

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

А. А. Гаврилов, Н. А. Морозов

# **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА**

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Оренбург  
2020

УДК 531.3 (075.8)  
ББК 22.213 я73  
Г 12

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Е. В. Дырдина

**Гаврилов, А. А.**  
Г 12 Аналитическая динамика: учебное пособие / А. А. Гаврилов, Н. А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2020. – 100 с. ISBN 978-5-7410-2529-1

В учебном пособии рассмотрены принципы аналитической динамики. Производится определение усилий в стержнях фермы и реакций опор рамы с помощью принципа возможных перемещений. Изучается применение принципа Даламбера и общего уравнения динамики при решении задач динамики.

Учебное пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем» и может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 531.3 (075.8)  
ББК 22.213 я73

ISBN 978-5-7410-2529-1

© Гаврилов А. А.,  
Морозов Н. А., 2020  
© ОГУ, 2020

# Содержание

Введение.....	5
1 Принцип возможных перемещений .....	6
1.1 Краткие теоретические сведения.....	6
1.2 Применение принципа возможных перемещений к определению усилий в стержнях фермы.....	7
1.2.1 Рекомендации к решению задач .....	7
1.2.2 Постановка задачи и исходные данные .....	8
1.2.3 Пример выполнения задачи.....	11
1.3 Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор рамы .....	30
1.3.1 Рекомендации к решению задач .....	30
1.3.2 Постановка задачи и исходные данные .....	31
1.2.3 Пример выполнения задачи.....	38
1.4 Вопросы для самоконтроля .....	47
2 Принцип Даламбера .....	48
2.1 Краткие теоретические сведения.....	48
2.2 Применение принципа Даламбера к решению задач .....	51
2.2.1 Рекомендации к решению задач .....	51
2.2.2 Постановка задачи и исходные данные .....	51
2.2.3 Пример выполнения задачи.....	54
2.2.4 Решение системы уравнений при помощи пакета MathCad .....	64
2.2.5 Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения .....	67
2.3 Вопросы для самоконтроля .....	71
3 Применение принципа Даламбера-Лагранжа .....	72
3.1 Краткие теоретические сведения.....	72
3.2 Применение принципа Даламбера-Лагранжа к решению задач .....	73
3.2.1 Рекомендации к решению задач .....	73

3.2.2 Постановка задачи и исходные данные .....	73
3.2.3 Пример выполнения задачи.....	76
3.2.4 Пример для случая наличия проскальзывания.....	84
3.3 Применение принципа Даламбера-Лагранжа к решению задач с двумя степенями свободы.....	87
3.3.1 Рекомендации к решению задач .....	87
3.3.2 Постановка задачи и исходные данные .....	88
3.3.3 Пример выполнения задачи.....	90
3.4 Вопросы для самоконтроля .....	99
Список использованных источников .....	100

## Введение

В аналитической динамике рассматриваются общие принципы механики, производится вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, а также исследуются эти уравнения и методы их интегрирования. Общие принципы механики подразделяют вариационные и невариационные.

Невариационные принципы механики непосредственно устанавливают закономерности движения, совершаемого системой под действием приложенных к ней сил. К таким принципам можно отнести принцип Даламбера. Использование принципа Даламбера позволяет решать различные задачи динамики, используя принципы и подходы статики, что обычно существенно упрощает решение. Кроме того данный принцип, который еще называют принципом кинестатики, часто используется для решения прикладных задач, что не требует глубоких знаний теорем динамики.

Преимущество вариационных принципов состоит в том, что из них сразу получаются уравнения движения или равновесия соответствующей механической системы, не содержащие неизвестных реакций связей. Достигается это за счет того, что действие связей учитывается не заменой их реакциями, а рассмотрением тех возможных перемещений (возможных скоростей или ускорений), которые могут иметь точки системы при наличии данных связей. Одним из вариационных принципов является принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).

В первой главе данного пособия рассматривается принцип возможных перемещений и его применение к определению усилий в стержнях фермы и реакций опор рамы.

В второй главе рассматривается принцип Даламбера и его применение при решении задач динамики.

# 1 Принцип возможных перемещений

## 1.1 Краткие теоретические сведения

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с голономными, идеальными, стационарными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю [2, 3].

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Возможные работы силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta A(\bar{F}) = F \cdot \delta S \cdot \cos(\alpha),$$

$$\delta A(M) = \pm M \cdot \delta \varphi,$$

где  $F$  – сила, приложенная к системе, Н;

$\delta S$  – возможное перемещение точки приложения силы, м;

$\alpha$  – угол между силой и возможным перемещением, рад;

$M$  – момент силы или пары сил, Н·м;

$\delta \varphi$  – возможный угол поворота той части системы, на которую действует момент, рад.

В том случае, когда зависимости между возможными перемещениями точек системы выражаются с помощью кинематического анализа, вместо уравнения возможных работ можно использовать уравнение возможных мощностей [4]:

$$\sum \delta N_k^a = 0.$$

Возможные мощности силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta N(\bar{F}) = F \cdot \delta v \cdot \cos(\alpha),$$

$$\delta N(M) = \pm M \cdot \delta \omega,$$

где  $\delta v$  – возможная скорость точки приложения силы, м/с;

$\alpha$  – угол между силой и возможной скоростью точки приложения силы, рад;

$\delta \omega$  – возможная угловая скорость той части системы, на которую действует момент, рад/с.

Знак «+» в формулах определения возможных работы и мощности момента ставится, когда момент способствует возможному движению, знак «-» – когда момент препятствует возможному движению.

## **1.2 Применение принципа возможных перемещений к определению усилий в стержнях фермы**

### **1.2.1 Рекомендации к решению задач**

Для решения задачи по определению усилий в стержнях фермы с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется следующий алгоритм:

1 Отбросить стержень, усилие в котором необходимо определить, заменив его двумя усилиями, приложенными в узлах.

2 В полученном механизме рассмотреть возможные движения звеньев, изобразить возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек. Примечание: необходимо начинать со звена, закрепленного на неподвижном шарнире, так как это звено может совершать только вращательное

движение; для определения вида возможного движения другого звена необходимо определить возможное перемещение (возможную скорость) общей точки звеньев и найти положение мгновенного центра вращения (мгновенного центра скоростей) этого звена.

3 Составить уравнение возможных работ (возможных мощностей) активных сил.

4 Выразить возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек через одно возможное перемещение (одну возможную скорость).

5 Из уравнения возможных работ (возможных мощностей) выразить неизвестное усилие.

6 Проверить полученное усилие с помощью методов статики.

### 1.2.2 Постановка задачи и исходные данные

Дана плоская ферма (рисунки 1.1 – 1. 9), находящаяся под действием двух постоянных сил  $P_1$  и  $P_2$ . Используя принцип возможных перемещений, определить усилия в трех стержнях фермы: стержне 1, стержне 2 и стержне 3. Проверить правильность определения данных усилий с помощью методов статики: метода вырезания узлов или метода Риттера.

Размеры фермы указаны на рисунках 1.1 –1. 9, необходимые для расчета данные представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Вариант	$P_1, кН$	$P_2, кН$	$a, м$	$h, м$
1	2	3	4	5
1	8	3	4	3
2	9	2	3	5
3	1	8	4	3
4	3	4	2	1



Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5
5	5	2	3	5
6	9	8	4	2
7	3	4	5	3
8	8	7	2	4
9	6	3	3	3
10	2	5	2	5
11	6	4	1	1
12	8	3	1	3
13	6	9	2	5
14	2	7	4	1
15	1	3	3	1
16	2	5	2	4
17	8	3	5	4
18	9	2	3	2
19	1	8	4	5
20	3	4	3	4
21	5	2	2	1
22	9	8	3	4
23	3	4	2	5
24	8	7	3	2
25	6	3	3	1
26	3	5	4	2
27	8	2	2	3
28	1	6	1	3
29	5	3	5	5
30	9	2	2	3
31	3	7	3	2
32	5	3	4	5

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5
33	4	7	3	4
34	8	1	2	1
35	6	3	3	4
36	3	5	2	5
37	8	2	3	2
38	1	6	3	2
39	5	3	4	5
40	9	2	5	5
41	3	7	4	3
42	5	3	3	5
43	4	7	4	3
44	8	8	2	1
45	5	2	2	5
46	9	8	3	2
47	3	4	4	3
48	8	7	2	1
49	6	3	3	5
50	3	5	4	2
51	8	2	5	3
52	1	6	2	4
53	5	3	3	3
54	9	2	2	5
55	3	7	1	1
56	5	3	1	3
57	4	7	2	5
58	8	1	4	1
59	5	2	3	1
60	9	8	3	4

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5
61	8	3	2	1
62	9	2	3	4
63	1	8	2	5
64	3	4	3	2
65	5	2	3	1
66	9	8	4	2
67	3	4	2	3
68	8	7	1	3
69	6	3	5	5
70	2	5	2	3
71	6	4	3	2
72	8	5	3	4

### 1.2.3 Пример выполнения задачи

На плоскую ферму, изображенную на рисунке 1.10, закрепленную на двух опорах и имеющую размеры  $a=2$  м,  $h=1$  м, действуют две постоянные силы  $P_1=3$  кН и  $P_2=4$  кН, приложенные в узлах.

Необходимо определить усилия в стержне 1, стержне 2 и стержне 3, а также произвести проверку значений данных усилий с помощью методов статики.

Определим усилие в стержне 1. Отбросим стержень 1, заменив его двумя усилиями  $S_1$  и  $S'_1$ , приложенными в узлах (рисунок 1.11).

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром  $C$ : стержня  $BC$  и нижней части фермы (назовем ее звеном  $AC$ ).

Так как звено  $AC$  закреплено в точке  $A$  на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки  $A$  с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_1$ . Тогда возможная скорость точки  $C$  будет  $\delta v_C$ .

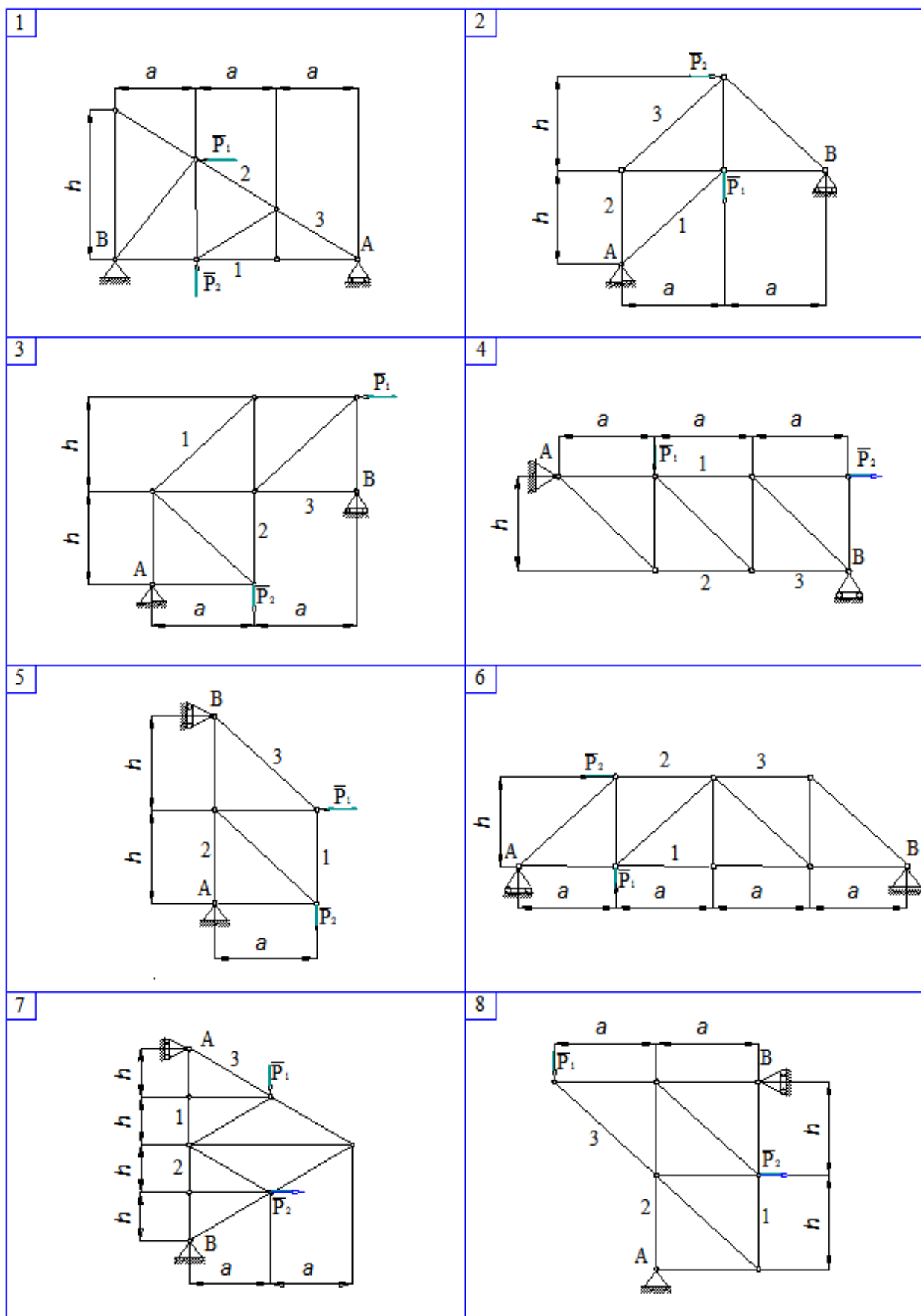


Рисунок 1.1 – Схемы ферм к вариантам 1 – 8

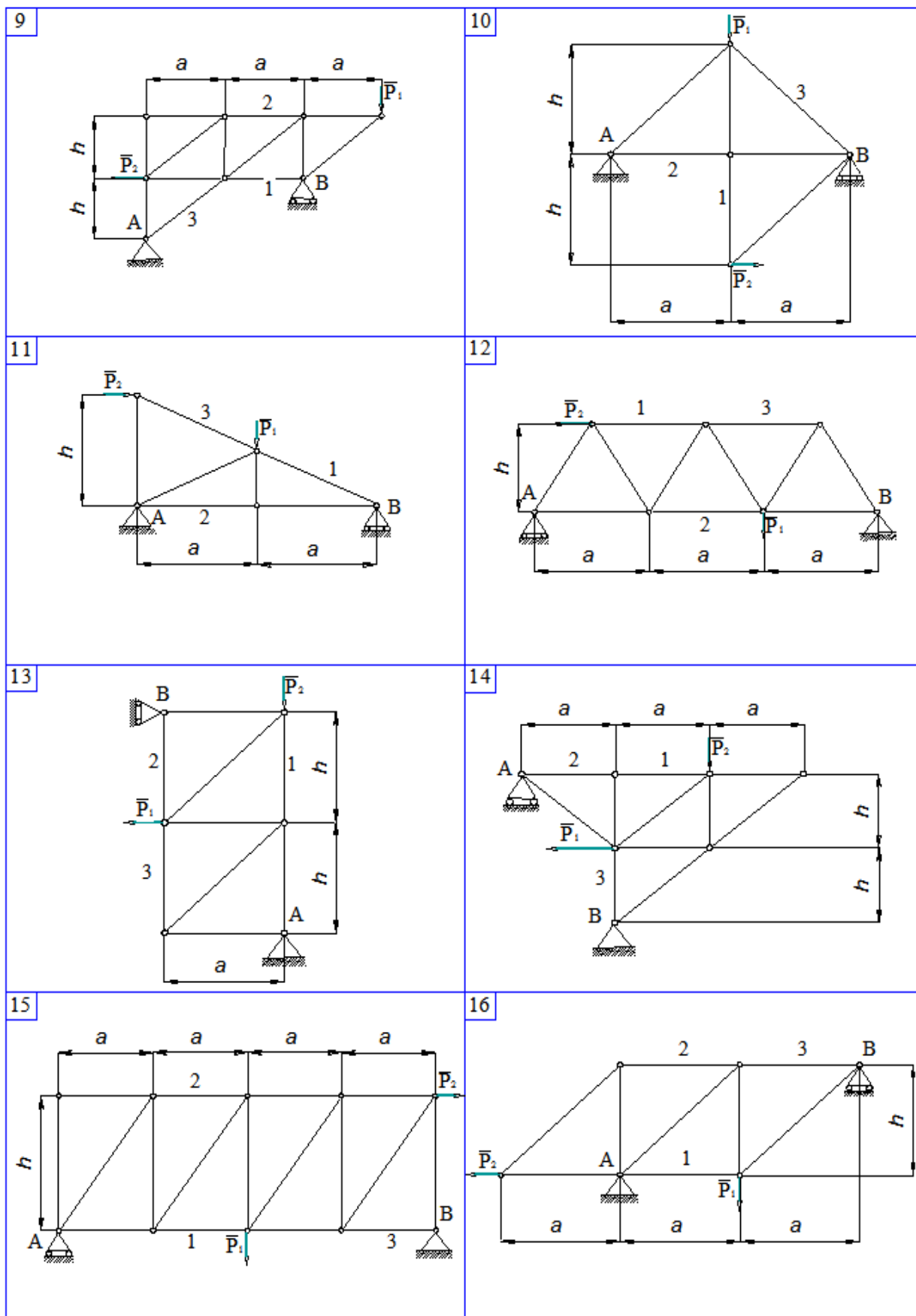


Рисунок 1.2 – Схемы ферм к вариантам 9 – 16

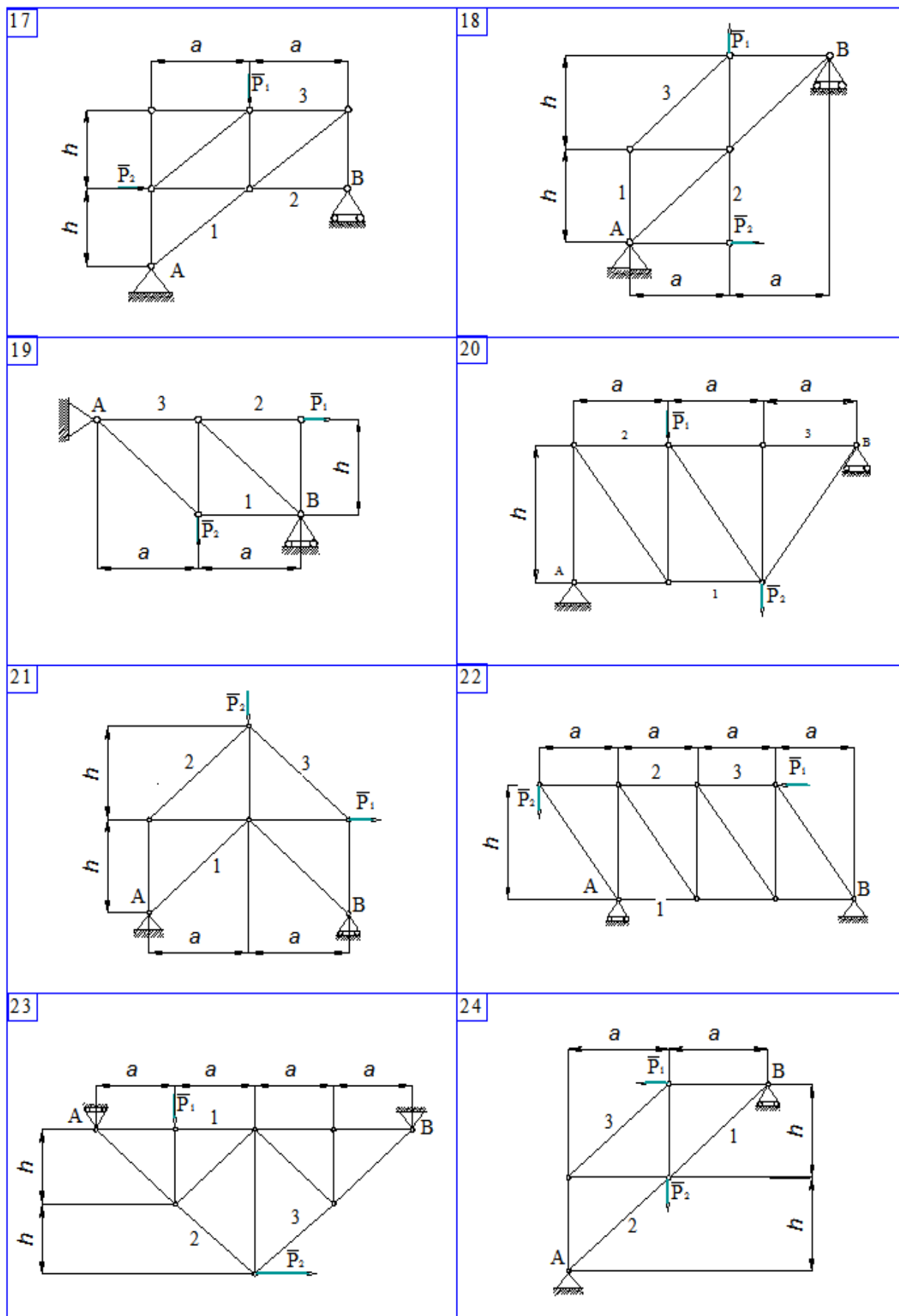


Рисунок 1.3 – Схемы ферм к вариантам 17 – 24

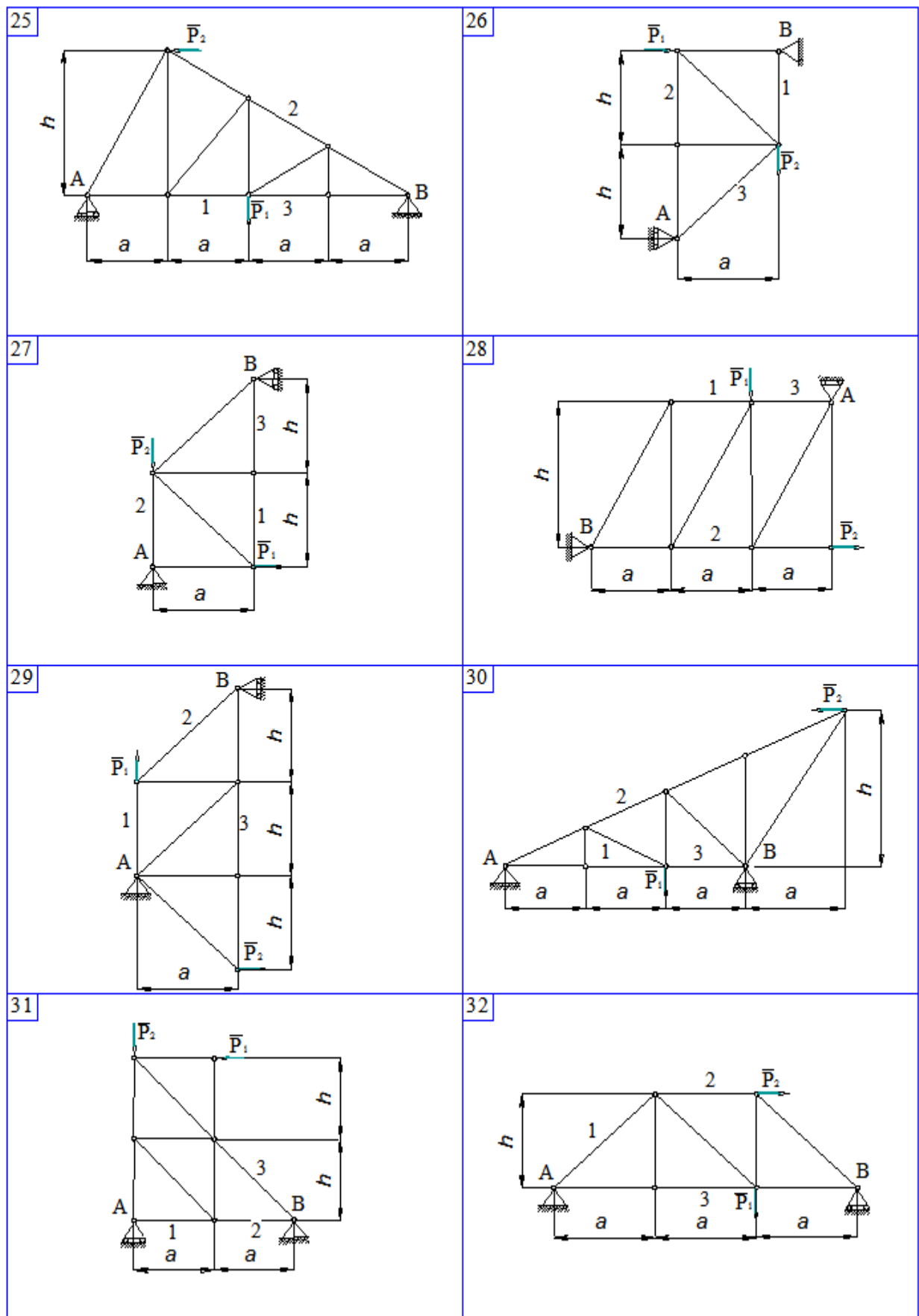


Рисунок 1.4 – Схемы ферм к вариантам 25 – 32

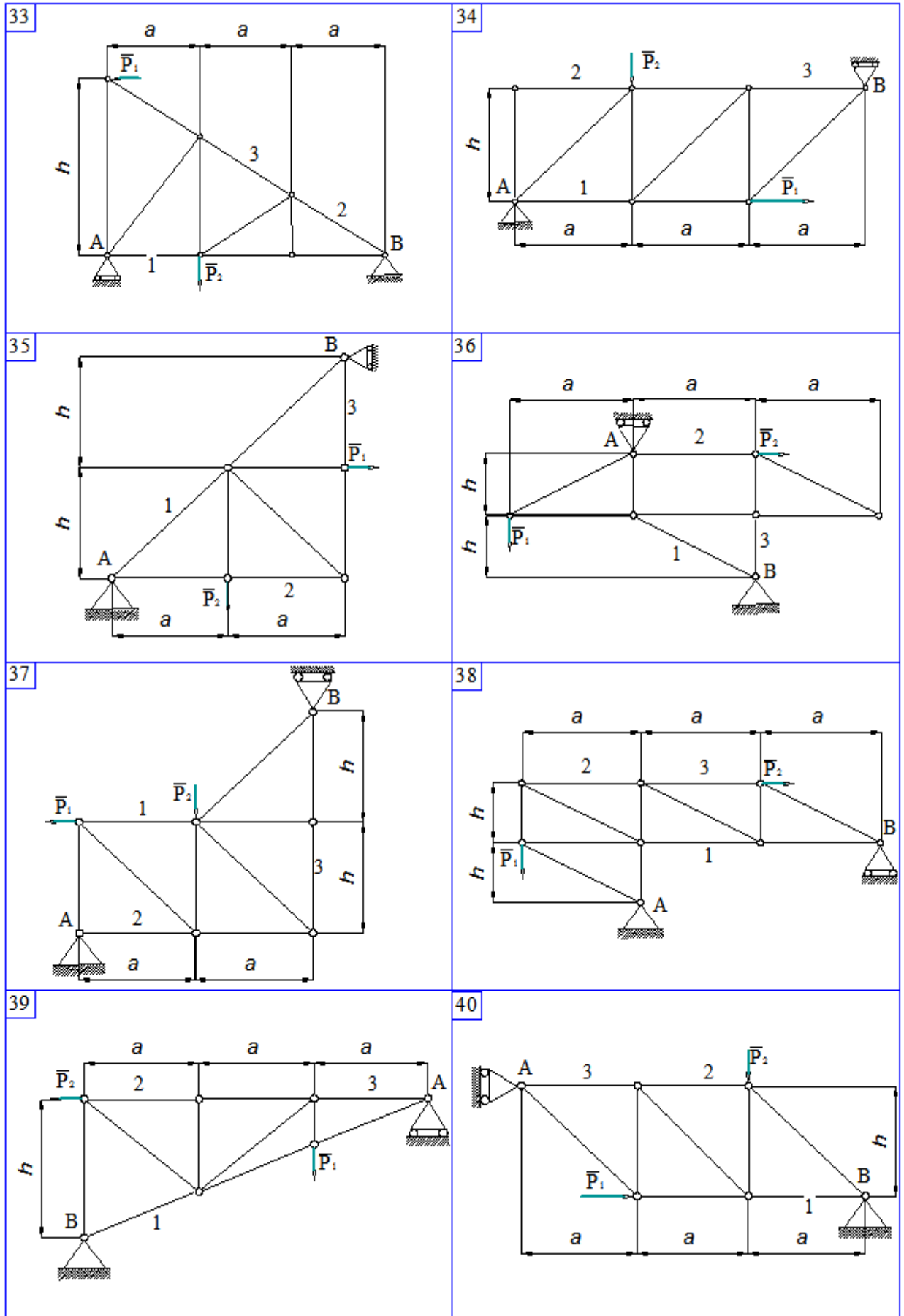


Рисунок 1.5 – Схемы ферм к вариантам 33 – 40



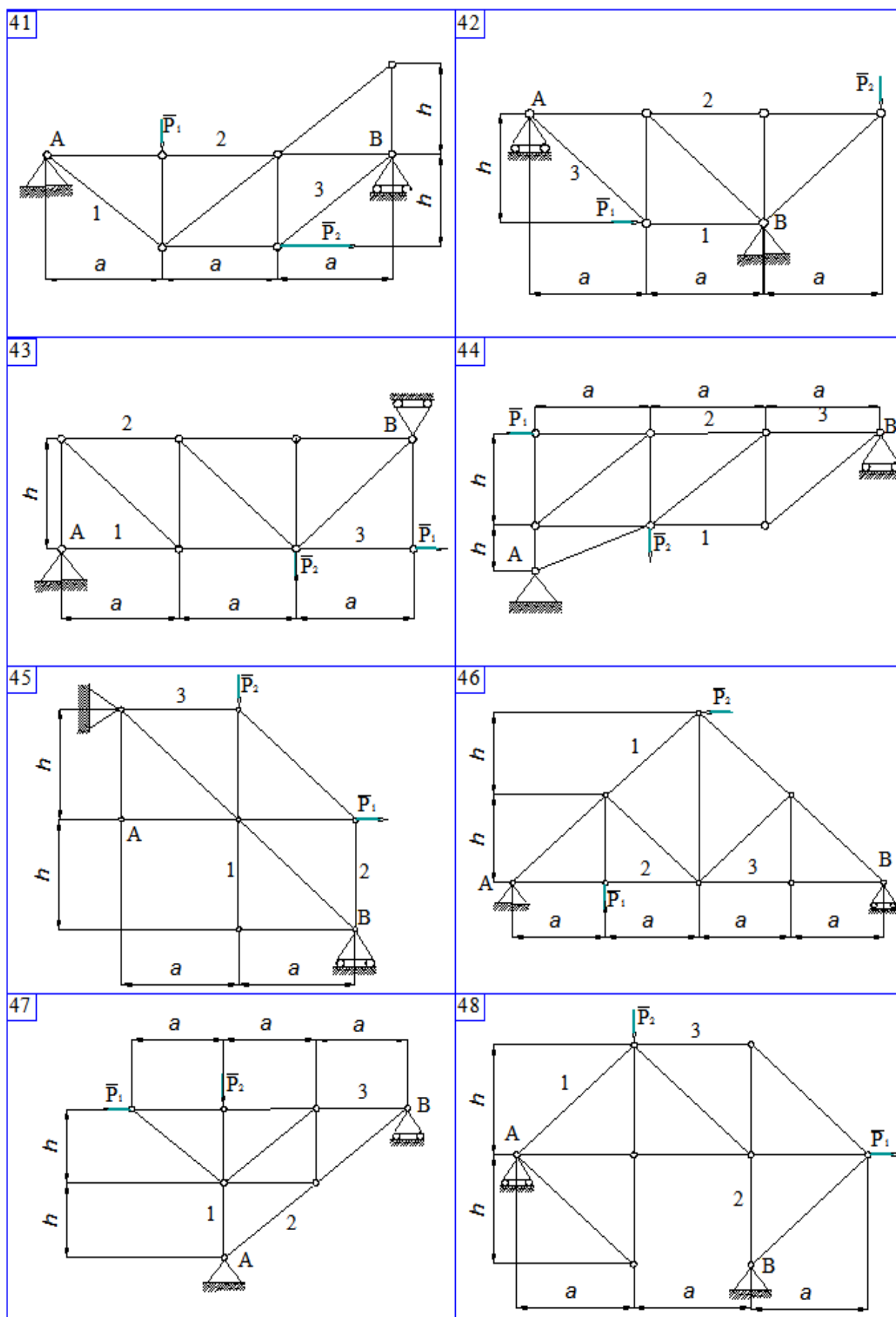


Рисунок 1.6 – Схемы ферм к вариантам 41 – 48

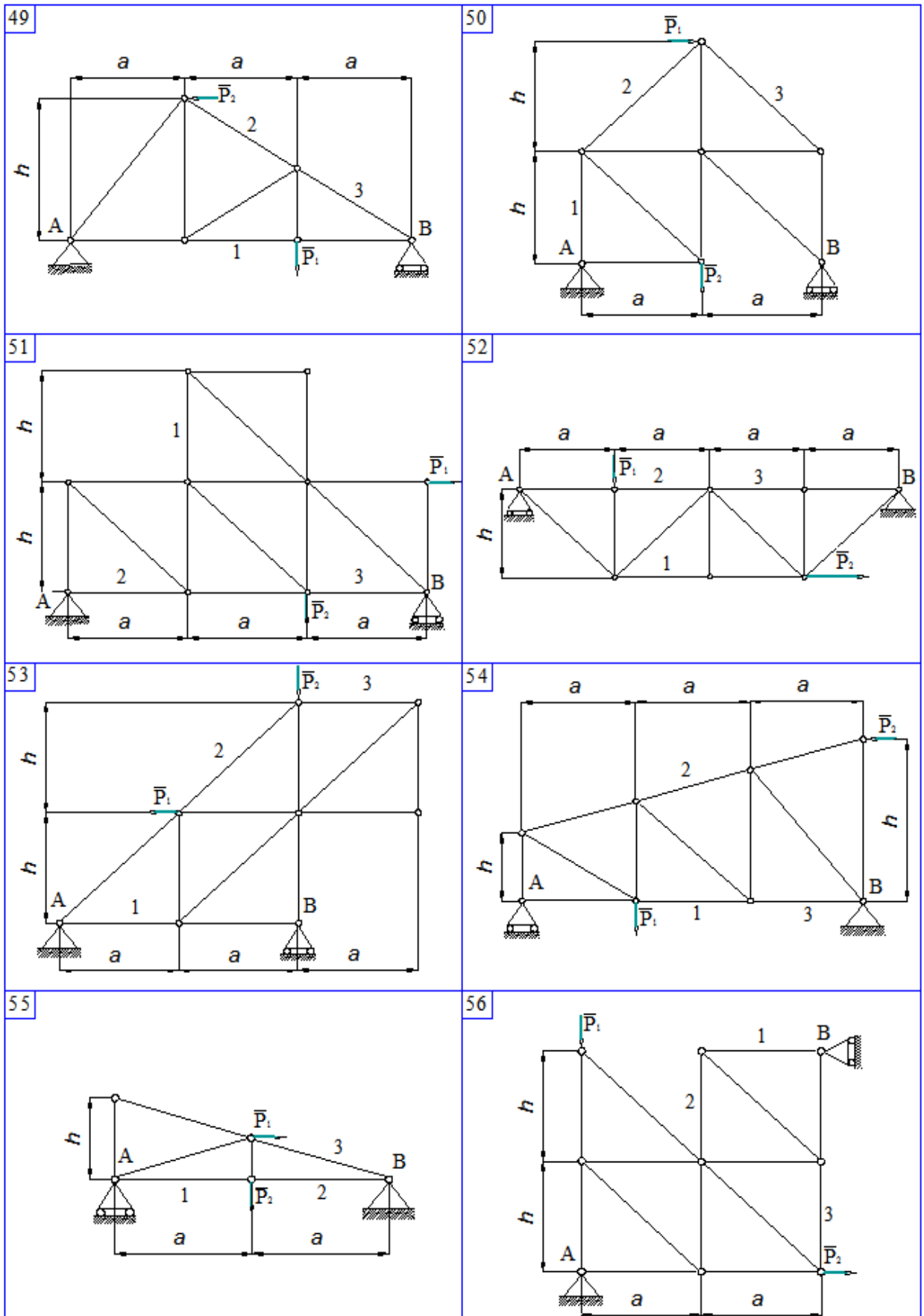


Рисунок 1.7 – Схемы ферм к вариантам 49 – 56

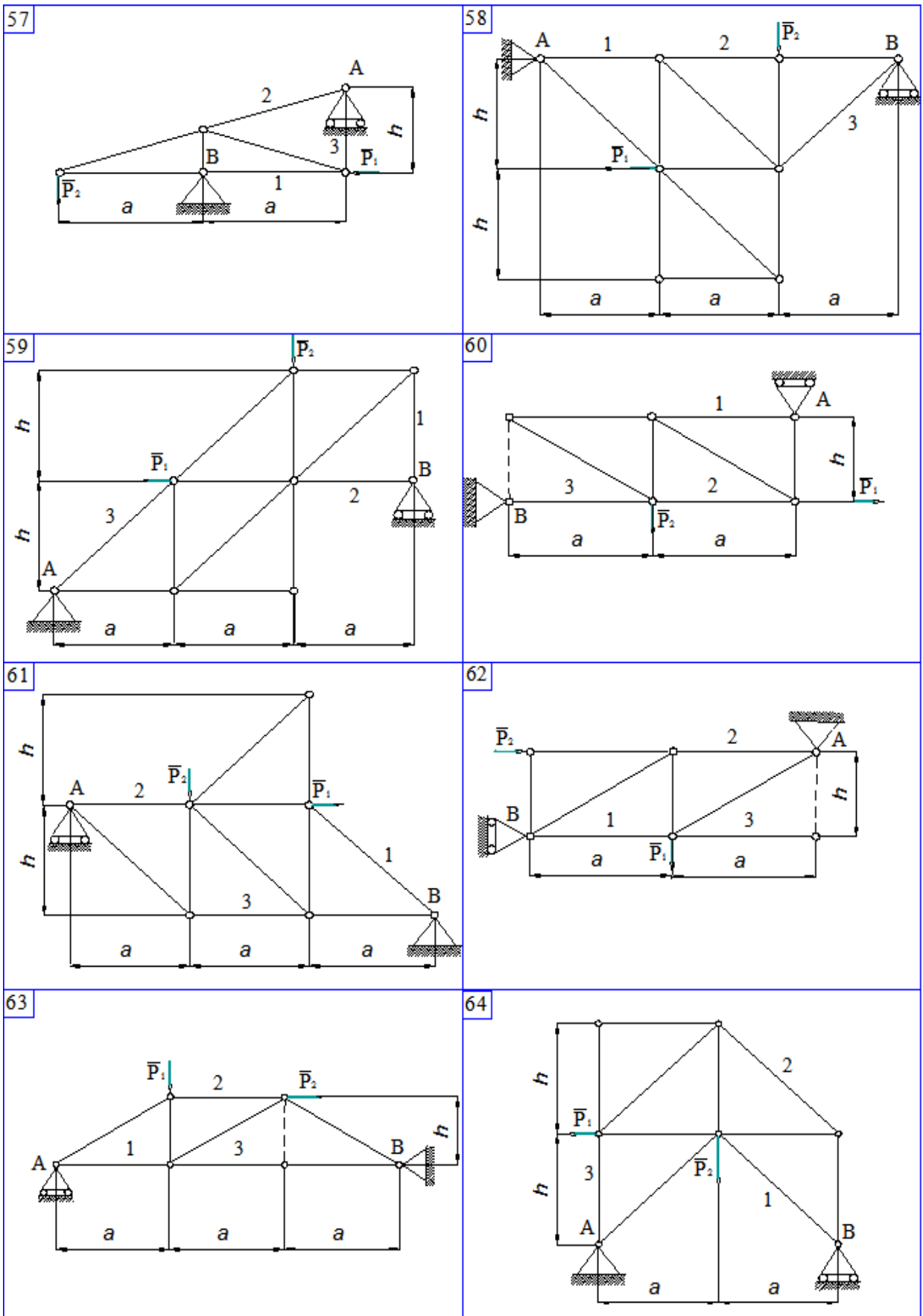


Рисунок 1.8 – Схемы ферм к вариантам 57 – 64

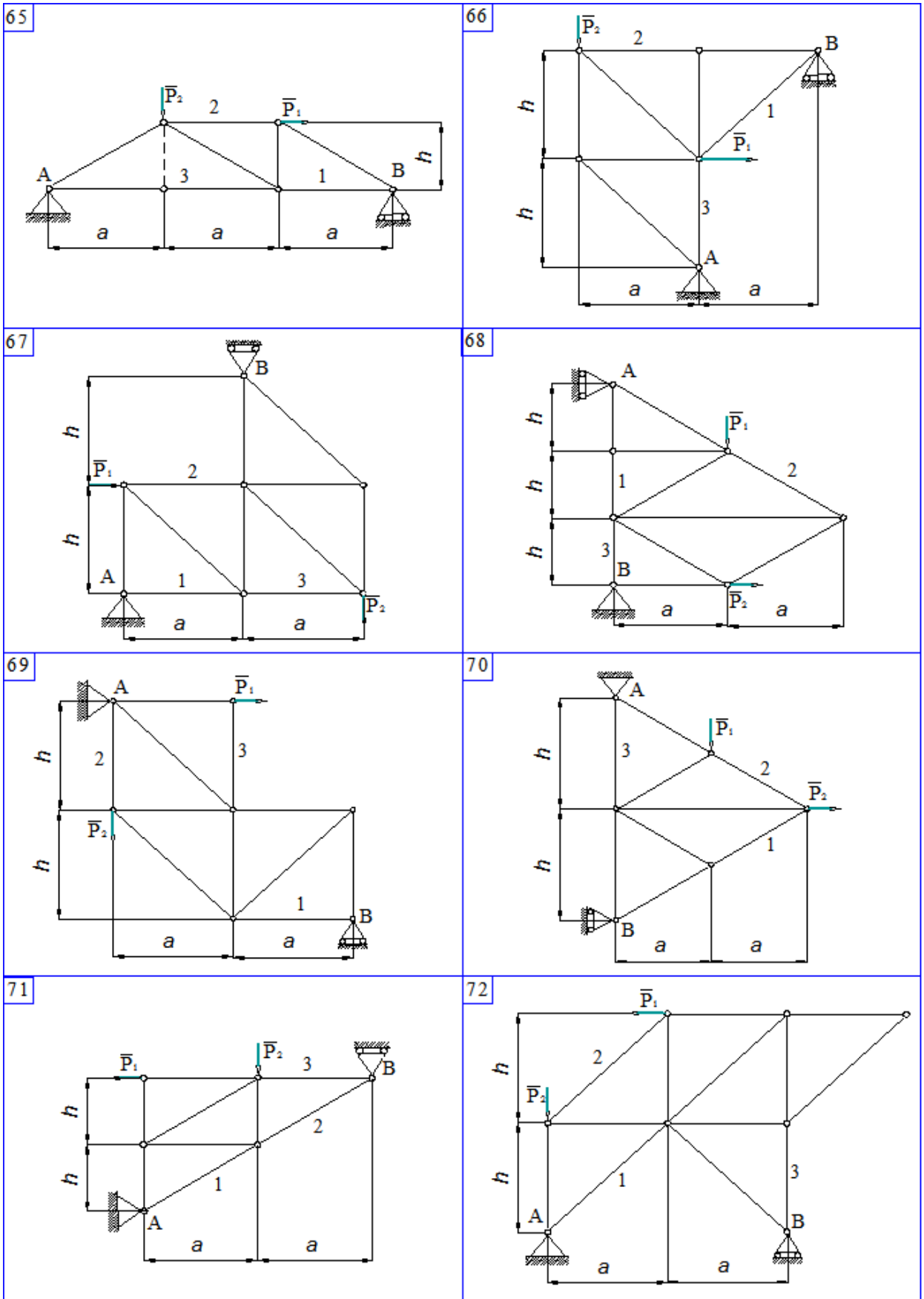


Рисунок 1.9 – Схемы ферм к вариантам 65 – 72

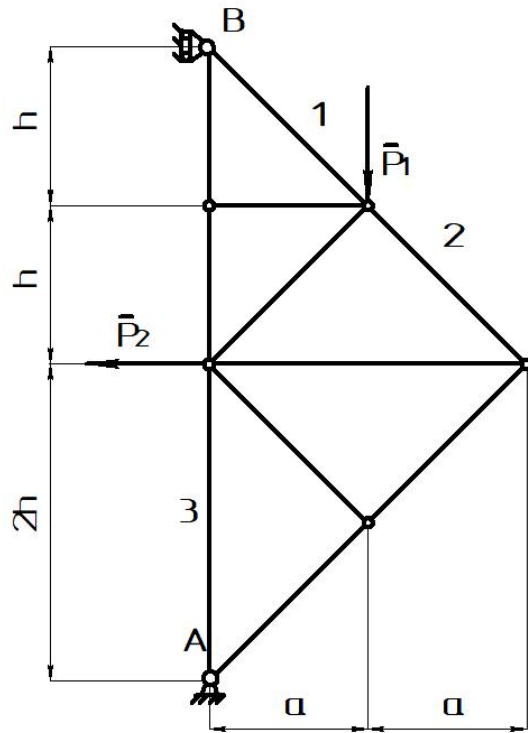


Рисунок 1.10 – Плоская ферма

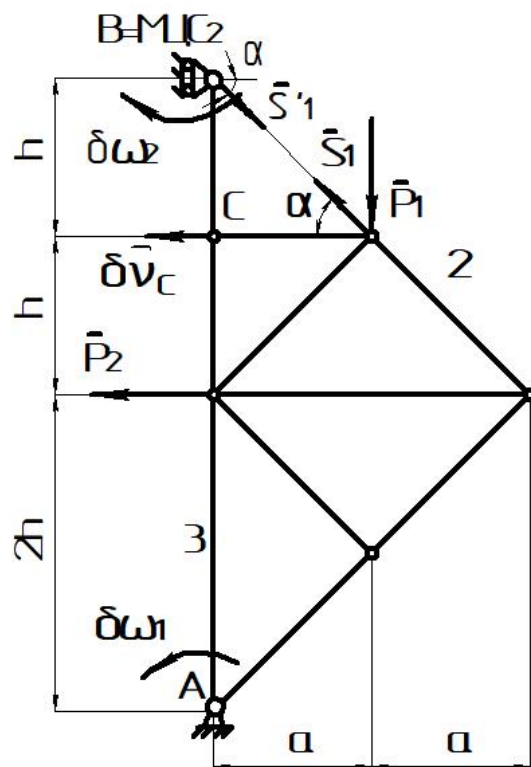


Рисунок 1.11 – Возможные перемещения частей фермы при отсутствии стержня 1

Звено  $BC$  может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек  $C$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке  $B$ , следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$\delta\omega_1 \cdot P_1 \cdot 2h - \delta\omega_1 \cdot P_1 \cdot a + \delta\omega_1 \cdot S_1 \cdot \cos\alpha \cdot 3h + \delta\omega_1 \cdot S_1 \cdot \sin\alpha \cdot a = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на  $\delta\omega_1$ :

$$P_1 \cdot 2h - P_1 \cdot a + S_1 \cdot \cos\alpha \cdot 3h + S_1 \cdot \sin\alpha \cdot a = 0.$$

С учетом того, что  $\operatorname{tg}\alpha = h/a$ , найдем усилие в стержне 1.

$$S_1 = \frac{P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2h}{\cos\alpha \cdot 3h + \sin\alpha \cdot a},$$

$$S_1 = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 2}{0,894 \cdot 3 + 0,447 \cdot 2} = -0,56 \text{ кН}.$$

Знак «-» указывает на то, что стержень сжат.

Определим усилие в стержне 2. Отбросим стержень 2, заменив его двумя усилиями  $S_2$  и  $S_2'$ , приложенными в узлах (рисунок 1.12).

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром  $D$ : верхней части фермы (назовем ее звеном  $BD$ ) и нижней части фермы (назовем ее звеном  $AD$ ).

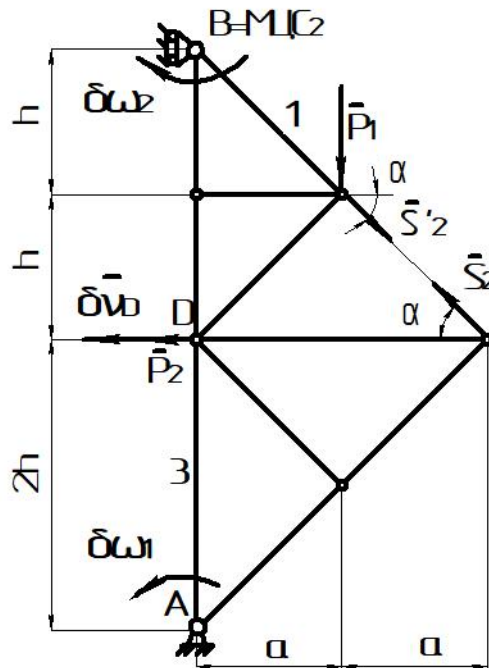


Рисунок 1.12 – Возможные перемещения частей фермы при отсутствии стержня 2

Так как звено  $AD$  закреплено в точке  $A$  на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки  $A$  с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_1$ . Тогда возможная скорость точки  $D$  будет  $\delta v_D$ .

Звено  $BD$  может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек  $D$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке  $B$ , следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$P_2 \cdot 2h \cdot \delta\omega_1 + S_2 \cdot \cos\alpha \cdot 2h \cdot \delta\omega_1 + S_2 \cdot \sin\alpha \cdot 2a \cdot \delta\omega_1 + P_1 \cdot a \cdot \delta\omega_2 + S_2' \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot \delta\omega_2 - S_2' \cdot \cos\alpha \cdot h \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Найдем соотношение между возможными угловыми скоростями. Возможная скорость точки  $D$  при вращении со звеном  $AD$ :

$$\delta v_D = \delta \omega_1 \cdot 2h.$$

Возможная скорость точки  $D$  при вращении со звеном  $BD$ :

$$\delta v_D = \delta \omega_2 \cdot 2h.$$

Следовательно:  $\delta \omega_1 = \delta \omega_2$ .

Разделим каждый член уравнения на  $\delta \omega_1$ :

$$P_2 \cdot 2h + S_2 \cdot \cos \alpha \cdot 2h + S_2 \cdot \sin \alpha \cdot 2a + P_1 \cdot a + S_2' \cdot \sin \alpha \cdot a - S_2' \cdot \cos \alpha \cdot h = 0.$$

С учетом того, что  $S_2 = S_2'$ , найдем усилие в стержне 2.

$$S_2 = -\frac{P_2 \cdot 2h + P_1 \cdot a}{\cos \alpha \cdot h + \sin \alpha \cdot 3a},$$

$$S_2 = -\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{0,894 \cdot 1 + 0,447 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{14}{3,576} = -3,91 \text{ кН}.$$

Определим усилие в стержне 3. Отбросим стержень 3, заменив его двумя усилиями  $S_3$  и  $S_3'$ , приложенными в узлах (рисунок 1.13).

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром  $G$ : стержня  $AG$  и верхней части фермы (назовем ее звеном  $BG$ ).

Так как звено  $AG$  закреплено в точке  $A$  на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки  $A$  с возможной угловой скоростью  $\delta \omega_1$ . Тогда возможная скорость точки  $G$  будет  $\delta v_G$ .



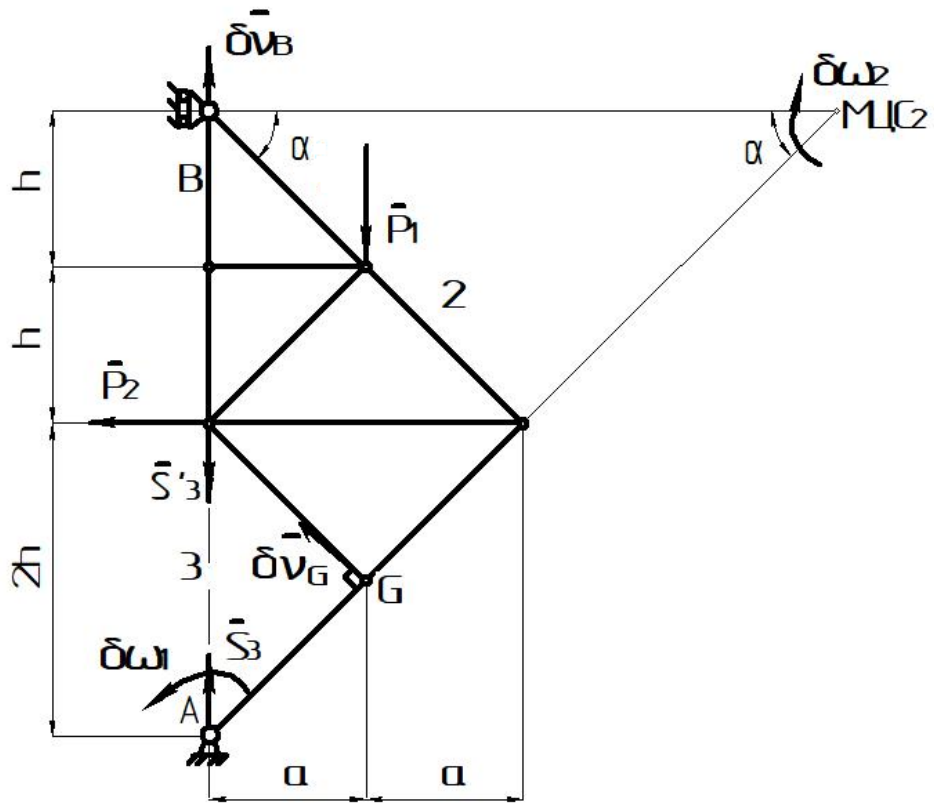


Рисунок 1.13 – Возможные перемещения частей фермы при отсутствии стержня 3

Звено  $BG$  может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек  $G$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке, являющейся МЦС звена  $BG$ . Мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$-S_3' \cdot 4a \cdot \delta\omega_2 - P_1 \cdot 3a \cdot \delta\omega_2 + P_2 \cdot 2h \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на  $\delta\omega_2$ :

$$-S_3' \cdot 4a - P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot 2h = 0.$$

С учетом того, что  $S_3 = S'_3$ , найдем усилие в стержне 3.

$$S_3 = \frac{-P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot 2}{4 \cdot a},$$

$$S_3 = \frac{-3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 2} = -1,25 \text{ кН}.$$

Для проверки значений усилий в стержнях фермы воспользуемся методами статики: методом вырезания узлов и методом Риттера. Сечения представлены на рисунке 1.14.

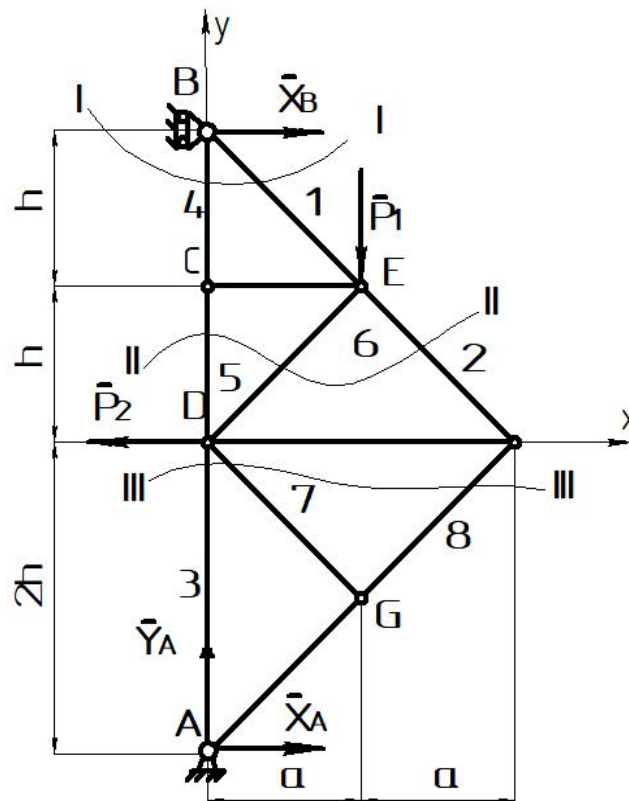


Рисунок 1.14 – Сечения фермы

Определим реакции опор фермы. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_A - P_2 + x_B = 0, \\ y_A - P_1 = 0, \\ -x_B \cdot 4h - P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2h = 0. \end{cases}$$

Откуда:

$$y_A = P_1 = 3 \text{ кН},$$

$$x_B = \frac{-P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2h}{4h} = \frac{-3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0,5 \text{ кН},$$

$$x_A = P_2 - x_B = 4 - 0,5 = 3,5 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим уравнение:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0,$$

$$x_A \cdot 4h - P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2h = 0,$$

$$3,5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Реакции определены верно.

Для определения усилия в стержне 1 с помощью сечения I – I вырежем узел В (рисунок 1.15).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

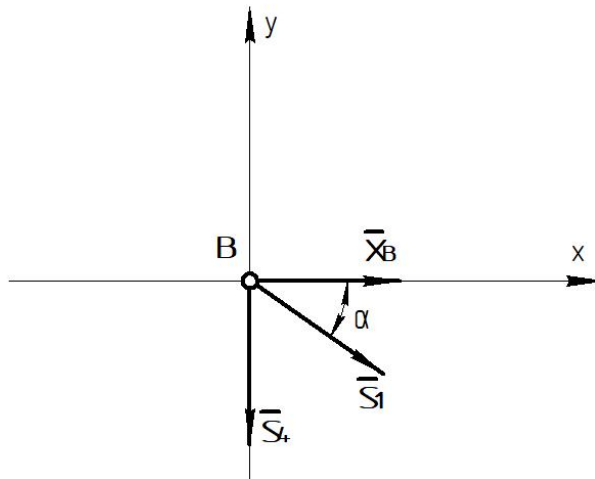


Рисунок 1.15 – Узел В

$$S_1 \cdot \cos \alpha + x_B = 0.$$

Откуда:

$$S_1 = -\frac{x_B}{\cos \alpha} = -\frac{0,5}{0,894} = -0,56 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в стержне 2 разрежем ферму с помощью сечения II – II и рассмотрим верхнюю отсеченную часть (рисунок 1.16).

Определим усилие с помощью уравнения моментов:

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0,$$

$$-x_B \cdot 2h - P_1 \cdot a - S_2 \cdot \cos \alpha \cdot h - S_2 \cdot \sin \alpha \cdot a = 0,$$

$$S_2 = -\frac{x_B \cdot 2h + P_1 \cdot a}{h \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha} = -\frac{0,5 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{1 \cdot 0,894 + 2 \cdot 0,447} = -3,91 \text{ кН}.$$

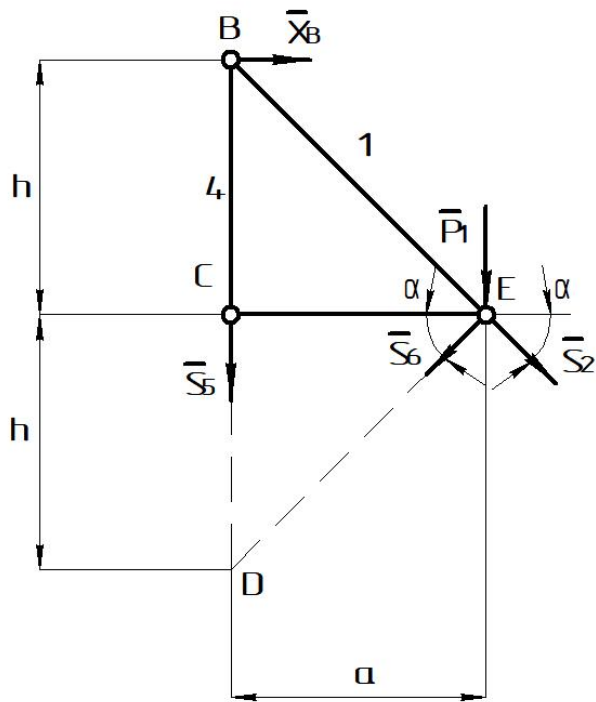


Рисунок 1.16 – Часть фермы, отсеченная сечением II – II

Для определения усилия в стержне 3 разрежем ферму с помощью сечения III – III и рассмотрим нижнюю отсеченную часть (рисунок 1.17).

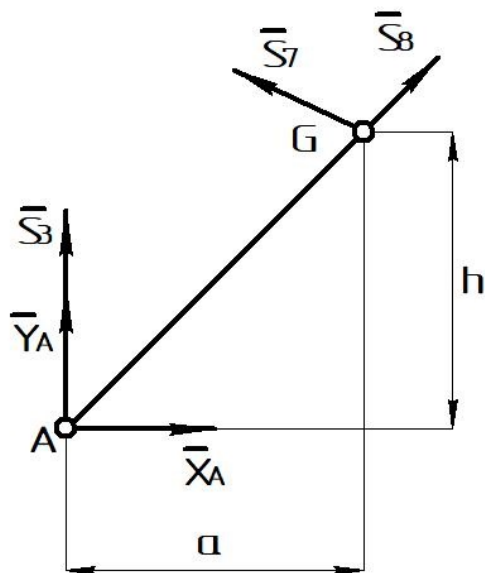


Рисунок 1.17 – Часть фермы, отсеченная сечением III – III

Определим усилие в стержне 3 с помощью уравнения моментов:

$$\sum m_G(\bar{F}_k) = 0,$$

$$-S_3 \cdot a - y_A \cdot a + x_A \cdot h = 0,$$

$$S_3 = \frac{-y_A \cdot a + x_A \cdot h}{a} = \frac{-3 \cdot 2 + 3,5}{2} = -1,25 \text{ кН}.$$

Таким образом, установлено, что усилия в стержнях определены верно.

### **1.3 Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор рамы**

#### **1.3.1 Рекомендации к решению задач**

Для решения задачи по определению реакций опор рамы с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется следующий алгоритм:

1 Отбросить одну из опор и заменить ее силой реакции связи. Если опора имеет несколько составляющих сил реакции, то одну из сил показать и изобразить в этой точке такую опору, которая имеет оставшиеся составляющие силы реакции.

2 В полученном механизме рассмотреть возможные движения звеньев, изобразить возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек. Примечание: необходимо начинать со звена, закрепленного на неподвижном шарнире, так как это звено может совершать только вращательное движение; для определения вида возможного движения другого звена необходимо определить возможное перемещение (возможную скорость) общей точки звеньев и найти положение мгновенного центра вращения (мгновенного центра скоростей) этого звена.

3 Составить уравнение возможных работ (возможных мощностей) активных сил.

4 Выразить возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек через одно возможное перемещение (одну возможную скорость).

5 Из уравнения возможных работ (возможных мощностей) выразить неизвестную силу реакции опоры.

6 После нахождения всех неизвестных реакций опор проверить полученные результаты с помощью методов статики.

### 1.3.2 Постановка задачи и исходные данные

Дана плоская рама (рисунки 1.18 – 1.22), находящаяся под действием двух постоянных сил  $F_1$  и  $F_2$ , распределенной нагрузки  $q$  и момента пар сил  $M$ . Используя принцип возможных перемещений, определить реакции опор рамы. Проверить правильность определения реакций опор с помощью методов статики.

Размеры рамы указаны на рисунках 1.17 – 1.21, необходимые для расчета данные представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Исходные данные

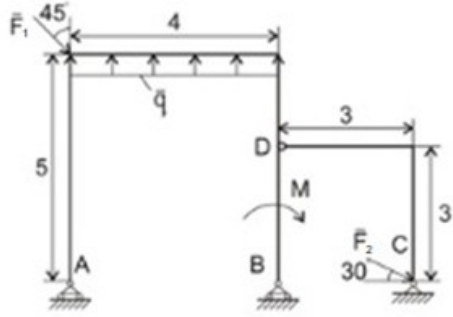
Вариант	$F_1, кН$	$F_2, кН$	$q, кН/м$	$M, кН·м$
1	2	3	4	5
1	8	3	4	3
2	9	2	3	5
3	1	8	4	3
4	3	4	2	1
5	5	2	3	5
6	9	8	4	2
7	3	4	5	3

Продолжение таблицы 1.2

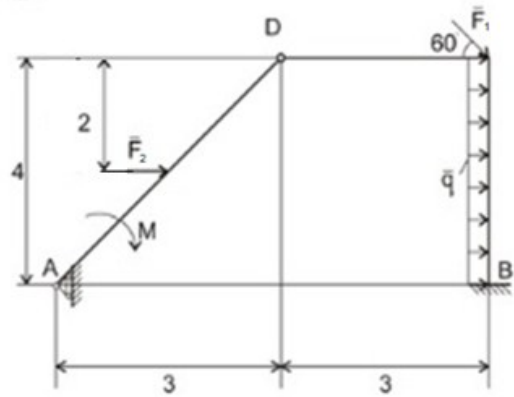
1	2	3	4	5
8	8	7	2	4
9	6	3	3	3
10	2	5	2	5
11	6	4	1	1
12	8	3	1	3
13	6	9	2	5
14	2	7	4	1
15	1	3	3	1
16	2	5	2	4
17	8	3	5	4
18	9	2	3	2
19	1	8	4	5
20	3	4	3	4
21	5	2	2	1
22	9	8	3	4
23	3	4	2	5
24	8	7	3	2
25	6	3	3	1
26	3	5	4	2
27	8	2	2	3
28	1	6	1	3
29	5	3	5	5
30	9	2	2	3



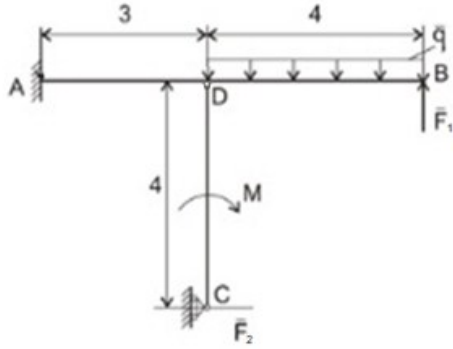
1



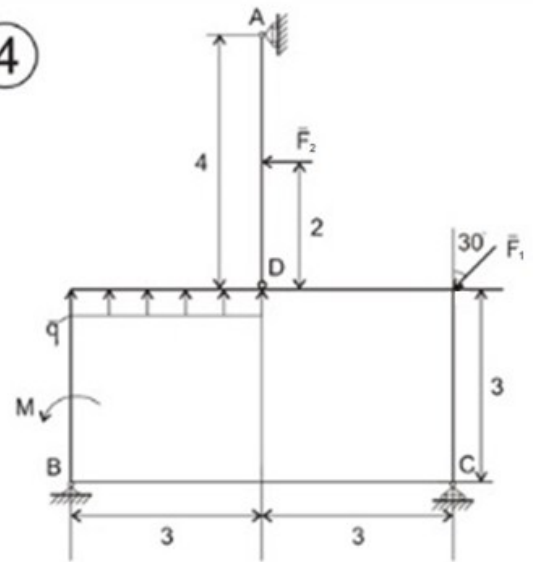
2



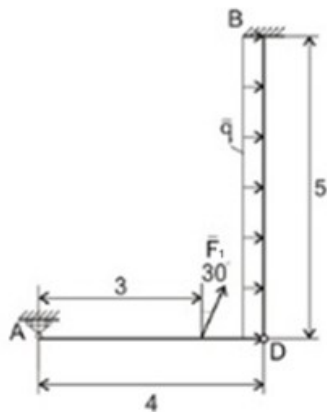
3



4



5



6

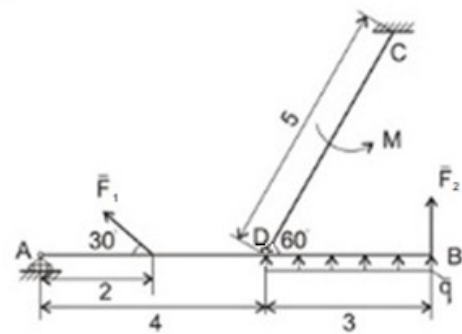
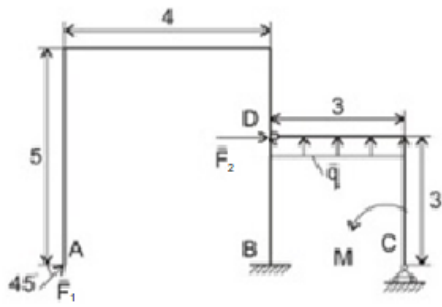
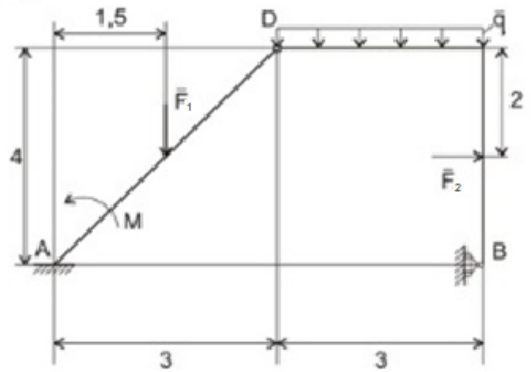


Рисунок 1.18 – Схемы рам к вариантам 1 – 6

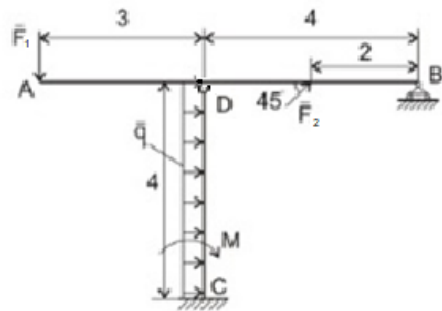
7



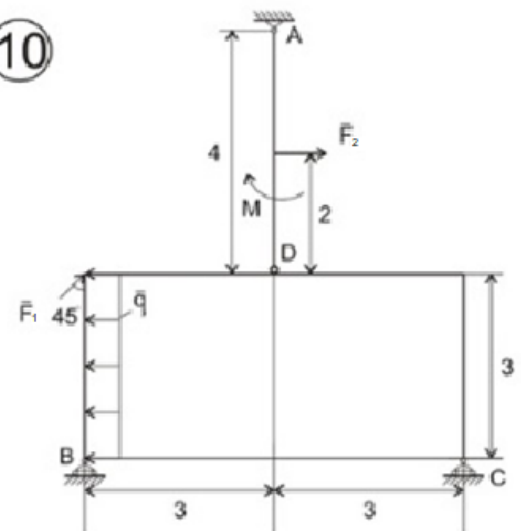
8



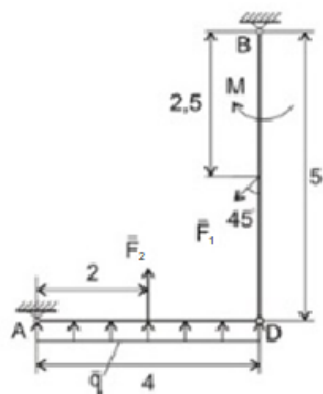
9



10



11



12

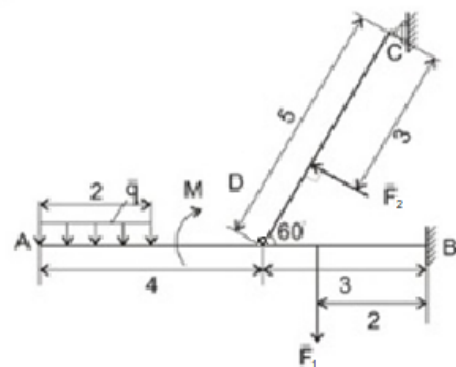
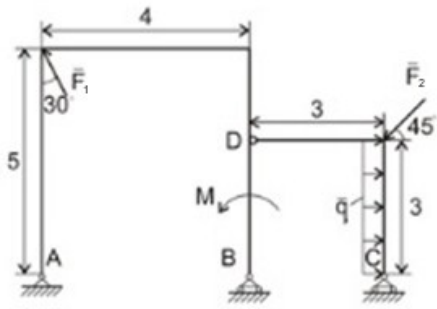
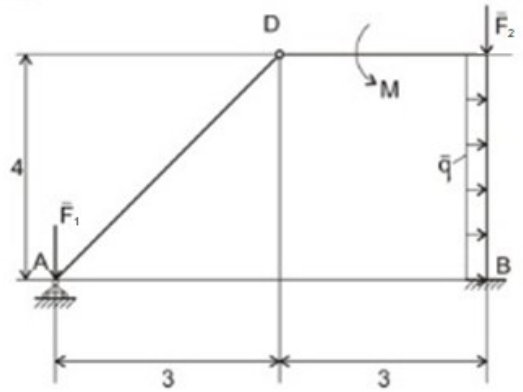


Рисунок 1.19 – Схемы рам к вариантам 7 – 12

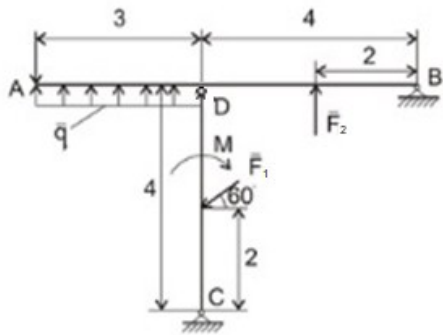
13



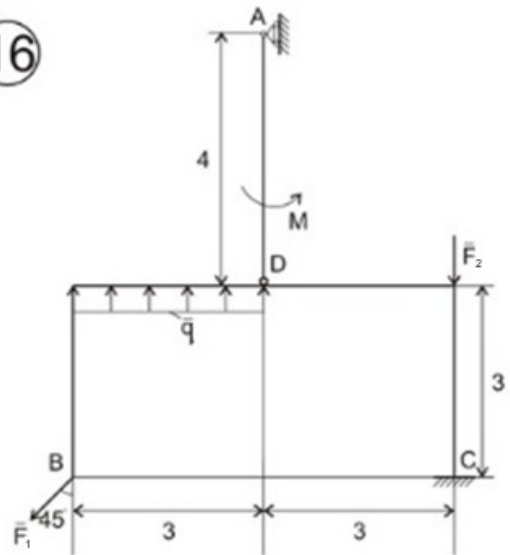
14



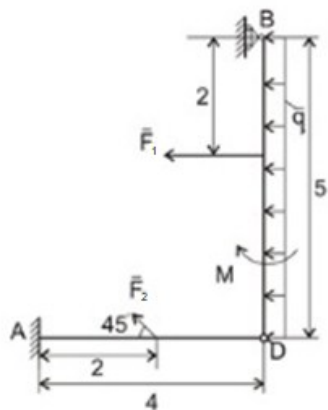
15



16



17



18

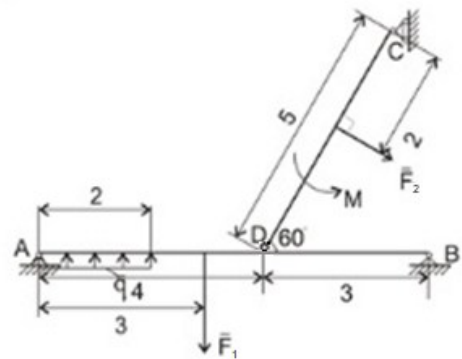
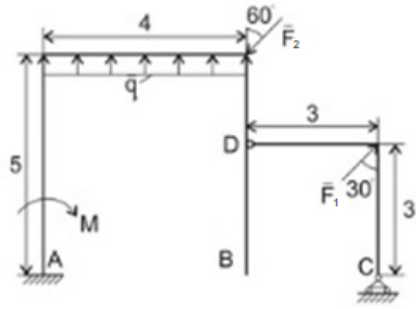
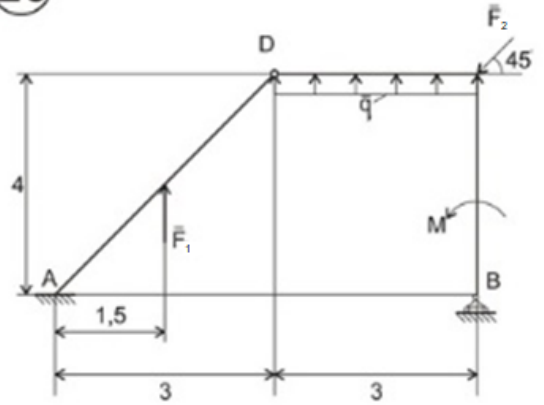


Рисунок 1.20 – Схемы рам к вариантам 13 – 18

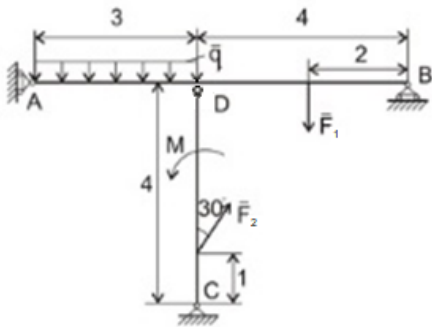
19



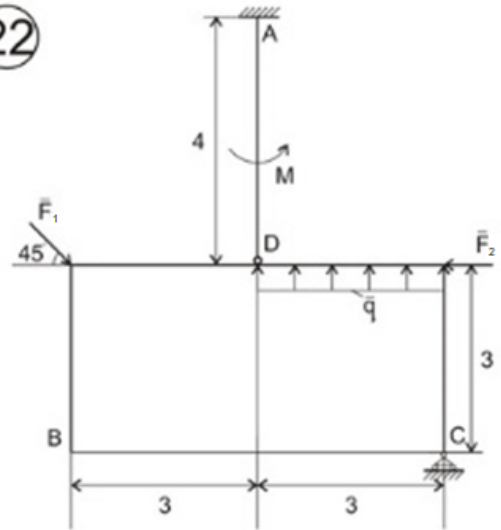
20



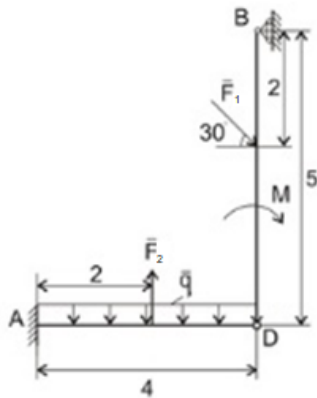
21



22



23



24

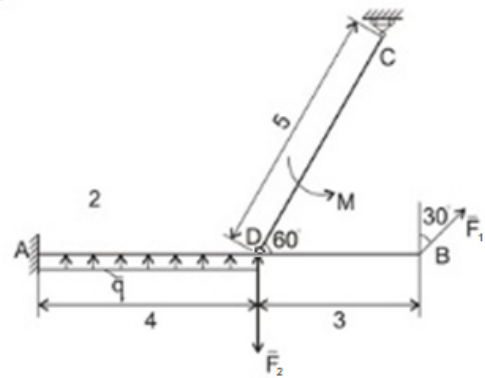
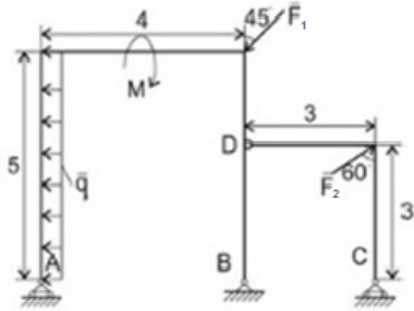
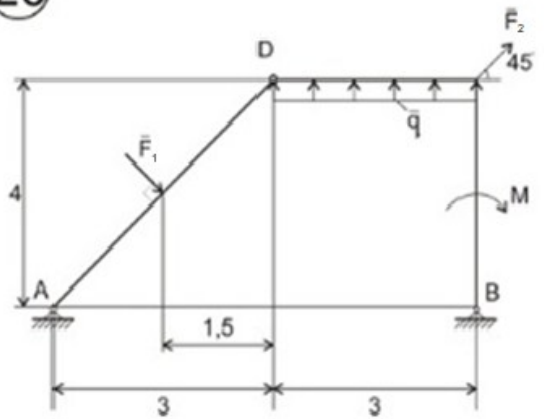


Рисунок 1.21 – Схемы рам к вариантам 19 – 24

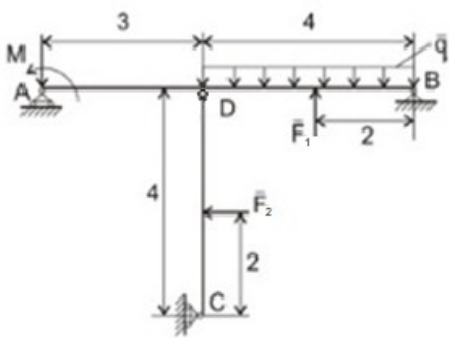
25



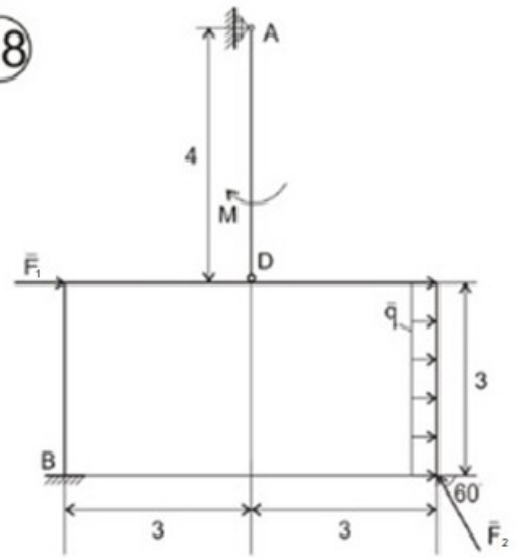
26



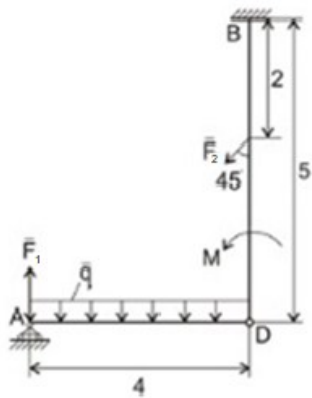
27



28



29



30

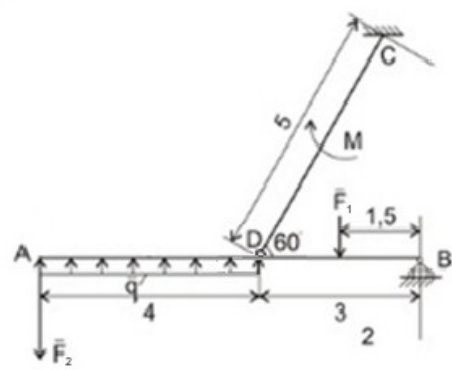


Рисунок 1.22 – Схемы рам к вариантам 25 – 30

### 1.2.3 Пример выполнения задачи

На плоскую раму, изображенную на рисунке 1.23, закрепленную на двух опорах, действуют две постоянные силы  $F_1 = 3$  кН и  $F_2 = 4$  кН, распределенная нагрузка  $q = 3$  кН/м и момента пар сил  $M = 3$  кН·м.

Необходимо определить реакции опор рамы, а также проверить правильность определения реакций опор с помощью методов статики.

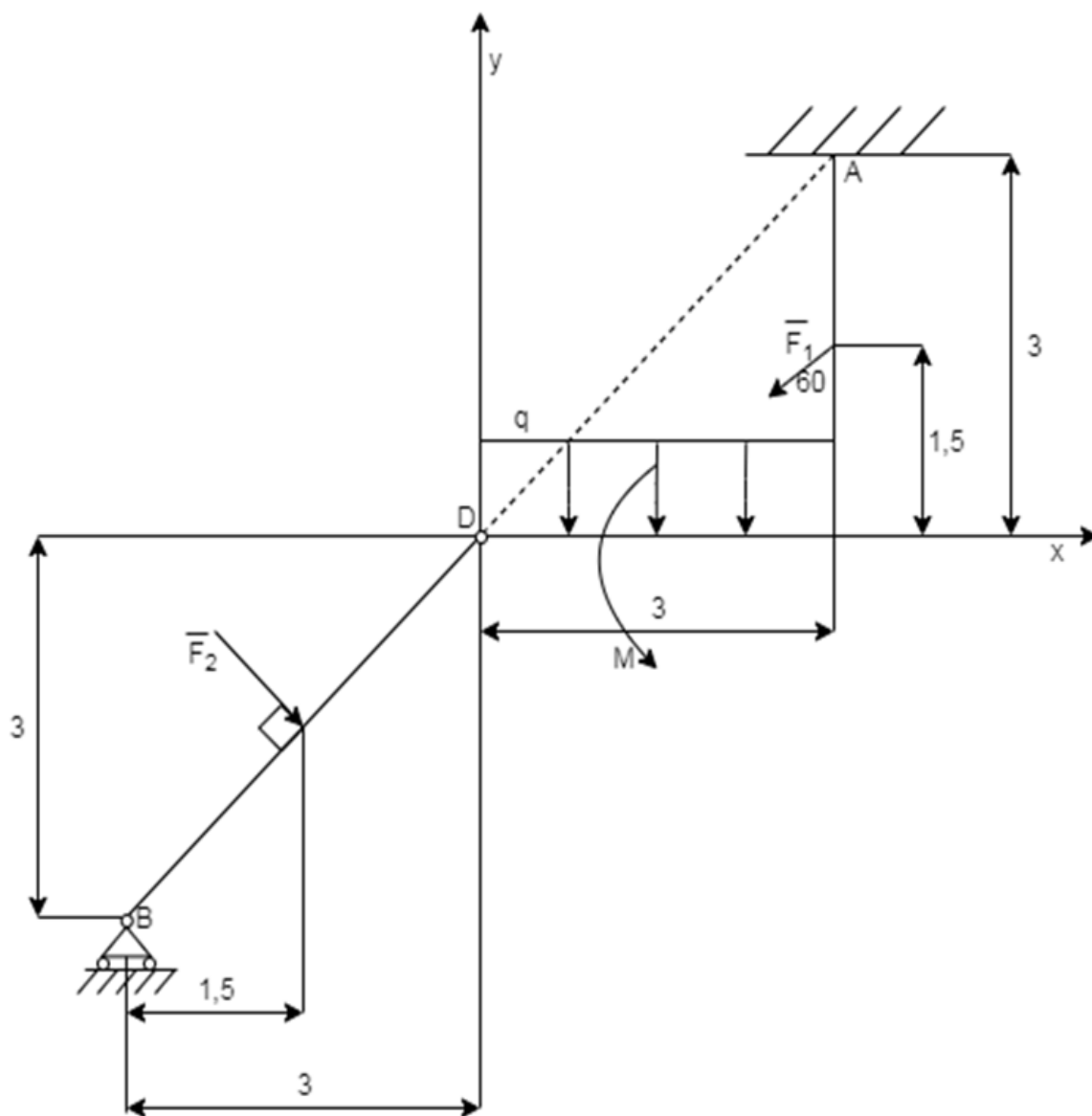


Рисунок 1.23 – Плоская рама

Определим реакции опор рамы. Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой:

$$Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}.$$

Определим реакцию  $R_B$ . Заменим опору в точке  $B$  реакцией связи (рисунок 1.24).

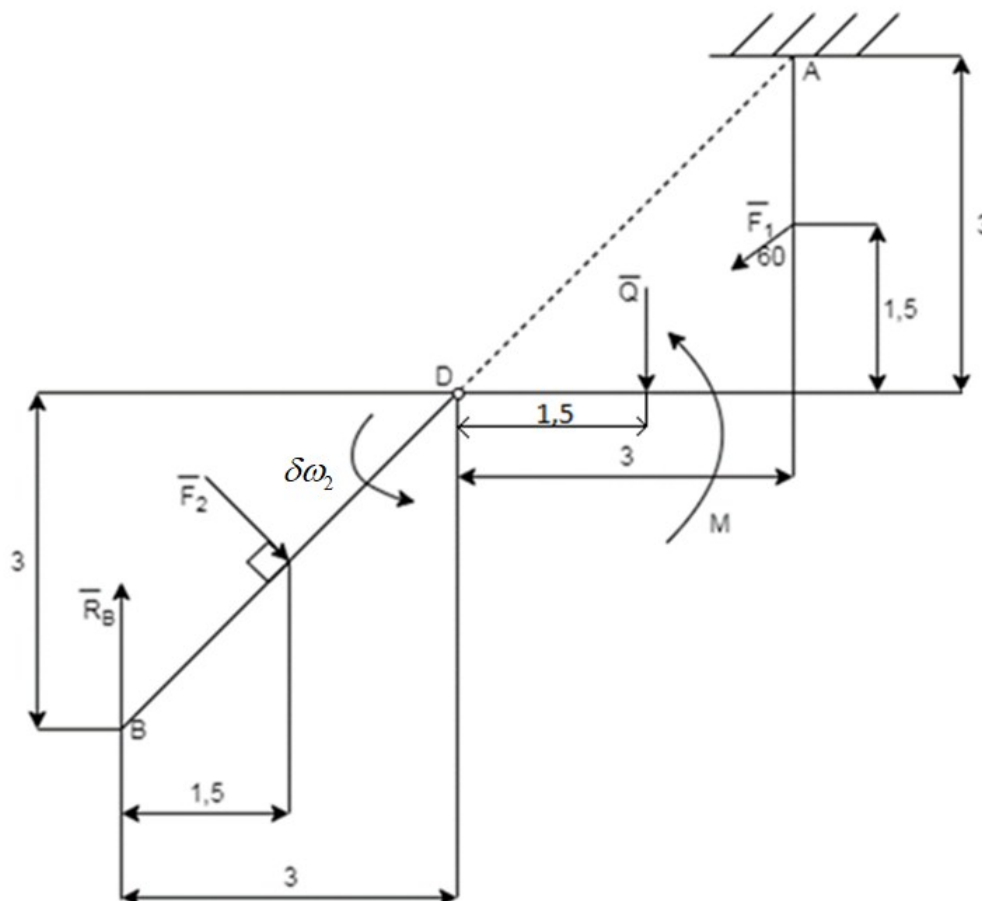


Рисунок 1.24 – Возможные перемещения частей рамы при определении реакции  $R_B$

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром  $D$ . Звено  $AD$  – неподвижно, звено  $BD$  – вращается вокруг точки  $D$  с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\omega_2 - R_B \cdot 3 \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на  $\delta\omega_2$  :

$$F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} - R_B \cdot 3 = 0,$$

откуда:

$$R_B = \frac{F_2 \sqrt{2}}{2} = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} = 14,14 \text{ кН}.$$

Определим момент  $M_A$ . Заменим жесткую заделку в точке  $A$  неподвижным цилиндрическим шарниром, покажем  $M_A$  (рисунок 1.25).

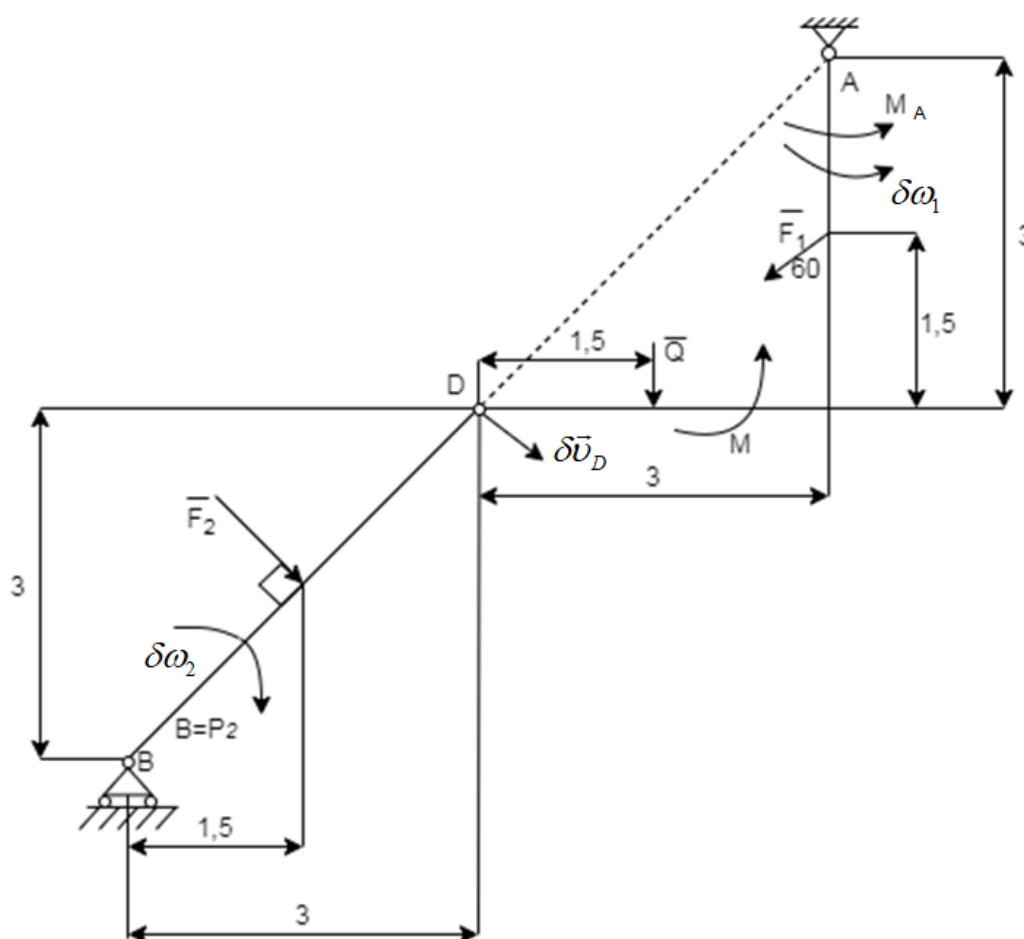


Рисунок 1.25 – Возможные перемещения частей рамы при определении момента  $M_A$



Так как звено  $AD$  закреплено в точке  $A$  на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки  $A$  с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_1$ . Тогда возможная скорость точки  $D$  будет  $\delta v_D$ .

Звено  $BD$  будет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек  $D$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке  $B$ , следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью  $\delta\omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$M \cdot \delta\omega_1 + M_A \cdot \delta\omega_1 - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 \cdot \delta\omega_1 + Q \cdot 1,5 \cdot \delta\omega_1 + F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Найдем соотношение между возможными угловыми скоростями. Возможная скорость точки  $D$  при вращении со звеном  $AD$ :

$$\delta v_D = \delta\omega_1 \cdot AD.$$

Возможная скорость точки  $D$  при вращении со звеном  $BD$ :

$$\delta v_D = \delta\omega_2 \cdot BD.$$

Так как  $AD = BD$ , следовательно,  $\delta\omega_1 = \delta\omega_2$ .

Разделим каждый член уравнения возможных мощностей на  $\delta\omega_1$ :

$$M + M_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 + Q \cdot 1,5 + F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Откуда:

$$M_A = -M + F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 - Q \cdot 1,5 - F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} =$$

$$-5 + 10 \cdot 0,87 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} = -43,37 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим реакцию  $Y_A$ . Заменяем жесткую заделку в точке  $A$  скользящей заделкой, покажем  $Y_A$  (рисунок 1.26).

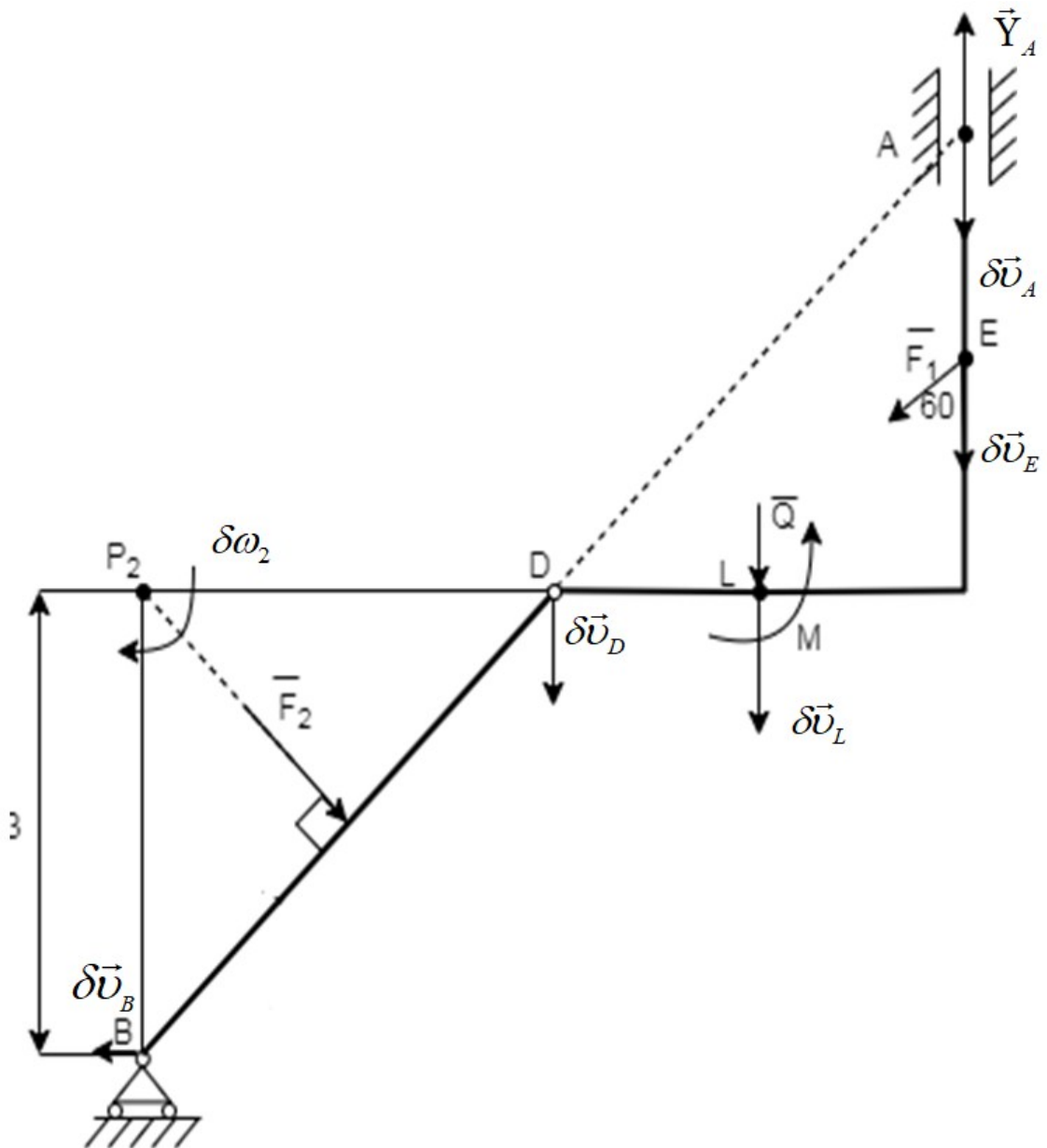


Рисунок 1.26 – Возможные перемещения частей рамы при определении реакции  $Y_A$

Часть  $AD$  совершает поступательное движение. Тогда возможная скорость точки  $D$  будет  $\delta v_D$ .

Звено  $BD$  будет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек  $D$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке  $P_2$ , следовательно, эта точка будет являться МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью  $\delta \omega_2$ .

Составим уравнение возможных мощностей:

$$-Y_A \cdot \delta v_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta v_E + Q \cdot \delta v_L = 0.$$

Так звено  $AD$  совершает поступательное движение, то скорости всех его точек будут равны:

$$\delta v_A = \delta v_E = \delta v_L.$$

Упростим уравнение возможных мощностей:

$$-Y_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q = 0.$$

Тогда:

$$Y_A = F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q = 10 \cdot 0,5 + 6 = 11 \text{ кН}.$$

Определим реакцию  $X_A$ . Заменяем жесткую заделку в точке  $A$  скользящей заделкой, покажем  $X_A$  (рисунок 1.27).

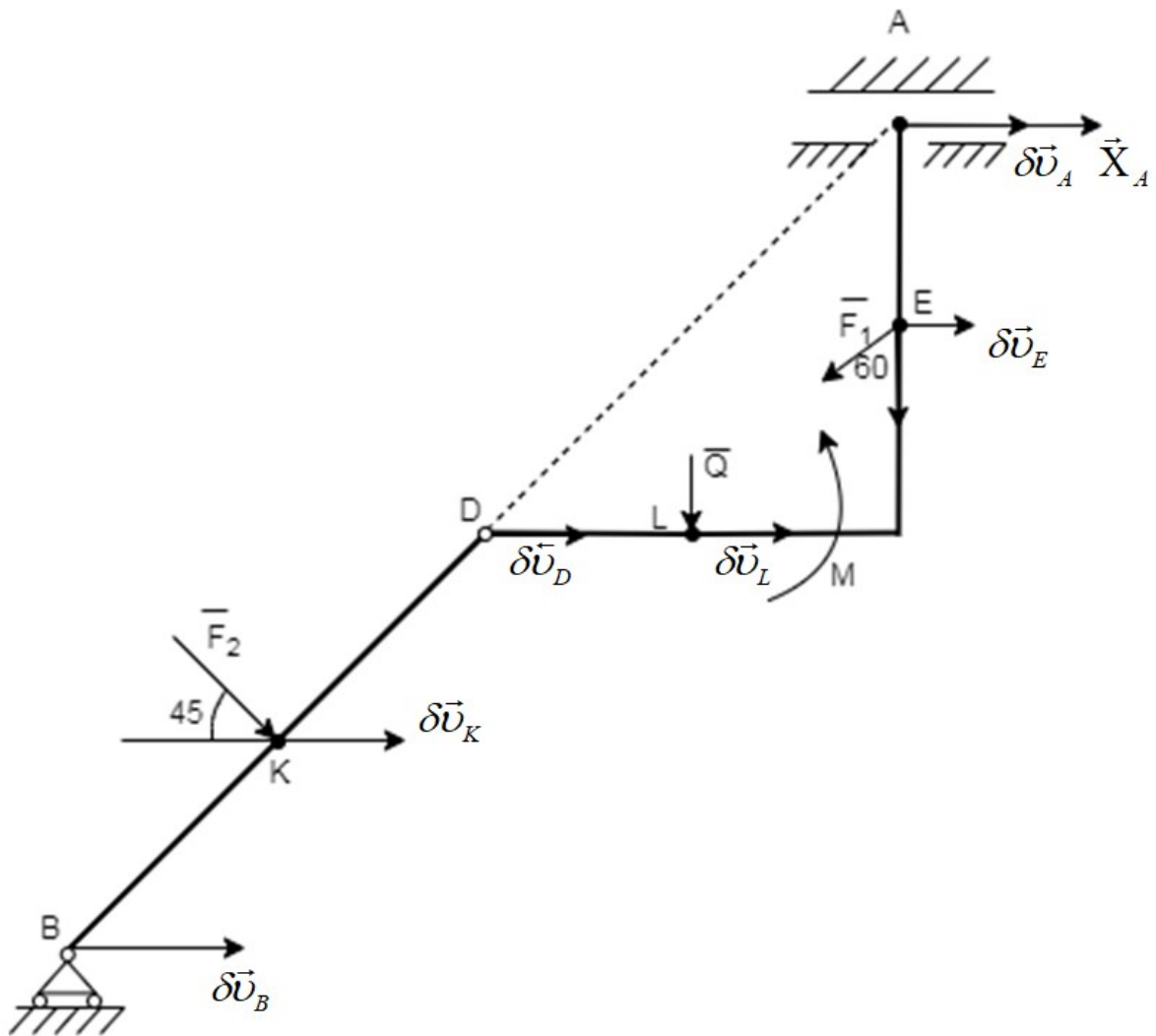


Рисунок 1.27 – Возможные перемещения частей рамы при определении реакции  $X_A$

Часть  $AD$  совершает поступательное движение. Тогда возможная скорость точки  $D$  будет  $\delta v_D$ .

Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена  $BD$ . Проведем перпендикуляры из точек  $D$  и  $B$  к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры будут параллельны, следовательно, звено  $BD$  также совершает поступательное движение.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$X_A \cdot \delta v_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \delta v_E + F_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta v_K = 0.$$

Так как вся рама совершает поступательное движение, то скорости ее точек будут равны:

$$\delta v_A = \delta v_E = \delta v_K = 0.$$

Тогда уравнение возможных мощностей примет вид:

$$X_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Определим  $X_A$ :

$$X_A = F_1 \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,87 - 20 \cdot 0,71 = -5,5 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности полученных реакций изобразим раму, покажем все реакции опор (рисунок 1.28) и составим уравнения статики:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 \cdot \cos 45^\circ - F_1 \cdot \sin 60^\circ + X_A = 0, \\ Y_A - F_1 \cdot \cos 60^\circ - Q - F_2 \cdot \cos 45^\circ + R_B = 0, \\ M + M_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 + Q \cdot 1,5 + F_2 \cdot 4,5 \cdot \sqrt{2} - R_B \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

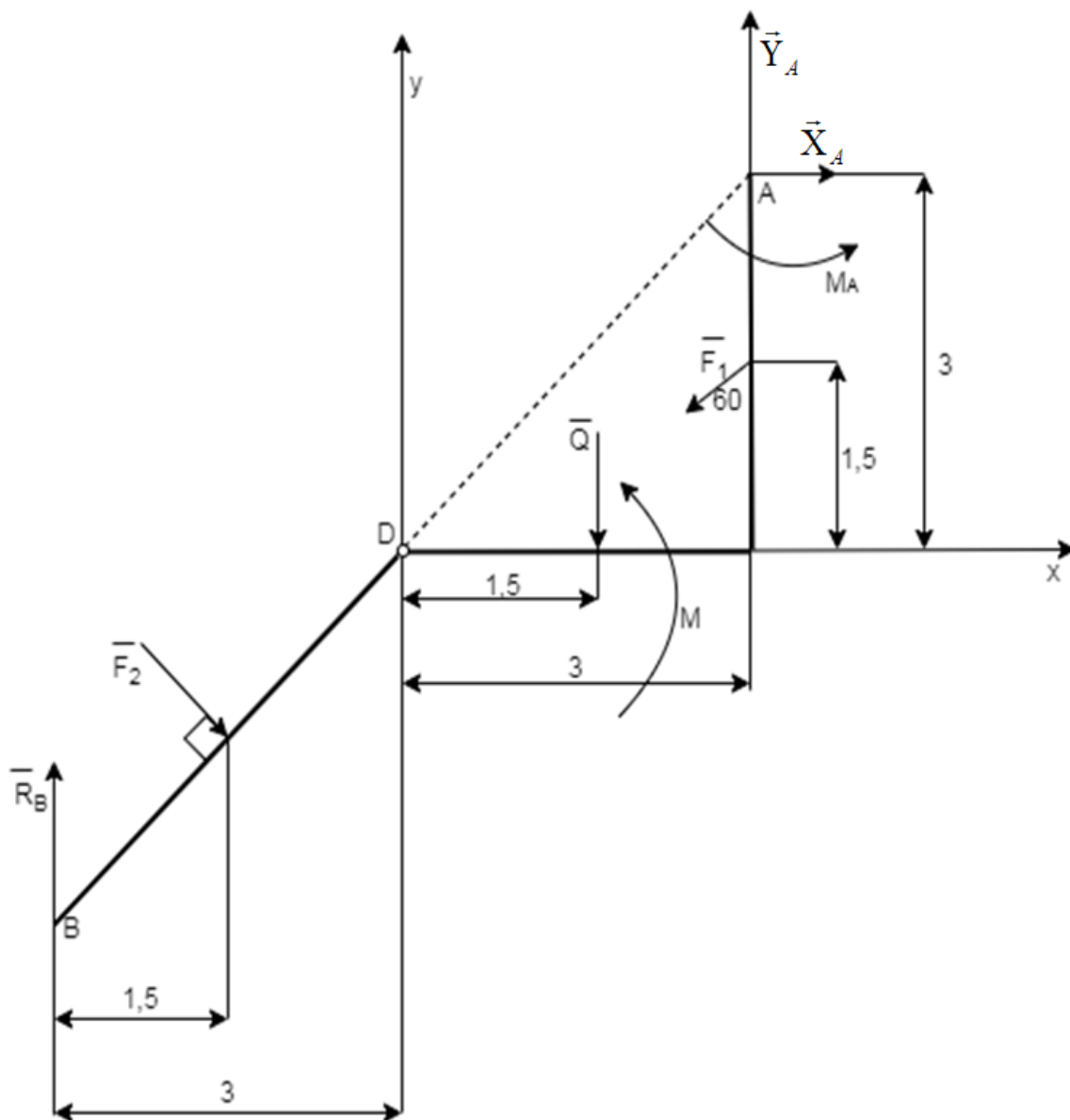


Рисунок 1.28 – Реакции опор рамы

$$\begin{cases} 20 \cdot 0,71 - 10 \cdot 0,87 - 5,5 = 0, \\ 11 - 10 \cdot 0,5 - 6 - 20 \cdot 0,71 + 14,14 \approx 0, \\ 5 - 43,37 - 10 \cdot 0,87 \cdot 1,5 + 6 \cdot 1,5 + 20 \cdot 4,5 \cdot 1,41 - 14,14 \cdot 6 \approx 0. \end{cases}$$

Так как в результате подстановок полученных реакций были получены уравнения, следовательно, реакции опор рамы были определены верно.

## 1.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Как формулируется принцип возможных перемещений?
- 2 Как определяется возможная мощность силы?
- 3 Как определяется возможная работа силы?
- 4 Как определяется возможная мощность силы?
- 5 Как определяется возможная работа момента?
- 6 Когда возможная работа (мощность) силы положительна?
- 7 Когда возможная работа (мощность) силы отрицательна?
- 8 Когда возможная работа (мощность) момента положительна?
- 9 Когда возможная работа (мощность) момента отрицательна?
- 10 Дайте определение числу степеней свободы.
- 11 Что такое возможное перемещение?
- 12 Как определяется работа силы на возможном перемещении?
- 13 Какие связи называются идеальными?
- 14 Приведите примеры идеальных связей.

## 2 Принцип Даламбера

### 2.1 Краткие теоретические сведения

*Принцип Даламбера: если к действующим на систему активным силам и реакциям связей приложить главный вектор и главный момент сил инерции, то система будет находиться в равновесии.*

Применение этого принципа позволяет решать задачи динамики с использованием подходов статики. Поэтому данный принцип при решении задач называют также методом кинетостатики.

Таким образом, при изучение равновесия тел и систем тел можно использовать равенство нулю главного вектора и главного момента системы:

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_k^a + \sum \bar{N}_k + \bar{F}^u &= 0, \\ \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k^a) + \sum \bar{m}_O(\bar{N}_k) + \bar{M}_O^u &= 0,\end{aligned}$$

где  $\sum \bar{F}_k^a$  и  $\sum \bar{m}_O(\bar{F}_k^a)$  – главный вектор и главный момент активных сил, действующих на точки системы;

$\bar{F}^u$  и  $\bar{M}_O^u$  – главный вектор и главный момент сил инерции;

$\sum \bar{N}_k$  и  $\sum \bar{m}_O(\bar{N}_k)$  – главный вектор и главный момент реакций опор, действующих на точки системы.

Силой инерции точки массой  $m$ , движущейся с ускорением  $\bar{a}$ , называется векторная величина, определяемая формулой

$$\bar{F}^u = -m\bar{a}.$$

По модулю эта сила равна произведению массы точки на ее ускорение



$$F^u = ma .$$

Сила инерции для точки прикладывается в самой точке в направлении, противоположном ускорению.

Главным вектором сил инерции системы называется геометрическая сумма сил инерции всех точек системы:

$$\bar{F}^u = \sum \bar{F}_k^u = -\sum m_k \bar{a}_k = -M\bar{a}_c ,$$

где  $M$  – масса системы;

$\bar{a}_c$  – ускорение центра масс.

Главным моментом сил инерции системы называется геометрическая сумма моментов всех сил инерции относительно выбранного центра:

$$\bar{M}_O^u = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k^u) = -\sum \bar{m}_O(m_k \bar{a}_k) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt} ,$$

где  $\bar{K}_O$  – момент количества движения системы.

Главный вектор и главный момент сил инерции приводятся к выбранному центру  $O$ .

В некоторых частных случаях главный вектор и главный момент могут быть определены по следующим правилам.

1) Поступательное движение. Силы инерции сводятся к одной силе (равнодействующей), приложенной в центре тяжести тела и направленной в сторону, противоположную ускорению тела  $\bar{a}$ . По модулю сила инерции имеет значение, определяемое формулой:

$$F^u = Ma .$$

2) Вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести. Центром приведения выбирается центр тяжести. Силы инерции будут сведены к паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon$ . Значение момента пары относительно оси вращения:

$$M_z^u = J_z \varepsilon,$$

где  $J_z$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

3) Плоскопараллельное движение. Центром приведения принимается центр тяжести. Силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно ускорению центра тяжести  $\bar{a}_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon$ . Значения силы и момента пары:

$$F^u = Ma_C;$$

$$M_{C\xi}^u = J_{C\xi} \varepsilon,$$

где  $J_{C\xi}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести.

## 2.2 Применение принципа Даламбера к решению задач

### 2.2.1 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по изучению движения систем с использованием принципа Даламбера необходимо использовать следующий порядок:

- 1) проводится кинематический анализ системы, то есть устанавливаются зависимости между скоростями точек системы;
- 2) при рассмотрении каждого тела системы прикладываются активные силы, реакции связей и силы инерции, определяются значения этих сил;
- 3) составляются уравнения равновесия для каждого тела системы, а затем решаются относительно неизвестных;
- 4) определяются оставшиеся неизвестные задачи или, при необходимости, корректируются предпосылки, сделанные в решении;
- 5) проверяется правильность решения задачи рассмотрением равновесия системы в целом.

### 2.2.2 Постановка задачи и исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ .

Пользуясь принципом Даламбера, определить ускорение тела  $I$ , а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 2.1 задания, вторая

цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 2.1. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Принять при расчетах  $m = 1,02$  кг,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. Если значение  $i_{3\xi}$  для катка не задано, то считать его однородным круглым цилиндром.

Таблица 2.1 – Исходные данные задания

Первая цифра варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3$ , см	$f$	$\alpha$ , град
0	3m	m	m	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30
1	4m	2m	m	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60
2	5m	3m	3m	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30
3	2m	m	m/2	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30
4	m	2m	m/5	0,4	0,7	0,01	28	0	60
5	4m	3m	2m	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30
6	2m	m	m	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45
7	3m	2m	1,5m	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60
8	m	m	m	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45
9	5m	2m	4m	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30

Пр и м е ч а н и е – Некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 5 не используются значения  $\delta/R_3, f, \alpha$ .

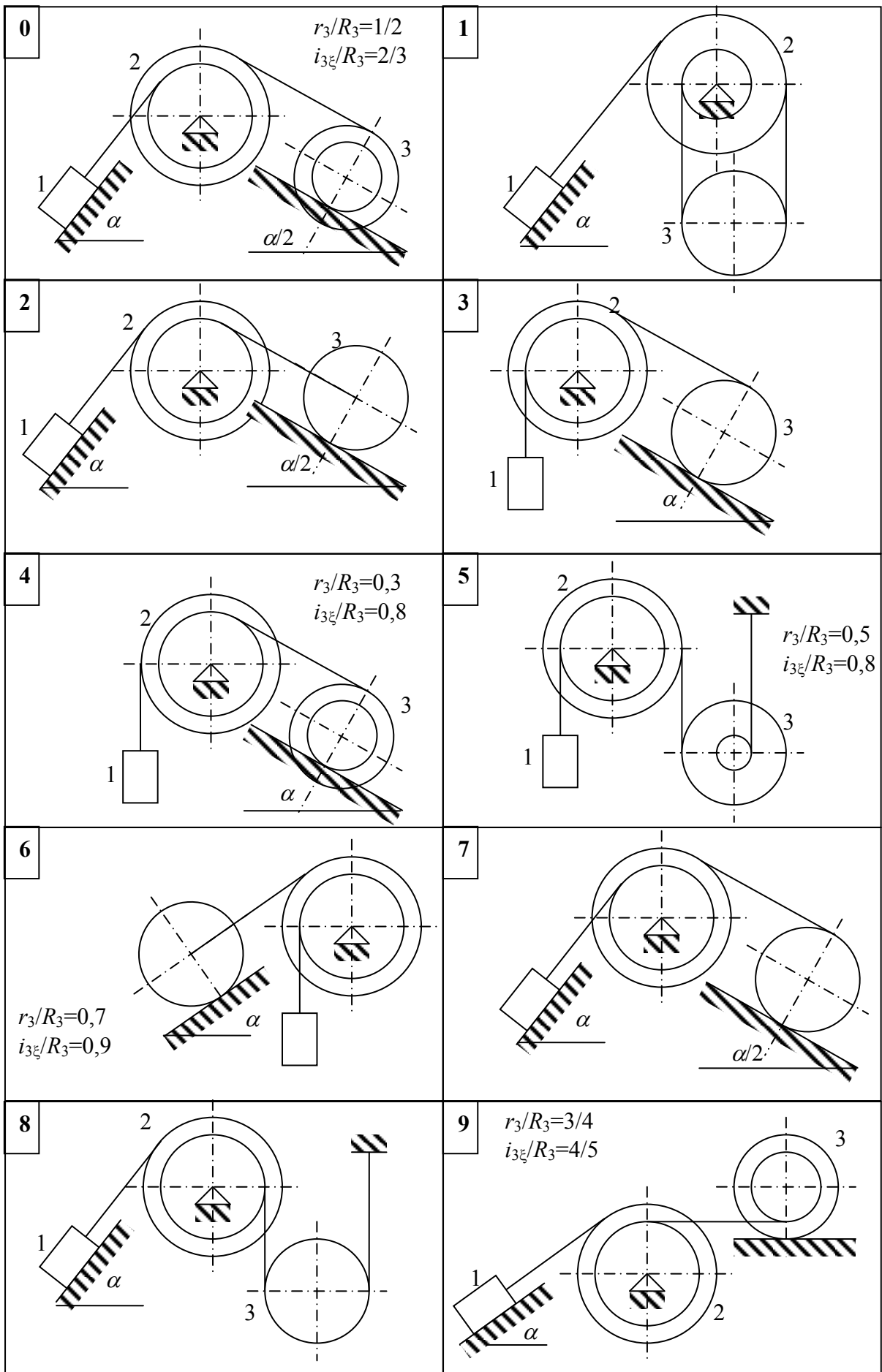


Рисунок 2.1 – Исходные схемы заданий

## 2.2.3 Пример выполнения задачи

### 2.2.3.1 Исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел (рисунок 2.2), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ . Исходные данные для примера приведены в таблице 2.2.

Пользуясь принципом Даламбера определить ускорение тела 1, а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

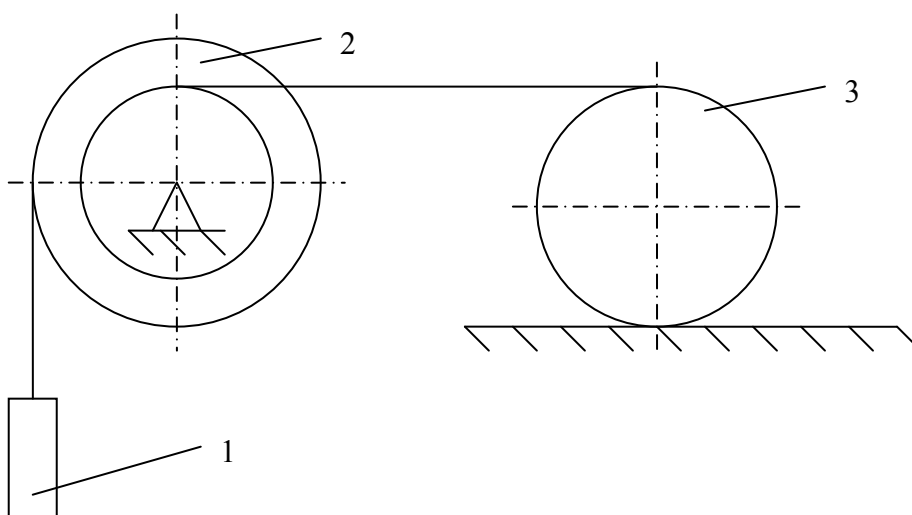


Рисунок 2.2 – Исходная схема для примера

Таблица 2.2 – Исходные данные для примера задания

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3, \text{см}$	$f$
5m	m	2m	2/3	4/5	1/20	20	0,1

### 2.2.3.2 Кинематический анализ системы

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы [3] и выразим все характеристики через характеристики движения тела 1, для этого составим уравнения связей.

Расположение тел системы и сведения о том, что движение начинается из состояния покоя, позволяют утверждать, что вектор скорости тела 1 будет направлен вниз. В случае, если направление движения было выбрано неверно, далее в п. 2.2.3 будет получено отрицательное значение ускорения, и в решение задачи необходимо внести правки.

Выразим скорости точек  $A$  и  $B$  блока через угловую скорость блока (рисунок 2.3):

$$v_A = \omega_2 R_2, \quad (2.1)$$

$$v_B = \omega_2 r_2. \quad (2.2)$$

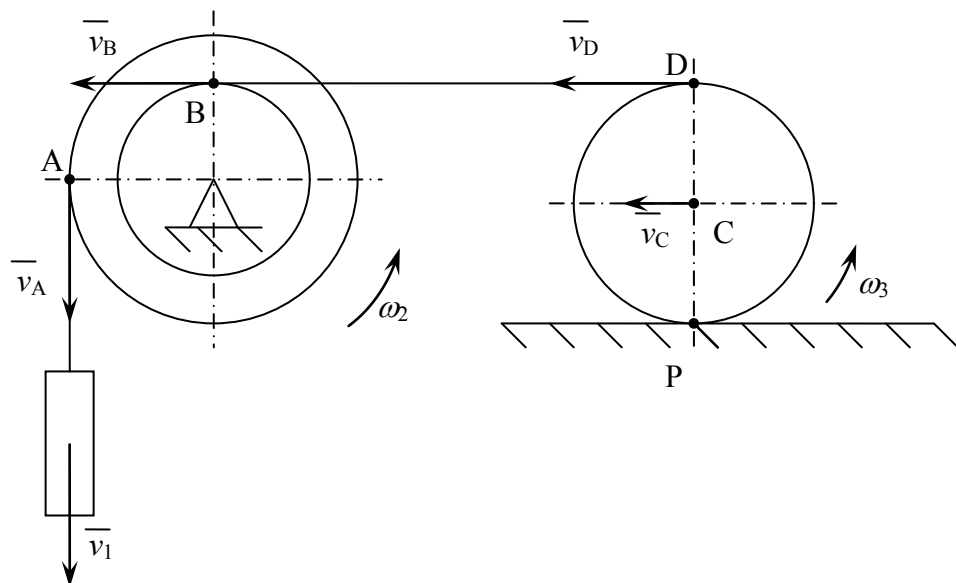


Рисунок 2.3 – Расчетная схема системы

В условии задачи не оговаривается отсутствие или наличие проскальзывания при движении катка. Поэтому на первом этапе решения будем считать, что проскальзывание отсутствует. Тогда мгновенный центр скоростей (МЦС) плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. В дальнейшем (в п. 2.2.4) можно будет проверить, правильна ли сделанная предпосылка, и, при необходимости, решение должно быть скорректировано с этого момента.

Скорости точек  $C$  и  $D$  катка равны

$$v_C = \omega_3 R_3, \quad (2.3)$$

$$v_D = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (2.4)$$

Скорости груза и точки  $A$  блока равны, откуда

$$v_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (2.5)$$

Скорости точек  $B$  блока и  $D$  катка равны

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (2.6)$$

$$v_C = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.5) – (2.7) являются уравнениями связи для системы груз – блок – каток. Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}, \quad (2.8)$$



$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (2.9)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = R_3 \frac{d\omega_3}{dt} = R_3 \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \quad (2.10)$$

### 2.2.3.3 Определение действующих на систему сил

Рассматривая каждое тело в отдельности, прикладываем к ним активные силы, реакции связей и силы инерции.

1) Активной силой, действующей на тело 1 является сила тяжести  $\bar{G}_1$  ( $G_1 = m_1 g$ ), приложенная в центре тяжести и направленная вертикально вниз (рисунок 2.4 а). Связью для тела является нить, на которой тело подвешено. Реакцию  $\bar{S}_{12}$  направляем вдоль нити. Так как тело движется поступательно, то силы инерции будут сведены к одной силе (равнодействующей), приложенной в центре тяжести тела и направленной в сторону, противоположную ускорению тела  $\bar{a}_1$ . Ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, так как движение начинается из состояния покоя, то есть является ускоренным. По модулю сила инерции имеет значение, определяемое формулой:

$$F_1^u = m_1 a_1. \quad (2.11)$$

2) Активной силой, действующей на тело 2, также является сила тяжести  $\bar{G}_2$  ( $G_2 = m_2 g$ ), приложенная в центре блока и направленная вертикально вниз (рисунок 4 б). Связями для тела являются:

– реакция неподвижного шарнира  $\bar{R}_2$  (рисунок 2.4 б), которую можно представить как сумму двух составляющих по осям координат  $\bar{R}_2 = \bar{R}_{2x_1} + \bar{R}_{2y_1}$ ;

– натяжения нитей между телами 2 и 1  $\bar{S}_{12}$  ( $\bar{S}_{21}$ ) и телами 2 и 3  $\bar{S}_{23}$ , эти реакции направляются вдоль нитей.

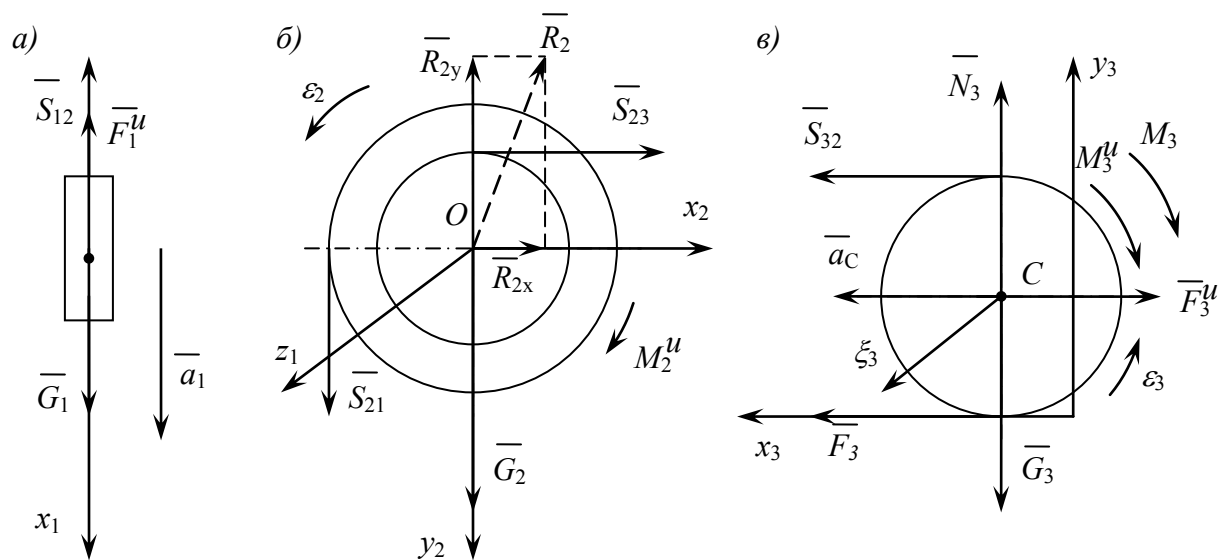


Рисунок 2.4 – Расчетные схемы тел системы

Так как тело вращается, то силы инерции будут сведены к паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_2$ . Значение момента пары:

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2, \quad (2.12)$$

где  $J_2 = m_2 i_{2z}^2$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

3) Активной силой, действующей на тело 3 также является сила тяжести  $\bar{G}_3$  ( $G_3 = m_3 g$ ), приложенная в центре катка и направленная вертикально вниз (рисунок 2.4 в). Связями для тела являются:

- натяжение нити между телами 3 и 2  $\bar{S}_{32}$ ;
- реакция поверхности, которая раскладывается на нормальную реакцию  $\bar{N}_3$  (направленную по нормали к соприкасаемым поверхностям), силу трения скольжения  $\bar{F}_3$  (направленную по касательной к соприкасаемым поверхностям в сторону, противоположную возможному проскальзыванию тела по поверхности) и момент сопротивления качению  $\bar{M}_3$  (направленный в сторону, противоположную качению тела), при этом можно направление силы

трения  $\bar{F}_3$  выбрать произвольно, а затем скорректировать при необходимости, но можно и воспользоваться рекомендациями из п. 2.2.5.

Так как качение предполагается без проскальзывания, то сила трения не может быть пока определена, но ее значение должно находиться в пределах:

$$0 \leq F_3 \leq fN_3. \quad (2.13)$$

Момент сопротивления качению определяется по формуле

$$M_3 = \delta N_3. \quad (2.14)$$

Так как тело совершает плоскопараллельное движение, то силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно ускорению центра тяжести  $a_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_3$ . Значения силы и момента пары:

$$F_3^u = m_3 a_C, \quad (2.15)$$

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3, \quad (2.16)$$

где  $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$  – момент инерции катка относительно оси  $\xi_3$ .

#### 2.2.3.4 Составление и решение уравнений равновесия

Принцип Даламбера гласит, что если к системе приложить активные силы, реакции связей и силы инерции, то полученная система будет уравновешенной. Первоначально составим уравнения равновесия для каждого тела

в отдельности. При этом учтем, что в большинстве случаев система будет произвольной плоской.

Равновесие тела 1. Все силы направлены вдоль одной прямой, тогда уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum F_{kx_1} = 0; \quad G_1 - S_{12} - F_1^u = 0. \quad (2.17)$$

Равновесие тела 2:

$$\sum F_{kx_2} = 0; \quad S_{23} + R_{2x} = 0, \quad (2.18)$$

$$\sum F_{ky_2} = 0; \quad S_{21} + G_2 - R_{2y} = 0, \quad (2.19)$$

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{21} \cdot R_2 - S_{23} \cdot r_2 - M_2^u = 0. \quad (2.20)$$

Равновесие тела 3:

$$\sum F_{kx_3} = 0; \quad S_{32} + F_3 - F_3^u = 0, \quad (2.21)$$

$$\sum F_{ky_3} = 0; \quad N_3 - G_3 = 0, \quad (2.22)$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{32} \cdot R_3 - F_3 \cdot R_3 - M_3^u - M_3 = 0. \quad (2.23)$$

Необходимо убедиться, что каждая из сил вошла хотя бы в одно из уравнений. В дальнейшем эти уравнения решаются совместно с учетом ранее записанных соотношений.

Необходимо отметить, что уравнения (2.18) и (2.19) решаются в самом конце для определения реакций шарнира.

Из уравнения (2.22) сразу можно определить нормальную реакцию и с помощью (2.14) найти момент сопротивления качению:

$$N_3 = G_3 = m_3 g, \quad (2.24)$$

$$M_3 = N_3 \delta = m_3 g \delta. \quad (2.25)$$

Так как нити, связывающие тела системы, невесомые, то усилия в разных частях каждой нити равны, то есть

$$S_{12} = S_{21} = S_1, \quad S_{23} = S_{32} = S_2. \quad (2.26)$$

Силы и моменты инерции найдем по формулам (2.11), (2.12), (2.15) и (2.16) с учетом соотношений (2.8), (2.9), (2.10):

$$F_1^u = m_1 a_1; \quad (2.27)$$

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2 = m_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2}, \quad (2.28)$$

$$F_3^u = m_3 a_C = m_3 \frac{a_1 r_2}{2R_2}, \quad (2.29)$$

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}. \quad (2.30)$$

Тогда уравнения (2.17), (2.20), (2.21) и (2.23) с учетом значений сил тяжести и соотношений (2.24) – (2.30) принимают вид системы

$$\begin{cases} m_1 g - S_1 - m_1 a_1 = 0, \\ S_1 R_2 - S_2 r_2 - m_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2} = 0, \\ S_2 + F_3 - m_3 \frac{a_1 r_2}{2R_2} = 0, \\ S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta - \frac{m_3 R_3 a_1 r_2}{4R_2} = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Полученная система уравнений содержит четыре неизвестных величины. После подстановки исходных данных система принимает вид

$$\begin{cases} 5mg - S_1 - 5ma_1 = 0, \\ S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{16m}{25}a_1 = 0, \\ S_2 + F_3 - \frac{2m}{3}a_1 = 0, \\ S_2 - F_3 - \frac{mg}{10} - \frac{m}{3}a_1 = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Решение системы уравнений может производиться с использованием программных средств (пример изложен в п. 2.2.3) или аналитически. Далее рассмотрен аналитический вариант решения. Из первых трех уравнений системы (2.32) получим

$$S_1 = 5m(g - a_1), \quad (2.33)$$

$$S_2 = \frac{m}{50}(375g - 423a_1), \quad (2.34)$$

$$F_3 = \frac{m}{150}(1369a_1 - 1125g). \quad (2.35)$$

Подставим выражения (2.34), (2.35) в последнее уравнение системы (2.32), после преобразований получим

$$a_1 = \frac{2235}{2688}g = 0,831g = 8,16 \text{ м/с}^2. \quad (2.36)$$

Используем полученное значение в (2.33) – (2.35), найдем значения реакций  $S_1 = 0,845mg = 8,45 \text{ Н}$ ,  $S_2 = 0,47mg = 4,7 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 0,084mg = 0,84 \text{ Н}$ .

### 2.2.3.5 Определение оставшихся реакций

Реакции поверхности на каток по формулам (2.24) и (2.25):  
 $N_3 = 2mg = 20\text{ Н}$ ,  $M_3 = 2mg \cdot 0,01 = 0,2\text{ Н/м}$ .

Проверим условие отсутствия проскальзывания по формуле (2.13):  
 $F_3 < 2mg \cdot 0,1 = 2\text{ Н}$ . Следовательно, проскальзывание отсутствует.

Пример при наличии проскальзывания приведен в п. 2.2.5.2.

Реакции опоры блока вычислим из формул (2.18) и (2.19):  
 $R_{2x} = -S_2 = -4,7\text{ Н}$ ,  $R_{2y} = G_2 + S_1 = 18,45\text{ Н}$ .

Отрицательный знак  $R_{2x1}$  говорит о том, что истинное направление этой реакции противоположно показанному на рисунке.

### 2.2.3.6 Проверка решения задачи

Рассмотрим систему целиком, приложив к ней активные силы, реакции связей и силы инерции. При этом учтем, что реакции нити теперь – внутренние силы, и их не указываем (рисунок 2.5).

Так как расстояния между телами неизвестны, то уравнение моментов будет составить затруднительно, поэтому ограничиваемся только уравнениями вида:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & F_3 - R_{2x} - F_3^u &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & R_{2y} - G_1 - G_2 - G_3 + F_1^u + N_3 &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя значения, получим

$$0,84 - (-4,7) - \frac{2}{3} \cdot 1,02 \cdot 8,16 = 0 \text{ (верно).}$$

$$18,45 - 5 \cdot 1,02 \cdot 9,81 - 1,02 \cdot 9,81 - 2 \cdot 1,02 \cdot 9,81 + 5 \cdot 1,02 \cdot 8,16 + 20 = 0 \text{ (верно).}$$

Задача решена.

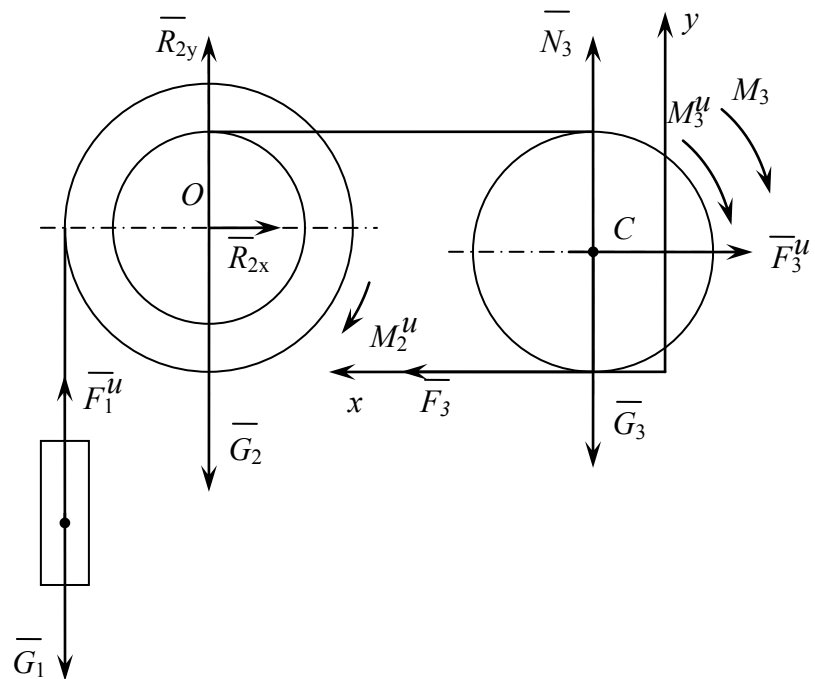


Рисунок 2.5 – Расчетная схема системы в целом

#### 2.2.4 Решение системы уравнений при помощи пакета MathCad

Для численного решения линейных систем уравнений в MathCAD имеется специальная функция  $lsolv(A,B)$  [2].

Она решает систему линейных алгебраических уравнений вида  $A \cdot X = B$ , выдавая решение – вектор  $X$ .

$A$  – матрица коэффициентов размерности  $n \times n$ ;

$B$  – вектор свободных членов размерности  $n$ ;

$X$  – вектор неизвестных пока решений.

Пример решения приведен на рисунке 2.6.



Исходные данные:

$$\underline{m} := 1.02 \quad \underline{g} := 9.81$$

Решение:

Решение системы в матричной форме.

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 5m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{25}m & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3}m & 0 & -1 & -1 \\ \frac{m}{3} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} 5m \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ -m \cdot \frac{g}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} := \text{lsolve}(\underline{A}, \underline{B}) \quad \text{или} \quad \underline{X} := \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 8.157 \\ 8.432 \\ 4.66 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.6 – Решение системы уравнений с применением функции *lsolv*

Хорошей альтернативой решению систем в матричной форме является так называемый solve block (Блок решения) [2]. Он удобен тем, что при его использовании уравнения записываются не в матричной, а в обычной форме, а также тем, что позволяет решать нелинейные уравнения и вводить ограничительные условия для определяемого решения. Блок решения применяется как для нахождения численного решения, так и для отыскания решения в символьном виде.

Синтаксис Блока решения:

*Given*

Уравнения

Ограничительные условия

*Find*( $v_1, v_2, \dots, v_n$ ) – возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

$v_i$  – переменные, которые надо найти.

При символьном решении не надо вводить начальные значения, а после ключевого слова  $Find(v_1, v_2, \dots, v_n)$  вместо знака равенства следует ввести символьный знак равенства (при помощи комбинации [Ctrl+.] или соответствующей пиктограммы панели Evaluation).

Пример приведен на рисунке 2.7.

Существует еще одно важное отличие между блоком решения и использованием матричных операций. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, матричные методы оказываются непригодными. В таком случае система не имеет решений или разрешима неоднозначно. Если же применить блок решения, MathCAD распознает неоднозначность и выдает решение в параметрической форме.

Исходные данные:

$$m := 1.02 \quad g := 9.81$$

Решение с помощью "Блока решения"

Given

$$5 \cdot m \cdot x'' = 5 \cdot m \cdot g - S_1$$

$$\frac{16}{25} \cdot m \cdot x'' = S_1 - \frac{2}{3} S_2$$

$$\frac{2}{3} \cdot m \cdot x'' = S_2 + F_3$$

$$\frac{1}{3} \cdot m \cdot x'' = S_3 - F_3 - m \cdot \frac{g}{3}$$

$$\text{find}(x'', S_1, S_2, F_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 8.1567522321428571429 \\ 8.4315636160714285714 \\ 4.6602536383928571429 \\ 0.88633787946428571429 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.7 – Решение системы уравнений с применением блока решения

## 2.2.5 Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения

### 2.2.5.1 Выбор направления силы трения

При выборе направления силы трения необходимо исходить из того, что эта сила препятствует проскальзыванию тела по поверхности. В случае, если тело совершает поступательное движение, направление этой силы однозначно противоположно направлению движения. В случае качения тела по поверхности необходимо провести дополнительный анализ.

Рассмотрим следующие варианты крепления тела:

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 2.8 а): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 2.8 б): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вверх, следовательно, сила трения направлена вниз по поверхности;

– тело, на которое намотана нить, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 2.8 в): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, так как тело, разматывая нить, также двигалось бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 2.8 г): в данном случае однозначно направить силу трения нельзя, так как при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью может скользить вместе с центром вверх, но может и скользить вниз, разматывая нить.

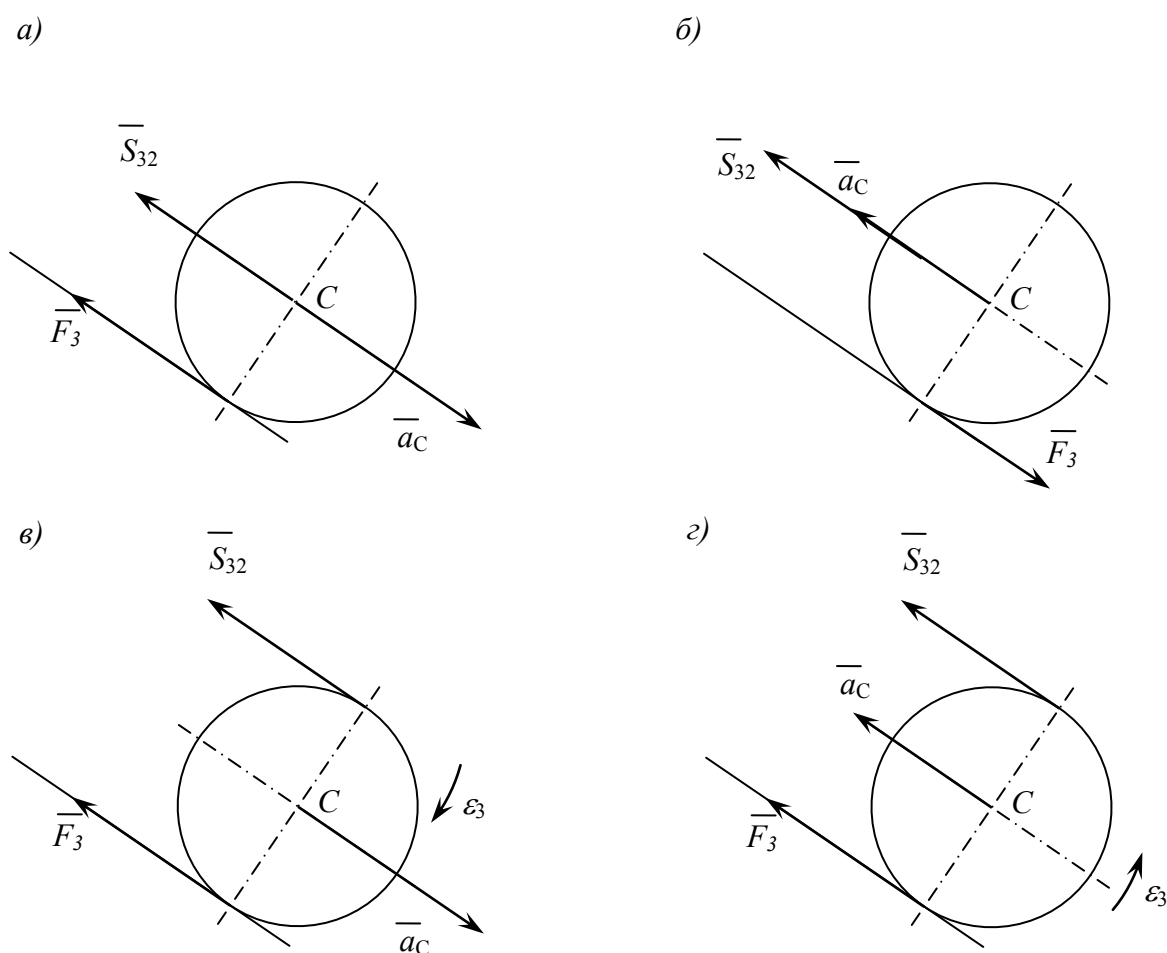


Рисунок 2.8 – Выбор направления силы трения

В последнем примере направление силы выбирается произвольным образом, а полученный в результате решения знак сообщит об истинном направлении силы.

### 2.2.5.2 Случай, когда полученное значение силы трения превышает предельное значение

Вернемся к примеру, приведенному в п. 2.2.3, приняв коэффициент трения скольжения  $f = 0,04$ , тогда, при проверке условия отсутствия проскальзывания (2.13), получим  $F_3 = 0,084mg = 0,84 > 2mg \cdot 0,04 = 0,8$  Н. Следовательно, тело проскальзывает по поверхности. В этом случае не будут со-

блюдаться некоторые кинематические соотношения, так как скорость центра катка уже не будет пропорциональна угловой скорости (рисунок 2.9).

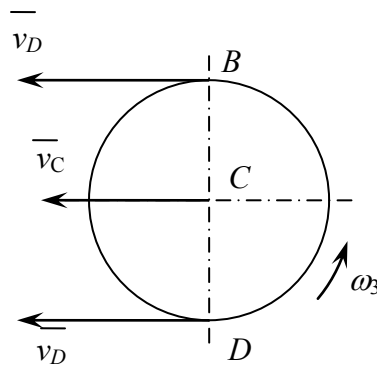


Рисунок 2.9 – Схема для определения скоростей

Скорость точки  $D$  катка

$$v_D = v_C + \omega_3 R_3 \quad (2.37)$$

или

$$\omega_2 r_2 = v_C + \omega_3 R_3. \quad (2.38)$$

Откуда скорость точки  $C$

$$v_C = v_1 \frac{r_2}{R_2} - \omega_3 R_3 \quad (2.39)$$

и ее ускорение

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3. \quad (2.40)$$

При подстановке этих значений в выражения (2.21) и (2.23) получим для катка уравнения равновесия в виде

$$S_2 + F_3 - m_3 \frac{r_2}{R_2} a_1 + m_3 \varepsilon_3 R_3 = 0, \quad (2.41)$$

$$S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta - \frac{m_3 R_3^2 \varepsilon_3}{2} = 0. \quad (2.42)$$

Здесь сила трения принимает предельное значение  $F_3 = 0,08mg$ . В дальнейшем, система вместо вида (2.32), принимает вид

$$\begin{cases} 5mg - S_1 - 5ma_1 = 0, \\ S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{16m}{25}a_1 = 0, \\ S_2 + 0,8 - \frac{2 \cdot 2m}{3}a_1 + 2m \cdot R_3 \varepsilon_3 = 0, \\ S_2 - 0,8 - \frac{mg}{10} - mR_3 \varepsilon_3 = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Эта система содержит четыре неизвестные, которые после решения принимают значения:

$$a_1 = \frac{3333}{4007} g = 8,16 \text{ м/с}^2, \quad (2.44)$$

$$S_1 = 5m(g - a_1) = 8,25m = 8.42 \text{ Н}, \quad (2.45)$$

$$S_2 = 4,68 \text{ Н}, \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_3 = 13,96 \text{ рад/с}^2. \quad (2.47)$$

Дальнейшее решение не меняется.

## 2.3 Вопросы для самоконтроля

- 1 Как формулируется принцип Даламбера?
- 2 Как определяется сила инерции для материальной точки?
- 3 Что такое главный вектор сил инерции?
- 4 Что такое главный момент сил инерции?
- 5 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при поступательном движении тела?
- 6 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при вращательном движении тела?
- 7 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при плоскопараллельном движении тела?
- 8 Какие уравнения равновесия составляются для различных систем сил?
- 9 Как определяется сила трения скольжения при движении и при равновесии тела?
- 10 Как описывается трение качения?
- 11 С какой целью проводится кинематический анализ?

## 3 Применение принципа Даламбера-Лагранжа

### 3.1 Краткие теоретические сведения

Принцип возможных перемещений позволяет сформулировать общий метод решения задач статики, а принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для задач динамики. Одновременное использование этих принципов позволяет получить общий метод решения задач динамики.

*Принцип Даламбера-Лагранжа: если механическая система находится под действием голономных, стационарных, удерживающих, идеальных связей, то сумма элементарных работ активных сил и сил инерции системы на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

Выражение принципа Даламбера-Лагранжа в виде уравнения называется общим уравнением динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0,$$

где  $\delta A_k^a$ ,  $\delta A_k^u$  – элементарные работы активных сил и сил инерции системы на возможном перемещении.

Так же можно использовать принцип Даламбера совместно с принципом возможных мощностей. При этом сам принцип будет записан в виде

$$\sum N_k^a + \sum N_k^u = 0.$$

где  $N_k^a$ ,  $N_k^u$  – возможные мощности активных сил и сил инерции системы.



## 3.2 Применение принципа Даламбера-Лагранжа к решению задач

### 3.2.1 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по изучению движения систем с использованием принципа Даламбера-Лагранжа необходимо использовать следующий порядок:

- 1) проводится кинематический анализ системы, то есть устанавливаются зависимости между скоростями точек системы;
- 2) при рассмотрении системы в целом прикладываются активные силы, неидеальные связи заменяются идеальными с приложением дополнительных сил, значения которых определяются;
- 3) на схеме указываются ускорения центров масс тел и угловые ускорения, прикладываются силы инерции, определяются значения этих сил;
- 4) системе сообщается возможное перемещение в направлении действительного;
- 5) составляется уравнение, выражающее принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики);
- 6) устанавливается зависимость между возможными перемещениями и решается общее уравнение динамики;
- 7) при возможности проскальзывания тела 3 по поверхности, тело рассматривается отдельно, с применением принципа Даламбера определяется сила трения и, при наличии проскальзывания, задача решается вновь.

### 3.2.2 Постановка задачи и исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Ко-

коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ .

Пользуясь принципом Даламбера-Лагранжа, определить ускорение тела  $I$ .

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 3.1 задания, вторая цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 3.1. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Принять при расчетах  $m = 1,02$  кг,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. Если значение  $i_{3\xi}$  для катка не задано, то считать его однородным круглым цилиндром.

Таблица 3.1 – Исходные данные задания

Первая цифра варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3$ , см	$f$	$\alpha$ , град
0	3m	m	m	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30
1	4m	2m	m	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60
2	5m	3m	3m	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30
3	2m	m	m/2	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30
4	m	2m	m/5	0,4	0,7	0,01	28	0	60
5	4m	3m	2m	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30
6	2m	m	m	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45
7	3m	2m	1,5m	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60
8	m	m	m	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45
9	5m	2m	4m	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30

Примечание – Некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 5 не используются значения  $\delta/R_3$ ,  $f$ ,  $\alpha$ .

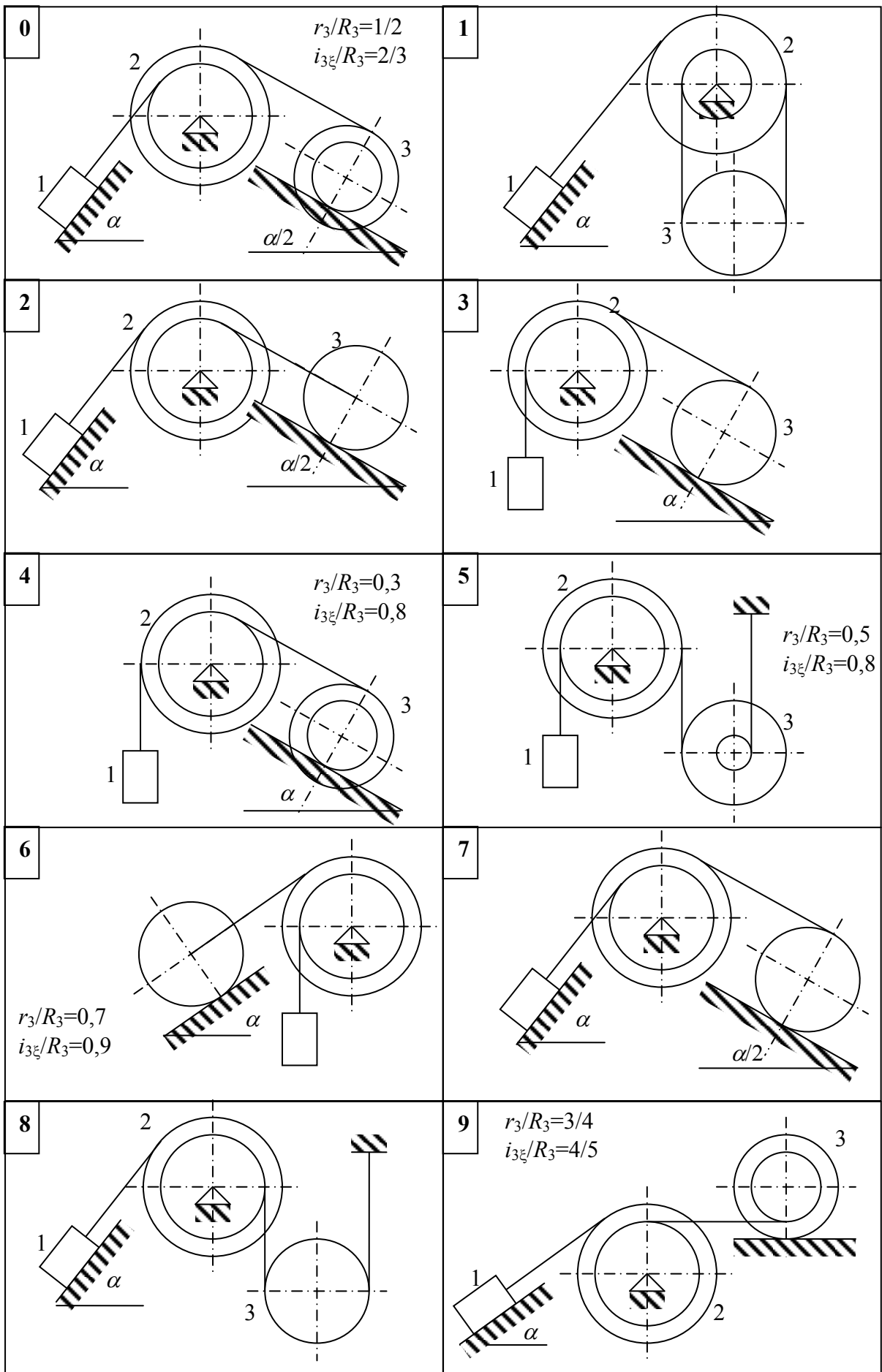


Рисунок 3.1 – Исходные схемы заданий

### 3.2.3 Пример выполнения задачи

#### 3.2.3.1 Исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел (рисунок 3.2), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ . Исходные данные для примера приведены в таблице 3.2.

Пользуясь принципом Даламбера определить ускорение тела 1.

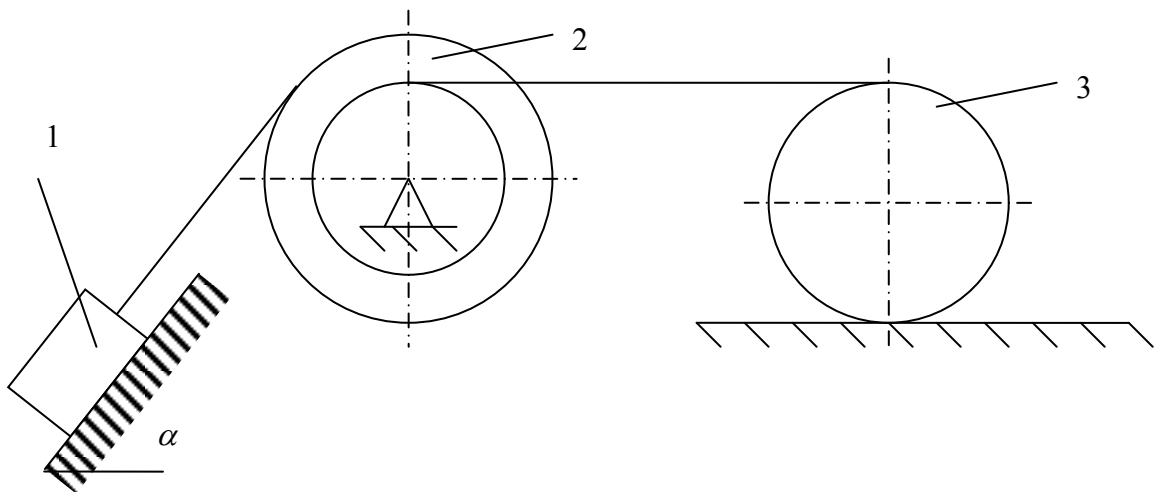


Рисунок 3.2 – Исходная схема для примера

Таблица 3.2 – Исходные данные для примера задания

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3$ , см	$f$	$\alpha$ , град
5m	m	2m	2/3	4/5	1/20	20	0,1	30

#### 3.2.3.2 Кинематический анализ системы

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы [3] и выразим все характеристики через характеристики движения тела 1, для этого составим уравнения связей.

Расположение тел системы и сведения о том, что движение начинается из состояния покоя, позволяют утверждать, что вектор скорости тела  $1$  будет направлен вниз. В случае, если направление движения было выбрано неверно, далее в п. 3.2.3.6 будет получено отрицательное значение ускорения, и в решение задачи необходимо внести правки.

Выразим скорости точек  $A$  и  $B$  блока через угловую скорость блока (рисунок 3.3):

$$v_A = \omega_2 R_2, \quad (3.1)$$

$$v_B = \omega_2 r_2. \quad (3.2)$$

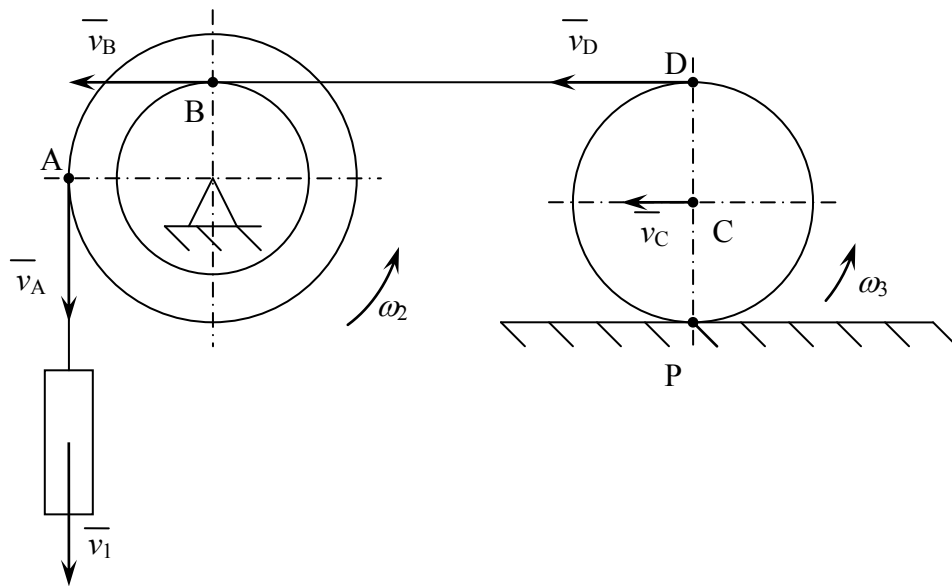


Рисунок 3.3 – Расчетная схема системы

В условии задачи не оговаривается отсутствие или наличие проскальзывания при движении катка. Поэтому на первом этапе решения будем считать, что проскальзывание отсутствует. Тогда мгновенный центр скоростей (МЦС) плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. В дальнейшем (в п. 3.2.3.7) можно будет прове-

речь, правильна ли сделанная предпосылка, и, при необходимости, решение должно быть скорректировано с этого момента.

Скорости точек  $C$  и  $D$  катка равны

$$v_C = \omega_3 R_3, \quad (3.3)$$

$$v_D = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (3.4)$$

Скорости груза и точки  $A$  блока равны, откуда

$$v_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (3.5)$$

Скорости точек  $B$  блока и  $D$  катка равны

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (3.6)$$

$$v_C = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5) – (3.7) являются уравнениями связи для системы груз – блок – каток. Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (3.9)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = R_3 \frac{d\omega_3}{dt} = R_3 \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \quad (3.10)$$

### 3.2.3.3 Определение действующих на систему сил

Рассматривая движения системы трех тел вместе, прикладываем к ним активные силы – силы тяжести  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ . По модулю:

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 g, \\ G_2 &= m_2 g, \\ G_3 &= m_3 g. \end{aligned} \tag{3.11}$$

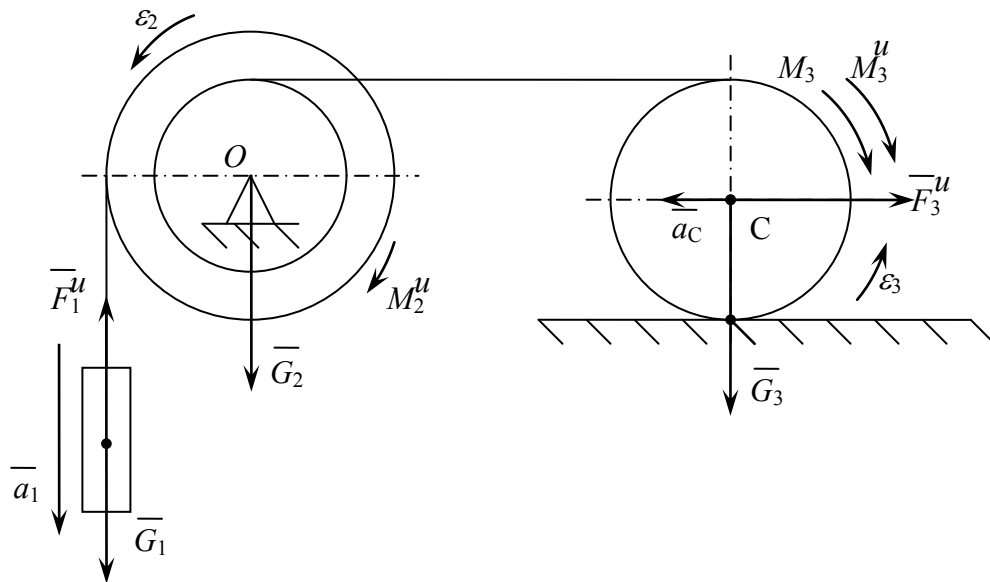


Рисунок 3.4 – Расчетная схема с указанием сил

Рассмотрим, являются ли связи, действующие на систему идеальными.

- 1) Шарнир в центре тела 2 является идеальной связью.
- 2) Поверхность, по которой катится каток 3 не является идеальной связью: при перемещении тела момент сопротивления качению совершает работу. Будем считать поверхность идеальной связью, но при этом добавим к телу момент сопротивления качению:

$$M_3 = \delta N_3. \tag{3.12}$$

Нормальную реакцию поверхности определяем из уравнения равновесия тела 3 на вертикальную ось.

$$N_3 = G_3 = m_3 g, \quad (3.13)$$

$$M_3 = N_3 \delta = m_3 g \delta. \quad (3.14)$$

Момент прикладываем в сторону противоположную движению тела.

### 3.2.3.4 Определение сил инерции

На схеме указываем ускорения центров масс тел и угловые ускорения тел. Так как движение начинается из состояния покоя, то направления ускорений будут совпадать с направлением скоростей.

Силы инерции определяем, исходя из вида движения тел.

1) Тело 1 совершает поступательное движение. По модулю сила инерции имеет значение, определяемое формулой:

$$F_1^u = m_1 a_1. \quad (3.15)$$

2) Тело 2 вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести.

Так как тело вращается, то силы инерции будут сведены к паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_2$ . Значение момента пары:

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2, \quad (3.16)$$

где  $J_2 = m_2 i_{2z}^2$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

3) Тело 3 совершает плоское движение. Силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно уско-



рению центра тяжести  $a_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_3$ . Значения силы и момента пары:

$$F_3^u = m_3 a_C, \quad (3.17)$$

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3, \quad (3.18)$$

где  $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$  – момент инерции катка относительно оси  $\xi_3$ .

### 3.2.3.5 Сообщаем системе возможное перемещение

Возможное перемещение системе сообщается в направлении действительного (рисунок 3.5).

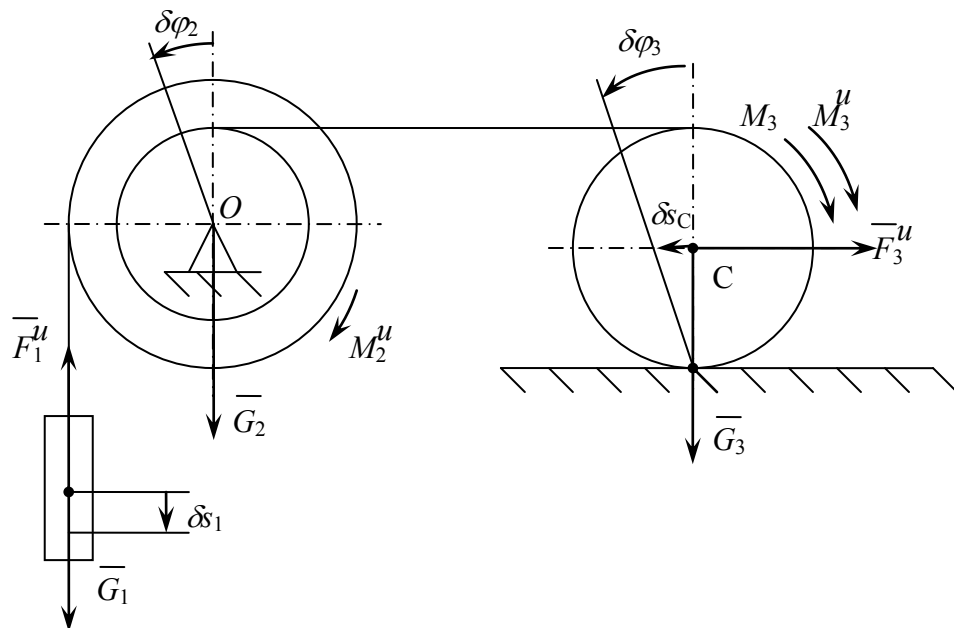


Рисунок 3.5 – Расчетная схема с указанием возможных перемещений

Зависимости между перемещениями такие же, как и между скоростями из соотношений (3.5)-(3.7):

$$\begin{aligned}\delta\varphi_2 &= \frac{\delta s_1}{R_2}, \\ \delta\varphi_3 &= \frac{\delta s_1 r_2}{2R_2 R_3}, \\ \delta s_c &= \frac{\delta s_1 r_2}{2R_2}.\end{aligned}\tag{319}$$

3.2.3.6 Составляем и решаем общее уравнение динамики

$$\sum A_k^a + \sum A_k^u = 0,\tag{3.20}$$

$$G_1 \cdot \delta s_1 - F_1^u \cdot \delta s_1 - M_2^u \cdot \delta\varphi_2 - M_3^u \cdot \delta\varphi_3 - M_3 \cdot \delta\varphi_3 - F_3^u \cdot \delta s_c = 0.\tag{3.21}$$

Учитываем значения сил из (3.11), (3.14)-(3.18), значения ускорений из (3.8)-(3.10) и перемещений из (3.20)-(3.22). Выражение (3.20) принимает вид:

$$\begin{aligned}m_1 g \cdot \delta s_1 - m_1 a_1 \cdot \delta s_1 - m_2 i_{2z}^2 \cdot \frac{a_1}{R_2} \cdot \frac{\delta s_1}{R_2} - m_3 \frac{R_3^2}{2} \cdot \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3} \cdot \frac{\delta s_1 r_2}{2R_2 R_3} - \\ - m_3 g \delta \cdot \frac{\delta s_1 r_2}{2R_2 R_3} - m_3 \cdot \frac{a_1 r_2}{2R_2} \cdot \frac{\delta s_1 r_2}{2R_2} = 0.\end{aligned}$$

После ряда преобразований, получим

$$\left( \left( m_1 - m_3 \cdot \frac{r_2 \delta}{2R_2 R_3} \right) g - \left( m_1 + m_2 \cdot \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + m_3 \cdot \frac{3r_2^2}{8R_2^2} \right) a_1 \right) \delta s_1 = 0.$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, определяем искомое ускорение:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_3 \cdot \frac{r_2 \delta}{2R_2 R_3}}{m_1 + m_2 \cdot \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + m_3 \cdot \frac{3r_2^2}{8R_2^2}} g.$$

После подстановки значений получим:

$$a_1 = \frac{5m - 2m \cdot \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 20}}{5m + m \cdot \frac{16}{25} + 2m \cdot \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 9}} g = 0,831g = 8,16 \text{ м / с}^2.$$

### 3.2.3.7 Проверка условия отсутствия проскальзывания

Для оценки возможности проскальзывания тела 3 по поверхности, тело рассматривается отдельно (рисунок 3.6). С применением принципа Даламбера определяется сила трения.

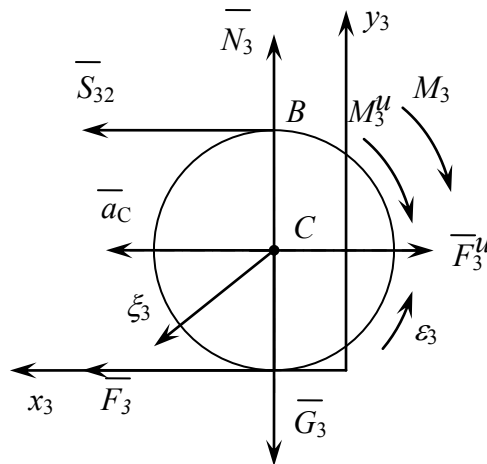


Рисунок 3.6 – Схема для определения силы трения

При этом к действующим на тело активным силам и силам инерции добавляются реакции опор – натяжение нити  $S_{32}$ , реакции поверхности  $F_3$ ,  $N_3$ ,  $M_3$ . Уравнение равновесия:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0.$$

$$-F_3'' \cdot R_3 + M_3'' + M_3 + F_3 \cdot 2R_3 = 0. \quad (3.22)$$

Решаем уравнение:

$$F_3 = \frac{F_3'' \cdot R_3 - M_3'' - M_3}{2R_3} = \frac{m_3 a_3 R_3 - m_3 R_3^2 \varepsilon_3 / 2 - m_3 g \delta}{2R_3} = \frac{m_3}{2} \left( \frac{a_1 r_2}{2R_2} - \frac{a_1 r_2}{4R_2} - g \frac{\delta}{R_3} \right),$$

$$F_3 = \frac{F_3'' \cdot R_3 - M_3'' - M_3}{2R_3} = \frac{2m \cdot 9,8}{2} \left( \frac{0,831 \cdot 2}{4 \cdot 3} - \frac{1}{20} \right) = 0,084mg.$$

Проверка условия отсутствия проскальзывания:

$$F_3 \leq N_3 f = m_3 g f,$$

$$0,084mg \leq 2mg \cdot 0,1 = 0,2mg. \quad (3.23)$$

Условие отсутствия проскальзывания соблюдается. Задача решена верно.

**Ответ:**  $a_1 = 8,16 \text{ м/с}^2$ .

### 3.2.4 Пример для случая наличия проскальзывания

Вернемся к примеру, приведенному в п. 3.2.3.7, приняв коэффициент трения скольжения  $f = 0,04$ , тогда, при проверке условия отсутствия проскальзывания (3.23), получим  $F_3 = 0,084mg > 2mg \cdot 0,04 = 0,08mg \text{ Н}$ . Следовательно, тело проскальзывает по поверхности. В этом случае не будут соблюдаться некоторые кинематические соотношения, так как скорость центра катка уже не будет пропорциональна угловой скорости.

Скорость точки  $B$  катка

$$v_B = v_C + \omega_3 R_3 \quad (3.24)$$

или

$$\omega_2 r_2 = v_C + \omega_3 R_3. \quad (3.25)$$

Откуда скорость точки  $C$

$$v_C = v_1 \frac{r_2}{R_2} - \omega_3 R_3. \quad (3.26)$$

Скорость точки  $D$

$$v_D = v_C - \omega_3 R_3 = v_1 \frac{r_2}{R_2} - 2\omega_3 R_3. \quad (3.27)$$

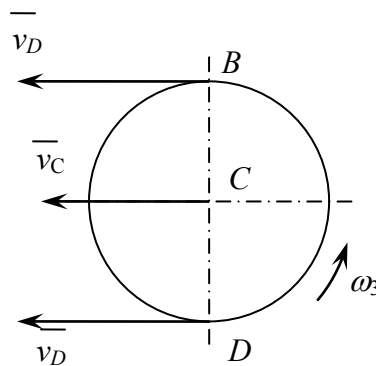


Рисунок 3.7 – Схема для определения скоростей

Ускорение точки  $C$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3. \quad (3.28)$$

Возможные перемещения точки  $C$  и точки приложения силы трения

$$\delta s_C = \delta s_1 \frac{r_2}{R_2} - \delta \varphi_3 R_3, \quad (3.29)$$

$$\delta s_D = \delta s_1 \frac{r_2}{R_2} - 2\delta \varphi_3 R_3. \quad (3.30)$$

Вновь составляем уравнение (3.19)

$$\begin{aligned} G_1 \cdot \delta s_1 - F_1^u \cdot \delta s_1 - M_2^u \cdot \delta \varphi_2 - M_3^u \cdot \delta \varphi_3 - M_3 \cdot \delta \varphi_3 - F_3^u \cdot \delta s_C + F_3 \cdot \delta s_D = 0, \\ m_1 g \cdot \delta s_1 - m_1 a_1 \cdot \delta s_1 - m_2 i_{2z}^2 \cdot \frac{a_1}{R_2} \cdot \frac{\delta s_1}{R_2} - m_3 \frac{R_3^2}{2} \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta \varphi_3 - m_3 g \delta \cdot \delta \varphi_3 - \\ - m_3 \cdot \left( a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3 \right) \cdot \left( \delta s_1 \frac{r_2}{R_2} - \delta \varphi_3 R_3 \right) + 0,084 m g \cdot \left( \delta s_1 \frac{r_2}{R_2} - 2\delta \varphi_3 R_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Подставляем известные значения и перегруппировываем слагаемые с возможными перемещениями. В результате получим:

$$\begin{aligned} \left( -2 \cdot \varepsilon_3 R_3 - \left( 5 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + 2 \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) a_1 + \left( 0,084 \cdot \frac{r_2}{R_2} + 5 \right) g \right) m \delta s_1 + \\ + \left( -3 R_3 \varepsilon_3 + 2 \frac{r_2}{R_2} \cdot a_1 - \left( 2 \frac{\delta}{R_3} + 0,084 \cdot 2 \right) g \right) m \delta \varphi_3 R_3 = 0, \\ (-0,4 \cdot \varepsilon_3 - 6,53 a_1 + 5,056 g) m \delta s_1 + \\ + (-0,6 \varepsilon_3 + 1,33 \cdot a_1 - 0,27 g) m \delta \varphi_3 R_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Так как возможные перемещения независимы, то условие (3.31) будет соблюдаться только при равенстве нулю коэффициентов перед возможными перемещениями, то есть

$$\begin{cases} -0,4 \cdot \varepsilon_3 - 6,53 a_1 + 5,056 g = 0, \\ -0,6 \varepsilon_3 + 1,33 \cdot a_1 - 0,27 g = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно неизвестных  $\varepsilon_3$ ,  $a_1$ , получим ответ:

$$\begin{cases} -0,4 \cdot \varepsilon_3 - 6,53a_1 + 5,056g = 0, \\ -0,6\varepsilon_3 + 1,33 \cdot a_1 - 0,27g = 0. \end{cases}$$
$$\varepsilon_3 = 1,11g = 10,88 \text{ рад/с}^2,$$
$$a_1 = 0,706g = 6,92 \text{ м/с}^2.$$

### 3.3 Применение принципа Даламбера-Лагранжа к решению задач с двумя степенями свободы

#### 3.3.1 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по изучению движения систем с использованием принципа Даламбера-Лагранжа необходимо использовать следующий порядок:

- 1) проводится кинематический анализ системы, то есть устанавливаются зависимости между скоростями точек системы;
- 2) при рассмотрении системы в целом прикладываются активные силы, неидеальные связи заменяются идеальными с приложением дополнительных сил, значения которых определяются;
- 3) на схеме указываются ускорения центров масс тел и угловые ускорения, прикладываются силы инерции, определяются значения этих сил;
- 4) системе сообщается возможное перемещение в направлении действительного;
- 5) составляется уравнение, выражающее принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики);

б) устанавливается зависимость между возможными перемещениями, и, в конечном итоге, все перемещения выражаются через два независимых перемещения;

7) все найденные ранее значения подставляются в общее уравнение динамики, и выполняется перегруппировка слагаемых с разными возможными перемещениями;

8) так как перемещения между собой независимы, то выражения, являющиеся для них коэффициентами, должны быть равны нулю, что сводит решение задачи к разрешающей системе из двух уравнений.

### 3.3.2 Постановка задачи и исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , трением качения пренебречь. При качении тела по поверхности считать, что качение происходит с проскальзыванием.

Пользуясь принципом Даламбера-Лагранжа, определить ускорения центров масс тел.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 3.3 задания, вторая цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 3.8. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Принять при расчетах  $m = 1,02$  кг,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. Если значения радиуса инерции не указано, то считать его однородным круглым цилиндром.



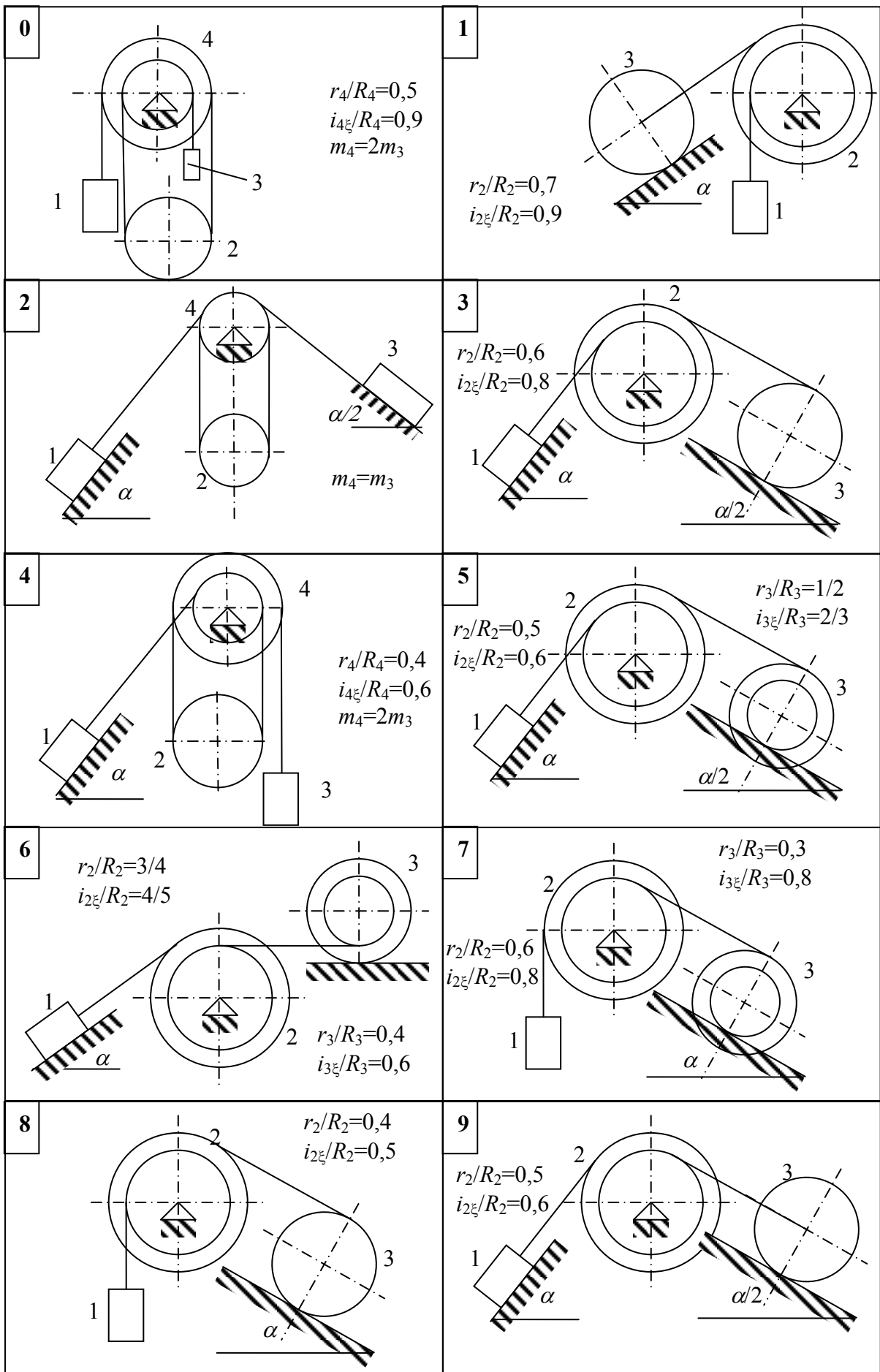


Рисунок 3.8 – Исходные схемы заданий

Таблица 3.3 – Исходные данные задания

Первая цифра варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$f$	$\alpha$ , град
0	3m	2m	m	0,05	30
1	4m	2m	m	0,1	60
2	5m	2m	m	0,05	30
3	2m	m	m/2	0,1	30
4	5m	m	m/5	0,05	60
5	4m	2m	m	0,1	30
6	2m	2m	m	0,05	45
7	3m	m	1,5m	0,1	60
8	5m	2m	m	0,05	45
9	4m	2m	m	0,1	30

П р и м е ч а н и е – Некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 0 не используются значения  $f$ ,  $\alpha$ .

### 3.3.3 Пример выполнения задачи

#### 3.3.3.1 Исходные данные

Система, состоящая из пяти абсолютно твердых тел (рисунок 3.9), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телом 1 и неподвижной поверхностью равен  $f$ . Исходные данные для примера приведены в таблице 3.4.

Пользуясь принципом Даламбера-Лагранжа определить ускорения центров масс тел.

Таблица 3.4 – Исходные данные для примера задания

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$f$
5m	3m	m	2m	2m	0,1

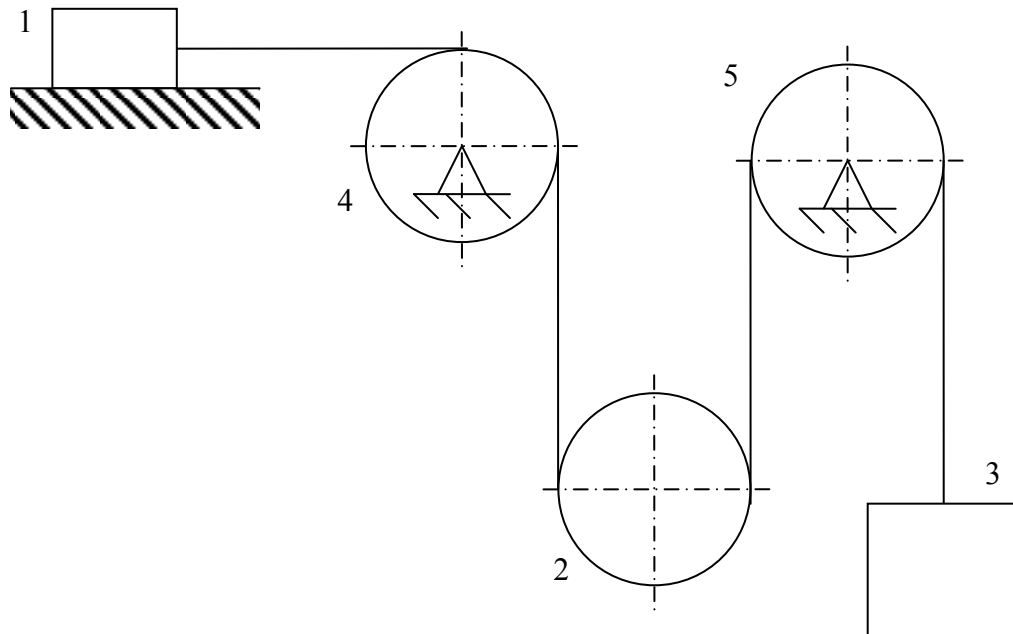


Рисунок 3.9 – Исходная схема для примера

### 3.3.3.2 Кинематический анализ системы

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы. Так как заданная система имеет две степени свободы, то выразим все скорости и угловые скорости через скорости движения тел 1 и 3. При этом будем считать, что тело 1 движется вправо, а тело 3 поднимается вверх.

Угловые скорости блоков 4 и 5 (рисунок 3.10):

$$v_1 = \omega_4 R_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{v_1}{R_4}, \quad (3.32)$$

$$v_3 = \omega_5 R_5 \Rightarrow \omega_5 = \frac{v_3}{R_5}. \quad (3.33)$$

Тело 2 совершает плоское движение, а значит скорости будут пропорциональны, таким образом скорость центра и угловую скорость тела 2 можно определить в соответствии с рисунком 3.11 по формулам:

$$v_C = \frac{v_1 + v_3}{2}, \quad (3.34)$$

$$\omega_2 = \frac{v_3 - v_1}{2R_2}. \quad (3.35)$$

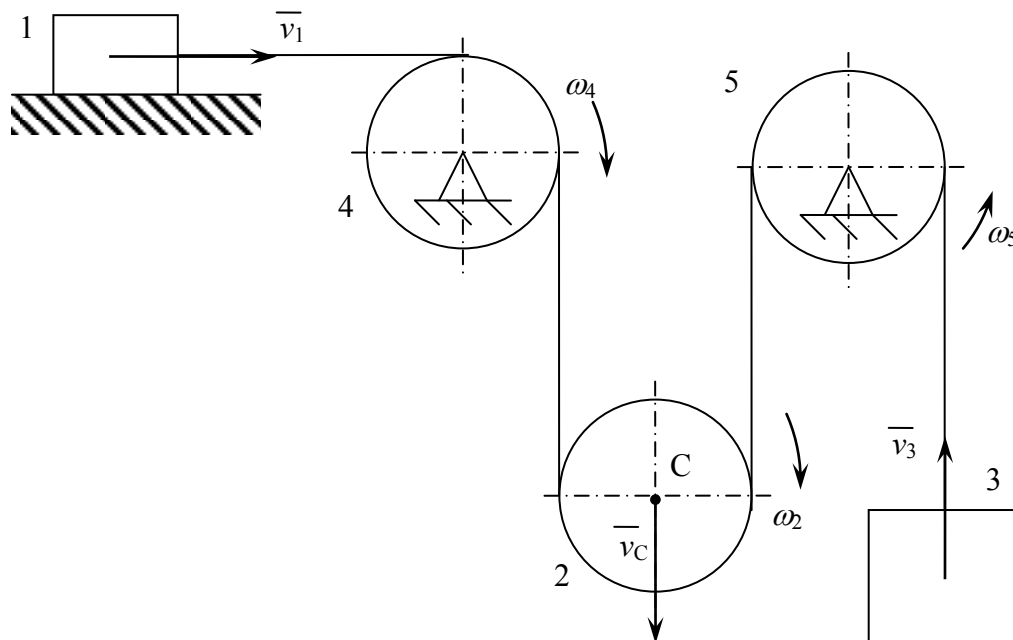


Рисунок 3.10 – Расчетная схема системы

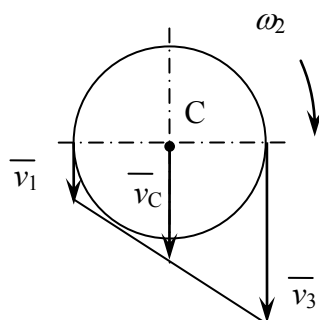


Рисунок 3.11 – Схема для определения характеристик тела 2

Уравнения (3.32) – (3.35) являются уравнениями связи для системы.

Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1}{R_4} \right) = \frac{1}{R_4} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_4}, \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{d\omega_5}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_3}{R_5} \right) = \frac{a_3}{R_5}, \quad (3.37)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v_1 + v_3)}{dt} = \frac{a_1 + a_3}{2}. \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{2R_2} \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = \frac{a_3 - a_1}{2R_2}. \quad (3.39)$$

### 3.3.3.3 Определение действующих на систему сил

Рассматривая движение системы тел вместе, прикладываем к ним активные силы – силы тяжести  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4, \bar{G}_5$ . По модулю:

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 g = 5m, \\ G_2 &= m_2 g = 3m, \\ G_3 &= m_3 g = mg, \\ G_4 &= m_4 g = 2mg, \\ G_5 &= m_5 g = 2mg. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Рассмотрим, являются ли связи, действующие на систему идеальными.

Шарниры в центре тел 4 и 5 являются идеальными связями.

Поверхность, по которой движется тело 1 не является идеальной связью: при перемещении тела сила трения совершает работу. Будем считать поверхность идеальной связью, но при этом добавим к телу силу трения:

$$F_{mp} = fN_1. \quad (3.41)$$

Нормальную реакцию поверхности определяем из уравнения равновесия тела 1 на вертикальную ось.

$$N_1 = G_1 = 5mg, \quad (3.42)$$

$$F_{mp} = 5mgf. \quad (3.43)$$

Силу трения прикладываем в сторону противоположную движению тела.

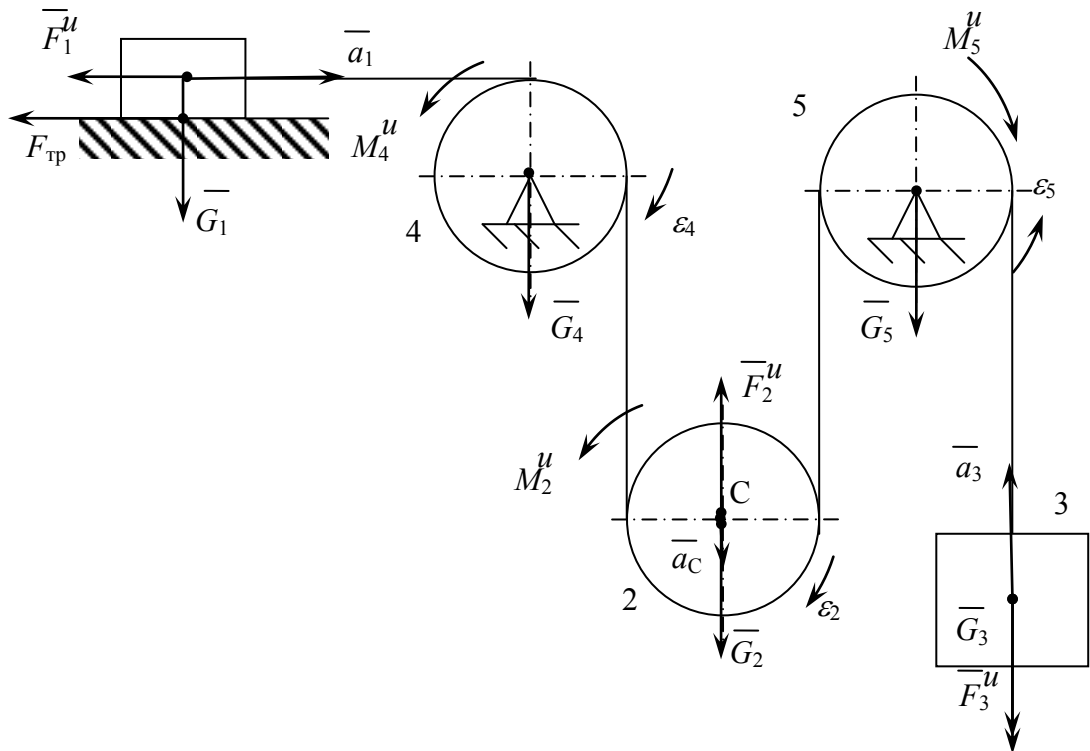


Рисунок 3.12 – Расчетная схема с указанием сил

### 3.3.3.4 Определение сил инерции

На схеме указываем ускорения центров масс тел и угловые ускорения тел. Так как движение начинается из состояния покоя, то направления ускорений будут совпадать с направлением скоростей. При подстановке ускорений будем использовать выражения (3.36)-(3.39).

Силы инерции определяем, исходя из вида движения тел.

1) Тела 1 и 3 совершают поступательное движение. По модулю силы инерции имеют значения, определяемые формулами:

$$F_1^u = m_1 a_1 = 5m a_1, \quad (3.44)$$

$$F_3^u = m_3 a_3 = m a_3. \quad (3.45)$$

3) Тела 4 и 5 вращаются вокруг осей, проходящих через центры тяжести тел.

Так как тела вращаются, то силы инерции будут сведены к парам сил, моменты которых направлены в стороны, противоположные угловым ускорениям тел. Значение моментов пар:

$$M_4^u = J_4 \varepsilon_4, \quad (3.46)$$

$$M_5^u = J_5 \varepsilon_5, \quad (3.47)$$

где  $J_4 = m_4 R_4^2 / 2$ ,  $J_5 = m_5 R_5^2 / 2$  – моменты инерции блоков относительно осей вращения.

Тогда моменты инерции:

$$M_4^u = \frac{m_4 R_4^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R_4} = \frac{2mR_4 a_1}{2} = mR_4 a_1, \quad (3.48)$$

$$M_5^u = \frac{m_5 R_5^2}{2} \cdot \frac{a_3}{R_5} = \frac{2mR_5 a_3}{2} = mR_5 a_3. \quad (3.49)$$

3) Тело 2 совершает плоское движение. Силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно ускорению центра тяжести  $a_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_2$ . Значения силы и момента пары:

$$F_2^u = m_2 a_C = 3m \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad (3.50)$$

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \frac{a_3 - a_1}{2R_2} = \frac{3m R_2 (a_3 - a_1)}{4}, \quad (3.51)$$

где  $J_2 = m_2 R_2^2 / 2$  – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр тела.

### 3.3.3.5 Сообщаем системе возможное перемещение

Возможное перемещение системе сообщается в направлении предполагаемых действительных (рисунок 3.13).

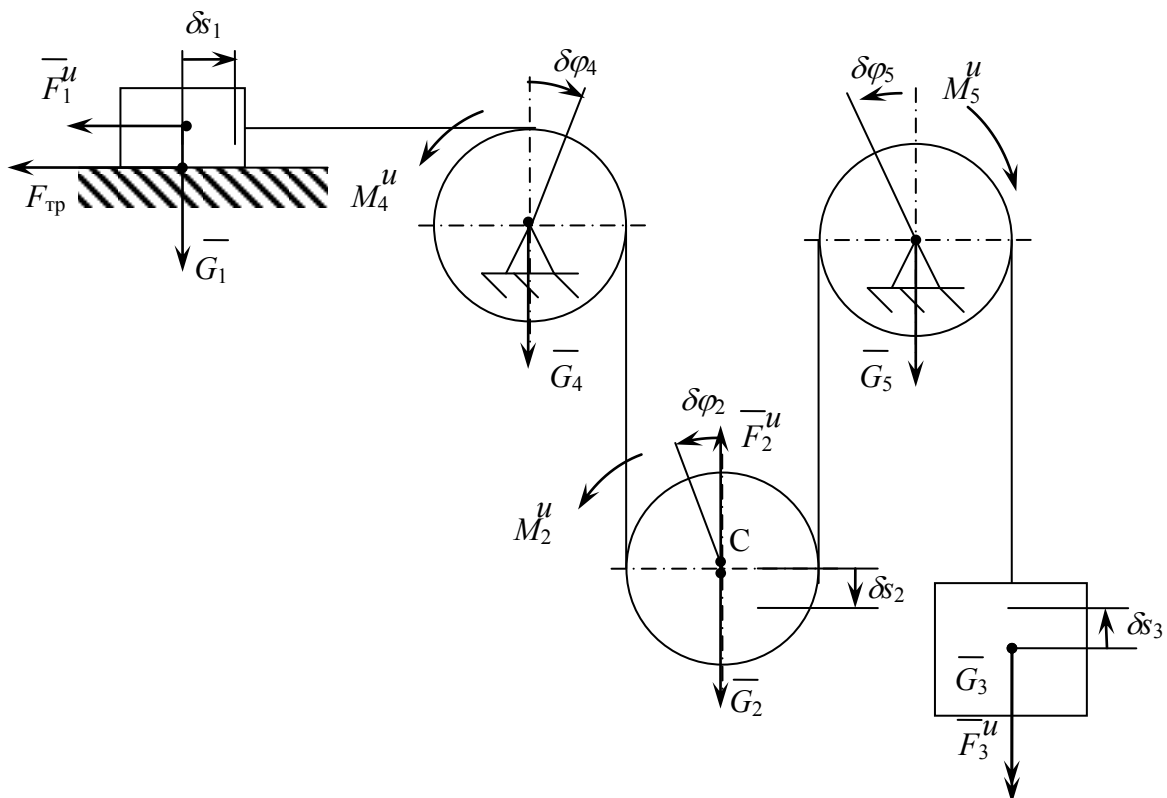


Рисунок 3.13 – Расчетная схема с указанием возможных перемещений

Зависимости между перемещениями такие же, как и между скоростями из соотношений (3.32)-(3.35):



$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_1}{R_4}, \quad (3.52)$$

$$\delta\varphi_5 = \frac{\delta s_3}{R_5}, \quad (3.53)$$

$$\delta s_C = \frac{\delta s_1 + \delta s_3}{2}, \quad (3.54)$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_3 - \delta s_1}{2R_2}. \quad (3.55)$$

### 3.3.3.6 Составляем общее уравнение динамики

$$\sum A_k^a + \sum A_k^u = 0, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} -F_1^u \cdot \delta s_1 - F_{mp} \cdot \delta s_1 - M_2^u \cdot \delta\varphi_2 - F_2^u \cdot \delta s_C + \\ + G_2 \cdot \delta s_C - F_3^u \cdot \delta s_3 - G_3 \cdot \delta s_3 - M_4^u \cdot \delta\varphi_4 - M_5^u \cdot \delta\varphi_5 = 0. \end{aligned}$$

После подстановки сил и возможных перемещений, а так же перегруппировки слагаемых, получим

$$\begin{aligned} -5ma_1 \cdot \delta s_1 - 5mgf \cdot \delta s_1 - \frac{3mR_2(a_3 - a_1)}{4} \cdot \frac{\delta s_3 - \delta s_1}{2R_2} - 3m \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot \frac{\delta s_1 + \delta s_3}{2} + \\ + 3mg \cdot \frac{\delta s_1 + \delta s_3}{2} - ma_3 \cdot \delta s_3 - mg \cdot \delta s_3 - mR_4 a_1 \cdot \frac{\delta s_1}{R_4} - mR_5 a_3 \cdot \frac{\delta s_3}{R_5} = 0, \end{aligned}$$

$$(-7,125a_1 - 0,375a_3 + g)\delta s_1 + (-0,375a_1 - 3,125a_3 + 0,5g)\delta s_3 = 0,$$

Так как возможные перемещения независимы, то условие (3.56) будет соблюдаться только при равенстве нулю коэффициентов перед возможными перемещениями. То есть должны одновременно соблюдаться условия

$$\begin{cases} 7,125a_1 + 0,375a_3 = g, \\ 0,375a_1 + 3,125a_3 = 0,5g. \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно неизвестных  $\varepsilon_3$ ,  $a_1$ , получим ответ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,133g = 1,3 \text{ м/с}^2, \\ a_1 &= 0,144g = 1,41 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Из соотношения (3.38) определяем оставшуюся неизвестную:

$$a_c = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{1,3 + 1,41}{2} = 1,36 \text{ м/с}^2.$$

Задача решена.

Все ускорения получились положительными, следовательно, предположенные направления движения тел верные. Если получатся отрицательные значения перемещений, то необходимо проверить, повлияет изменение направления движения на знак работы силы трения: если нет, то задачу можно не решать снова, если влияет, то необходимо изменить направления и решить задачу вновь.

### 3.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Какие связи называются голономными, а какие неголономными?
- 2 Какие связи называются стационарными, а какие нестационарными?
- 3 Какие связи называются удерживающими, а какие неудерживающими?
- 4 Дайте определение числу степеней свободы.
- 5 Что такое возможное перемещение?
- 6 Как определяется работа силы на возможном перемещении?
- 7 Какие связи называются идеальными?
- 8 Приведите примеры идеальных связей.
- 9 Приведите примеры неидеальных связей.
- 10 Как формулируется принцип Даламбера-Лагранжа?
- 11 Как учитывается при решении задач наличие неидеальной связи?
- 12 Какая есть особенность выбора возможных перемещений при изучении движения по сравнению с исследованием равновесия?
- 13 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при плоском движении тела?
- 14 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при вращательном движении тела?

## Список использованных источников

- 1 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. II. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1991. – 641 с.
- 2 Бертяев, В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2010. – 752 с.
- 3 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
- 4 Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 336 с.
- 5 Доев, В. С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad.: учебное пособие / В. С. Доев, Ф. А. Доронин. – СПб.: «Лань», 2010. – 592 с.
- 6 Кирсанов, М. Н. Решебник: Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
- 7 Смолин, И. Ю. Аналитическая динамика и теория колебаний: учеб. пособие / И. Ю. Смолин, В. В. Каракулов. – Томск : Томский государственный университет, 2012. – 172 с.
- 8 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
- 9 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.