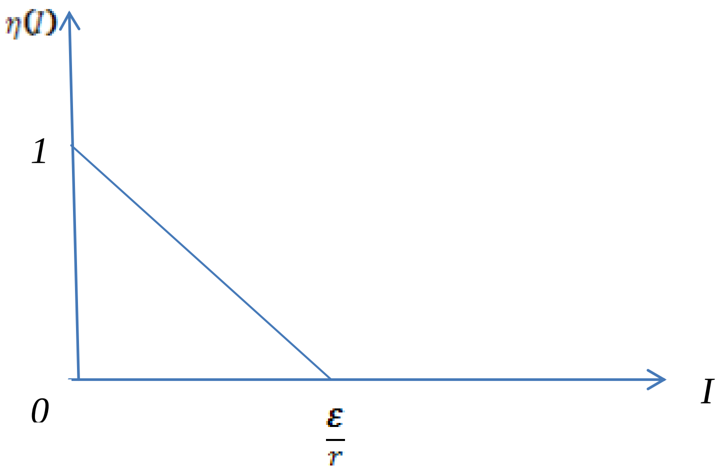

Рисунок 2.16

2.22 Имеется два последовательно соединенных элемента питания с одинаковыми ЭДС, но с разными внутренними сопротивлениями r_1 и r_2. При каком внешнем сопротивлении разность потенциалов на зажимах одного из источников равна нулю и на каком именно?

Решение

Схема включения источников показана на рисунке 2.17

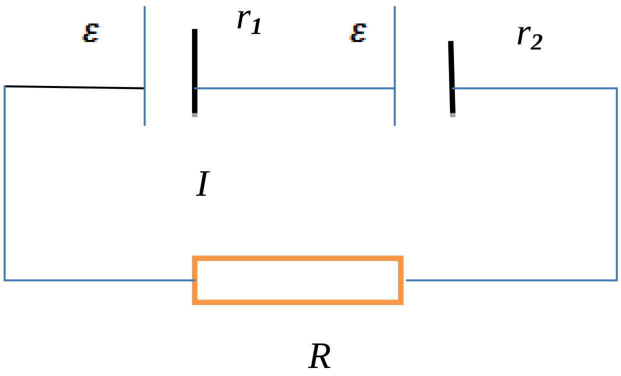

Рисунок 2.17

(Очевидно, что источники включены в одну сторону; в противном случае результирующая ЭДС будет равна нулю, и ток в цепи будет отсутствовать.)

Согласно закону Ома, ток через нагрузку равен

$$I = \frac{2 \cdot \mathrm{E}}{r_1 + r_2 + R} = \frac{\mathrm{E} \cdot [R - (r_1 - r_2)]}{r_1 + r_2 + R}.$$

Предположим, что $r_1 > r_2$, и найдем напряжение на зажимах 1-го источника:

$$U_1 = \mathrm{E} - I \cdot r_1 = \mathrm{E} - \frac{2 \cdot \mathrm{E} \cdot r_1}{r_1 + r_2 + R} = \frac{\mathrm{E} \cdot [R - (r_1 - r_2)]}{r_1 + r_2 + R}$$

Видно, что $U_1 = 0$ если $R = (r_1 - r_2)$. Т.о., в нуль обращается напряжение на зажимах источника с большим внутренним сопротивлением, при условии, что $R = (r_1 - r_2)$.

2.23 Определить заряд конденсатора в схеме, показанной на рисунке 2.18. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

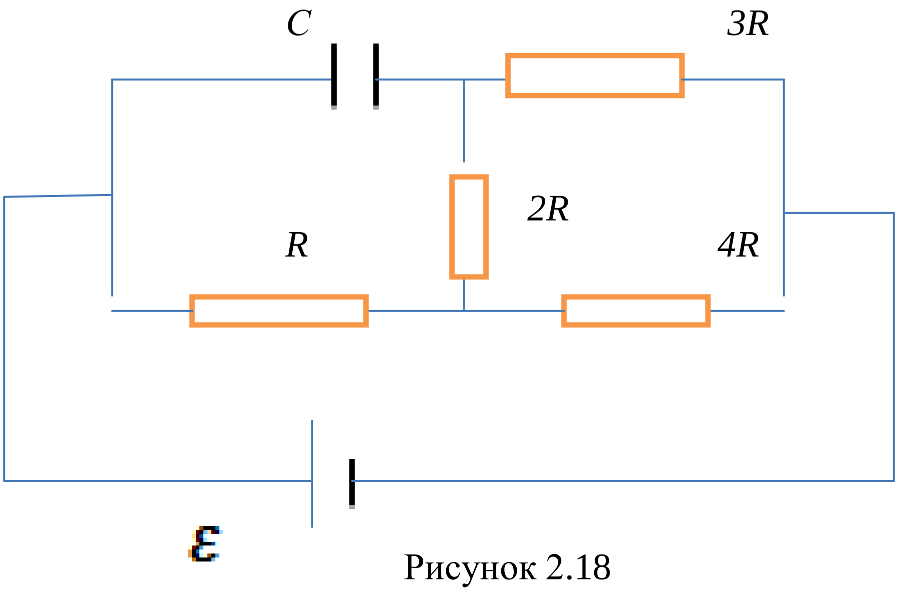

Рисунок 2.18

Решение

Перерисуем схему в более удобном виде, указав на ней токи (рисунок 2.19).

По закону Ома,

$$I = \frac{E}{R_{общ}}, \quad где$$

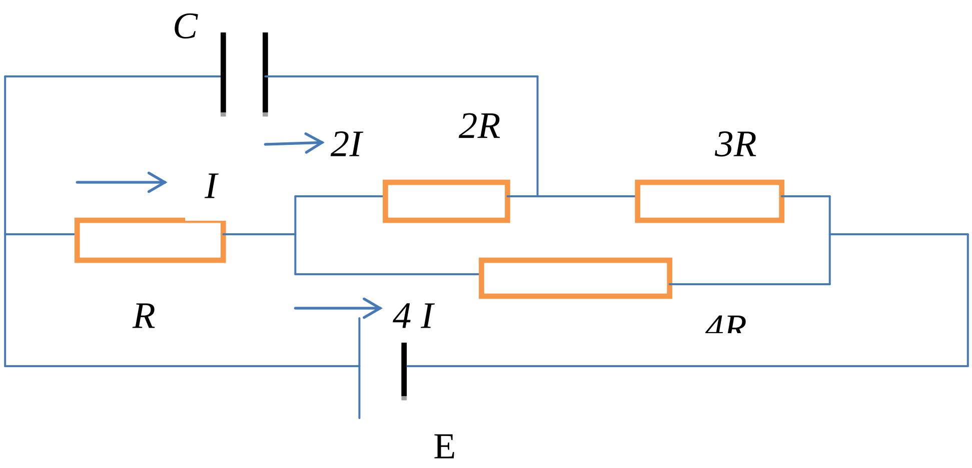

Рисунок 2.19

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{(2R+3R)\cdot 4R}{2R+3R+4R} = \frac{29}{9}R.$$

Отсюда

$$I = \frac{9\cdot \text{E}}{29\cdot R}.$$

По свойству параллельного соединения проводников,

$$\frac{I_{2R}}{I} = \frac{4R}{4R+5R} = \frac{4}{9};$$

поэтому

$$I_{2R} = \frac{4}{9}I = \frac{4\cdot \text{E}}{29}.$$

Напряжение на конденсаторе, подключенном параллельно резисторам

R и $2R$, равно $$U_C = U_R + U_{2R} = I\cdot R + I_{2R}\cdot 2R = \frac{9\text{E}}{29} + \frac{4\text{E}}{29}\cdot 2 = \frac{17}{29}\cdot \text{E}.$$

Следовательно, искомый заряд конденсатора

$$q = C\cdot U_C = \frac{17}{29}\cdot C\cdot \text{E}.$$

2.24 В схему (рисунок 2.20) включены три конденсатора ёмкостью C_1=20 мкФ, C_2=30 мкФ и C_3= 60мкФ , два источника с ЭДС $E_1 = 1$ В и $E_2 = 2$ В. Разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ =3 В. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

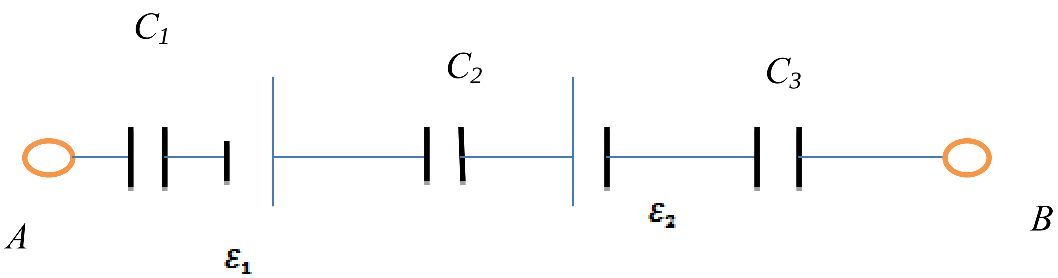

Рисунок 2.20

Решение

Поскольку конденсаторы включены в цепь последовательно, то заряд на каждом из них – один и тот же и равен

$$q = C_{общ} \cdot (\varphi_A - \varphi_B + E_1 - E_2),$$

где $C_{общ}$ – общая ёмкость трех конденсаторов и учтено, что источники включены навстречу друг другу. Имеем:

$$\frac{1}{C_{общ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \text{ , откуда}$$

$$C_{общ} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot_3}{C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_3}.$$

Искомые напряжения на конденсаторах:

$$U_1=\frac{q}{C_1}=\frac{C_2\cdot C_3\cdot\left(\varphi_A-\varphi_B+\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2\right)}{C_1\cdot C_2+C_2\cdot C_3+C_1\cdot C_3}=\frac{30\cdot 60\cdot(3+1-2)}{20\cdot 30+30\cdot 60+20\cdot 60}=1(\text{В}),$$
$$U_2=\frac{q}{C_2}=\frac{C_1\cdot C_3\cdot\left(\varphi_A-\varphi_B+\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2\right)}{C_1\cdot C_2+C_2\cdot C_3+C_1\cdot C_3}=\frac{20\cdot 60\cdot(3+1-2)}{20\cdot 30+30\cdot 60+20\cdot 60}=0,67(\text{В}),$$
$$U_3=\frac{q}{C_3}=\frac{C_2\cdot C_1\cdot\left(\varphi_A-\varphi_B+\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2\right)}{C_1\cdot C_2+C_2\cdot C_3+C_1\cdot C_3}=\frac{20\cdot 30\cdot(3+1-2)}{20\cdot 30+30\cdot 60+20\cdot 60}=0,33(\text{В})$$

2.25 Определить, сколько пар ионов возникает под действием ионизатора ежесекундно в объеме V = 1 см^3 газоразрядной трубки, в которой сила тока насыщения $I=2\cdot 10^{-10}$ А. Площадь каждого плоского электрода S = 1 дм^2, а расстояние между ними d = 5 мм.

Решение

Внутреннее устройство газоразрядной трубки имеет вид, показанный на рисунке 2.21.

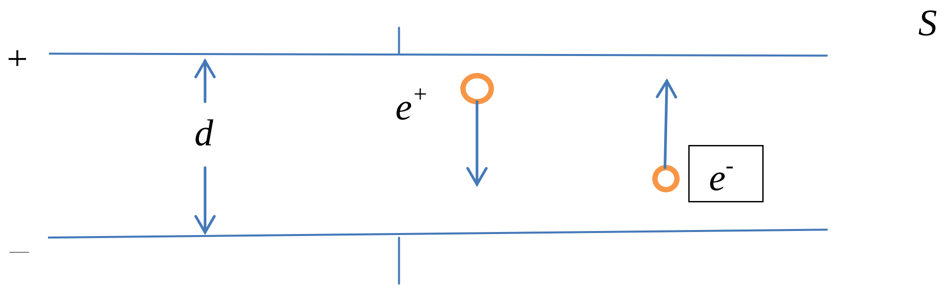

Рисунок 2.21

Ток насыщения в пространстве между электродами может быть определён по формуле

$$I = \frac{q}{t} = N_t \cdot S \cdot e \cdot d \quad ,$$

где N_t – число пар ионов, создаваемых ионизатором (например, рентгеновским или радиоактивным излучением) за 1 секунду в единице объёма трубки;

e – заряд каждого иона, равный элементарному заряду. Отсюда

$$N_t = \frac{I}{S \cdot e \cdot d};$$

Тогда во всём объёме V газоразрядной трубки за 1 с возникает число пар ионов, равное

$$N = N_t \cdot V = \frac{I \cdot V}{S \cdot e \cdot d} = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-6}}{0{,}01 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 2{,}5 \cdot 10^{7} \text{ (с}^{-1}\text{).}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.26 Определить ток , создаваемый электроном, движущимся по круговой орбите радиуса R =5· 10^{-11} м в атоме водорода. Заряд электрона (по модулю) и протона e = 1,6· 10^{-19} Кл, масса электрона m =9.1· 10^{-31} кг.

[Ответ : 1,1· 10^{-3} А].

2.27 Нагревательный прибор рассчитан на напряжение U = 120 В и силу тока I = 2 А. Какое сопротивление следует включить последовательно с прибором в цепь напряжения U_1 = 220 В, чтобы сила тока в нём не превысила допустимое значение.

[Ответ : 50 Ом].

2.28 Электрокипятильник имеет две спирали. При включении одной из них вода в сосуде закипает через время t_1 = 10 мин, а при включении другой – через время t_2 = 20 мин. Через сколько минут закипит вода (в том же сосуде и той же массы), если обе спирали включить последовательно? Параллельно?

[Ответ :$t_{посл}$ = 30 мин; $t_{пар}$ = 6 мин 40 с.]

2.29 Для определения неизвестного сопротивления составлена схема, показанная на рисунке 2.22.Амперматр показывает силу тока I = 1 А, а вольтметр U = 100 В. Какова величина сопротивления R, если сопротивление вольтметра $R_v = 1000$ Ом ? Какая ошибка будет допущена в расчетах, если сопротивление вольтметра принять бесконечно большим?

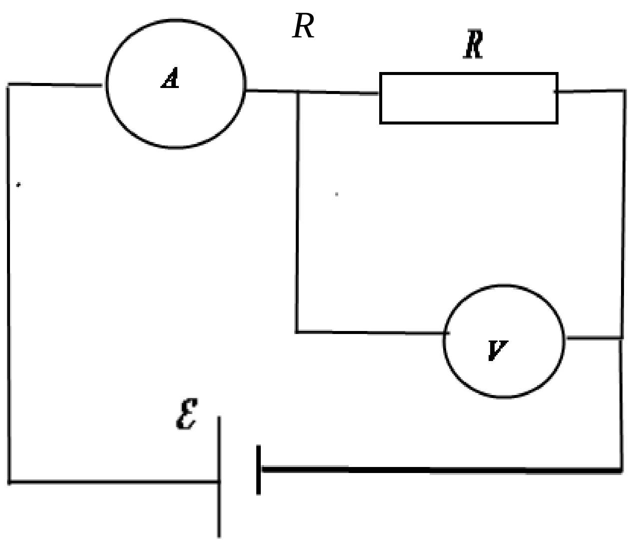

Рисунок 2.22

[Ответ : 111 Ом; 11%].

2.30 Найти напряжение на зажимах каждого источника (рисунок 2.23), если $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 1{,}5$ Ом, R= 0,5 Ом , $E_1 = E_2 = 2$ В.

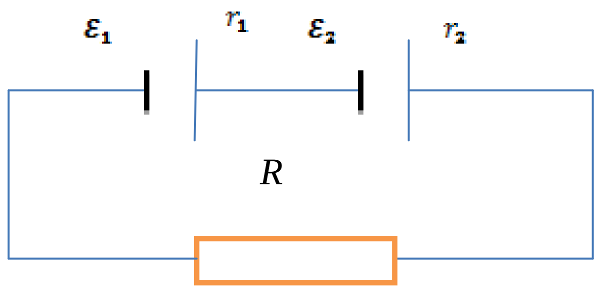

Рисунок 2.23

[Ответ :U_1 = 0,67 В; U_2 = 0.]

3 Магнитное поле. Электромагнитная индукция. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях

3.1 Электрон движется в однородном магнитном поле B = 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Найти силу тока, создаваемого движущимся электроном.

Решение

Электрон в нашем случае будет описывать окружность, плоскость которой перпендикулярна линиям поля $\bar{B}$ (рисунок 3.1).

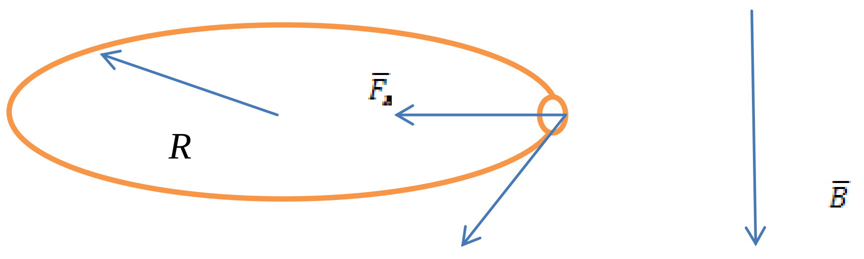

Рисунок 3.1

Действующая на электрон со стороны магнитного поля сила Лоренца приводит к появлению у электрона центростремительного ускорения. 2-ой закон Ньютона для электрона в проекциях на направление ускорения будет иметь вид :

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{R} = e \cdot \upsilon \cdot B,$$

где e и m – заряд и масса электрона соответственно. Отсюда получаем выражение для радиуса циклотронной окружности:

$$R = \frac{m \cdot \upsilon}{e \cdot B}.$$

Период обращения электрона равен

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\upsilon} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{e \cdot B}$$

и не зависит от скорости электрона.

Следовательно, искомая сила тока

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e^2 \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m} = \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2 \cdot 0{,}1}{2 \cdot \pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 4{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ (A)}$$

3.2 На двух лёгких проводящих нитях горизонтально висит металлический стержень длиной l = 0.25 м и массой m = 15 г. Стержень находится в однородном магнитном поле B =0,3 Тл, направленном вертикально вверх. Определить угол отклонения нитей от вертикали, если сила тока в стержне I = 0.2 А.

Решение

Покажем на чертеже силы, действующие на стержень с током в магнитном поле (рисунок 3.2).

Под действием трёх сил – силы тяжести $m \cdot \vec{g}$, силы Ампера $\vec{F}_A$ и силы натяжения нити $\vec{T}$ – стержень находится в равновесии, когда нить образует угол α с вертикалью.

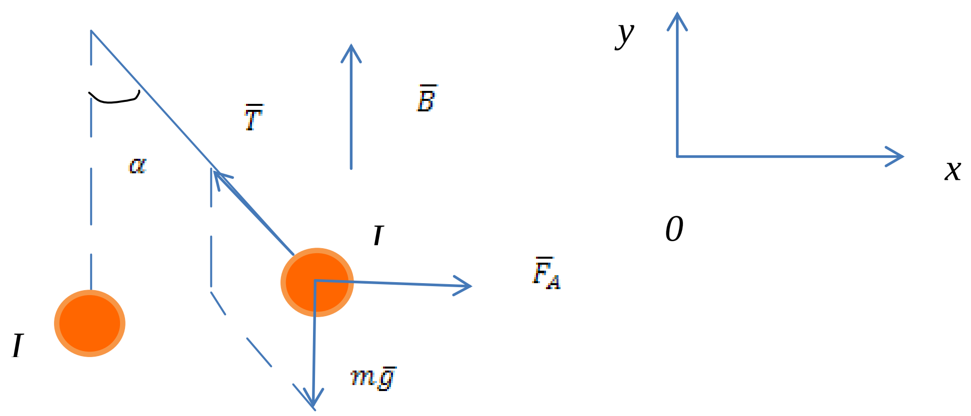

Рисунок 3.2

Запишем условие равновесия стержня :

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T} = 0;$$

в проекциях:

$$ox: F_A - T \cdot \sin\alpha = 0$$
$$oy: T \cdot \cos\alpha - m \cdot \vec{g} = 0.$$

Учитывая выражение для силы Ампера $F_F = B \cdot I \cdot l$ и исключая из написанных уравнений силу T, находим

$$\tan\alpha = \frac{B \cdot I \cdot l}{m \cdot g} = \frac{0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,25}{0,015 \cdot 9,8} = 0,102;$$
$$\alpha = 5,8^\circ.$$

3.3 Кольцевой виток находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости витка. Виток превратили в квадрат и повернули так, что его плоскость составила угол α = 30° с линиями индукции. Во сколько раз при этом изменился магнитный поток, пронизывающий контур ?

Решение

Пусть R – радиус кольцевого витка, a –сторона квадрата. Поскольку общая длина проволоки при деформации не изменилась, можем записать :

$$2 \cdot \pi \cdot R = 4 \cdot a, \qquad \text{откуда} \quad a = \frac{\pi \cdot R}{2}$$

Площадь витка до его деформации равна $S_1 = \pi \cdot R^2$,после деформации

$$S_2 = a^2 = \frac{\pi^2 \cdot R^2}{4}.$$

Запишем величину магнитного потока через контур витка до деформации и после неё, с учётом поворота на угол α .

$$\Phi_1 = B \cdot S_1 = B \cdot \pi \cdot R^2,$$

где B – индукция магнитного поля;

$$\Phi_2 = B \cdot S_2 \cdot \sin 30^\circ = B \cdot \frac{\pi^2 \cdot R^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{B \cdot \pi^2 \cdot R^2}{8}.$$

Отсюда искомое отношение

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{8}{\pi} \approx 2,55.$$

3.4 Незаряженный металлический цилиндр с радиусом основания R вращается в однородном и постоянном магнитном поле B, направленном вдоль оси цилиндра, с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Определить напряженность электрического поля в цилиндре.

Решение

Изобразим на чертеже цилиндр, вращающийся в магнитном поле $\vec{B}$ (рисунок 3.3).

Электрическое поле $\vec{E}$ направлено по радиусу перпендикулярно оси цилиндра и складывается для поля, возникающего за счёт электромагнитной индукции, и поля вектора $\vec{E}_{\text{ц/б}}$, обусловленного действием центробежной силы инерции на электроны проводимости:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{инд}} + \vec{E}_{\text{ц/б}}.$$

При этом две составляющие электрического поля $\vec{E}$ либо со направлены, когда вектор $\vec{B}$ находится в правовинтовом соотношении с направлением вращения цилиндра, либо направлены противоположно для левовинтового соотношения.

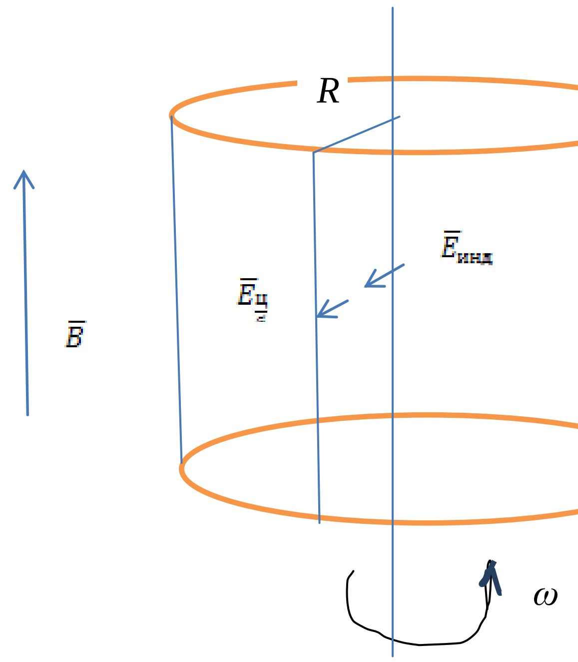

Рисунок 3.3

Рассмотрим кольцевой фрагмент цилиндра, отстоящий от оси последнего на r и имеющий ширину dr (вид с торца показан на рисунке 3.4; сечение фрагмента плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра). ЭДС индукции, возникающая в указанном фрагменте из-за вращения цилиндра, равна

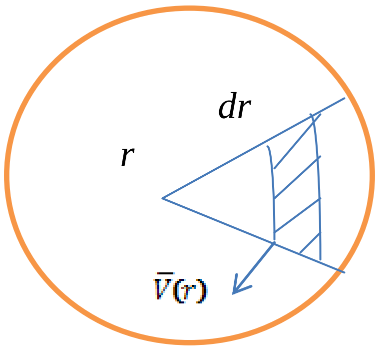

Рисунок 3.4

$$d\mathrm{E}_{\text{инд}} = B \cdot \upsilon(r) \cdot dr = B \cdot \omega \cdot r \cdot dr,$$

откуда получаем

$$E_{\text{инд}} = \frac{d\mathrm{E}_{\text{инд}}}{dr} = B \cdot \omega \cdot r.$$

Поле $E_{\text{ц}/\text{б}}$, возникающее за счет центробежной силы инерции, действующей на каждый отдельный электрон, равно

$$E_{\text{ц}/\text{б}}(r) = \frac{F_{\text{ц}/\text{б}}}{e} = \frac{m_e \cdot \omega^2 \cdot r}{e},$$

где e и m_e означают, соответственно, заряд и массу электрона.

Для результирующего электронного поля во вращающемся проводящем цилиндре на расстоянии r от его оси находим окончательно:

$$E(r) = \frac{m_e \cdot \omega^2 \cdot r}{e} \pm B \cdot \omega \cdot r,$$

где верхний знак отвечает правовинтовому вращению относительно вектора $\vec{B}$.

3.5 Металлический стержень массой m = 100 г и длиной l = 1м расположен горизонтально и подвешен за середину к пружине жесткости k = 1 Н/м. Стержень совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости с амплитудой x_m = 0,1 м в однородном магнитном поле B = 0,01 Тл, направленном перпендикулярно плоскости колебаний. Определить максимальную разность потенциалов, возникающую на концах стержня.

Решение

Положение колеблющегося стержня в некоторый момент t показано на рисунке 3.5

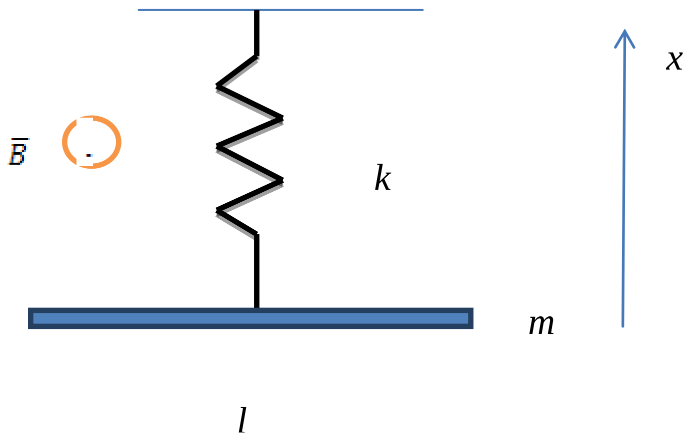

Рисунок 3.5

Запишем закон колебаний стержня:

$$x(t) = x_m \cdot \cos\omega t, \qquad \text{где} \quad \omega = \sqrt{k/m} \text{ – круговая частота колебаний.}$$

Скорость стержня в тот же момент равна

$$\upsilon(x)=\frac{dx}{dt}=-\omega\cdot x_m\cdot\sin\omega t,$$

откуда максимальное значение скорости:

$$\upsilon_{\text{мах}}=\omega\cdot x_m=x_m\cdot\sqrt{k/m}.$$

Наибольшая разность потенциалов на концах стержня равна значению ЭДС индукции в момент, когда скорость стержня максимальна:

$$\text{E}_{\max}=B\cdot l\cdot\upsilon_{\max}=B\cdot l\cdot x_m\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=0{,}01\cdot1\cdot0{,}1\cdot\sqrt{\frac{1}{0{,}1}}=3{,}16\ (\text{мВ}).$$

3.6 Металлический стержень длиной l = 0.2 м подвешен горизонтально на двух лёгких проводах длиной h = 0.1 м в вертикальном магнитном поле B = 1 Тл. Стержень отклоняют на угол α=30° от положения равновесия и отпускают (рисунок 3.6). Найти разность потенциалов между концами стержня в тот момент, когда он проходит положение равновесия.

Решение

Искомая разность потенциалов есть ЭДС индукции, равная

$$\Delta\varphi=\text{E}_{\text{инд}}=B\cdot l\cdot\upsilon,$$

где υ – скорость стержня в момент прохождения им положения равновесия. Найдем эту скорость из закона сохранения энергии:

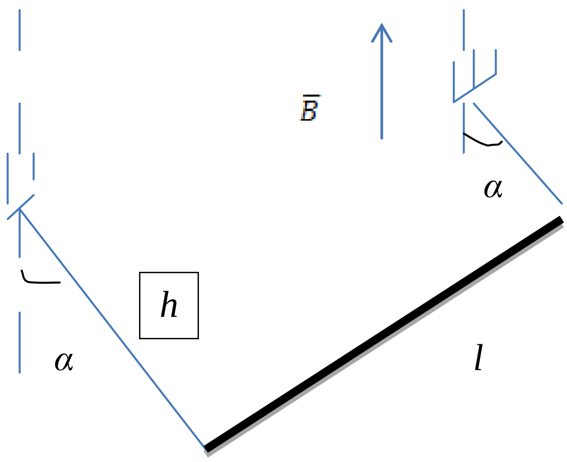

Рисунок 3.6

$$m\cdot g\cdot h\cdot(1-\cos\alpha)=\frac{m\cdot\upsilon^2}{2},$$

откуда
$$\upsilon=\sqrt{2\cdot g\cdot h\cdot(1-\cos\alpha)}.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta\varphi=B\cdot l\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h\cdot(1-\cos\alpha)}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}1\cdot(1-\cos 30^\circ)}=0{,}1\ \text{(В)}.$$

3.7 Из провода длиной l = 2 м сделан квадрат, расположенный в горизонтальной плоскости. Какой электрический заряд пройдет по проводу, если его потянуть за две противоположные вершины так, чтобы он сложился? Сопротивление провода R = 0.1 Ом; вертикальная составляющая магнитного поля Земли B = 50 мкТл.

Решение

Пусть a – сторона квадрата, т.е $a = l/4$. Площадь, пронизываемая линиями магнитного поля Земли, при сложении квадрата уменьшится от $S = a^2 = l_2/16$ до нуля. Поэтому магнитный поток через проволочный контур изменится на $\Delta\Phi = B \cdot l^2/16$ за некоторое время Δt. Следовательно, в контуре возникнет ЭДС индукции, равная

$$\mathrm{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Согласно закону Ома,

$$\mathrm{E} = I \cdot R = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot R,$$

где Δq – заряд, прошедший по проводу за время Δt.

Имеем :

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot R = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

откуда искомый заряд

$$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{B \cdot l^2}{16 \cdot R} = \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{16 \cdot 0{,}1} = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл).}$$

3.8 Металлический стержень согнут в виде угла $2\alpha = 60^\circ$ (рисунок 3.7). Проводящая перемычка, расположенная перпендикулярно биссектрисе угла, перемещается поступательно с постоянной скоростью V= 5 м/с вдоль биссектрисы, образуя треугольный контур. Система помещена в однородное магнитное поле B = 0,1 Тл, перпендикулярное плоскости контура. Определить силу тока в контуре, если сопротивление единицы длины контура λ = 1 Ом/м.

Решение

Обозначим боковую сторону образовавшегося равнобедренного треугольника через a, а его основание – через b (см. рисунок 3.30). Тогда на основании геометрических соображений можем записать:

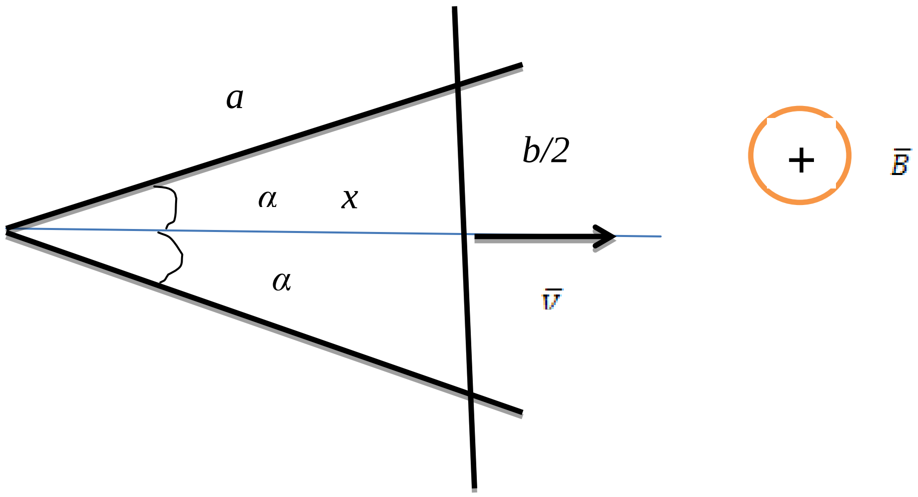

Рисунок 3.7

$$a = \frac{x}{\cos\alpha}; \qquad b = 2 \cdot x \cdot \tan\alpha;$$

площадь треугольника

$$S = \frac{x \cdot b}{2} = x^2 \cdot \tan\alpha;$$

его периметр

$$L = 2 \cdot a + b = \frac{2 \cdot x}{\cos\alpha} \cdot (1 + \sin\alpha).$$

Отсюда сопротивление треугольного контура

$$R = \lambda \cdot L = \frac{2 \cdot \lambda \cdot x}{\cos\alpha} \cdot (1 + \sin\alpha)..$$

По закону электромагнитной индукции в контуре возникает ЭДС, равная

$$|\mathrm{E}| = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \tan\alpha = 2 \cdot B \cdot \upsilon \cdot \tan\alpha.$$

Согласно закону Ома, в проводящем треугольном контуре возникает ток

$$I = \frac{|\mathrm{E}|}{R} = \frac{2 \cdot B \cdot \upsilon \cdot x \cdot \tan\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \lambda \cdot x \cdot (1 + \sin\alpha)} = \frac{B \cdot \upsilon}{\lambda} \cdot \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{0{,}1 \cdot 5 \cdot 0{,}5}{1 \cdot (1 + 0{,}5)} = 0{,}17 \text{ (A)}.$$

3.9 Металлический стержень АС, сопротивление единицы длины которого λ, движется с постоянной скоростью υ , перпендикулярно АС, замыкая два проводника OD и OE, образующих друг с другом угол α (рисунок 3.8). Длина OE равна l, $AC \perp OE$. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном плоскости системы. Найти количество теплоты, которое выделится в контуре при движении стержня от точки O до точки E. Сопротивление проводников OD и OE не учитывать.

Решение

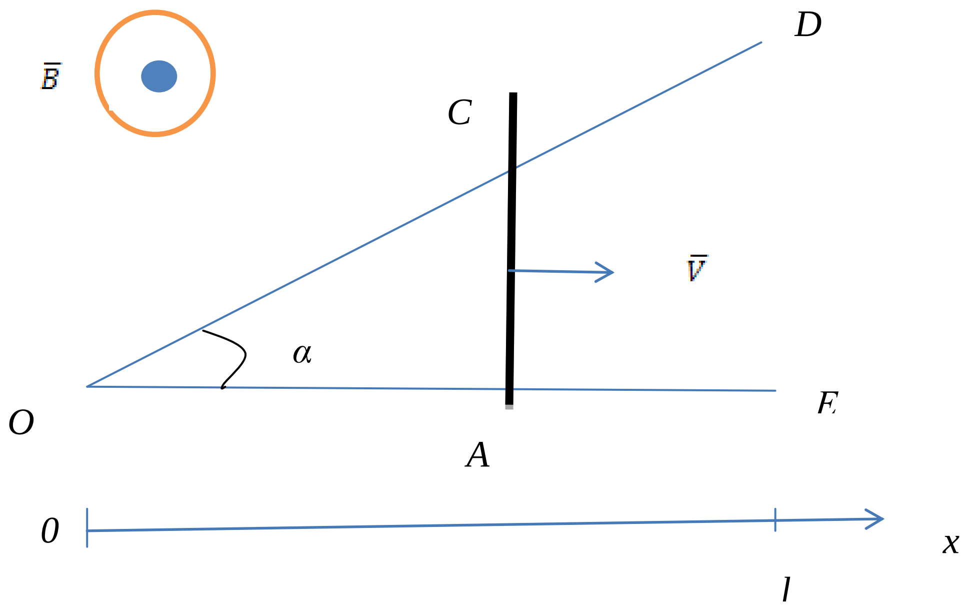

Рисунок 3.8

Введем ось ox, как показано на рисунке 3.8. Рассмотрим малое перемещение dx стержня АС за время dt; за это время в контуре выделится количество тепла

$$dQ = \frac{\mathrm{E}^2(x)}{R(x)} \cdot dt, \qquad \text{где} \quad dt = \frac{dx}{\upsilon};$$

$E(x) = B \cdot L(x) \cdot \upsilon$ – возникшая к рассматриваемому моменту ЭДС индукции;

$L(x) = x \cdot \tan\alpha$ – длина активной перемычки в рассматриваемый момент времени;

$R(x) = \lambda \cdot L(x) = \lambda \cdot x \cdot \tan\alpha$ – сопротивление контура в этот момент .

Имеем:
$$dQ = \frac{B^2 \cdot \upsilon^2 L^2(x)}{\lambda \cdot L(x)} \cdot \frac{dx}{\upsilon} = \frac{B^2 \cdot \upsilon \cdot L^2(x)}{\lambda \cdot L(x)}$$

$$dQ = \frac{B^2 \cdot \upsilon^2 \cdot L^2(x)}{\lambda \cdot L(x)} \cdot \frac{dx}{\upsilon} = \frac{B^2 \cdot \upsilon \cdot x \cdot \tan\alpha}{\lambda} \cdot dx.$$

Отсюда полное количество тепла, выделившееся в контуре,

$$Q = \int_0^l dQ = \frac{B^2 \cdot \upsilon \cdot \tan\alpha}{\lambda} \int_0^l x \cdot dx = \frac{B^2 \cdot \upsilon \cdot l^2 \cdot \tan\alpha}{2 \cdot \lambda}.$$

3.9Две металлические параллельные рейки расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на контур ёмкостью C = 400мкФ. По рейкам начинает двигаться без трения проводник массой m = 2 кг и длиной l = 1 м под действием горизонтальной силы F = 10 Н (рисунок 3.9). Определить ускорение проводника, если магнитное поле B = 50 Тл и направлено вертикально вниз.

Решение

При движении проводника в образовавшемся замкнутом контуре возникает

ЭДС индукции и потечёт ток I; при этом

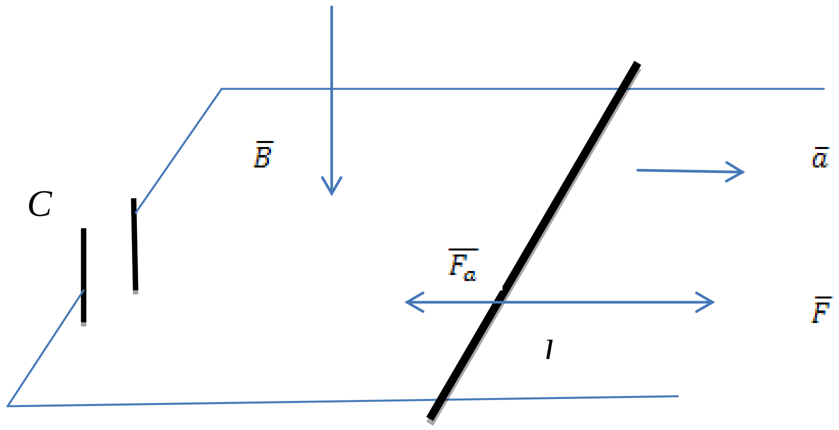

Рисунок 3.9

$$I = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{d\mathrm{E}}{dt},$$

где величина ЭДС индукции

$$\mathrm{E} = B \cdot l \cdot \upsilon;$$

где υ – скорость проводника в данный момент.

Поэтому $$I = C \cdot \frac{d}{dt}(B \cdot l \cdot \upsilon) = B \cdot l \cdot C \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = B \cdot C \cdot l \cdot a,$$

где a – ускорение проводника.

На проводник с током, в свою очередь, со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера

$$F_A = B \cdot I \cdot l = B^2 \cdot l_2 \cdot C \cdot a,$$

направленная, в соответствии с правилом Ленца, против силы $\vec{F}$. Таким образом, уравнение движения проводника (в проекциях на направление ускорения) примет вид:

$$m \cdot a = F - B_2 \cdot l^2 \cdot C \cdot a,$$

откуда искомое ускорение проводника

$$a = \frac{F}{m + B^2 \cdot l^2 \cdot C} = \frac{10}{2 + (50 \cdot 1)^2 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} \approx 3{,}3 \text{ (м/с}^2\text{)} .$$

Задачи для самостоятельного решения

3.11 Определить радиус кривизны траектории электрона (m_e = 9.1· 10^{-31} кг, q_e =1.6· 10^{-19} Кл) в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле B = 0,007 Тл, если энергия электрона $E_к$ = 3900 эВ.

[Ответ : 3 см.]

3.12 Заряженная частица, двигаясь в магнитном поле по дуге окружности радиуса R_1 = 2 см, прошла через свинцовую пластину, расположенную на пути частицы. Вследствие потери энергии частицей радиус кривизны траектории изменился и стал равен R_2 = 1 см. Определить относительное изменение энергии частицы.

[Ответ: 0,75.]

3.13 Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии l =0.3 м друг от друга. На них перпендикулярно рельсам лежит проводящий стержень. Какой должна быть величина магнитного поля B, чтобы стержень двигался равномерно, если по нему пропускать ток I = 50А? Масса стержня m =0.5 кг, коэффициент трения о рельсы μ = 0,2.

[Ответ: 65 мТл.]

3.14 Однородное магнитное поле перпендикулярно плоскости медного проволочного кольца, имеющего диаметр D =2 см и толщину d =2 мм. С какой скоростью должно изменяться во времени магнитное поле, чтобы сила индукционного тока в кольце была I = 10А? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot 10^{-8}$ Ом·м

[Ответ: 10,8 Тл/с.]

3.15 Проволочный виток площадью S = 10 см^2 разрезан в некоторой точке, и в разрез включен конденсатор ёмкостью C = 10 мкФ. Виток помещён в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости витка. Величина поля равномерно изменяется со скоростью $dB/dt = 5\cdot 10^{-3}$ Тл/с.

Определить заряд конденсатора.

[Ответ: $5\cdot 10^{-10}$ Кл.]

4 Оптика

4.1 Геометрическая оптика

4.1 Согласно принципу Ферма, свет всегда распространяется по наикратчайшему пути. Луч света, исходящий из источника *S* , отражаясь от плоского зеркала *LL'* (рисунок 4.1), приходит в точку *S'*. Получить, используя принцип Ферма, закон отражения света.

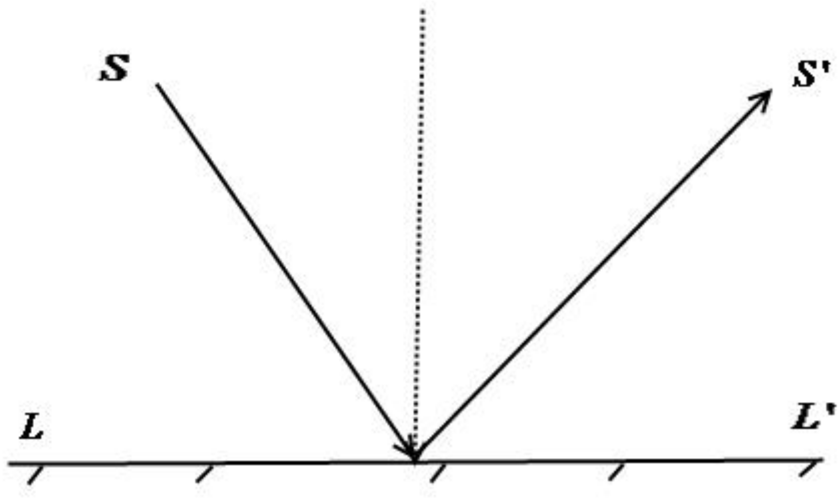

Рисунок 4.1

Решение

Сделаем дополнительное построение: изобразим точку *S''*, симметричную относительно зеркала точке *S'* (рисунок 4.2). По построению, длина пути *SOS''* = *SOS'* . В то же время длина любого другого пути, например *SAS''* , больше чем *SOS''*. А так как точки *S*, *O* и *S''* лежат на одной прямой, то из геометрических соображений ясно, что $\angle\alpha = \angle\beta$, в полном соответствии с законом отражения.

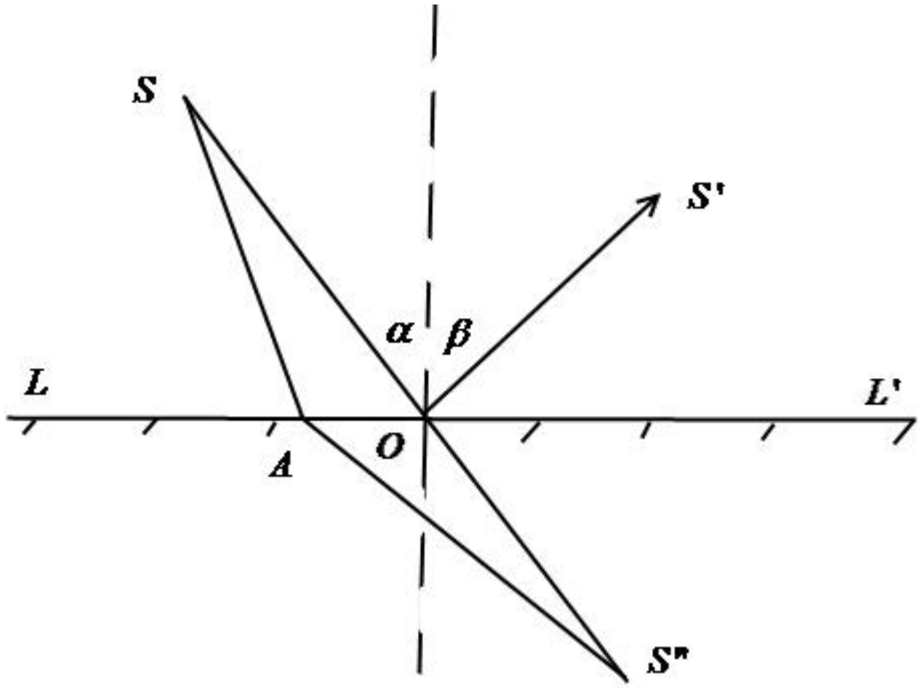

Рисунок 4.2

4.2 Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\varphi = 179^\circ$. На расстоянии l = 10 см от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от каждого зеркала находится точечный источник света. Определить расстояние между мнимыми изображениями источника в зеркалах (бизеркала Френеля).

Решение

Построим изображение источника в бизеркалах Френеля, увеличив на чертеже для наглядности угол между направлениями на изображения (рисунок 4.3).

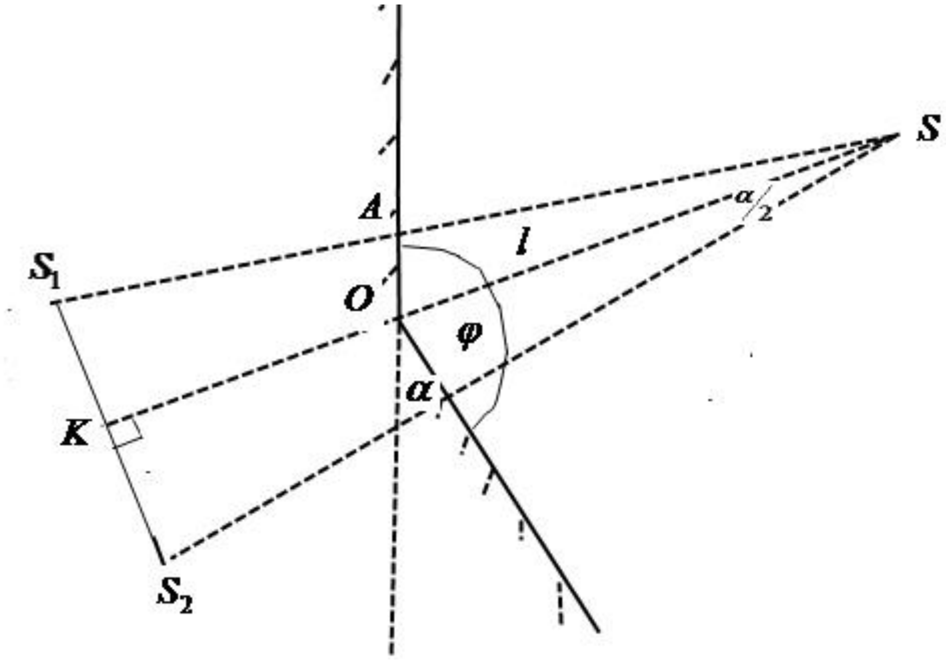

Рисунок 4.3

Пусть $OS = l$; видно, что α = π-φ. Тогда $AS = l \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$; $AO = l \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Очевидно, что ΔAOS подобен ΔS_1KS ,

поэтому $\frac{S_1K}{AO} = \frac{S_1S}{OS}$, откуда

$$S_1K = AO \cdot \frac{S_1S}{OS} = l \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{l} = 2 \cdot l \cdot \sin\tfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = l \cdot \sin\alpha$$

Окончательно получаем:

$$S_1S_2 = 2 \cdot S_1K = 2l \cdot \sin\alpha = 2l \cdot \alpha = 2l \cdot (\pi - \varphi) = 2 \cdot 10 \cdot (\pi - \pi \cdot \frac{179^\circ}{180^\circ}) = 0{,}35 \text{ см} = 3{,}5 \text{ мм}.$$

4.3 Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha=60$. В плоскости, делящей угол пополам, находится точечный источник света S (рисунок 4.4). С какой скоростью будут сближаться первые изображения источника в зеркалах, если он начнёт приближаться к линии пересечения зеркал со скоростью υ ?

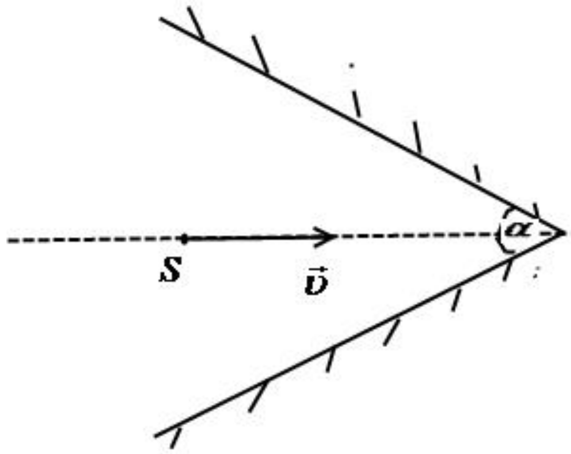

Рисунок 4.4

Решение

Построим первые изображения источника S в зеркалах и укажем скорости υ_1 и υ_2 их движения относительно зеркал (рисунок 4.5)

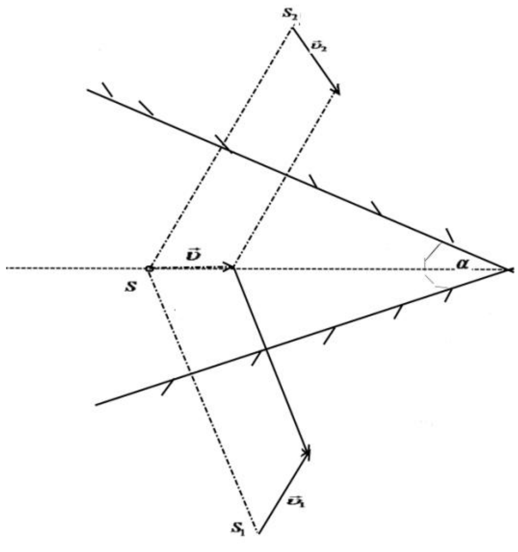

Рисунок 4.5

Искомая скорость сближения изображений S_1 и S_2 изображена на рисунке 4.6 вектором $\vec{u}$

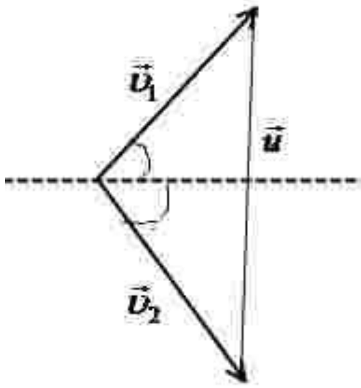

Рисунок 4.6

Из геометрических соображений находим:

$$u = 2 \cdot \upsilon \cdot \sin 60^\circ = \upsilon \cdot \sqrt{3}.$$

4.4 Пучок параллельных лучей падает под углом $\alpha = 45^\circ$ из воздуха на поверхность воды, находящейся в сосуде прямоугольной формы (рисунок 4.7). При этом тень, отбрасываемая боковой стенкой сосуда на его дно, составляет η=3/4 от тени, полученной при отсутствии воды. Какая часть сосуда заполнена водой? Показатель преломления воды n = 1,33.

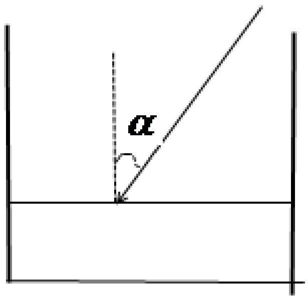

Рисунок 4.7

Решение

Изобразим на чертеже ход лучей света в сосуде с водой (рисунок 4.8)

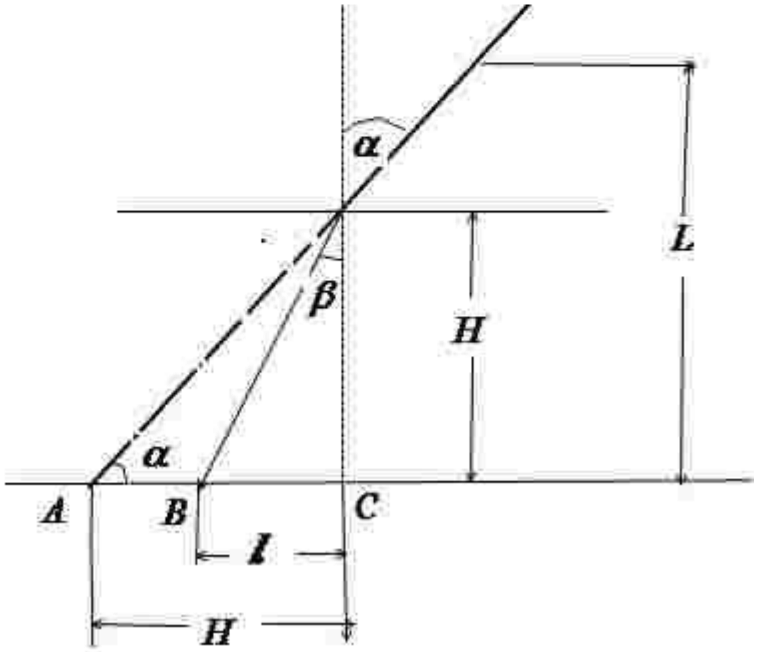

Рисунок 4.8

Преломлённый на границе «воздух-вода» луч света падает на дно сосуда в точку *B*; в отсутствии воды он падал бы в точку *A*. По условию, $\eta = \dfrac{l}{L}$.

Имеем: $l = L - AB;\qquad AB = AC - BC = H \cdot (1 - \tan\beta).$

Следовательно, $l = L - H \cdot (1 - \tan\beta),$ или $\eta \cdot L = L - H \cdot (1 - \tan\beta).$

Отсюда искомая величина $\dfrac{H}{L} = \dfrac{1-\eta}{1-\tan\beta}.$

Согласно закону **Снеллиуса** (также **Снелля** или **Снелла**)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n; \qquad \text{тогда} \quad \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

С учётом этого окончательно получаем:

$$\frac{H}{L} = \frac{1-\eta}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}} = \frac{1-0,75}{1 - \dfrac{\sin 45^\circ}{\sqrt{1,33^2 - 0,5}}} = 0,67\,.$$

4.5 Для наблюдения за морскими животными в днище судна вделан иллюминатор, диаметр которого d = 40 см много больше толщины стекла. Определить площадь обзора дна из этого иллюминатора, если расстояние от него до дна h = 5 м. Показатель преломления морской воды n = 1,4 м.

Решение

Величина площади обзора дна определяется предельным углом полного внутреннего отражения α_0 (рисунок 4.9) .

Для угла α_0 можем записать:

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n}; \qquad \text{тогда} \quad \tan\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

С другой стороны, радиус обзора

$$R = \frac{d}{2} + l = \frac{d}{2} + h\cdot\tan\alpha_0 = \frac{d}{2} + \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

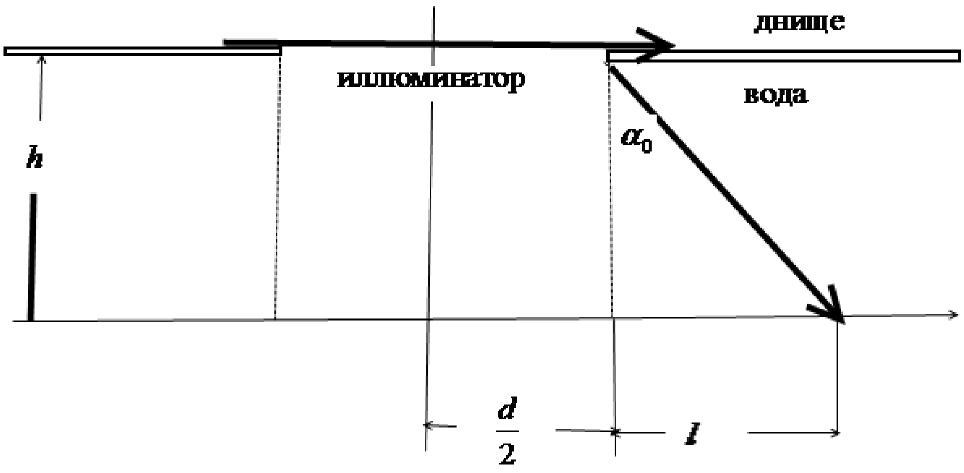

Рисунок 4.9

Следовательно, искомая площадь обзора

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \right) = \pi \cdot \left(\frac{0,4}{2} + \frac{5}{\sqrt{1,4^2 - 1}} \right) = 88,35 \ (\text{м}^2).$$

4.6 Каково минимальное расстояние между предметом и его действительным изображением для линзы с фокусным расстоянием F ?

Решение

Действительное изображение возможно только в собирающей линзе. Запишем формулу собирающей тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы, f – от изображения до линзы. По условию, требуется минимизировать величину $L = d + f$.

1 способ. $f. = L - d$; тогда формула линзы примет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{L-d}=\frac{1}{F} \quad \text{, или}$$

$$d^2 - L\cdot d + L\cdot F = 0$$

Для нахождения минимума выделим полный квадрат:

$$\left(d-\frac{L}{2}\right)^2-\left(\frac{L^2}{4}-L\cdot F\right)=0.$$

Отсюда следует, что минимальное значение L отвечает значению $d = \dfrac{L}{2}$; ;

при этом $\dfrac{L_{\min}^2}{4}=L_{\min}\cdot F$, или $L_{\min}=4\cdot F.$

2 способ. Из формулы линзы выразим f: $f=\dfrac{F\cdot d}{d-F}$

и запишем L как функцию расстояния d: $L(d)=d+\dfrac{F\cdot d}{d-F}.$

Минимум этой функции достигается при условии равенства нулю производной

$L'(d) = 0$, т.е.

$$1+\frac{F\cdot(d-F)-F\cdot d}{(d-F)^2}=0 \quad \text{или} \quad F^2=(d-F)^2.$$

Поскольку изображение – действительное, то $d > F$, и поэтому $d_{min} = 2F$.

Следовательно,

$$L_{min} = L(d_{min})=4F.$$

4.7 Расстояние между двумя точечными источниками света, находящимися на главной оптической оси линзы, l =24 см. Где между ними помещена линза, если изображение обоих источников оказывается в одной точке? Фокусное расстояние линзы F = 9 см.

Решение

Покажем на чертеже ход лучей от обоих источников S_1 и S_2 (рисунок 4.10). При построении учитываем, что лучи, падающие на линзу под некоторым углом к главной оптической оси и параллельные друг другу, после прохождения через собирающую линзу пересекаются в некоторой точке фокальной плоскости линзы.

Из чертежа видно, что оба источника дают, как и требует условие задачи , одно изображение S' ; при этом источник S_1 даёт в точке S' действительное, а источник S_2 – мнимое изображение. Расстояние от линзы до обоих источников и до их общего изображения обозначены на рисунке 4.10.

Имеем: $d_1 + d_2 = l$; $f_2 = f_1$. Запишем формулу линзы для обоих случаев:

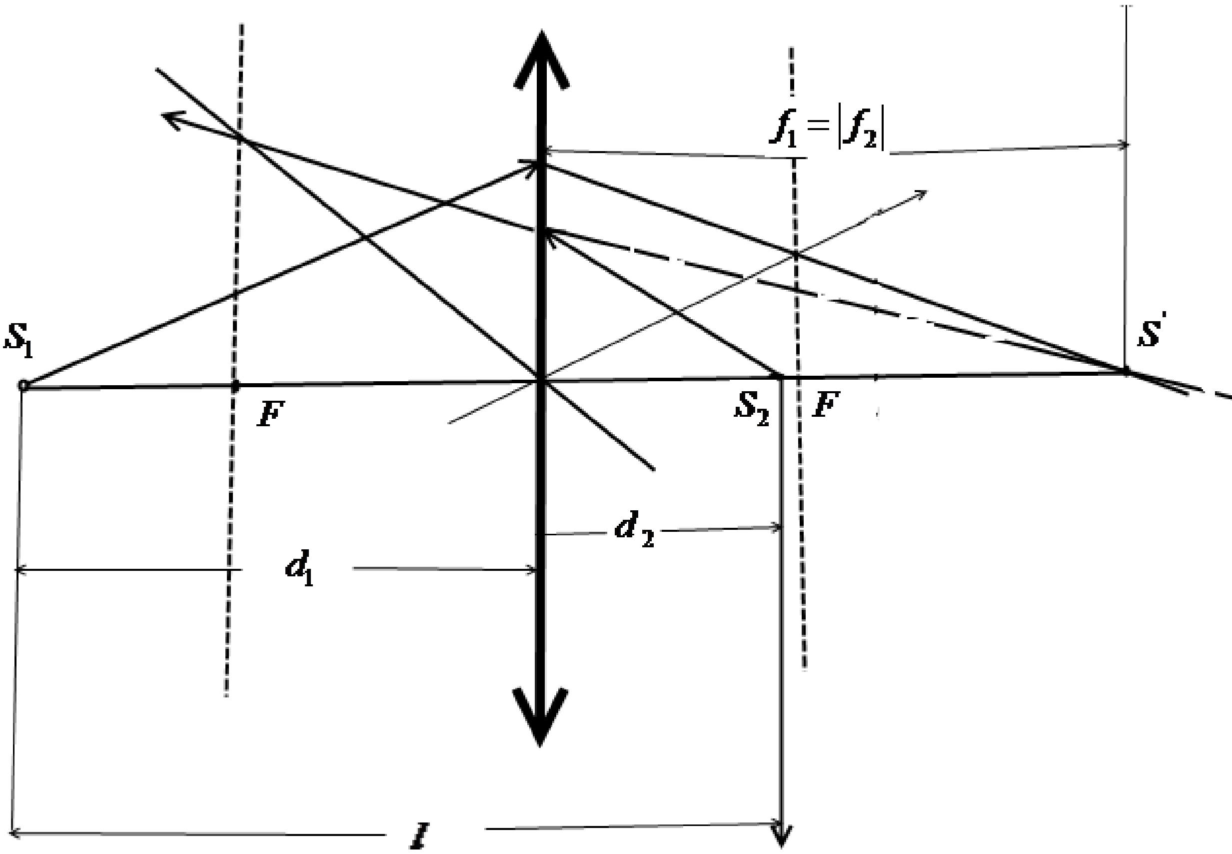

Рисунок 4.10

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{F} \\ \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{F} \end{cases}.$$

Сложим оба уравнения:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{2}{F}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{l - d_1} = \frac{2}{F}.$$

Это уравнение преобразуется к квадратному относительно d_1:

$$2 \cdot d_1^2 - 2 \cdot l \cdot d_1 + l \cdot F = 0 \;,$$

откуда находим два возможных решения:

$$(d_1)_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 2 \cdot l \cdot F}}{2} = \frac{24 - \sqrt{576 - 2 \cdot 24 \cdot 9}}{2} = 6 \text{ (см)} ;$$

$$(d_1)_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 2 \cdot l \cdot F}}{2} = \frac{24 + \sqrt{576 - 2 \cdot 24 \cdot 9}}{2} = 18 \text{ (см)} .$$

Очевидно, что если источник S_1 находится на расстоянии d_1 = 6 см от линзы, то второй источник – на расстоянии d_2 = 18 см от неё. Если же первый источник отстоит от линзы на расстояние 18 см, то второй – на 6 см.

4.8 На пути сходящегося светового пучка поставили собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 10 см, в результате чего лучи сошлись на расстоянии f = 5 см от линзы. Где пересекутся эти лучи, если линзу убрать?

Решение

Построим ход одного из лучей сходящегося пучка (рисунок 4.11).

Видно, что ΔMOA подобен ΔONB, поэтому

$$\frac{OB}{MA} = \frac{ON}{MO} = \frac{f}{F} .$$

Точно так же ΔAMC подобен ΔBOC, откуда

$$\frac{OB}{MA} = \frac{OC}{MC} , \text{ или } \frac{f}{F} = \frac{x}{x + F} .$$

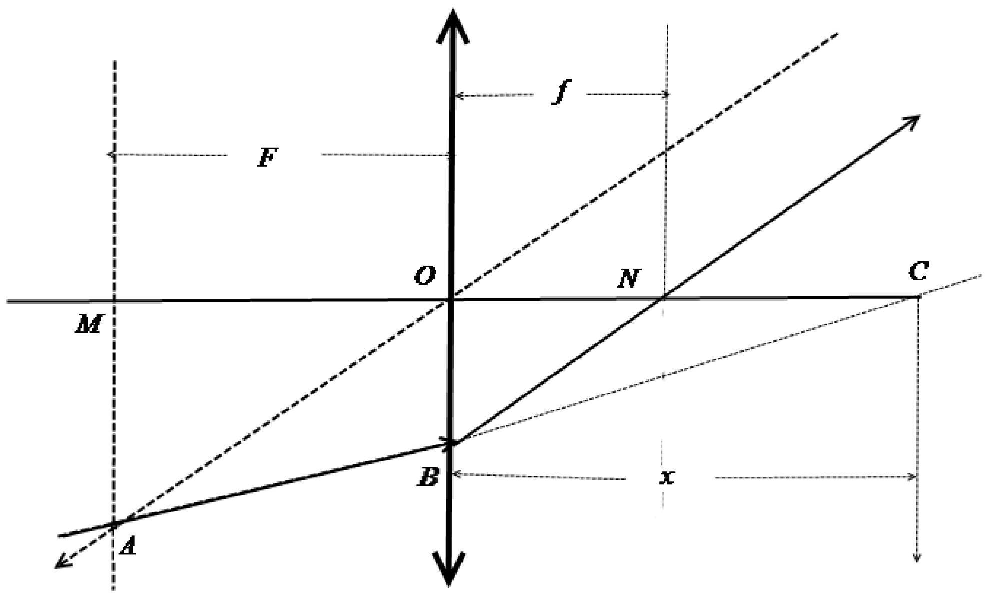

Рисунок 4.11

Из этого уравнения находим требуемое расстояние x :

$$x = \frac{f \cdot F}{F - f} = \frac{5 \cdot 10}{10 - 5} = 10 \text{ (см)} .$$

4.9 Экран расположен на расстоянии L = 21 см от отверстия, в которое вставлена линза радиусом r = 5 см. На линзу падает сходящийся пучок лучей, в результате чего на экране образуется световое пятно радиусом R = 3 см. Оказалось, что если линзу убрать, то радиус пятна не изменится. Найти фокусное расстояние линзы.

Решение

Поскольку тип линзы – собирающая или рассеивающая, в условии задачи не указан, то рассмотрим оба эти случая.

1. Собирающая линза. Ход лучей показан на рисунке 4.12.

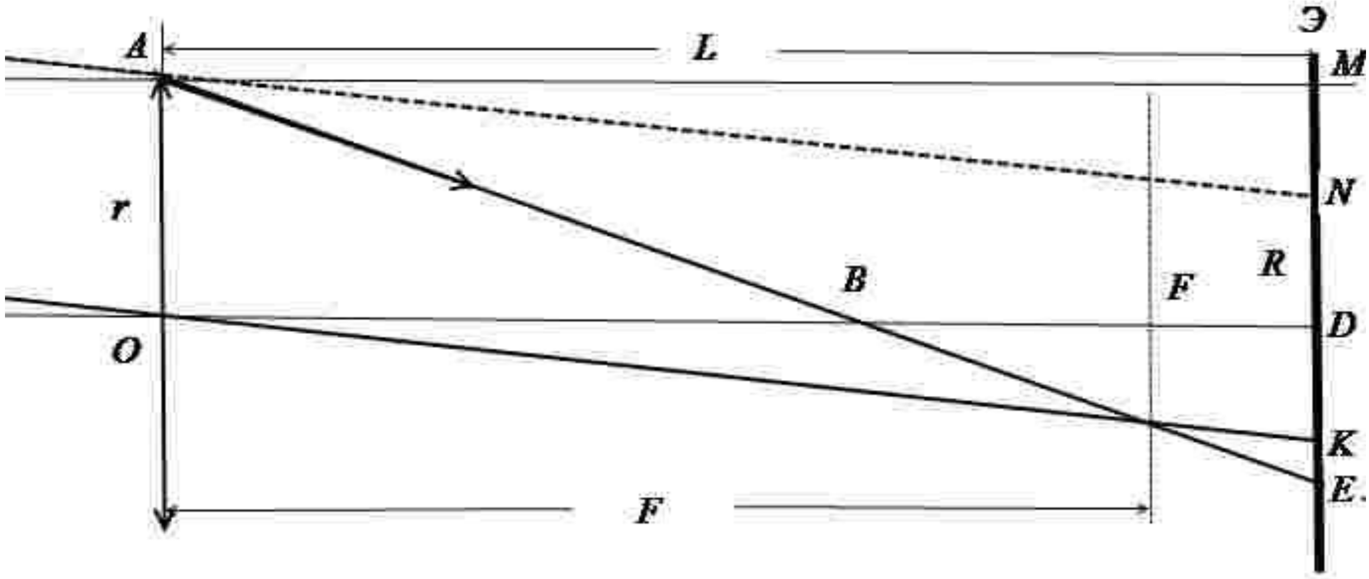

Рисунок 4.12

Согласно условию задачи, $OA = MD = r$; $ND = R$; тогда $MN = DK = r\text{-}R$.

Пусть $OB = x$, тогда $BD = L\text{-}x$. Т.к. ΔAOB подобен ΔBDE , то $\dfrac{BO}{BD} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{AO}{DE}$, или

$$\frac{x}{L-x} = \frac{r}{R}\text{, откуда } x = \frac{r \cdot L}{r+R}\text{; } L - x = \frac{L \cdot R}{r+R}\text{.}$$

Далее,

ΔOFC подобен ΔODK , поэтому $\dfrac{OF}{CF} = \dfrac{OD}{DK}$, или $\dfrac{F}{CF} = \dfrac{L}{r-R}$,откуда $CF = \dfrac{F \cdot (r-R)}{L}$.

С другой стороны, из подобия ΔBFC и ΔBDE следует:

$$\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{DE}\ ,\ \text{или}\ \ \frac{F-x}{CF}=\frac{L}{r+R}\text{, откуда } CF=\frac{(F-x)\cdot(r+R)}{L}\ .$$

Приравнивая два получившихся выражения для CF, находим:

$$\frac{F\cdot(r-R)}{L}=\frac{\left(F-\dfrac{r\cdot L}{r+R}\right)\cdot(r+R)}{L}\ ,$$

откуда искомое фокусное расстояние линзы

$$F=\frac{r\cdot L}{2\cdot R}=\frac{5\cdot 21}{2\cdot 3}=17{,}5\ (\text{см}).$$

2. Рассеивающая линза. Ход лучей показан на рисунке 4.13.

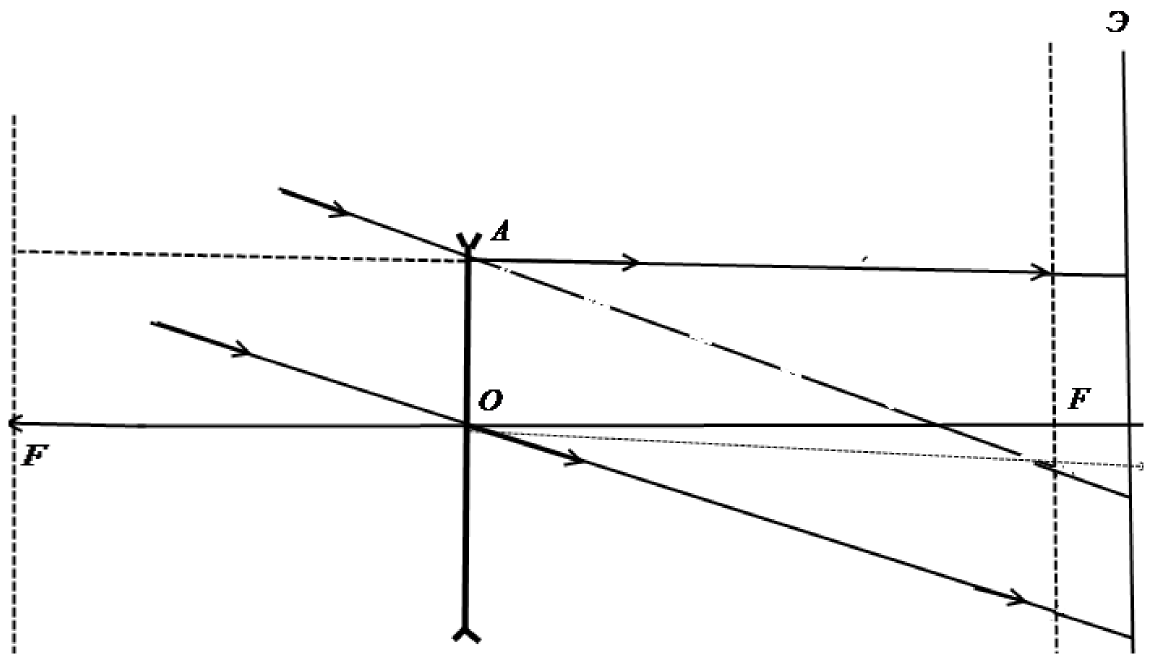

Рисунок 4.13

Нетрудно убедиться, что и в этом случае фокусное расстояние линзы F = 15,5 см.

4.10 Предмет приближают к линзе вдоль главной оптической оси со скоростью υ = 0,2 м/с. Чему равна скорость перемещения действительного изображения предмета в момент, когда его увеличение $\Gamma = 2$? В какую сторону перемещается изображение?

Решение

Запишем формулу собирающей линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\,. \qquad (1)$$

Т.к. предмет, согласно условию, движется, то расстояния d и f являются функциями времени: $d = d(t)$; $f = f(t)$. Продифференцируем формулу (1) по времени t :

$$-\frac{d'}{d^2}-\frac{f'}{f^2}=0\,, \text{ откуда } \frac{d'}{f'}=-\left(\frac{d}{f}\right)^2. \qquad (2)$$

Учитывая, что $d' = \upsilon$, $f' = u$ – скорости предмета и изображения соответственно, а также формулу $\Gamma = f/d$, перепишем соотношение (2) в виде $u = \upsilon\,\Gamma^2$.

Имеем: $u = 0{,}2 \cdot 2^2 = 0{,}8$ (м/с).

Знак «минус в формуле (2)» говорит о том, что изображение будет двигаться навстречу предмету.

Задачи для самостоятельного решения

4.11 Солнечный луч составляет с поверхностью земли угол $\varphi = 40^\circ$. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы солнечный луч попал на дно глубокого колодца?

[Ответ: 65°]

4.12 На поверхность водоёма глубиной H = 2 м находится круглый плот, радиус которого R = 8 м. Определить радиус полной тени от плота на дне водоёма при освещении воды рассеянным светом.

[Ответ: 5,72 м.]

4.13 На дне сосуда, наполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над сосудом, видит изображение своего лица в зеркале на расстоянии d = 25 см, если расстояние от лица до поверхности воды

h = 5 см. Определить глубину сосуда.

[Ответ: 10 см]

4.14 Расстояние между точечным источником света и экраном L = 3 м. Линза, помещенная между ними, даёт чёткое изображение при двух положениях, расстояние между которыми l = 1 м. Найти фокусное расстояние линзы.

[Ответ: 0,67 м]

4.15 Точка лежит на оптической оси собирающей линзы, на расстоянии

d = 40см от неё. Фокусное расстояние линзы F = 10 см. Точку перенесли на расстояние h = 5 см в плоскости, перпендикулярной оптической оси. На какое расстояние нужно подвинуть линзу в её плоскости, чтобы изображение точки получилось в первоначальном месте?

[Ответ: на 1,25 см]

4.2 Элементы волновой оптики

4.16 Два когерентных источника S_1 и S_2 (рисунок 4.14) испускают монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. На каком расстоянии от точки O будет первый максимум освещённости, если OC = 4 м и S_1S_2 = 1 мм?

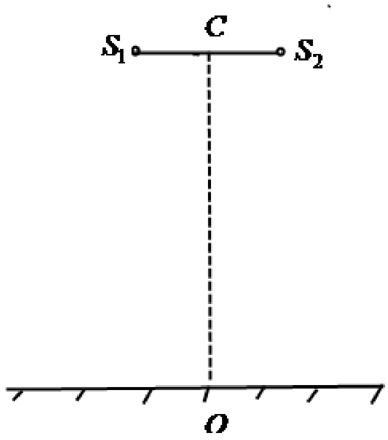

Рисунок 4.14

Решение

Пусть первый максимум освещённости находится в точке K (рисунок 4.15).

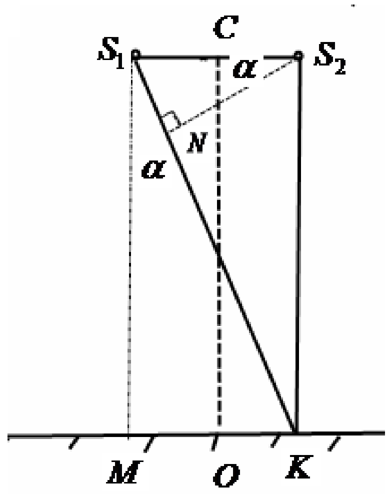

Рисунок 4.15

Введём обозначения: $S_1S_2 = d$; $CO = L$; $S_1N = \Delta$ (разность хода лучей S_1K и S_2K); $OK = x$ (расстояние до заданного максимума освещённости). При решении учитываем, что $d, x << L$; $\Delta << d$. Из подобия прямоугольных треугольников S_1S_2N и MS_1K, с учётом вышеприведённых неравенств, следует что

$$\frac{S_1N}{S_1S_2} = \frac{MK}{S_1M}\ , \quad \text{или} \quad \frac{\Delta}{d} = \frac{x}{L}$$

(мы здесь пренебрегли величиной $d/2$ по сравнению с x).

А т.к., согласно условию задачи, в точке K находится интерференционный максимум 1-го порядка, то $\Delta = \lambda$. Имеем :

$$x = \frac{\Delta \cdot L}{d} = \frac{\lambda \cdot L}{d} = \frac{600 \cdot 10^{-9} \cdot 4}{10^{-3}} = 2{,}4 \text{ (мм).}$$

4.17 Два когерентных источника света излучают синфазно. Расстояние между источниками $d = \lambda$, где λ – длина волны падающего света (рисунок 4.16). Определить направления, в которых можно наблюдать: а) интерференционный максимум; б) интерференционный минимум. Углы отсчитывать от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точки наблюдения значительно больше длины волны.

Решение

На рисунке 4.16 показана разность хода лучей от двух источников Δ.

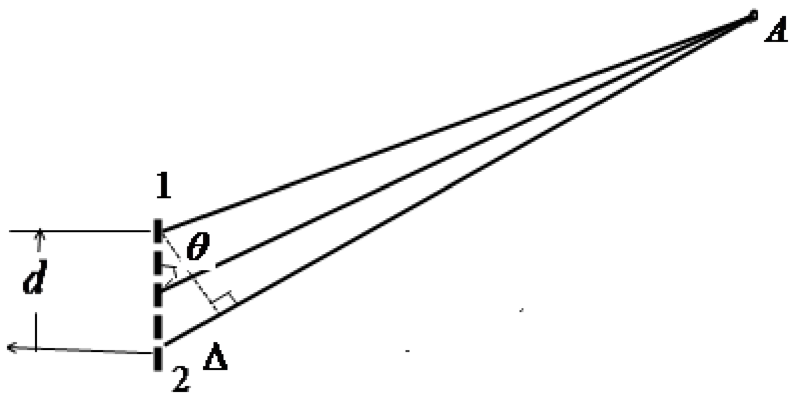

Рисунок 4.16

а) Интерференционный максимум в точке наблюдения A будет при условии

$\Delta = (2\kappa+1)\cdot\dfrac{\lambda}{2}$, , где κ – любое целое число. Из геометрии следует, что $\Delta = d\cdot\cos\theta$.

Имеем: $(2\kappa+1)\cdot\dfrac{\lambda}{2} = \lambda\cdot\cos\theta$, откуда, учитывая условие $|\cos\theta| \le 1$, находим

$$|\cos\theta| = \frac{1}{2};\ \theta = \frac{\pi}{3} \text{ либо } \theta = \frac{2\cdot\pi}{3}.$$

б) Интерференционный максимум в точке A будет при условии $\Delta = k\lambda$.

Следовательно, для максимума в т. A необходимо, чтобы $\theta = 0;\ \pm\dfrac{\pi}{2};\ \pi$.

4.18 Два когерентных источника S_1 и S_2, излучающие свет с длиной волны λ=0,5 мкм, находятся на расстоянии d =2 мм друг от друга (рисунок 4.17). Параллельно линии, соединяющей источники, расположен экран на расстоянии L = 2 м от них. Что будет наблюдаться в точке A экрана: свет или темнота?

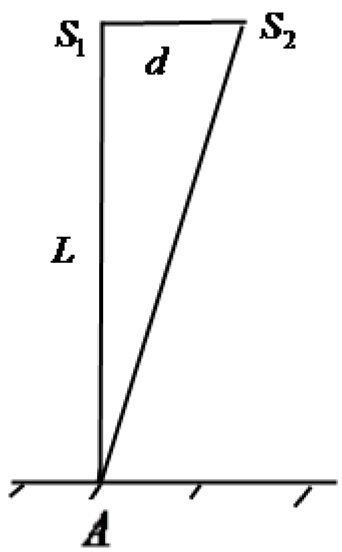

Рисунок 4.17

Решение

Найдем разность хода лучей S_1A и S_2A:

$$\Delta = S_2A - S_1A = \sqrt{L^2 + d^2} - L = L \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}} - 1 \right) \approx L \cdot \frac{d^2}{2 \cdot L^2} = \frac{d^2}{2 \cdot L}.$$

(Мы здесь воспользовались известным приближенным соотношением ($\sqrt{1+\alpha} \approx \frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \ll 1$). Т.о., $\Delta = \frac{\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 2} = 1мкм = 2\lambda.$ Следовательно, в точке A будет максимум освещенности.

4.19 На экран A падает параллельный световой поток с длиной волны λ = 560 нм. В экране имеются две параллельные щели на расстоянии

d = 10^{-4} м одна от другой (рисунок 4.18). Определить расстояние между соседними полосами интерференционных максимумов, наблюдаемых на экране $Э$, расположенном параллельно экрану A на расстоянии L = 1 м от него.

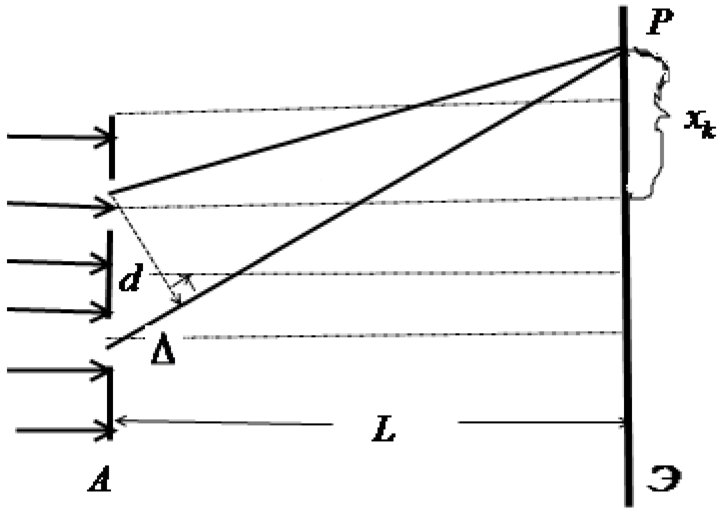

Рисунок 4.18

Решение

Пусть в точке P экрана $Э$ наблюдается интерференционный максимум k-го порядка. Тогда разность хода Δ для лучей, исходящих из двух щелей в экране A и приходящих в точку P, равна (см. задачу 4.16)

$$\Delta = \frac{d \cdot x_k}{L}.$$

А так как для максимума $\Delta = k \cdot \lambda$, то имеем для двух соседних интерференционных максимумов:

$$\frac{d \cdot x_k}{L} = k \cdot \lambda \,; \quad \frac{d \cdot x_{k+1}}{L} = (k+1) \cdot \lambda \;.$$

Следовательно, искомое расстояние

$$x_{k+1} - x_k = (k+1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{d} - k \cdot \frac{\lambda \cdot L}{d} = \frac{\lambda \cdot L}{d} = \frac{560 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{10^{-4}} = 5{,}6 \text{ (мм).}$$

4.20 Собирающую линзу диаметром D = 5 см с фокусным расстоянием F = 50 см разрезали по диаметру пополам и раздвинули половинки на расстояние d = 5 мм. Точечный источник света S расположен на расстоянии a = 1 м от линзы. На каком расстоянии l от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

Решение

Изобразим ход лучей от источника через разрезанную линзу (рисунок 4.19).

С помощью разрезанной линзы получаем два когерентных источника света S_1 и S_2 . Интерференционную картину можно наблюдать в области, где световые пучки от источников S_1 и S_2 перекрываются, т.е. за точкой O (на рисунке 4.19 – заштриховано).

Т.к. по условию $a = 2F$, то изображение S_1 и S_2 также будут отстоять от линзы на расстояние $2F$. Из рисунка 4.19 видно, что

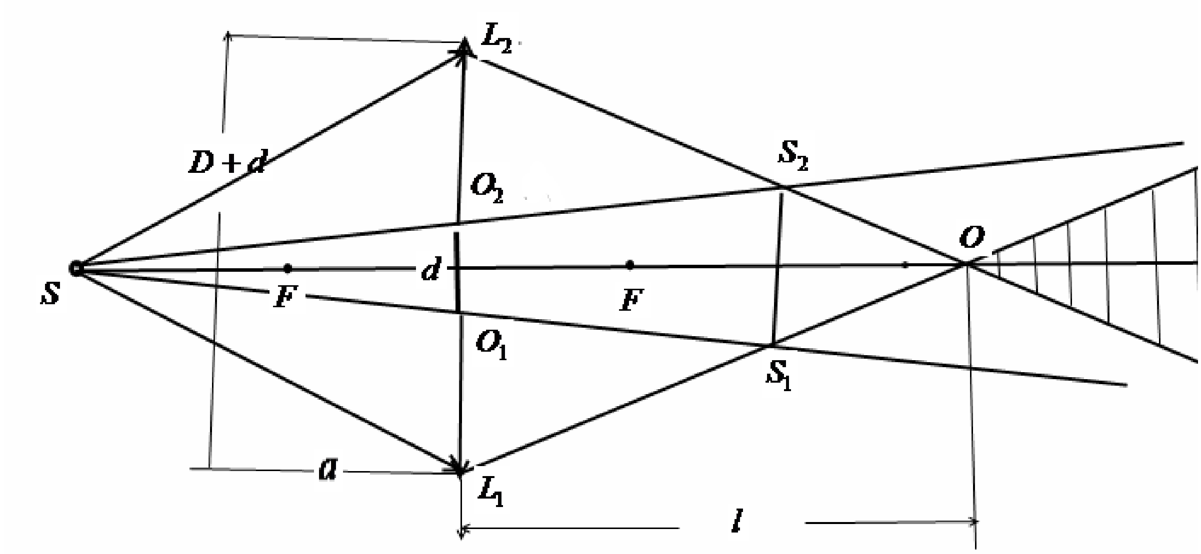

Рисунок 4.19

ΔSS_1S_2 подобен ΔSO_1O_2 ,откуда $\dfrac{S_1S_2}{O_1O_2} = \dfrac{2a}{a} = 2$, т.е. $S_1S_2 = 2d.$

Далее, ΔS_1S_2O подобен $\Delta L_1L_2O,$ поэтому $\dfrac{D+d}{2d} = \dfrac{l}{l-a}$. Из этого уравнения находим:

$$l = \frac{a\cdot(D+d)}{D-d} = \frac{1\text{м}\cdot 5{,}5\text{см}}{4{,}5\text{см}} = 1{,}22 \text{ м}.$$

4.21 При наблюдении через дифракционную решётку красный край спектра первого порядка виден на расстоянии l = 3,5 см от середины экрана (рисунок 4.20). Расстояние от дифракционной решетки до экрана

L = 10^{-2} мм. Определить длину волны красного света.

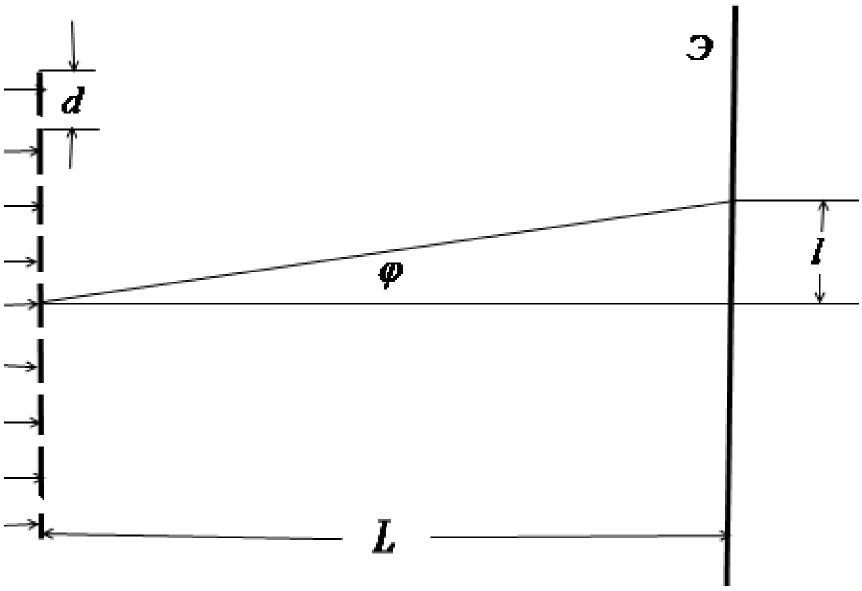

Рисунок 4.20

Решение

Запишем условие 1-го максимума для дифракционной решётки:

$$d \cdot \sin\alpha = \lambda ,$$

где λ – искомая длина волны красного света. В то же время, из геометрии: $\tan\varphi = \frac{l}{L}$. Из этих двух соотношений находим :

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{d} \;;\; \cos\varphi = \frac{1}{d} \cdot \sqrt{d^2 - \lambda^2} \;;\; \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = \frac{l}{L} .$$

Следовательно, $\lambda = \dfrac{l \cdot d}{\sqrt{l^2 + d^2}} = \dfrac{3,5 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3,5^2 + 50^2}} = 7 \cdot 10^{-7}$ м = 700 нм.

4.22 На дифракционную решётку с периодом d = 2 мм падает нормально свет, пропущенный через светофильтр. Последний пропускает лучи с длинами волн от λ_1 = 500 нм до λ_2 =600 нм. Будут ли спектры различных порядков накладываться друг на друга?

Решение

Спектр k – го порядка располагается между углами φ_{k1} и φ_{k2}, для которых выполняется условие

$$d \cdot \sin\varphi_{k1} = k \cdot \lambda_1 \ ; d \cdot \sin\varphi_{k2} = k \cdot \lambda_2 \ .$$

Поэтому угловая ширина спектра k – го порядка

$$\varphi_{k2} - \varphi_{k1} \approx \sin\varphi_{k2} - \sin\varphi_{k1} = \frac{k \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}{d} = \frac{k\Delta\lambda}{d} \ .$$

Аналогично, для спектра (k+1) – го порядка:

$$\varphi_{(k+1)_2} - \varphi_{(k+1)_1} = \frac{(k+1) \cdot \Delta\lambda}{d} \ .$$

Спектры k – го и (k+1) – го порядков будут накладываться друг на друга, если

$$\varphi_{k_2} > \varphi_{(k+1)_1}, \text{т.е. при } \frac{k \cdot \lambda_2}{d} > \frac{(k+1) \cdot \lambda_1}{d}, \textit{ или } \frac{k+1}{k} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Отсюда $$k > \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{5}{6-5}, \text{ т.е. } k > 5.$$

Следовательно, спектры будут накладываться друг на друга, когда $k > 5$.

4.23 Какой наибольший порядок спектра можно наблюдать с помощью дифракционной решетки, имеющей N = 500 штрихов на 1 мм, при освещении её светом с длиной волны $\lambda = 720$ нм?

Решение

Постоянная решетки $d = \frac{1\text{мм}}{500} = 2 \cdot 10^{-6}$ м. Максимум k – го порядка можно наблюдать при условии $d \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda$, или $\sin\varphi = \frac{k \cdot \lambda}{d}$.

Поскольку $|\sin\varphi| \le 1$, то должно быть выполнено неравенство

$$\frac{k \cdot \lambda}{d} \le 1, \text{ или } k \le \frac{d}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{720 \cdot 10^{-9}} = 2{,}7.$$

Т.о. наибольший порядок спектра $k_{мах} = 2.$

4.24 Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решётку с периодом d = 2,2 мкм, если угол между направлениями на максимум 1-го и 2-го порядков $\Delta\varphi = 15^\circ$.

Решение

Условия наблюдения максимумов 1-го и 2- го порядков :

$$d \cdot \sin\varphi_1 = \lambda;\ d \cdot \sin\varphi_2 = 2 \cdot \lambda;\ \text{при этом}\ \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi.$$

Имеем: $\dfrac{\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi)}{\sin\varphi_1} = 2.$ Из этого уравнения находим:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cdot \cos\Delta\varphi}}, \text{откуда}\ \lambda = d \cdot \sin\varphi_1 = \frac{d \cdot \sin\Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cdot \cos\Delta\varphi}} = \frac{2,2 \cdot \sin 15^\circ}{\sqrt{5 - 4 \cdot \cos 15^\circ}} = 0,53\,(\text{мкм})$$

4.25 На дифракционную решётку нормально падает свет от разрядной трубки. Какова должна быть постоянная решётки, чтобы в направлении $\varphi = 41^\circ$ совпадали максимумы линий $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм? Известно, что максимальный порядок спектра данной решётки в области видимого света (400 – 700 нм) $k_{мах} = 12.$

Решение

Пусть совпадают максимумы линий λ_1 и λ_2 с порядковыми номерами k_1 и k_2. Это значит, что

$$d \cdot \sin\varphi = k_1 \cdot \lambda_1 = k_2 \cdot \lambda_2, \text{ откуда } \frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{656,3}{410,2} = 1,6 = \frac{8}{5}.$$

Значит, в пределах от k =0 до $k_{мах}$=12 имеем: $k_1 = 5$; $k_2 = 8$. А так как по условию $\lambda_1 > \lambda_2$, то, очевидно, $k_2 = 8$ – наибольший возможный порядок максимума в нашем случае – это $k_2 = 8$. Поэтому $d \cdot \sin\varphi = \mathrm{k}_2 \cdot \lambda_2$, и искомая постоянная решетки

$$d = \frac{k_2 \cdot \lambda_2}{\sin\varphi} = \frac{8 \cdot 410,2 \cdot 1^{-9}}{\sin 41^\circ} = 5 \ (\text{мкм}).$$

Задачи для самостоятельного решения

4.26_Из собирающей линзы диаметром D = 5 см с фокусным расстоянием F = 50 см вырезана полоса шириной d = 5 мм, а оставшиеся части сдвинуты вплотную. Точечный источник света расположен на расстоянии

a = 75 см от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?

[Ответ: $l < 1,125$ м.]

4.27 Дифракционную решётку, на каждый миллиметр которой нанесено

N = 75 штрихов, освещают монохроматическим светом с длиной волны

λ = 500 нм. При этом на экране видны светлые полосы на равных расстояниях друг от друга. Расстояние от центральной светлой полосы на экране до второй полосы Δx = 1,25 см. Определить расстояние L от решётки до экрана.

[Ответ: 17 см.]

4.28 На дифракционную решётку, имеющую период d = 4 мкм, нормально падает монохроматическое излучение. Определить его длину волны, если угол между спектрами второго и третьего порядков $\alpha = 2^\circ 30'$. Углы отклонения считать малыми.

[Ответ: 170 нм.]

4.29 Для излучения некоторой длины волны дифракционный максимум первого порядка наблюдается под углом $\varphi_1 = 8{,}5^\circ$. Под каким углом наблюдается последний максимум для той же длины волны?

[Ответ: $\varphi_6 = 62{,}5^\circ$]

4.30 При наблюдении дифракционной картины две соседних линии, отвечающие одной длине волны λ, видны под углами $\varphi_k = 13^\circ$ и $\varphi_{k+1} = 22^\circ$. Чему равен максимальный порядок спектра этой решётки для длин волн вблизи λ?

[Ответ: 6]

5 Элементы атомной и ядерной физики

5.1 Фотон, которому отвечает длина волны $\lambda = 10^{-10}$ м, претерпевает упругий центральный удар с первоначально покоившимся электроном и рассеивается назад. Какую скорость приобретёт при этом электрон?

Решение

Состояние системы «фотон-электрон» до и после соударения показано на рисунке 5.1

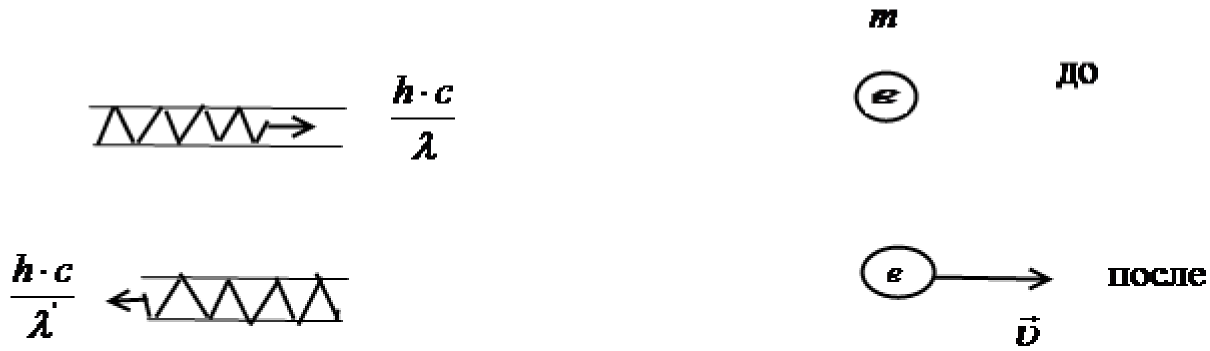

Рисунок 5.1

Пусть λ' – длина волны, отвечающая рассеянному фотону. Запишем для системы «фотон-электрон» законы сохранения импульса и энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{\lambda} = -\dfrac{h}{\lambda'} + m \cdot \upsilon \\ \dfrac{h \cdot c}{\lambda} = \dfrac{h \cdot c}{\lambda'} + \dfrac{m \cdot \upsilon^2}{2} \end{cases}.$$

Выражая из 1-го уравнения $\frac{h}{\lambda^{'}}$ и подставляя во второе, получим:

$$\frac{h}{\lambda^{'}} = m\cdot\upsilon - \frac{h}{\lambda};\ \frac{h\cdot c}{\lambda} = c\cdot\left(m\cdot\upsilon - \frac{h}{\lambda}\right) + \frac{m\cdot\upsilon^2}{2}\ .$$

Получившееся уравнение относительно υ перепишем в виде

$$m\cdot\lambda\cdot\upsilon^2 + 2\cdot m\cdot c\cdot\lambda\cdot\upsilon - 4\cdot h\cdot c = 0\ .$$

Решение этого уравнения имеет вид (отрицательный корень отбрасываем, т.к. по смыслу задачи $\upsilon > 0$):

$$\upsilon = \frac{-m\cdot c\cdot\lambda + \sqrt{(m\cdot c\cdot\lambda)^2 + 4\cdot h\cdot m\cdot c\cdot\lambda}}{m\cdot\lambda} = c\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4\cdot h}{m\cdot c\cdot\lambda}} - 1\right) =$$

$$= 3\cdot 10^8\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4\cdot 6,63\cdot 10^{-34}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-10}}} - 1\right) = 1,4\cdot 10^7\left({}^{\text{м}}\!/\!{}_{\text{с}}\right).$$

5.2 Точечный источник света мощностью *P = 1* мВт испускает свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз воспринимает свет при условии, что на сетчатку попадает $N_t = 60$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка *d* = 0,5 см.

Решение

Пусть источник *S* находится на искомом расстоянии *l* от глаза (рисунок 5.2).

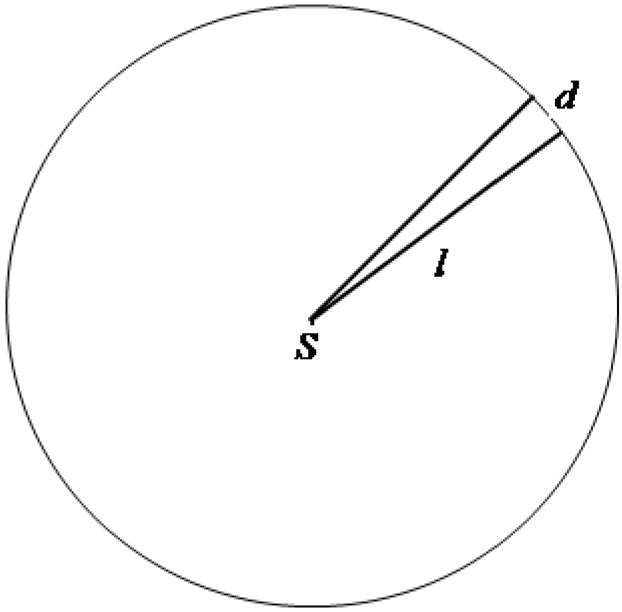

Рисунок 5.2

За 1 секунду по всем направлениям источник S испускает число фотонов, равное

$$\frac{P}{h\cdot c/\lambda}=\frac{P\cdot\lambda}{h\cdot c}\text{, где } \varepsilon_{\phi}=\frac{h\cdot c}{\lambda}\text{ – энергия одного фотона.}$$

Из этого числа на зрачок площадью $\pi\cdot d^2/4$ падает доля фотонов, равная

$$\frac{\pi\cdot d^2/4}{4\cdot\pi\cdot l^2}=\frac{d^2}{16\cdot l^2}\,.$$

Т.о., всего на сетчатку глаза за 1 с попадает число фотонов

$$N_t = \frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c} \cdot \frac{d^2}{16 \cdot l^2}.$$

Отсюда искомое расстояние

$$l = \frac{d}{4} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c \cdot N_t}} = \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 60}} = 8 \text{ (км)}.$$

5.3 Если поочерёдно освещать поверхность металла излучением с длинами волн $\lambda_1 = 350$ нм и $\lambda_1 = 540$ нм, то максимальные скорости фотоэлектронов будут отличаться в n = 2 раза. Определить работу выхода электрона из этого металла.

Решение

Запишем в двух указанных случаях уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$\begin{cases} \dfrac{h \cdot c}{\lambda_1} = A + \dfrac{m \cdot \upsilon_1^2}{2}; \\ \dfrac{h \cdot c}{\lambda_2} = A + \dfrac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} \end{cases}, \quad \text{где } \upsilon_1 = n \cdot \upsilon_2.$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} \dfrac{h\cdot c}{\lambda_1} - A = \dfrac{m\cdot \upsilon_1^2}{2} \\ \dfrac{h\cdot c}{\lambda_2} - A = \dfrac{m\cdot \upsilon_2^2}{2} \end{cases}$$

и разделим 1-ое уравнение на второе

$$\frac{\dfrac{h\cdot c}{\lambda_1} - A}{\dfrac{h\cdot c}{\lambda_2} - A} = \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^2 = n^2 \ .$$

Из полученного уравнения находим работу выхода:

$$A = \frac{h\cdot c}{n^2 - 1}\cdot\left(\frac{n^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{2^2 - 1}\left(\frac{2^2}{540\cdot 10^{-9}} - \frac{1}{350\cdot 10^{-9}}\right) =$$
$$= 3{,}02\cdot 10^{-19}(\text{Дж}) \approx 1{,}89(\text{эВ}).$$

5.4 Если освещать никелевый шар радиуса r = 1 см светом с длиной волны, вдвое меньшей красной границы фотоэффекта, то шар заряжается. Какой заряд приобрёл шар? Работа выхода электрона из никеля A = 7,74$\cdot$ 10^{-19} Дж.

Решение

Пусть в результате потери электронов за счет фотоэффекта на шаре возник положительный заряд q. При этом потенциал шара будет равен

$$\varphi = \frac{k \cdot q}{r},$$

где $$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (м/ф)}.$$

Этот потенциал будет играть роль запирающего потенциала для фотоэлектронов, т.е. $e \cdot \varphi = E_k$, где E_k – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Запишем уравнение фотоэффекта:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} = A + e \cdot \varphi \text{, или } \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{гр}} + \frac{k \cdot e \cdot q}{r}.$$

По условию, $\lambda = \lambda_{гр}/2$; поэтому

$$\frac{2 \cdot h \cdot c}{\lambda_{гр}} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{гр}} + \frac{k \cdot e \cdot q}{r},$$

искомый заряд шара

$$q = \frac{A \cdot r}{k \cdot e} = \frac{7{,}74 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 5{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ (Кл)}.$$

5.5 Протон, движущийся со скоростью $\upsilon_0 = 4{,}6 \cdot 10^4$ м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью $\upsilon = 0{,}5 \cdot \upsilon_0$, а атом переходит в возбужденное состояние. Определить длину волны света, который испускает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние.

Решение

Схема неупругого столкновения протона с атомом показана на рисунке 5.3

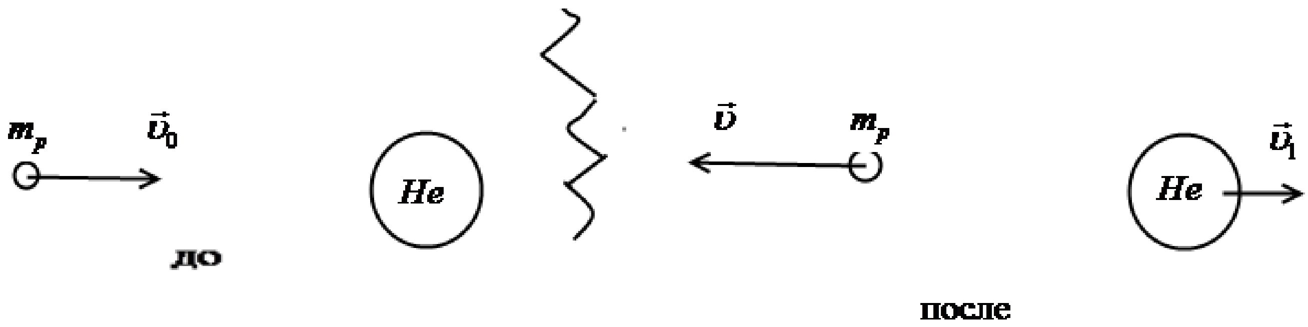

Рисунок 5.3

Скорость $\vec{\upsilon}_1$ атома гелия после столкновения с протоном найдём с помощью закона сохранения импульса, учтя, что масса атома гелия $m_{He} \approx 4 \cdot m_p$:

$$m_p \cdot \upsilon_0 = -m_p \frac{\upsilon_0}{2} + 4 \cdot m_p \cdot \upsilon_1 \text{, откуда } \upsilon_1 = \frac{3}{8} \cdot \upsilon_o .$$

Часть кинетической энергии системы, очевидно, пошла на возбуждение атома. Следовательно, энергия фотона, который будет испущен атомом при возвращении последнего в первоначальное состояние, равна

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{m_p \cdot \upsilon_0^2}{2} - \left\{ \frac{m_p}{2} \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{2} \right)^2 + \frac{4 \cdot m_p}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \upsilon_0}{8} \right)^2 \right\} = \frac{3}{32} \cdot m_p \upsilon_0^2 .$$

Отсюда искомая длина волны излучения

$$\lambda = \frac{32 \cdot h \cdot c}{3 \cdot m_p \cdot \upsilon_0^2} = \frac{32 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot (4{,}6 \cdot 10^4)^2} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ (м).}$$

5.6 Неподвижное атомное ядро массой M распалось на две равные части, с массами m каждая. Найти скорости образовавшихся частей.

Решение

Самопроизвольный распад ядра возможен лишь при условии $M > 2m$. Скорости образовавшихся осколков можно считать нерелятивистскими, т.е. $\upsilon \ll c$.

С учётом сказанного запишем закон сохранения энергии при распаде ядра:

$$\Delta E_0 = (M - 2 \cdot m) \cdot c^2 = 2 \cdot \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}$$

(из соображения симметрии можно считать, что оба осколка обладают одинаковыми по величине скоростями υ). Отсюда искомая скорость осколка

$$\upsilon = c \cdot \sqrt{\frac{M}{m} - 2}\ .$$

5.7 Свободное неподвижное ядро иридия Ir с энергией возбуждения $E_в$ = 129 кэВ перешло в основное состояние, испустив γ - квант. Вычислить относительное изменение энергии γ - кванта, возникающее из-за отдачи ядра.

Решение

Выразим массу ядра иридия в энергетических единицах:

$$M({}^{192}Ir) = 192 \text{ а.е.м.} = 178847 \text{ МэВ}.$$

Если бы не было отдачи ядра, то γ - квант унёс бы всю энергию возбуждения: $E_\gamma = E_я$. На самом же деле, согласно закону сохранения импульса, $p_я = p_\gamma$, где $p_я$ – импульс отдачи ядра: $p_я = \sqrt{2 \cdot M \cdot T}$, где T – кинетическая энергия ядра после испускания γ – кванта (энергия отдачи). Имеем: $\sqrt{2 \cdot M \cdot T} = \frac{E_\gamma}{c}$, откуда энергия отдачи

$$T = \frac{E_\gamma^2}{2 \cdot M \cdot c^2} = \frac{E_в}{2 \cdot M \cdot c^2}\ .$$

На эту величину уменьшится энергия γ – кванта по сравнению с $E_в$:

$$\Delta E_\gamma = T = \frac{E_в^2}{2 \cdot M \cdot c^2} .$$

Следовательно, искомое относительное изменение энергии γ – кванта вследствие отдачи ядра

$$\frac{\Delta E_\gamma}{E_в} = \frac{E_в}{2 \cdot M \cdot c^2} = \frac{129 \cdot 10^3}{2 \cdot 178847 \cdot 10^6} = 3{,}6 \cdot 10^{-7}.$$

5.8 Неподвижное ядро полония ${}^{210}_{84}Po$ испустило α – частицу. Какую долю полной энергии, освобождаемой в ходе распада, составляет кинетическая энергия образовавшегося ядра? Найти эту энергию.

Решение

Уравнение α – распада полония имеет вид: ${}^{210}_{84}Po \to {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$.

Выпишем из справочника массы ядер, участвующих в реакции:

$$M\left({}^{210}_{84}Po\right) = 209{,}936778 \ а.е.м.$$
$$M\left({}^{206}_{82}Pb\right) = 205{,}929436 \ а.е.м$$
$$M\left({}^{4}_{2}He\right) = 4{,}001506 \ а.е.м$$

Определим энергию реакции:

$$Q = M\left({}^{210}_{84}Po\right) - M\left({}^{206}_{82}Pb\right) - M\left({}^{4}_{2}He\right) = 0{,}005812\ \textit{а.е.м} = 5{,}4138\ \textit{МэВ}$$

Для продуктов реакции можем записать законы сохранения импульса и энергии, введя обозначения: $M\left({}^{206}_{82}Pb\right) = m_1$; $M\left({}^{4}_{2}He\right) = m_2$. Имеем

$$\begin{cases} m_1 \cdot \upsilon_1 = m_2 \cdot \upsilon_2; \\ Q = \dfrac{m_1 \cdot \upsilon^2{}_1}{2} + \dfrac{m_2 \cdot \upsilon^2{}_2}{2} \equiv T_1 + T_2 \end{cases}.$$

Из этих уравнений находим:

$$\upsilon_2 = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1}{m_2}\ ;\ Q = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Отсюда искомое отношение

$$\frac{T_1}{Q} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M\left({}^{4}_{2}He\right)}{M\left({}^{4}_{2}He\right) + M\left({}^{206}_{82}Pb\right)} = 5{,}4138 \cdot 0{,}019 = 0{,}103\ \text{(МэВ)}.$$

5.9 Нейтрон испытывает упругое соударение с α – частицей и затем, отразившись, упруго соударяется с другой α – частицей. Обе α – частицы до соударения были неподвижны. Считая оба соударения центральными, определить, во сколько раз изменится энергия нейтрона после двух соударений.

Решение

Пусть P_0 – начальный импульс нейтрона, P_1 – его импульс после 1-го соударения, P_α – импульс α - частицы, приобретённый ею в результате соударения с нейтроном. Схема соударения показана на рисунке 5.4

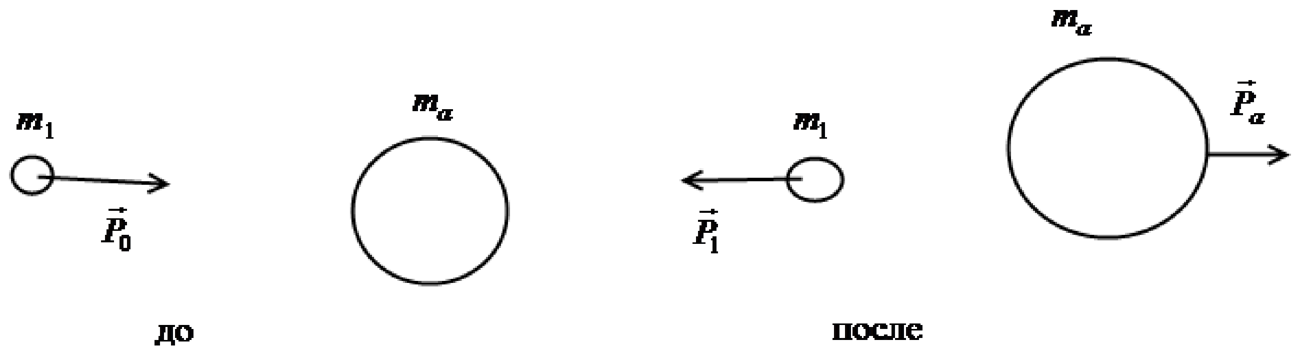

Рисунок 5.4

Запишем законы сохранения импульса (в проекциях на горизонтальную ось) и энергии с учётом того факта, что $M_\alpha = 4 \cdot m_n$:

$$\begin{cases} P_0 = -P_1 + P_\alpha \\ \dfrac{P_0^2}{2 \cdot m_n} = \dfrac{P_1^2}{2 \cdot m_n} + \dfrac{P_\alpha^2}{2 \cdot 4 \cdot m_n} \end{cases} \text{, или } \begin{cases} P_\alpha = P_0 + P_1 \\ \dfrac{1}{4} \cdot P_\alpha^2 = P_0^2 - P_1^2 \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение этой системы на первое; получим:

$$\begin{cases} P_\alpha = P_0 + P_1 \\ P_\alpha = 4 \cdot (P_0 - P_1) \end{cases}.$$

Приравнивая правые части обоих уравнений, найдём:

$$P_1 = \frac{3}{5} \cdot P_0$$

Анализ 2-го соударения проводится аналогично, следует лишь заменить

$$P_0 \to P_1,\ P_1 \to P_2:\ P_2 = \frac{3}{5} \cdot P_1 = \frac{9}{25} \cdot P_0$$

Учитывая, что кинетическая энергия $T = \dfrac{P^2}{2 \cdot m}$, находим окончательно

$$\frac{T_0}{T_2} = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{25}{9}\right)^2 \cong 7{,}7\ .$$

5.10 При попадании протона в неподвижное ядро атома ${}^7_3Li$ образуется два одинаковых ядра, разлетающихся симметрично по отношению к направлению движения протона. Определить отношение кинетической энергии протона к суммарной кинетической энергии продуктов реакции, если угол разлёта последних $\varphi = 170^\circ$.Найти также кинетическую энергию налетающего протона.

Решение

Запишем уравнение реакции: ${}_1^1H + {}_3^7Li \to {}_2^4He + {}_2^4He$.

Схема взаимодействия протона с ядром лития показана на рисунке 5.5

Из соображения симметрии ясно, что $|\vec{\upsilon}_1| = |\vec{\upsilon}_2|$. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_p \cdot \vec{\upsilon} = m_\alpha \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_\alpha \cdot \vec{\upsilon}_2$$

и спроецируем его на ось *x*: $m_p \cdot \upsilon = 2 \cdot m_\alpha \cdot \upsilon_1 \cdot \cos \varphi/2$, откуда

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_1} = \frac{2 \cdot m_\alpha}{m_p} \cdot \cos \varphi/2 .$$

Кинетическая энергия налетающего протона $T_p = \dfrac{m_p \cdot \upsilon^2}{2}$;

Кинетическая энергия продуктов реакции $T_{пр} = 2 \cdot T_\alpha = m_\alpha \cdot \upsilon_1^2$.

Следовательно, искомое отношение

$$\eta = \frac{T_p}{T_{пр}} = \frac{m_p \cdot \upsilon^2}{2 \cdot m_\alpha \cdot \upsilon_1^2} = \frac{2 \cdot m_\alpha \cdot \cos^2 \varphi/2}{m_p} .$$

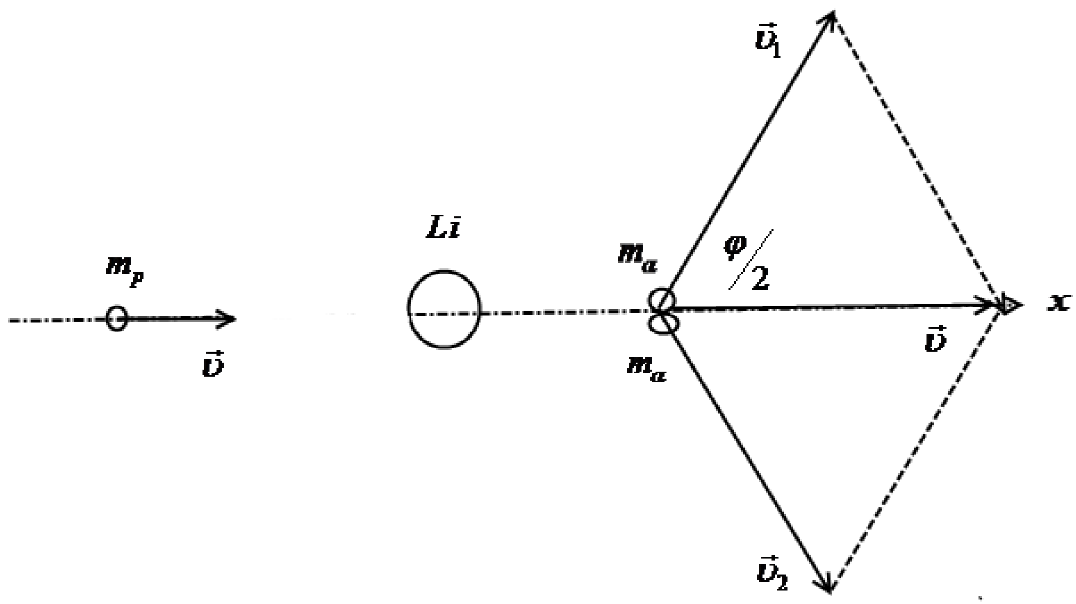

Рисунок 5.5

Выпишем массы участников реакции: $m_p = 1,007276$ а.е.м.;

$M\left({}^7_3Li\right) = 7,014358$ а.е.м. ; $m_\alpha = 4,001506$ а.е.м.

Подставляя эти данные в формулу для η, находим :

$$\eta = \frac{2 \cdot 4,001506 \cdot \cos^2 85^\circ}{1,007276} = 0,06 .$$

Чтобы найти кинетическую энергию налетающего протона, запишем для рассматриваемой реакции закон сохранения энергии (с учётом энергии покоя частиц):

$$T_p + (m_p + M_{Li}) \cdot c^2 = 2 \cdot T_\alpha + 2 \cdot m_\alpha \cdot c^2 \ ,$$

откуда энергия реакции

$$Q=(m_p+M_{Li}-2\cdot m_\alpha)\cdot c^2=1{,}007276+7{,}014358-2\cdot 4{,}001506=$$
$$=0{,}018622\,\text{а.е.м.}=17\text{б}346\,\text{МэВ}.$$

С учетом энергии реакции Q закон сохранения энергии можно переписать в виде $T_p+Q=2\cdot T_\alpha$, откуда $T_p=2\cdot T_\alpha-Q$.

Имея в виду, что $\eta=\dfrac{T_p}{2\cdot T_\alpha}$, получаем уравнение для кинетической энергии налетающего протона:

$$T_p=\frac{T_p}{\eta}-Q\,.$$

Решая его, находим:

$$T_p=\frac{Q\cdot\eta}{1-\eta}=\frac{17{,}346\cdot 0{,}06}{1-0{,}06}=1{,}11\ (\text{МэВ}).$$

Задачи для самостоятельного решения

5.11 В результате столкновения фотона и протона, летевших по взаимно перпендикулярным направлениям, протон остановился, а длина волны фотона изменилась на 1%. Определить первоначальный импульс фотона, считая скорость протона нерелятивистской.

[Ответ : $p=4{,}98\cdot 10^{-19}$ Н $\cdot$ с]

5.12 Рубиновый лазер даёт импульс монохроматического излучения с длиной волны $\lambda = 6943 A^{\circ}$.Определить концентрацию фотонов в пучке, если мощность излучения лазера P = 2 Вт, а площадь сечения луча S = 4 см^2 .

[Ответ: n = 5.8 $\cdot 10^{13}$ м$^{-3}$]

5.13 Уединённый цинковый шарик облучают ультрафиолетовым светом с длиной волны λ = 250 нм. До какого максимального потенциала может зарядиться шарик? Работа выхода электрона из цинка A = 9,93$\cdot$10^{-19} Дж.

[Ответ: $\varphi_{\text{мах}} = 1{,}123$ В]

5.14 Неподвижное возбуждённое ядро изотопа калия ${}^{40}_{19}K$ (масса ядра данного изотопа M = 39,951959 а.е.м.) испускает γ – квант с энергией

$E_{\gamma} =$ 9,4 кэВ. Определить кинетическую энергию ядра после испускания кванта.

[Ответ: Т = 1,19$\cdot$10^{-3} эВ]

5.15_Найти скорость продуктов реакции ${}^{1}_{0}n + {}^{10}_{5}B \to {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He$, возникающей при захвате медленных нейтронов первоначально покоившимися ядрами бора. Массы участвующих в реакции частиц:
$M\left({}^{10}_{5}B\right) = 10{,}0102$ а.е.м.; $m_n = 1{,}008665$ а.е.м.;
$M\left({}^{7}_{3}Li\right) = 7{,}014358$ а.е.м.; $M\left({}^{4}_{2}He\right) = 4{,}001506$ а.е.м.

[Ответ:_$\upsilon\left({}^{4}_{2}He\right) = 9{,}27 \cdot 10^{6}$ м/с; $\upsilon\left({}^{7}_{3}Li\right) = 5{,}29 \cdot 10^{6}$ м/с].

Список использованных источников

1 Турчина, Н.В. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы / Н.В. Турчина, Л.И. Рудакова, О.И. Суров и др. – М.: Дрофа, 2000. – 672 с. ISBN 5-7107-2775-X