

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

Л.А. Суяргулова

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО МАТЕМАТИКЕ (ЧАСТЬ 4)

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 06.03.01 Биология

Оренбург
2018

УДК 378.147:519.8(076.5)

ББК 22.19я7+74.48я7

С79

Рецензент – доктор технических наук, профессор А.И. Сердюк

Суяргулова Л.А.

С79 Рабочая тетрадь по математике (Часть 4): методические указания / Л.А. Суяргулова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 30 с.

Рабочая тетрадь (часть 2) включает методический материал для организации практических занятий и самостоятельной подготовки студентов.

Методические указания предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 06.03.01 Биология.

УДК 378.147:519.8(076.5)

ББК 22.19я7+74.48я7

©Суяргулова Л.А., 2018

© ОГУ, 2018

Содержание

Введение	4
1 Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	
1.1 Дифференциальные уравнения. Задача Коши.....	
1.2 Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка . Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения Бернулли.....	
1.3 Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Линейные однородные и неоднородные уравнения 2-го порядка.....	
1.4 Применение дифференциальных уравнений в биологии.....	
2. Ряды.....	
2.1 Числовые ряды. Знакопеременные ряды.....	
2.2 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.....	
2.3 Степенные ряды. Свойства. Теорема Абеля.....	
Список литературы.....	28
Приложение А.....	Ошибка! Закладка не определена.

Введение

Изучение дифференциальных уравнений занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения в биологии. Исследование природных процессов и изучение закономерностей приводят к построению математических моделей фундаментом которых являются дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения представленные в данной рабочей тетради находят достаточно широкое применение в моделях биологической динамики. Первой содержательной математической моделью, описывающей биологические сообщества (если не считать исследований Фибоначчи популяции кроликов, приведших его к знаменитым числам, носящим его имя, а также исследований Мальтуса, приведших впоследствии к известному уравнению $x' = ax$ ($a > 0$) мальтузианского роста) была модель Лотки — Вольтерры. Она описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Применение дифференциальных уравнений в медицине мы продемонстрируем на примере простейшей математической модели эпидемии.

В рабочей тетради представлен методический материал для организации самостоятельной работы студентов на занятиях и дома, связанный с применением математических методов в изучении биологических явлений.

Преподаватель, своевременно проверяя рабочую тетрадь, имеет возможность выявить пробелы в знаниях студентов и организовать индивидуальную работу со студентами, у которых возникли затруднения при выполнении заданий по темам раздела «Интегральное исчисление» дисциплины «Математика».

Каждая тема включает:

– контрольные вопросы, в виде тематического диктанта; студенты, чтобы ответить на них, могут работать с конспектами лекций, учебниками и учебными пособиями по математике;

– определения основных понятий темы;

– выполнение ключевых заданий темы по предложенному алгоритму;

- задания для самостоятельной работы различной степени сложности;
- творческие задания; студенты могут предложить примеры биологических задач, при решении которых можно использовать данную тему или историю развития темы.

Данная рабочая тетрадь рекомендована для организации самостоятельной работы бакалавров факультета химии-биологического факультета очной формы обучения в ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет» по направлению подготовки 06.03.01 Биология, с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических биологических задач; прививает умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развивает логическое мышление и повышает общий уровень математической культуры.

Методические указания написаны в соответствии с:

- Федеральным законом от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 19.12.2013 г. № 1367 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры»;
- приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 07.08.2014 г. № 944 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 06.03.01 Биология»;
- уставом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет».

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1 Дифференциальные уравнения. Задача Коши

Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения

2. Дайте определение решения дифференциального уравнения

3. Сформулируйте основную задачу теории дифференциальных уравнений

4. Сформулируйте теорему Коши

5. Запишите общее решение дифференциального уравнения

6. Запишите частное решение дифференциального уравнения

7. Какую кривую называют интегральной?

8. Дайте определение общего интеграла дифференциального уравнения

2. Практические задания по теме:

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

а) $x + xy^2 + \sqrt{2 - x^2} \square$ _____

б) $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx =$ _____

в) $x\sqrt{1+y^2} + y'y\sqrt{1+x^2} = 0$ _____

г) $3(x^2 y + y) dy + \sqrt{1+y^2} dx = 0$ _____

д) $(xy^2 + y^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$ _____

е) $x^2 y dy = \sqrt{1+y^2} dx - y dy$ _____

ж) $e^y(x^2 + 1)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$ _____

Задание 2 Решить уравнения:

1. $xydx + (x+1)dy = 0$

2. $(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0$

3. $2x^2yy' + y^2 = 2$

4. $(x^2+1)yy' + xe^{-y^2} = 0$

Задание 3. Решить задачу Коши:

1. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0$

2. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5$

3. $y' \operatorname{tg} x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Задание 4. Самостоятельная работа

1. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$

2. $xy' - y = x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$

3. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

2. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5$

3. $y' \operatorname{tg} x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

1.2 Определенный интеграл и его свойства.

Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$?

2. Что называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$?

3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

4. Перечислите основные свойства определенного интеграла;

5. Запишите формулу Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

2. Практические задания по теме

Задание 1. Вычислить определенный интеграл:

1.1. $\int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx =$ _____

1.2. $\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} \cdot dx =$

Вспользуемся заменой переменной: пусть _____ . Тогда

_____ . Найдем пределы интегрирования по

переменной t ; если $x = 0$, то _____ если $x = \ln 2$, то _____

Искомый интеграл примет вид:

$$1.3. \int_{0.5}^0 \ln(1-x^2) dx$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

пусть

3. Задания для самостоятельной работы: вычислить определенный интеграл

$$1. \int_0^3 (3\sqrt{2x} - 4\sqrt[3]{x}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}, \quad \int_0^{0.75} \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx, \quad \int_0^{2\pi} x \cos x dx ;$$

$$2. \int_0^4 (4\sqrt{2x} - 3\sqrt{x}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx, \quad \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}, \quad \int_1^e x \ln x dx$$

$$3. \int (8\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{2x}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 x \cos x dx, \quad \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2dx}{\cos^2 2x}, \quad \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2} dx}{1+2x^2}, \quad \int_0^{\ln 2} x e^x dx;$$

4 Задание. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

Рассмотрим пример: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2 + x + 4 \text{ и } y = -x + 1$$

1. Выполним чертеж

2. Найдем точки пересечения линий $y = -x^2 + x + 4$ и $y = -x + 1$

3. По формуле площади фигуры получим:

5. Задания для самостоятельной работы: найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1. y = x^2 + 6x + 7;$$

$$y = -x + 1$$

$$2. y = -x^2 - 6x - 5;$$

$$y = -x - 5$$

$$3. y = x^2 - 4x + 1;$$

$$y = x + 1$$

$$4. y = x^2 + 4x - 1;$$

$$y = -x - 1$$

$$5. y = x^2 - 6x + 7;$$

$$y = -x + 7$$

$$6. y = -x^2 + 6x - 5;$$

$$y = -x + 1$$

1.3 Несобственные интегралы 1 и 2 рода.

Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Что называется несобственным интегралом 1 рода?

2. Какой несобственный интеграл называется сходящимся (расходящимся)?

3. Запишите формулу Ньютона – Лейбница

4. В чем заключается геометрический смысл несобственного интеграла?

5. Какой интеграл называется абсолютно сходящимся?

6. Несобственным интегралом второго рода называется...

7. Перечислите признаки сходимости несобственных интегралов:

2. Практические задания по теме:

Задание 1.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Решение.

а) По определению имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

б) $\int_{-\infty}^0 \frac{x+1}{1+x^2} dx$

в) $\int_0^{+\infty} (x+1) \sin x dx$

г) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$

д) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$

Задание 2.

Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ в зависимости от n .

Пример 3.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}} =$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2+3x^2}{\sqrt[3]{x^8}} dx =$$

$$\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}}} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 16} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} =$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3} =$$

2 Кратные и криволинейные интегралы

2.1 Двойной интеграл. Геометрическая интерпретация. Свойства

Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется двойным?

2. Что такое область интегрирования на плоскости?

3. Перечислите свойства двойного интеграла:

а) _____

б) _____

в) _____

4. Сформулируйте определение интегральной суммы функции $f(x;y)$:

5. В чем заключается геометрический смысл двойного интеграла?

6. Правильной областью первого типа назовем...

7. Правильной областью второго типа назовем...

2. Практические задания по теме:

Задание 1. Вычислить двойной интеграл:

$$\int_1^2 dy \int_1^2 xy dx =$$

$$\int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{\sin y}^{\cos y} (x+y) dx =$$

$$\int_1^3 dx \int_x^{x^3} (x^2 + xy) dy =$$

$$\iint_D e^x ds \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 1$$

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \frac{3}{2}$$

Задание 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy =$$

$$\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x; y) dy =$$

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(y; z) dz =$$

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2+x}}^0 f(x; y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x; y) dx =$$

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^0 f(x; y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^0 f(x; y) dy =$$

$$\int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^2} f(x; y) dx =$$

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^0 f(x; y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x; y) dy =$$

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x; y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x; y) dy =$$

2.2 Площадь поверхности. Механические и физические приложения двойных интегралов

Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу площади плоской фигуры

2. Запишите формулу объема тела

3. Запишите формулу площади поверхности

4. Запишите формулу площади и объема в полярных координатах

2. Практические задания по теме

Задание 1. Найти площадь области R , ограниченной гиперболами

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad y = \frac{2a^2}{x} \quad (a > 0) \quad x = 1, \quad x = 2$$

Задание 2. Найти объем тела в первом октанте, ограниченного плоскостями
 $y = 0$, $z = 0$, $z = x$, $z + x = 4$

Задание 3. Описать тело, объем которого определяется интегралом

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy$$

Задание 4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
 $z = xy$, $x + y = a$, $z = 0$

2.3 Криволинейные интегралы. Формула Грина. Формула Остроградского. Формула Стокса.

. Тематический диктант:

1. Контрольные вопросы:

1. Интегральной суммой называется...

2. Криволинейный интеграл первого рода это...

3. Как вычислить криволинейный интеграл первого рода?

4. Запишите формулу длины дуги

5. Криволинейным интегралом второго рода назовем...

6. При нахождении, какого интеграла необходимо направление интегрирования?

2. Практические задания по теме:

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл:

$\int_L y dl$ от т. $A(0;0)$ до т. $B(1;\sqrt{2})$ если $y^2 = 2x$ кривая L задана уравнением

Задание 2 Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L xy dl$ по дуге окружности $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, если $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

Задание 3 Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L \frac{y-1}{x} dx + \frac{x+1}{y} dy$, L – Отрезок прямой от $A(1;1)$ до $B(3;2)$

Задания 4 (для самостоятельной работы)

1. $\int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy$, L- дуга кривой

$y = \ln x$, $M(1;0)$ до $N(e;1)$

2. Проверить, существует ли интеграл по данной кривой, и вычислить его, если это возможно

$\int_L \frac{y^2 + 1}{x - 2} dx + \frac{x}{y + 2} dy$, по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от точки M (1;1) до начала координат

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L x^2 y dy - y^2 x dx \quad \text{по кривой} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Список литературы

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч.: пособие / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.- 7-е изд. – М. : Оникс : Мир и Образование, 2006/2012 – ISBN 978-5-94666-566-7.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. – М. : НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 479 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=469720>.
3. Зубова, И.К. Основы математического анализа (модуль «Функции нескольких переменных») [Электронный ресурс] : самоучитель / И. К. Зубова и [др.]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Оренбург. гос. ун-т».- Электрон. текстовые дан. (1 файл: Kb). – М. : ГОУ ОГУ, 2011. – Adobe Acrobat Reader 5.0
http://artlib.osu.ru/web/book/metod_all/2838_20110928.pdf