

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

СТАТИКА. КИНЕМАТИКА. СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.04 Авиастроение, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 08.03.01 Строительство, 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 20.03.01 Техносферная безопасность, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника и по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Оренбург
2018

УДК 531.1+531.2(075.8)

ББК 22.21я73

С78

Рецензент – доцент, доктор технических наук Ю.А. Чирков

Авторы: Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов, Н.А. Морозов, И.И. Мосалева,
Г.В. Куча, Е.В. Дырдина

С78 Статика. Кинематика. Сборник заданий: учебное пособие/ Л.И. Кудина,
А.А. Гаврилов, Н.А. Морозов, И.И. Мосалева, Г.В. Куча, Е.В. Дырдина;
Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 101 с.
ISBN 978-5-7410-2189-7

Учебное пособие содержит задания для курсовых работ по статике и кинематике, рекомендуемых для выполнения при изучении соответствующих разделов дисциплин «Теоретическая механика» и «Механика». Приведены варианты заданий и примеры их выполнения.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 24.04.04 Авиастроение, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 08.03.01 Строительство, 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 20.03.01 Техносферная безопасность, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника и по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, а также других технических направлений подготовки при изучении дисциплин «Теоретическая механика», «Механика». Учебное пособие может быть использовано для организации самостоятельной работы обучающихся.

УДК 531.1+531.2(075.8)

ББК 22.21я73

ISBN 978-5-7410-2189-7

© Кудина Л.И.,
Гаврилов А.А.,
Морозов Н.А.,
Мосалева И.И.,
Куча Г.В.,
Дырдина Е.В., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение	4
1 Задание С1. Определение реакций опор твердого тела	5
1.1 Содержание задания С1	5
1.2 Примеры выполнения задания С1	7
2 Задание С2. Определение реакций составной конструкции (система двух тел)	14
2.1 Содержание задания С2	14
2.2 Примеры выполнения задания С2	17
3 Задание С3. Расчет плоской статически определимой фермы	35
3.1 Содержание задания С3	35
3.2 Пример выполнения задания С3	35
4 Задание С4. Равновесие произвольной пространственной системы сил	49
4.1 Содержание задания С4	49
4.2 Пример выполнения задания С4	52
5 Задание К1 Кинематика точки	56
5.1 Содержание задания К1	56
5.2 Примеры выполнения задания К1	58
6 Задание К2 Определение кинематических характеристик тел механической системы	70
6.1 Содержание задания К2	70
6.2 Пример выполнения задания К2 74	
7 Задание К3 Кинематический анализ плоского механизма	79
7.1 Содержание задания К3	79
7.2 Пример выполнения задания К3	82
8 Задание К4 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки	90
8.1 Содержание задания К4	90
8.2 Пример выполнения задания К4	92
Список использованных источников	101

Введение

Приобретение практических навыков решения задач механики – одно из важнейших условий успешного освоения курса теоретической механики и формирования соответствующих компетенций, заключающихся в умении выявлять естественнонаучную сущность проблем при решении задач профессиональной деятельности.

В настоящее учебное пособие включены 8 заданий по основным темам статики и кинематики твердого тела: четыре задания по статике и четыре задания по кинематике. Исходные данные для выбора варианта в каждом задании приведены в виде схем и таблиц. Все задания снабжены примерами выполнения с подробным решением.

Количество и содержание заданий, включаемых в курсовые работы, определяются преподавателем с учетом конкретного направления и профиля подготовки студентов.

Первые четыре задания имеют целью формирование навыков составления уравнений равновесия различных видов систем сил, действующих на абсолютно твердое тело или систему абсолютно твердых тел.

В четырех заданиях по кинематике определяются основные кинематические характеристики движения точки или твердого тела при различных случаях их движения.

Авторы настоящего пособия выражают надежду, что предлагаемый сборник заданий для курсовых работ будет полезен при организации самостоятельной работы студентов технических направлений подготовки в дополнение к уже существующим учебным пособиям.

1 Задание С1. Определение реакций опор твердого тела

1.1 Содержание задания С1

Определить реакции опорных связей плоской жесткой рамы или ломаного стержня от заданной внешней нагрузки. Схемы конструкций с действующей внешней нагрузкой показаны на рисунках 1.1 – 1.2. Исходные данные для решения задания приведены в таблице 1.1. Нагрузку, величина которой в таблице 1.1 равна нулю, на схеме не изображать.

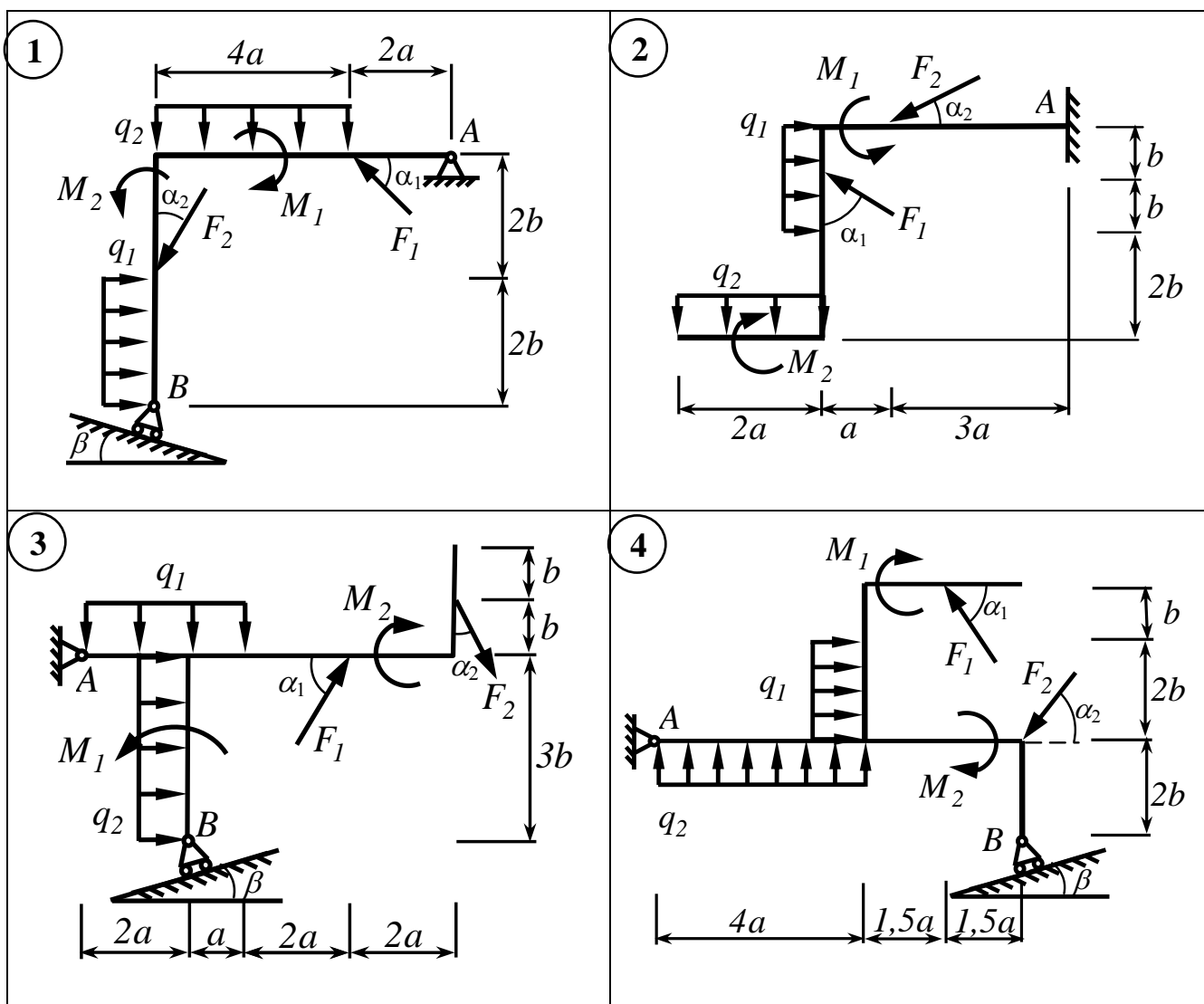


Рисунок 1.1

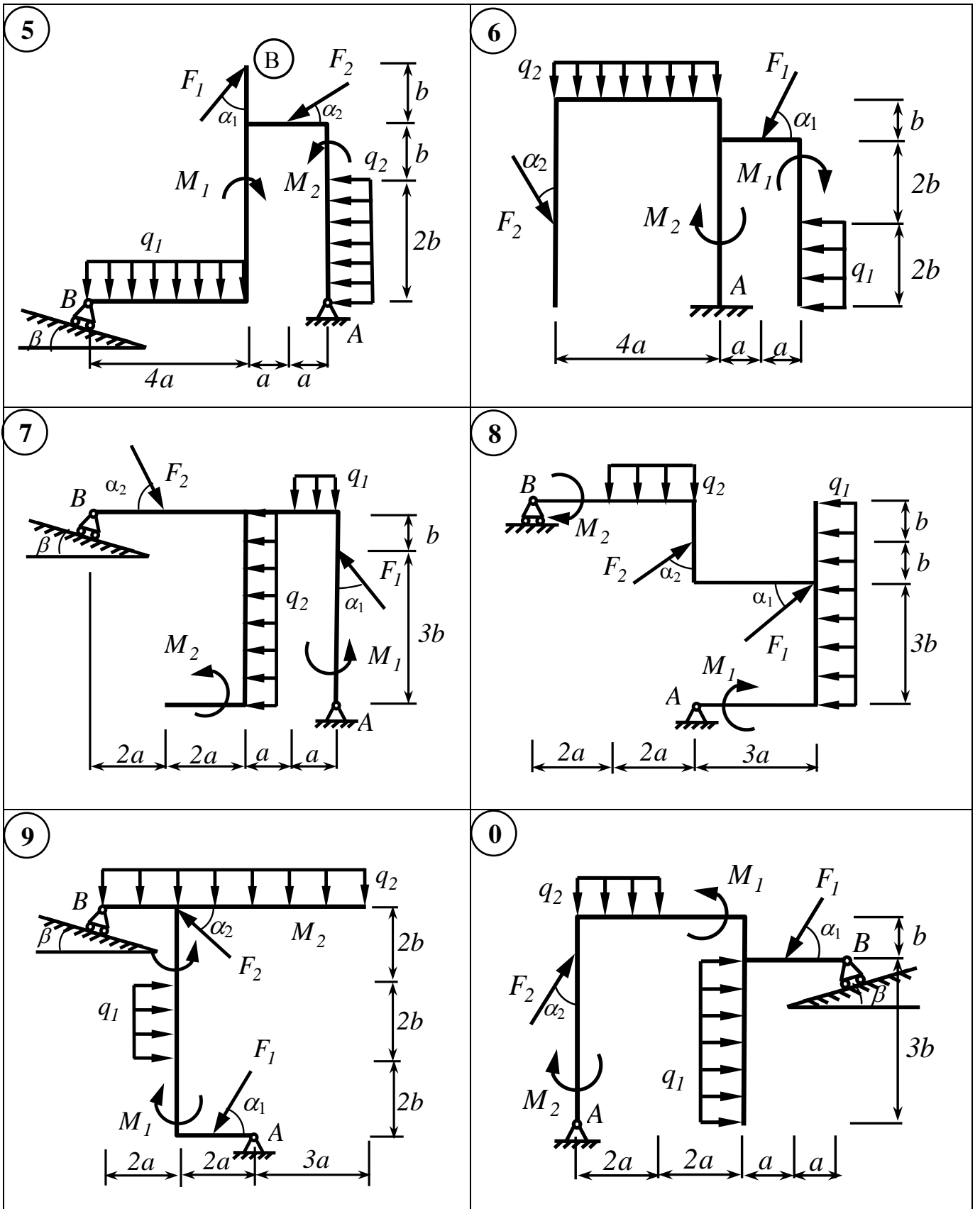


Рисунок 1.2

Таблица 1.1

Первая цифра шифра	Величина нагрузки						Размеры		Углы, град			Вторая цифра шифра (№ схемы)
	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	a , м	b , м	α_1 , град	α_2 , град	β , град	
0	4	0	0	10	5	0	1,5	3	15	60	30	0
1	0	6	15	0	0	10	1	2	60	30	15	1
2	0	3	12	0	15	0	1	0,5	75	30	15	2
3	4	0	0	8	12	0	3	1,5	30	15	60	3
4	0	5	14	0	0	8	2,5	3	60	75	15	4
5	6	0	0	18	0	15	2	1	30	75	15	5
6	5	0	0	12	0	10	0,5	1,5	75	60	30	6
7	0	4	6	0	25	0	1,5	1	15	30	60	7
8	0	6	18	0	20	0	3	2	60	15	30	8
9	5	0	0	14	0	25	2	1,5	30	60	15	9

1.2 Примеры выполнения задания С1

Пример 1.2.1

Для жесткой рамы, показанной на рисунке 1.3, определить реакции опорных связей от действующей внешней нагрузки.

Дано: $q = 2$ кН/м; $F = 6$ кН; $M = 25$ кНм.

Найти: X_A , Y_A , R_B .

Решение.

Изображаем схему конструкции с указанием внешней нагрузки и всех размеров (рисунок 1.3).

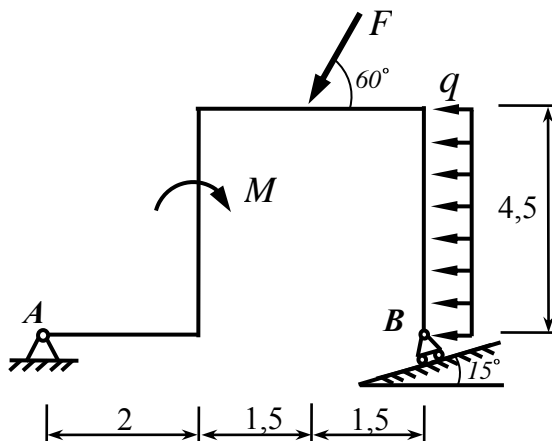


Рисунок 1.3

Воспользуемся принципом освобождаемости от связей. Мысленно отбросим опоры A и B , заменим их действие реакциями. Так как реакция неподвижного цилиндрического шарнира может иметь произвольное направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, изображаем реакцию шарнира A двумя составляющими X_A и Y_A . Реакция R_B подвижной цилиндрической опоры B направлена перпендикулярно опорной поверхности катков.

Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = 4,5q = 4,5 \cdot 2 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка. Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$ (рисунок 1.4).

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A - F \cos 60^\circ - Q - R_B \sin 15^\circ = 0, \\ Y_A - F \sin 60^\circ + R_B \cos 15^\circ = 0, \\ 5R_B \cos 15^\circ + 2,25Q + 4,5F \cos 60^\circ - 3,5F \sin 60^\circ - M = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

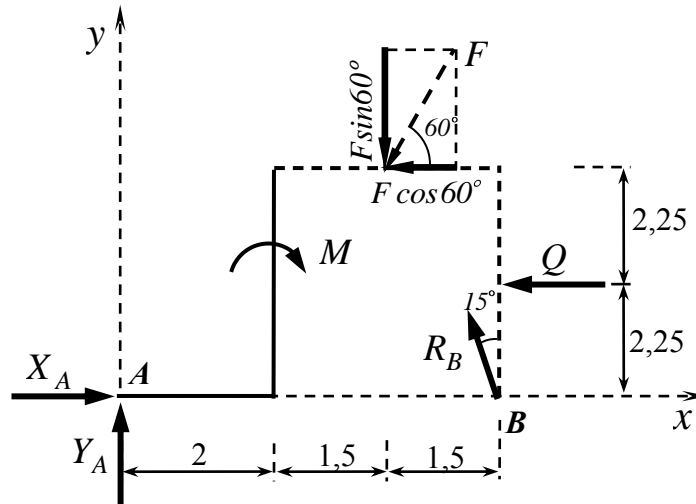


Рисунок 1.4

Полученная система трех уравнений равновесия (1.1) содержит три неизвестные реакции, поэтому задача является статически определенной и имеет единственное решение.

Решим полученную систему уравнений равновесия.

Из последнего уравнения системы определим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{M - 2,25Q - 4,5F \cos 60^\circ + 3,5F \sin 60^\circ}{5 \cos 15^\circ}.$$

Подставляя известные значения, получим:

$$R_B = \frac{25 - 2,25 \cdot 9 - 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 6 \cdot 0,866}{5 \cdot 0,966} = 1,95 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения системы (1.1) определим реакцию Y_A :

$$Y_A = F \sin 60^\circ - R_B \cos 15^\circ = 6 \cdot 0,5 - 1,95 \cdot 0,966 = 3,31 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения системы (1.1):

$$X_A = F \cos 60^\circ + Q + R_B \sin 15^\circ = 6 \cdot 0,5 + 9 + 3,31 \cdot 0,259 = 12,51 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи.

Для этого составим дополнительно не использовавшееся ранее уравнение моментов всех сил относительно точки B :

$$\begin{aligned} \sum m_C(F_{ky}) &= -5Y_A - M + 1,5F \sin 60^\circ + 4,5F \cos 60^\circ + 2,25Q = \\ &= -5 \cdot 3,31 - 25 + 1,5 \cdot 6 \cdot 0,866 + 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 2,25 \cdot 9 = -0,006 \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка выполняется, следовательно, реакции рамы определены верно.

Ответ: $X_A = 12,51 \text{ кН}$, $Y_A = 3,31 \text{ кН}$, $R_B = 1,95 \text{ кН}$.

Пример 1.2.2

Для консольного стержня, показанной на рисунке 1.5, определить реакции опорных связей от действующей внешней нагрузки.

Дано: $q = 6 \text{ кН/м}$; $F = 5 \text{ кН}$; $M = 20 \text{ кНм}$.

Найти: X_A , Y_A , M_A .

Решение.

Изображаем схему конструкции с указанием внешней нагрузки и всех размеров.

Вспользуемся принципом освобождения от связей и отбросим жесткую заделку A , заменив ее действие тремя составляющими: двумя взаимно перпендикулярными неизвестными силами X_A и Y_A и парой сил с моментом M_A .

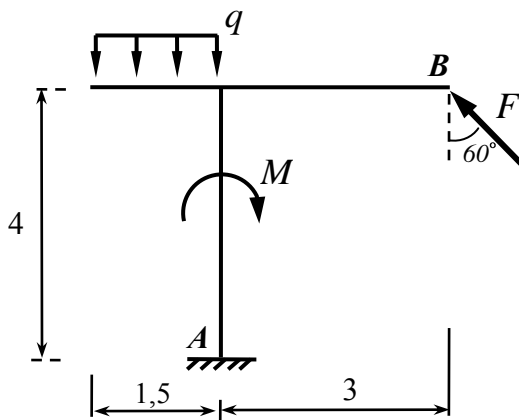


Рисунок 1.5

Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = 1,5q = 1,5 \cdot 6 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка. Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$ (рисунок 1.6).

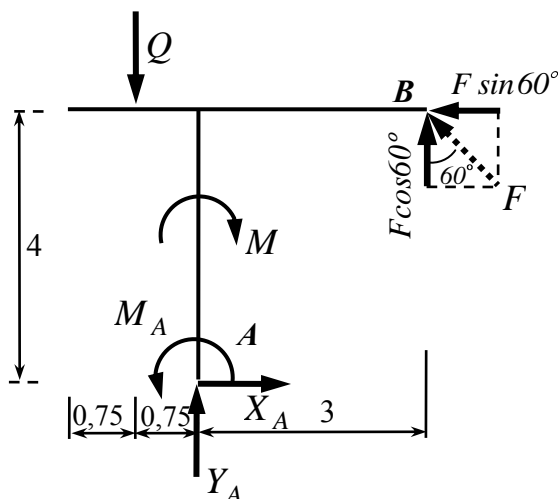


Рисунок 1.6

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на стержень. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки A как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A - F \sin 60^\circ = 0, \\ Y_A + F \cos 60^\circ - Q = 0, \\ M_A - M + 0,75Q + 3F \cos 60^\circ + 4F \sin 60^\circ = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Полученная система трех уравнений равновесия содержит три неизвестные реакции, поэтому задача является статически определенной и имеет единственное решение.

Решая полученную систему уравнений равновесия, найдем значения неизвестных реакций:

Из последнего уравнения системы (3.7) определим реакцию R_B :

$$X_A = F \sin 60^\circ = 5 \cdot 0,866 = 4,33 \text{ кН};$$

$$Y_A = -F \cos 60^\circ + Q = -5 \cdot 0,5 + 9 = 6,5 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_A &= M - 0,75Q - 3F \cos 60^\circ - 4F \sin 60^\circ = \\ &= 20 - 0,75 \cdot Q - 3 \cdot 5 \cdot 0,5 - 4 \cdot 5 \cdot 0,866 = -11,57 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Знак «минус» указывает, что истинное направление реактивной пары с моментом M_A противоположно показанному на чертеже.

Проверим правильность решения задачи.

Для этого составим не использовавшееся ранее уравнение моментов всех сил относительно точки B и подставим в него найденные значения реакций.

$$\begin{aligned}\sum m_B(\bar{F}_k) &= 3,75Q - M + M_A + 4X_A - 3Y_A = \\ &= 3,75 \cdot 9 - 20 - 11,57 + 4 \cdot 4,33 - 3 \cdot 6,5 = 0.\end{aligned}$$

Проверка выполняется, следовательно, реакции стержня вычислены правильно.

Ответ: $X_A = 4,33 \text{ кН}$, $Y_A = 6,5 \text{ кН}$, $M_A = -11,57 \text{ кН}$.

2 Задание С2. Определение реакций составной конструкции (система двух тел)

2.1 Содержание задания С2

Определить реакции внешних и внутренних связей составной конструкции, состоящей из двух твердых тел, от заданной внешней нагрузки, используя метод расчленения.

Схемы конструкций с действующей внешней нагрузкой показаны на рисунках 2.1 - 2.2.

Исходные данные для решения задания приведены в таблице 2.1. Нагрузку, величина которой в таблице 2.1 равна нулю, на схеме не изображать.

Опоры конструкций на рисунках 2.1 – 2.2, не показаны, они устанавливаются в соответствии с выбранным номером условия из таблицы 2.1. Типы опор и варианты их установки указаны в таблице 2.2. Конструкция подвижных шарниров исключает отрыв катков от опорной плоскости.

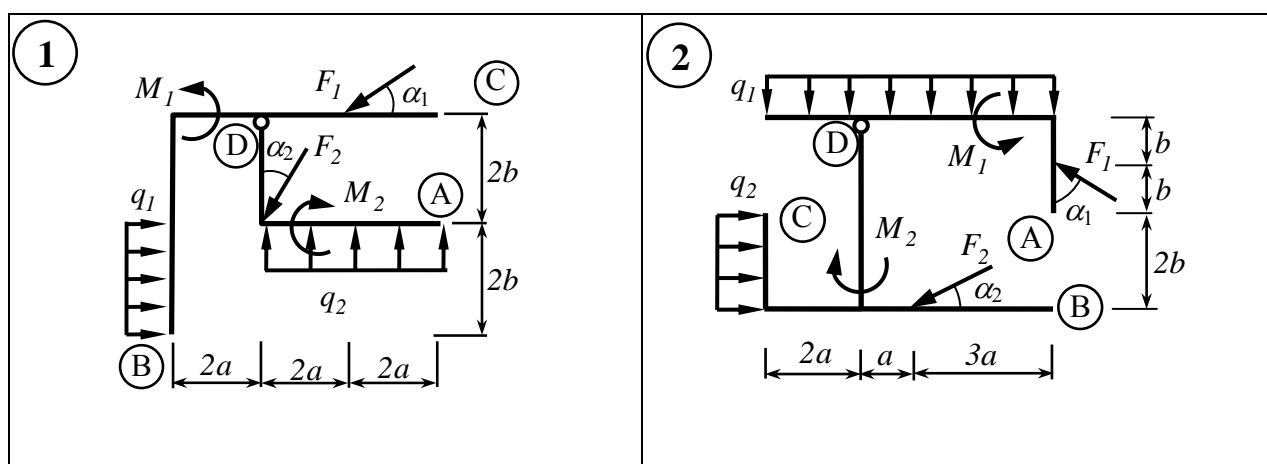


Рисунок 2.1

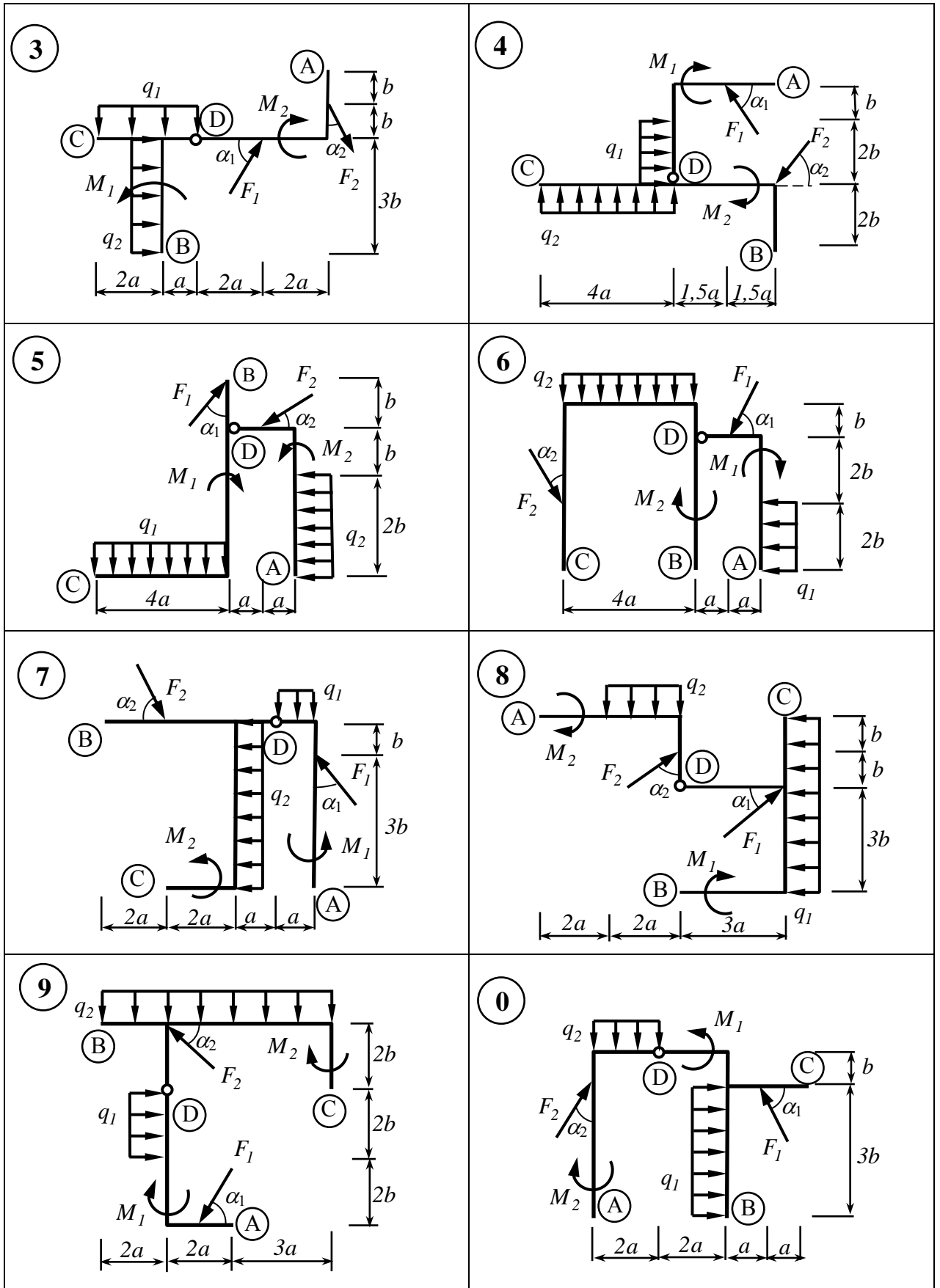


Рисунок 2.2

Таблица 2.1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	Величина нагрузки				Размеры				Углы, град				Точки установки опорных связей				Вторая цифра шифра (№ схемы)
	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	a , м	b , м	α_1	α_2	1 тип	2 тип	3 тип	4 тип	5 тип	β , град	
0	4	0	0	12	5	0	1,5	3	15	60	-	A	-	C	B	60	0
1	0	2	10	0	0	8	1	2	60	30	A	-	-	-	B	45	1
2	0	4	8	0	12	0	1	0,5	75	30	-	A,C	-	-	-	-	2
3	2	0	0	6	3	0	3	1,5	30	15	C	-	-	-	A	60	3
4	0	5	4	0	0	6	2,5	3	60	75	B	-	-	-	A	45	4
5	5	0	0	8	0	10	2	1	30	75	-	A,B	-	-	-	-	5
6	3	0	0	10	0	12	0,5	1,5	75	60	-	B	-	A	C	60	6
7	0	2	6	0	4	0	1,5	1	15	30	-	C	B	A	-	-	7
8	0	3	12	0	8	0	3	2	60	15	A	-	-	-	C	30	8
9	3	0	0	4	0	5	2	1,5	30	60	-	C	A	-	B	45	9

Таблица 2.2

Виды связей и варианты их установки				
1 тип	2 тип	3 тип	4 тип	5 тип
жесткая заделка	неподвижный цилиндрический шарнир	подвижный цилиндрический шарнир на вертикальных направляющих	подвижный цилиндрический шарнир на горизонтальных направляющих	подвижный цилиндрический шарнир на наклонных направляющих
				

2.2 Примеры выполнения задания С2

Пример 2.2.1

Для конструкции, показанной на рисунке 2.3, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

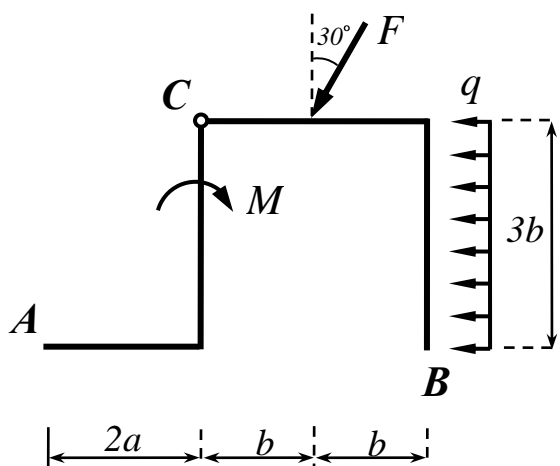


Рисунок 2.3

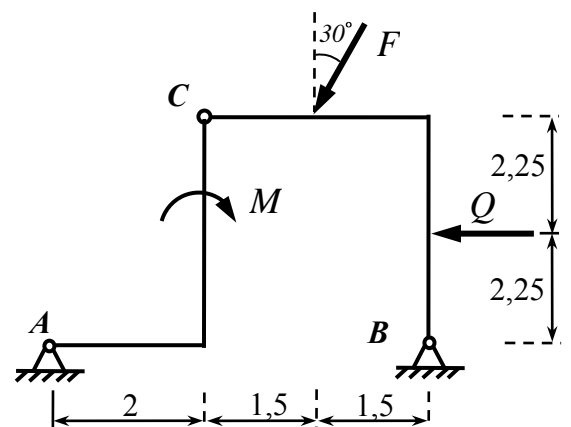


Рисунок 2.4

Дано: $q = 2 \text{ кН/м}$; $F = 6 \text{ кН}$; $M = 25 \text{ кНм}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 1,5 \text{ м}$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A и B – связи 2-го типа.

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot 3b = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 2.4).

Рассмотрим равновесие всей конструкции в целом. Воспользуемся принципом освобождения от связей. Мысленно отбросим внешние связи системы (опоры A и B) и заменим их действие реакциями. Так как реакция неподвижного цилиндрического шарнира может иметь произвольное направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, изображаем реакцию каждого из опорных шарниров A и B двумя составляющими X_A, Y_A и X_B, Y_B . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 30^\circ$ и $F'' = F \sin 30^\circ$ (рисунок 2.5).

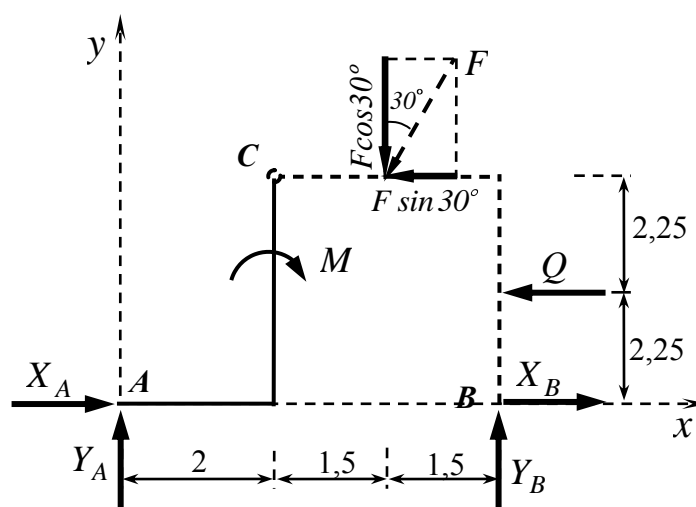


Рисунок 2.5

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 30^\circ$ и $F'' = F \sin 30^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_B - F \sin 30^\circ - Q = 0, \\ 5Y_B + 2,25Q + 4,5F \sin 30^\circ - 3,5F \cos 30^\circ - M = 0, \\ -5Y_A - M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (2.1) содержит четыре неизвестные реакции, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие одной из частей конструкции.

Мысленно отбросим внутреннюю связь в шарнире C , разделив тем самым конструкцию на две части, и рассмотрим равновесие левой части рамы под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных связей (рисунок 2.6).

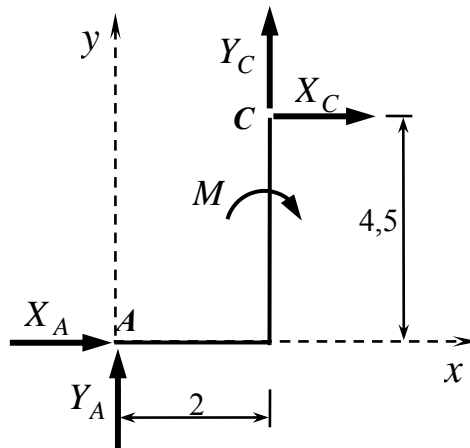


Рисунок 2.6

Реакции шарнира C изображаем на чертеже двумя составляющими X_C и Y_C . Следует обратить внимание на то, чтобы составляющие реакции шарнира A на рисунке 2.6 совпадали с соответствующими реакциями, изображенными ранее на рисунке 2.5.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на левую часть рамы:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_C = 0, \\ Y_A + Y_C = 0, \\ 2Y_C - 4,5X_C - M = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Заметим, что три составленных уравнения (2.2) содержат дополнительно только две новые неизвестные реакции X_C и Y_C . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (2.1). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (2.1) - (2.2) содержат шесть неизвестных реакций X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C и Y_C , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_B - F \sin 30^\circ - Q = 0, & (1) \\ 5Y_B + 2,25Q + 4,5F \sin 30^\circ - 3,5F \cos 30^\circ - M = 0, & (2) \\ -5Y_A - M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q = 0, & (3) \\ X_A + X_C = 0, & (4) \\ Y_A + Y_C = 0, & (5) \\ 2Y_C - 4,5X_C - M = 0. & (6) \end{cases} \quad (2.3)$$

Из второго уравнения системы (2.3) определим реакцию Y_B :

$$Y_B = \frac{-2,25Q - 4,5F \sin 30^\circ + 3,5F \cos 30^\circ + M}{5}.$$

Подставляя известные значения, получим:

$$Y_B = \frac{-2,25 \cdot 9 - 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 6 \cdot 0,866 + 25}{5} = 1,89 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения системы (2.3) определим реакцию Y_A :

$$Y_A = \frac{-M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q}{5},$$

$$Y_A = \frac{-25 + 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 6 \cdot 0,866 + 2,25 \cdot 9}{5} = 3,31 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) системы (2.3):

$$Y_C = -Y_A = -3,31 \text{ кН}.$$

Зная величину реакции Y_C , из последнего шестого уравнения системы (2.3) определим значение X_C :

$$X_C = \frac{2Y_C - M}{4,5} = \frac{2 \cdot (-3,31) - 25}{4,5} = -7,03 \text{ кН}.$$

Затем из уравнения (4) системы (2.3) найдем:

$$X_A = -X_C = -(-7,03) = 7,03 \text{ кН}.$$

Последнюю неизвестную реакцию X_B определим из уравнения (1) системы (2.3):

$$X_B = F \sin 30^\circ + Q - X_A = 6 \cdot 0,5 + 9 - 7,03 = 4,97 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие правой части рамы под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных связей (рисунок 2.7). На правую часть рамы, кроме известных

активных сил F и Q действуют реакции отброшенных шарниров X_C , Y_C , X_B и Y_B . Обратим особое внимание на то, чтобы реакции внешней связи шарнира B совпадали с уже показанными ранее на рисунке 2.5. Реакции внутренней связи шарнира C также были уже изображены ранее на рисунке 2.6. Но если ранее реакции X_C и Y_C заменяли действие отброшенной правой части рамы на рассматриваемую левую часть, то теперь, рассматривая равновесие правой части, мы должны заменить реакциями X_C и Y_C действие отброшенной левой части рамы на рассматриваемую правую. Следовательно, на основании аксиомы равенства действия и противодействия эти реакции на правой части рамы должны быть **попарно равно и противоположно направлены** соответствующим реакциям, показанным на левой части рамы.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

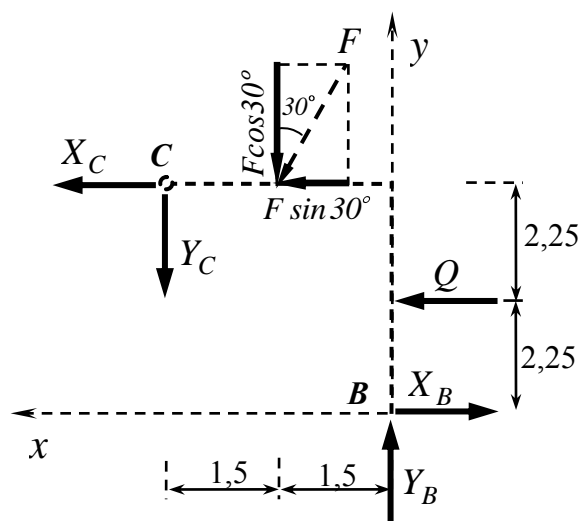


Рисунок 2.7

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_C(F_{ky}) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_C + Q - X_B + F \sin 30^\circ = 0, \\ -Y_C - F \cos 30^\circ + Y_B = 0, \\ -1,5F \cos 30^\circ - 2,25Q + 3Y_B + 4,5X_B = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям (2.4):

$$\begin{cases} -7,03 + 9 - 4,97 + 6 \cdot 0,5 = 0, \\ -(-3,31) - 6 \cdot 0,866 + 1,89 = 0, \\ -1,5 \cdot 6 \cdot 0,866 - 2,25 \cdot 9 + 3 \cdot 1,89 + 4,5 \cdot 4,97 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия (2.4) выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 2.3

X_A , кН	Y_A , кН	X_B , кН	Y_B , кН	X_C , кН	Y_C , кН
7,03	3,31	4,97	1,89	-7,03	-3,31

Пример 2.2.2

Для конструкции, показанной на рисунке 2.8, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

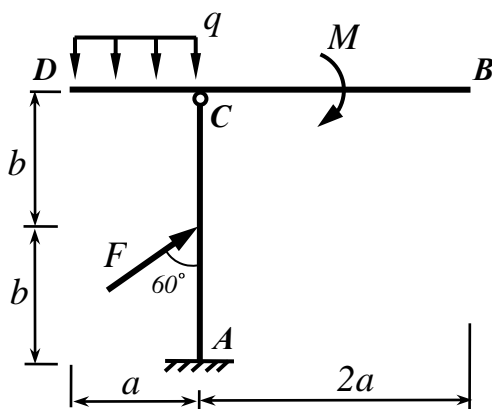


Рисунок 2.8

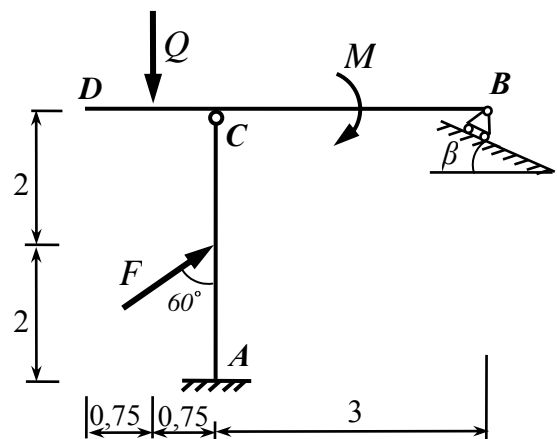


Рисунок 2.9

Дано: $q = 6 \text{ кН/м}$; $F = 2 \text{ кН}$; $M = 20 \text{ кНм}$; $a = 1,5 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$, $\beta = 30^\circ$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A – связь 1-го типа, в т. B – связь 5-го типа.

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot a = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 2.9).

Воспользуемся принципом освобождаемости от связей и отбросим все внешние и внутренние связи системы (опоры A , B и внутренний шарнир C), заменив их действие реакциями. Изобразим каждую часть исходной конструкции на отдельном чертеже с указанием всех действующих активных сил и реакций отброшенных связей.

На нижнюю часть рамы AC действуют активная сила F , составляющие реакции жесткой заделки X_A , Y_A и M_A и реакция внутреннего шарнира C , которую изображаем двумя составляющими X_C и Y_C . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$ (рисунок 2.10).

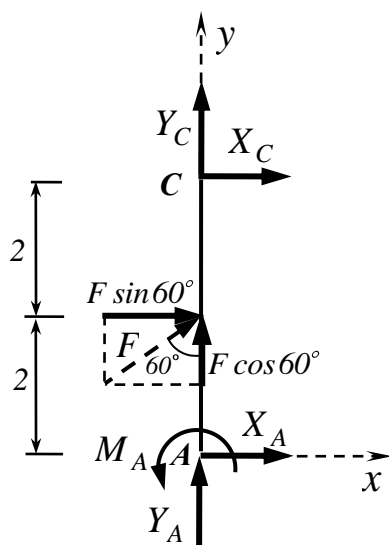


Рисунок 2.10

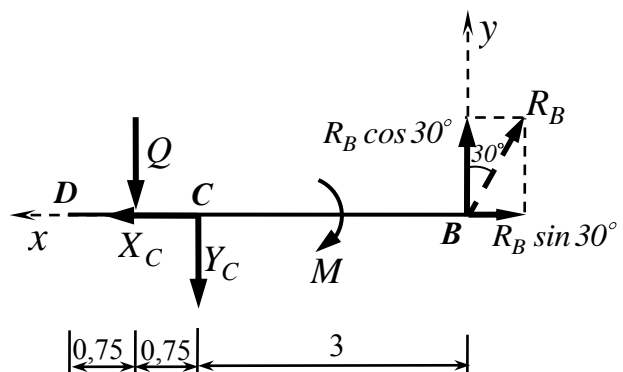


Рисунок 2.11

На верхнюю часть рамы BCD действуют активная сила Q , пара с моментом M , реакция подвижного шарнира R_B , направленная перпендикулярно опорной поверхности шарнира B , и две составляющие реакции внутреннего шарнира C X_C и Y_C (рисунок 2.11). Реакцию подвижного шарнира R_B раскладываем на перпендикулярные составляющие $R'_B = R_B \cos 30^\circ$ и $R''_B = R_B \sin 30^\circ$. Обращаем особое внимание на то, чтобы составляющие реакции внутренней связи X_C и Y_C , действующие на верхнюю часть рамы BCD , были попарно равны и противоположно направлены соответствующим реакциям внутренней связи, приложенным к нижней части рамы AC (рисунки 2.10 и 2.11).

Рассмотрим равновесие нижней части рамы AC (рисунок 2.10) и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на эту часть. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки A как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_C + F \sin 60^\circ = 0, \\ Y_A + Y_C + F \cos 60^\circ = 0, \\ M_A - 2F \sin 60^\circ - 4X_C = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (2.5) содержит пять неизвестных реакций, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие второй части конструкции BCD (рисунок 2.11). При определении момента силы R_B также воспользуемся теоремой Вариньона и определим ее момент относительно выбранной точки C как сумму моментов составляющих сил $R'_B = R_B \cos 30^\circ$ и $R''_B = R_B \sin 30^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} -X_C + R_B \sin 30^\circ = 0, \\ -Q - Y_C + R_B \cos 30^\circ = 0, \\ 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Заметим, что три составленных уравнения (2.6) содержат дополнительно только одну новую неизвестную реакцию R_B . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (2.5). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (2.5) - (2.6) содержат шесть неизвестных реакций X_A , Y_A , M_A , R_B , X_C и Y_C , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_C + F \sin 60^\circ = 0, & (1) \\ Y_A + Y_C + F \cos 60^\circ = 0, & (2) \\ M_A - 2F \sin 60^\circ - 4X_C = 0, & (3) \\ -X_C + R_B \sin 30^\circ = 0, & (4) \\ -Q - Y_C + R_B \cos 30^\circ = 0, & (5) \\ 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ = 0. & (6) \end{cases} \quad (2.7)$$

Из последнего уравнения системы (2.7) определим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{-0,75Q + M}{3 \cos 30^\circ} = \frac{-0,75 \cdot 9 + 20}{3 \cdot 0,866} = 5,1 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) системы (2.7) определим реакцию Y_C :

$$Y_C = -Q + R_B \cos 30^\circ = -9 + 5,1 \cdot 0,866 = -4,58 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) системы (2.7) определим реакцию X_C :

$$X_C = R_B \sin 30^\circ = 5,1 \cdot 0,5 = 2,55 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3) системы (2.7) найдем M_A :

$$M_A = 2F \sin 60^\circ + 4X_C = 2 \cdot 2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 2,55 = 13,66 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) системы (2.7) найдем Y_A :

$$Y_A = -Y_C - F \cos 60^\circ = -(-4,58) - 2 \cdot 0,5 = 3,58 \text{ кН}.$$

Неизвестную реакцию X_A определим из уравнения (1) системы (2.7):

$$X_A = -X_C - F \sin 60^\circ = -2,55 - 2 \cdot 0,866 = -4,28 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие всей рамы (без деления на отдельные части) под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных внешних связей X_A , Y_A , M_A и R_B (рисунок 212). Обратим особое внимание на то, что составляющие реакции внутренней связи шарнира C на рисунке 2.12 **не показаны**, так как эта связь не была отброшена.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(F_{ky}) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + F \sin 60^\circ + R_B \sin 30^\circ = 0, \\ Y_A + F \cos 60^\circ - Q + R_B \cos 30^\circ = 0, \\ M_A - 2F \sin 60^\circ + 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ - 4R_B \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

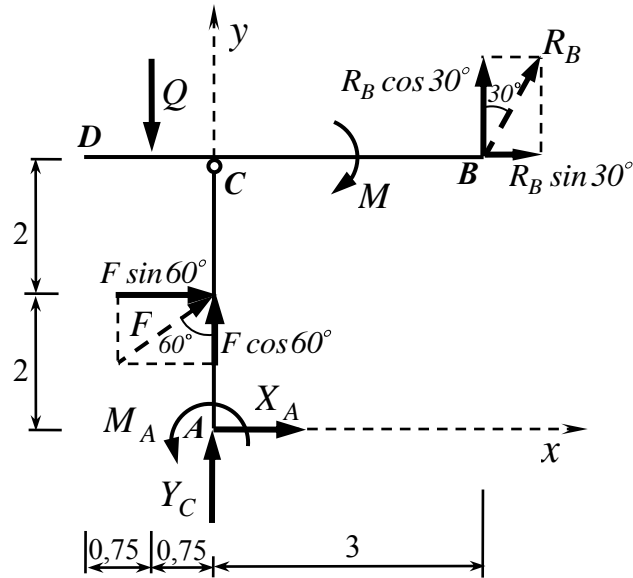


Рисунок 2.12

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} -4,28 + 2 \cdot 0,866 + 5,1 \cdot 0,5 = 0, \\ 3,58 + 2 \cdot 0,5 - 9 + 5,1 \cdot 0,866 = 0, \\ 13,66 - 2 \cdot 2 \cdot 0,866 + 0,75 \cdot 9 - 20 + 3 \cdot 5,1 \cdot 0,866 - 4 \cdot 5,1 \cdot 0,5 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 2.4

X_A , кН	Y_A , кН	M_A , кН	R_B , кН	X_C , кН	Y_C , кН
-4,28	3,58	13,66	5,1	2,55	-4,58

Пример 2.2.3

Для конструкции, показанной на рисунке 2.13, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

Дано: $q = 3 \text{ кН/м}$; $F = 8 \text{ кН}$; $M = 24 \text{ кНм}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 1,5 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A – связь 2-го типа, в т. B – связь 4-го типа, в т. C – связь 5-го типа.

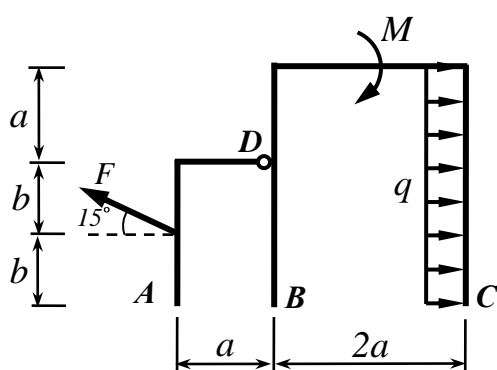


Рисунок 2.13

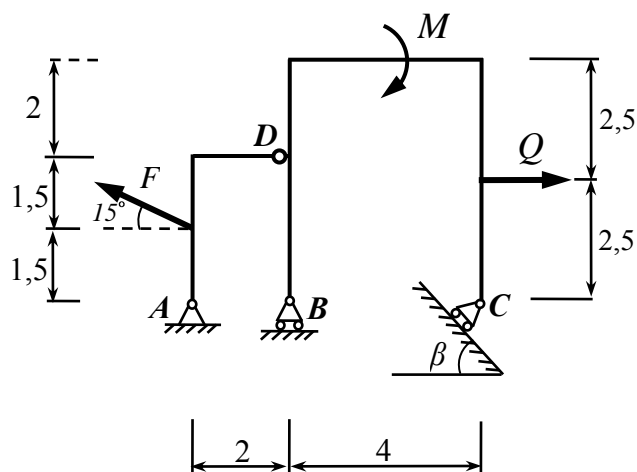


Рисунок 2.14

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot (a + 2b) = 3 \cdot 5 = 15 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 2.14).

Воспользуемся принципом освобождаемости от связей и отбросим все внешние и внутренние связи системы (опоры A , B , C и внутренний шарнир D), заменив их действие реакциями. Изобразим каждую часть исходной конструкции на отдельном чертеже с указанием всех действующих активных сил и реакций отброшенных связей.

На левую часть рамы AD (рисунок 2.15) действуют активная сила F , составляющие реакции неподвижного шарнира X_A , Y_A и реакция внутреннего шарнира D , которую изображаем двумя составляющими X_D и Y_D . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 15^\circ$ и $F'' = F \sin 15^\circ$.

На правую часть рамы BDC (рисунок 2.16) действуют активная сила Q , пара сил с моментом M , реакции подвижных шарниров R_B и R_C , направленные перпендикулярно опорным поверхностям соответствующих подвижных шарниров B и C , и две составляющие реакции внутреннего шарнира D X_D и Y_D . Реакцию подвижного шарнира R_C раскладываем на перпендикулярные составляющие $R'_C = R_C \cos 45^\circ$ и $R''_C = R_C \sin 45^\circ$. Обращаем особое внимание на то, чтобы составляющие реакции внутренней связи X_D и Y_D , действующие на правую часть рамы BDC , были попарно равны и противоположно направлены соответствующим реакциям внутренней связи, приложенным к левой части рамы AD (рисунки 2.15 и 2.16).

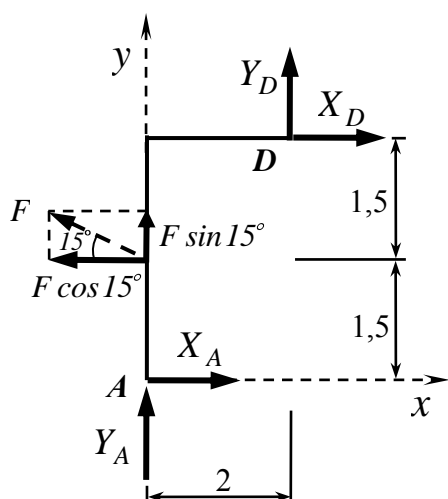


Рисунок 2.15

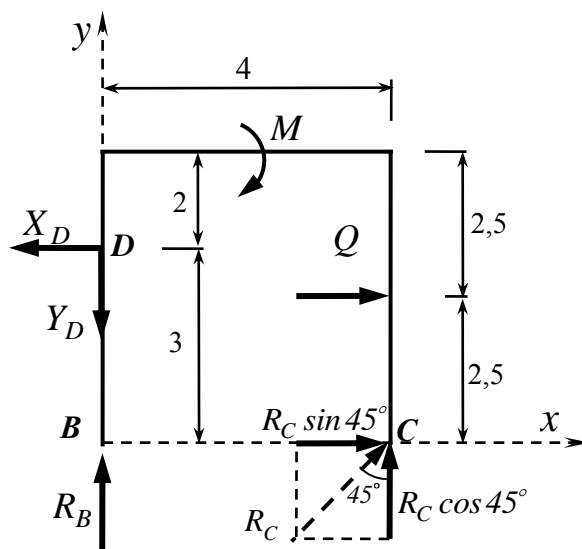


Рисунок 2.16

Рассмотрим равновесие левой части рамы AD и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на эту часть. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки A как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 15^\circ$ и $F'' = F \sin 15^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_D - F \cos 15^\circ = 0, \\ Y_A + Y_D + F \sin 15^\circ = 0, \\ 2Y_D - 3X_D + 1,5F \cos 15^\circ = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (2.8) содержит четыре неизвестные реакции, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие второй части конструкции BDC (рисунок 2.16). При определении момента силы R_C также воспользуемся теоремой Вариньона и определим ее момент относительно выбранной точки как сумму моментов составляющих сил $R'_C = R_C \cos 45^\circ$ и $R''_C = R_C \sin 45^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_D(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} -Y_D + R_B + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ 3X_D + 4R_C \cos 45^\circ - 2,5Q - M = 0, \\ 3R_C \sin 45^\circ + 4R_C \cos 45^\circ + 0,5Q - M = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Заметим, что три составленных уравнения (2.9) содержат дополнительно только две новых неизвестных реакции R_B и R_C . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (2.8). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (2.8) - (2.9) содержат шесть неизвестных реакций X_A , Y_A , R_B , R_C , X_D и Y_D , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_D - F \cos 15^\circ = 0, & (1) \\ Y_A + Y_D + F \sin 15^\circ = 0, & (2) \\ 2Y_D - 3X_D + 1,5F \cos 15^\circ = 0, & (3) \\ -Y_D + R_B + R_C \cos 45^\circ = 0, & (4) \\ 3X_D + 4R_C \cos 45^\circ - 2,5Q - M = 0, & (5) \\ 3R_C \sin 45^\circ + 4R_C \cos 45^\circ + 0,5Q - M = 0. & (6) \end{cases} \quad (2.10)$$

Из последнего уравнения системы (2.10) определим значение реакции R_C :

$$R_C = \frac{M - 0,5Q}{3 \sin 45^\circ + 4 \cos 45^\circ} = \frac{24 - 0,5 \cdot 15}{7 \cdot 0,707} = 3,33 \text{ кН}.$$

Затем из уравнения (5) системы (2.10) определим реакцию X_D :

$$X_D = \frac{M - 4R_C \cos 45^\circ + 2,5Q}{3} = \frac{24 - 4 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 2,5 \cdot 15}{3} = 17,36 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3) системы (2.10) найдем реакцию Y_D :

$$Y_D = \frac{3X_D - 1,5F \cos 15^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 17,36 - 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966}{2} = 20,24 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) системы (2.10) найдем R_B :

$$R_B = Y_D - R_C \cos 45^\circ = 20,24 - 3,33 \cdot 0,707 = 17,89 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) системы (2.10) найдем Y_A :

$$Y_A = -Y_D - F \sin 15^\circ = -20,24 - 8 \cdot 0,259 = -22,31 \text{ кН}.$$

Неизвестную реакцию X_A определим из первого уравнения системы (2.10):

$$X_A = -X_D + F \cos 15^\circ = -17,36 + 8 \cdot 0,966 = -9,63 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие всей рамы (без деления на отдельные части) под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных внешних связей X_A , Y_A , R_B и R_C (рисунок 2.17). Обратим особое внимание на то, что составляющие реакции внутренней связи (шарнира D) на рисунке 2.17 *не показаны*, так как эта связь не была отброшена.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

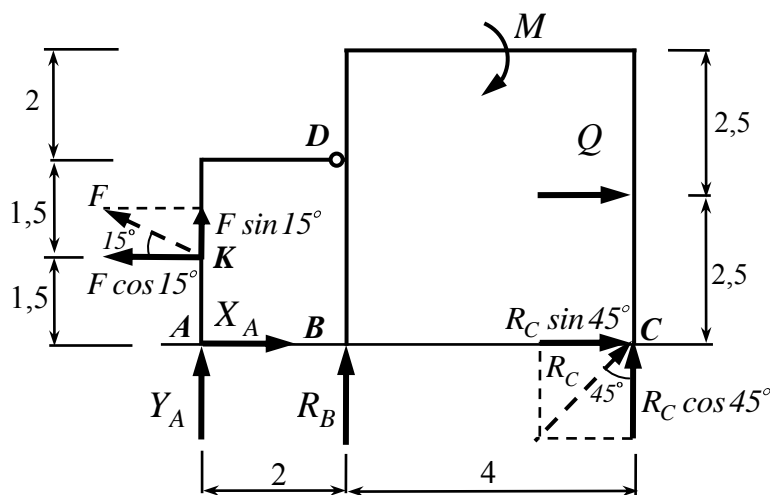


Рисунок 2.17

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_K(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} 2R_B + 6R_C \cos 45^\circ + 1,5F \cos 15^\circ - 2,5Q - M = 0, \\ -6Y_A - 4R_B - 2,5Q - M + 1,5F \cos 15^\circ - 6F \sin 15^\circ = 0, \\ 1,5X_A + 1,5R_C \sin 45^\circ + 6R_C \cos 45^\circ + 2R_B - Q \cdot 1 - M = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} 2 \cdot 17,89 + 6 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966 - 2,5 \cdot 15 - 24 = 0, \\ -6 \cdot (-22,31) - 4 \cdot 17,89 - 2,5 \cdot 15 - 24 + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966 - 6 \cdot 8 \cdot 0,259 = 0, \\ 1,5 \cdot (-9,63) + 1,5 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 6 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 2 \cdot 17,89 - 15 - 24 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 2.5

X_A , кН	Y_A , кН	R_B , кН	R_C , кН	X_D , кН	Y_D , кН
-9,63	-22,31	17,89	3,33	17,36	20,24

3 Задание С3. Расчет плоской статически определимой фермы

3.1 Содержание задания С3

Для плоской фермы (рисунок 3.1) с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой (таблица 3.1) требуется:

- 1) определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях;
- 2) определить способом сечений (способом Риттера) усилия в трех указанных стержнях;
- 3) сравнить полученные результаты.

Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, направлены вертикально вниз. При решении задачи собственным весом стержней пренебречь.

3.2 Пример выполнения задания С3

Дано: $d = 3 \text{ м}$; $H = 2 \text{ м}$; $Q = 5 \text{ кН}$; $P = 20 \text{ кН}$; $F = 15 \text{ кН}$. Узлы приложения внешних сил: $Q - I, II$; $P - IV$; $F - V$. Номера стержней: 3, 4, 9, 11. Схема фермы – рисунок 3.2.

- 1 Определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях.
- 2 Определить способом сечений (способом Риттера) усилия в четырех указанных стержнях.
- 3 Сравнить значения усилий в стержнях, полученные способом вырезания узлов и способом Риттера.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	d, м	Величина вертикальной нагрузки, кН			H, м	Узлы приложения внешних сил			№ стержней	Вторая цифра шифра (№ схемы)
		<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>F</i>		<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>F</i>		
0	1,5	5	10	15	2,4	I, IV	VI	II	2, 5, 8	0
1	1,6	10	15	35	2,6	I, V	III	VI	7, 8, 11	1
2	1,8	15	20	40	2,8	I, VI	IV	III	4, 9, 10	2
3	2	20	25	35	3	II, VI	III	IV	6, 7, 8	3
4	2,2	25	5	45	3,2	IV, V	II	III	3, 6, 8	4
5	2,5	5	20	30	3,4	I, III	V	II	4, 5, 6	5
6	2,7	10	25	45	3,6	III, V	IV	VI	5, 8, 10	6
7	2,9	15	5	40	3,8	II, III	I	IV	3, 4, 10	7
8	3,1	20	10	50	4	II, IV	VI	V	4, 6, 7	8
9	3,3	25	10	30	4,2	I, II	III	VI	3, 8, 10	9

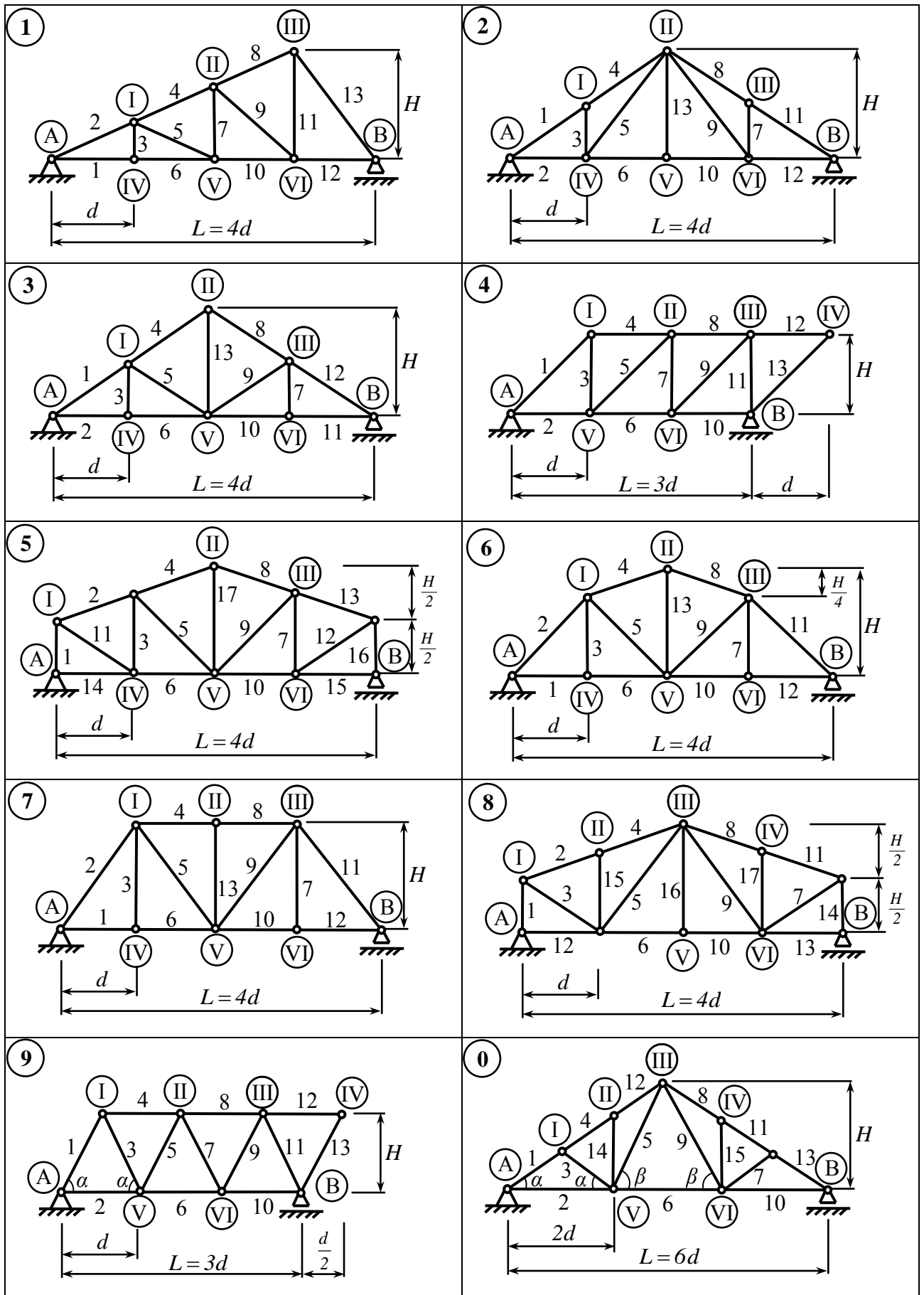


Рисунок 3.1

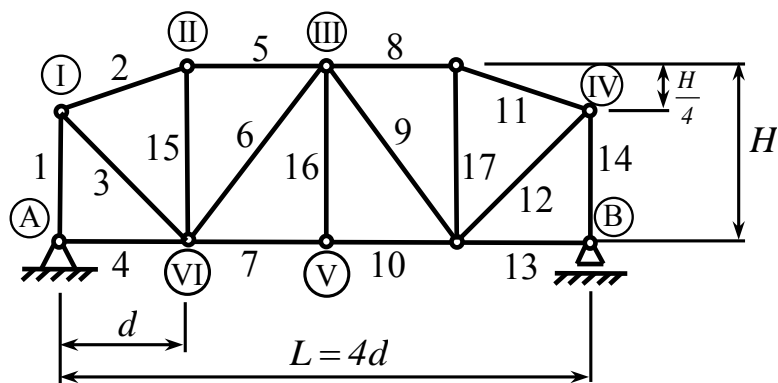


Рисунок 3.2 – Схема фермы

Решение.

Схема фермы с нагрузкой показана на рисунке 3.3. Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, изображаем таким образом, чтобы не накладывались на стержни фермы.

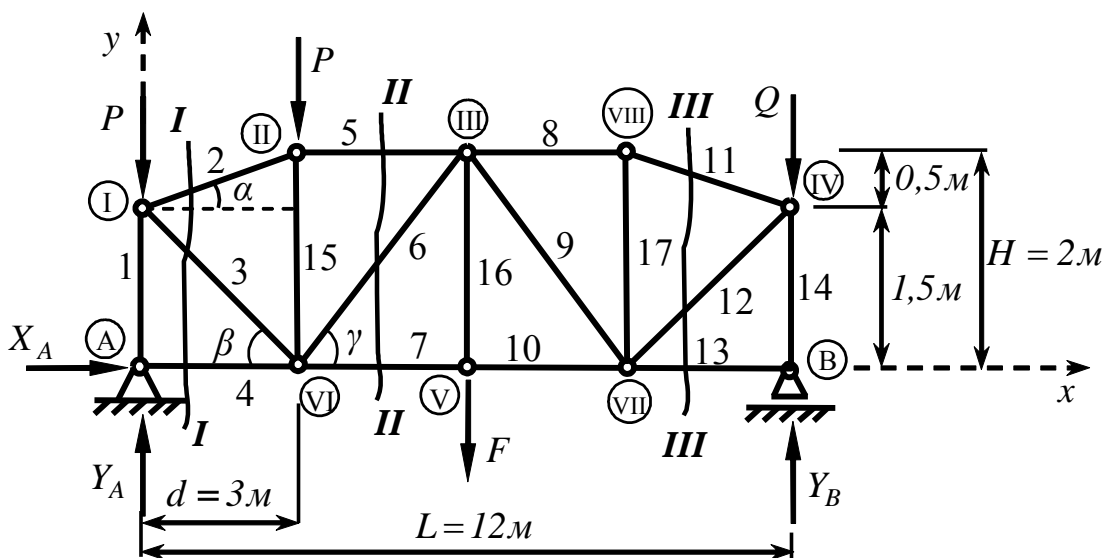


Рисунок 3.3 – Схема фермы с нагрузкой

1) Проверка условия статической определенности фермы.

Число стержней фермы $m = 17$. Число узлов фермы (включая опорные) $n = 10$.

$$m = 2n - 3;$$

$$17 = 2 \cdot 10 - 3;$$

$$17 = 17.$$

Условие выполняется, следовательно, ферма статически определима.

2) Определение опорных реакций фермы.

Рассмотрим равновесие фермы в целом как твердого тела. Мысленно отбросим опоры и заменим их действие реакциями (рисунок 3.3).

Так как направление реакции неподвижного шарнира A неизвестно, то изобразим ее двумя составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A . Реакция подвижного шарнира B направлена по нормали к опорной поверхности шарнира.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на ферму:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ 12Y_B - 3P - 6F - 12Q = 0 \\ 12P + 9P + 6F - 12Y_A = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{3P + 6F + 12Q}{12} = 17,5 \text{ кН} \\ Y_A = \frac{21P + 6F}{12} = 42,5 \text{ кН} \end{array} \right.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим дополнительно уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - 2P - F - Q = 42,5 + 17,5 - 40 - 15 - 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

3) Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Определим необходимые для дальнейших расчетов углы наклона верхнего пояса и раскосов фермы.

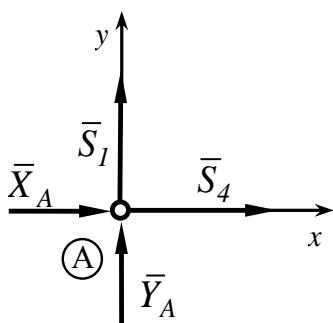
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{4d} = \frac{0,5}{3} = 0,1667; \quad \alpha = 9,5^\circ; \quad \cos \alpha = 0,9864; \quad \sin \alpha = 0,1644;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3H}{4d} = \frac{1,5}{3} = 0,5; \quad \beta = 26,6^\circ; \quad \cos \beta = 0,8944; \quad \sin \beta = 0,4472;$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H}{d} = \frac{2}{3} = 0,6667; \quad \gamma = 33,7^\circ; \quad \cos \gamma = 0,8320; \quad \sin \gamma = 0,5547.$$

Расчет начинаем с узла, в котором сходятся два стержня, например, с узла A . Вырезаем узел из фермы и показываем действующие на него силы, включая реакции отброшенных стержней. Реакции стержней направляем от узла, предполагая стержни растянутыми (рисунок 3.4).

Составим уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил, действующей на узел A :



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \begin{cases} X_A + S_4 = 0, \\ Y_A + S_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} S_1 = -Y_A = -42,5 \text{ кН}, \\ S_4 = -X_A = 0. \end{cases}$$

Рисунок 3.4

Найденные значения реакций стержней равны по модулю возникающим в них усилиям. Отрицательный знак у реакции S_1 означает, что стержень 1 в действительности сжат, а не растянут.

Затем рассматриваем равновесие узла I, в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 3.5). Повторяя действия, выполненные для узла A, получим:

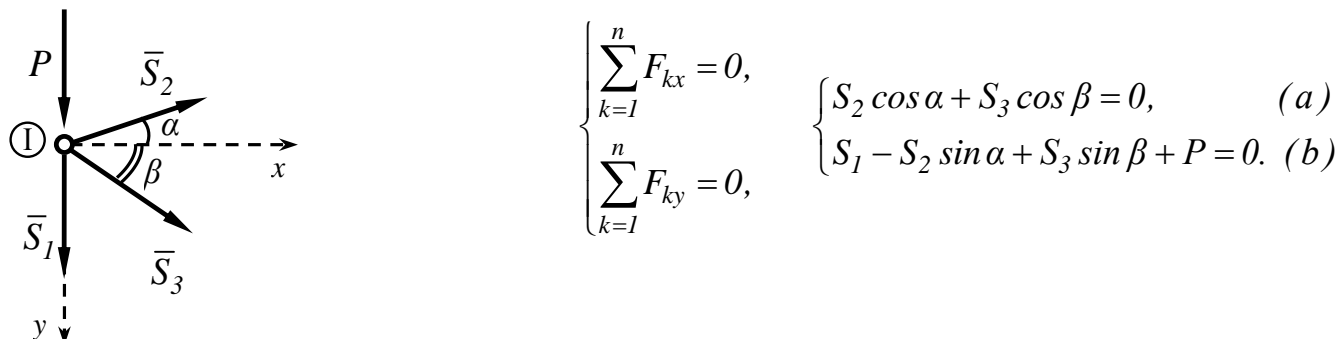


Рисунок 3.5

Выразим из (a) S_3 и подставим в (b):

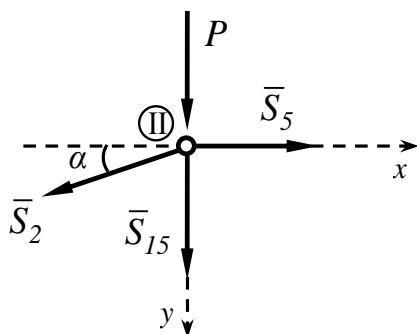
$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta};$$

$$S_1 - S_2 \sin \alpha - S_2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + P = 0;$$

$$S_2 = \frac{P + S_1}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{20 - 42,5}{0,1644 + 0,9864 \cdot 0,5} = -34,215 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -(-34,215) \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 37,735 \text{ кН}.$$

Последовательно переходя от узла к узлу так, чтобы каждый раз в рассматриваемом узле сходилось не более двух стержней с неизвестными усилиями, определим значения усилий во всех стержнях фермы.



Узел II (рисунок 3.6)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -S_2 \cos \alpha + S_5 = 0, \\ S_2 \sin \alpha + S_{15} + P = 0. \end{cases}$$

Рисунок 3.6

$$S_5 = S_2 \cos \alpha = -34,215 \cdot 0,9864 = -33,750 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{15} = -S_2 \sin \alpha - P = 34,215 \cdot 0,1644 - 20 = -14,375 \text{ кН (сжат)}.$$

Узел VI (рисунок 3.7)

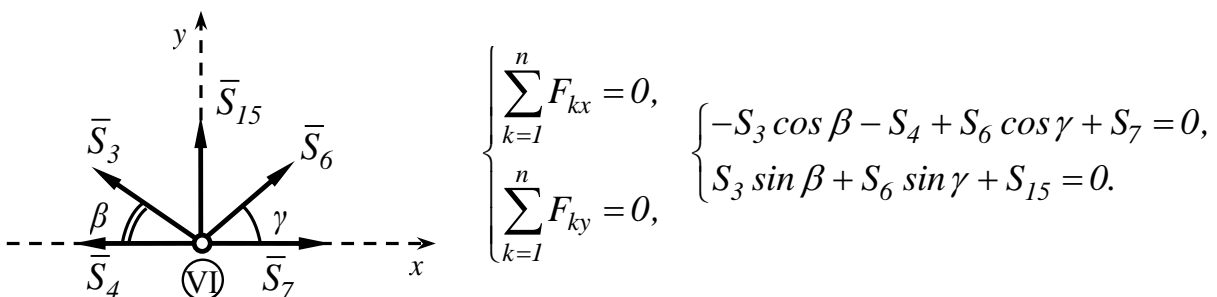
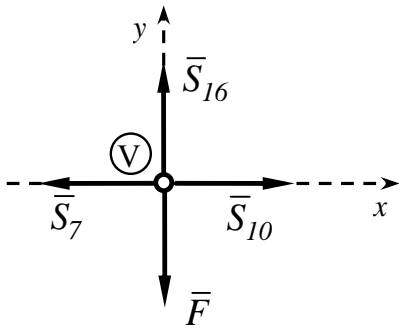


Рисунок 3.7

$$S_6 = -\frac{S_3 \sin \beta + S_{15}}{\sin \gamma} = -\frac{37,735 \cdot 0,4472 - 14,375}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_7 = S_3 \cos \beta + S_4 - S_6 \cos \gamma = 37,735 \cdot 0,8944 + 4,507 \cdot 0,832 = 37,50 \text{ кН}.$$

Узел V (рисунок 3.8)



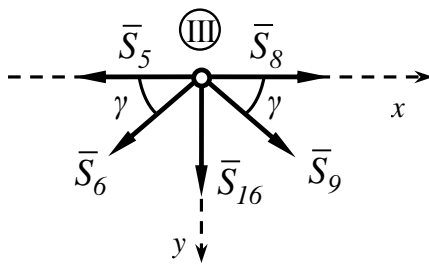
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \begin{cases} -S_7 + S_{10} = 0, \\ S_{16} - F = 0. \end{cases}$$

$$S_{10} = S_7 = 37,50 \text{ кН};$$

$$S_{16} = F = 15 \text{ кН}.$$

Рисунок 3.8

Узел III (рисунок 3.9)



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

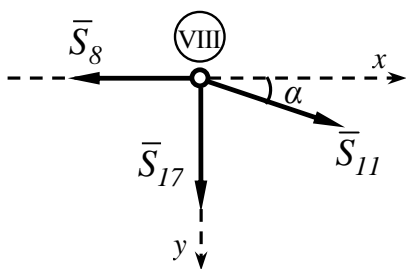
$$\begin{cases} -S_5 - S_6 \cos \gamma + S_8 + S_9 \cos \gamma = 0, \\ S_6 \sin \gamma + S_9 \sin \gamma + S_{16} = 0. \end{cases}$$

Рисунок 3.9

$$S_9 = -\frac{S_6 \sin \gamma + S_{16}}{\sin \gamma} = -\frac{-4,507 \cdot 0,5547 + 15}{0,5547} = -22,535 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_8 = S_5 + S_6 \cos \gamma - S_9 \cos \gamma = -33,75 + (-4,507 + 22,535) \cdot 0,832 = -18,750 \text{ кН (сжат)}.$$

Узел VIII (рисунок 3.10)



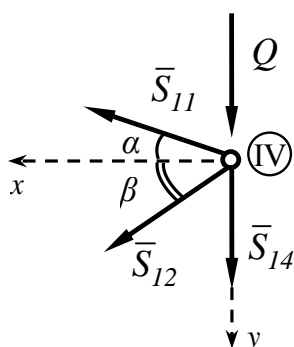
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \begin{cases} -S_8 + S_{11} \cos \alpha = 0, \\ S_{11} \sin \alpha + S_{17} = 0. \end{cases}$$

Рисунок 3.10

$$S_{11} = \frac{S_8}{\cos \alpha} = \frac{-18,75}{0,9864} = -19,0 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{17} = -S_{11} \sin \alpha = 19,0 \cdot 0,1644 = 3,125 \text{ кН}.$$

Узел IV (рисунок 3.11)



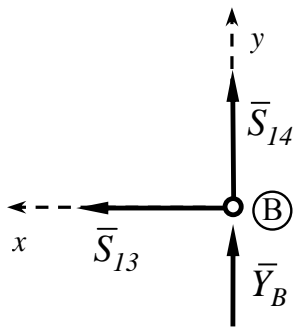
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \begin{cases} S_{11} \cos \alpha + S_{12} \cos \beta = 0, \\ -S_{11} \sin \alpha + S_{12} \sin \beta + S_{14} + Q = 0. \end{cases}$$

Рисунок 3.11

$$S_{12} = -S_{11} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 19,0 \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 20,954 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} S_{14} &= S_{11} \sin \alpha - S_{12} \sin \beta - Q = \\ &= -19,0 \cdot 0,1644 - 20,954 \cdot 0,4472 - 5 = -17,50 \text{ кН (сжат)}. \end{aligned}$$

Узел В (рисунок 3.12)



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \end{cases} \begin{cases} S_{13} = 0, & (a) \\ Y_B + S_{14} = 0. & (b) \end{cases}$$

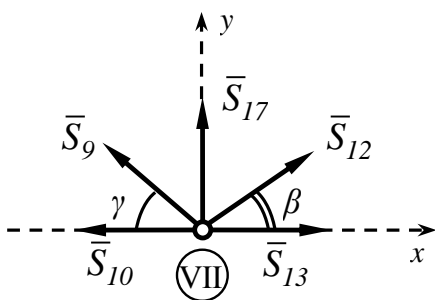
Рисунок 3.12

Уравнение (b) используем для проверки найденного значения S_{14} :

$$Y_B + S_{14} = 17,5 - 17,5 = 0.$$

Так как усилия во всех стержнях определены, то равновесие узла VII рассматриваем для контроля правильности вычислений

Узел VII (рисунок 3.13)



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= -S_9 \cos \gamma - S_{10} + S_{12} \cos \beta + S_{13} = \\ &= 22,535 \cdot 0,832 - 37,5 + 20,954 \cdot 0,8944 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ky} &= S_9 \sin \gamma + S_{12} \sin \beta + S_{17} = \\ &= -22,535 \cdot 0,5547 + 20,954 \cdot 0,4472 + 3,125 = 0. \end{aligned}$$

Рисунок 3.13

4. Определение усилий в стержнях фермы способом сечений (способом Риттера).

Для определения усилий в стержнях 3 и 4 проведем сквозное сечение фермы I – I (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рисунок 3.14). На нее действуют силы X_A , Y_A , P и реакции рассеченных стержней S_2 , S_3 , S_4 . Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

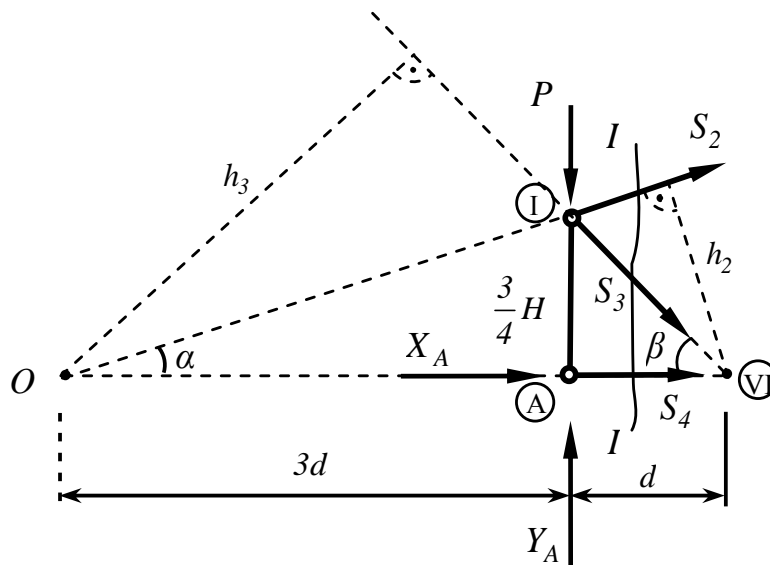


Рисунок 3.14

Для определения реакции S_3 составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций S_2 и S_4 (точки O).

$$OA = \frac{3}{4}H \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}H \cdot \frac{4d}{H} = 3d;$$

$$h_3 = 4d \sin \beta;$$

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0;$$

$$Y_A \cdot 3d - P \cdot 3d - S_3 \cdot 4d \sin \beta = 0;$$

$$S_3 = (Y_A - P) \cdot \frac{3d}{4d \sin \beta} = \frac{3 \cdot (Y_A - P)}{4 \sin \beta} = \frac{3 \cdot (42,5 - 20)}{4 \cdot 0,4472} = 37,735 \text{ кН}.$$

Для определения реакции S_2 составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций S_3 и S_4 (узла VI).

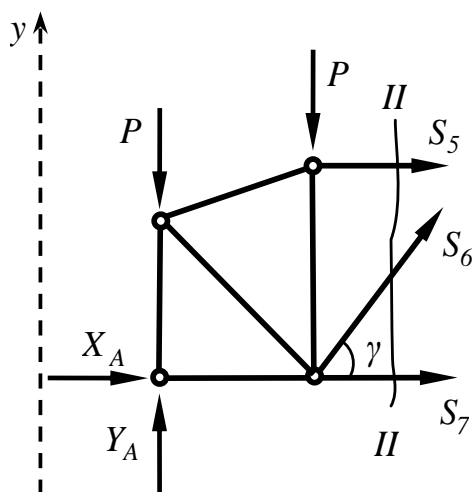
$$h_2 = 4d \sin \alpha;$$

$$\sum_{k=1}^n m_{VI}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$P \cdot d - Y_A \cdot d - S_2 \cdot 4d \sin \alpha = 0;$$

$$S_2 = (P - Y_A) \cdot \frac{d}{4d \sin \alpha} = \frac{P - Y_A}{4 \sin \alpha} = \frac{20 - 42,5}{4 \cdot 0,1644} = -34,215 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне b проведем сквозное сечение фермы II–II (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части под действием сил X_A , Y_A , P и реакций рассеченных стержней S_5 , S_6 , S_7 (рисунок 3.15). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.



Для определения реакции S_6 составим уравнение проекций на ось, перпендикулярную линиям действия реакций S_5 и S_6 .

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - 2P + S_6 \cdot \sin \gamma = 0;$$

$$S_6 = \frac{2P - Y_A}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot 20 - 42,5}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)}.$$

Рисунок 3.15

Для определения усилия в стержне II проведем сквозное сечение фермы III–III (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части под действием сил Y_B , Q и реакций рассеченных стержней S_{11} , S_{12} , S_{13} (рисунок 3.16). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

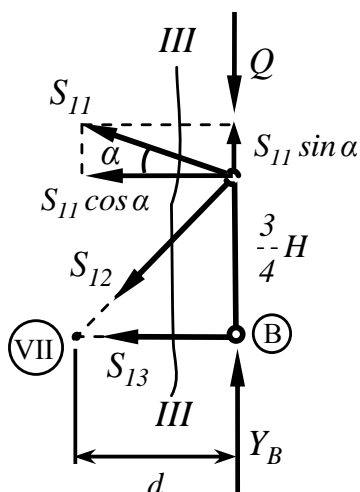


Рисунок 3.16

Для определения реакции S_{11} составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций S_{12} и S_{13} (узла VII).

$$\sum_{k=1}^n m_{VII}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$Y_B \cdot d - Q \cdot d + S_{11} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{3H}{4} + S_{11} \cdot \sin \alpha \cdot d = 0;$$

$$S_{11} = \frac{(Q - Y_B) \cdot d}{\left(\frac{3H}{4} \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha \right)} = \frac{(5 - 17,5) \cdot 3}{1,5 \cdot 0,9864 + 3 \cdot 0,1644} = -19,0 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденные значения реакций S_2 , S_3 , S_6 , S_{11} совпадают со значениями, полученными ранее способом вырезания узлов.

4 Задание С4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

4.1 Содержание задания С4

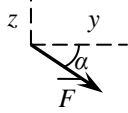
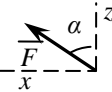
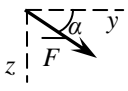
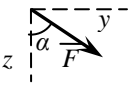
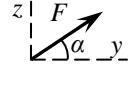
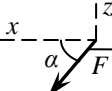
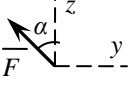
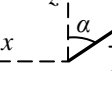
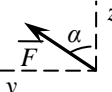
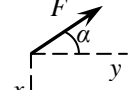
Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 4.1) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым шарнирным стержнем CC' .

Для конструкции с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня CC' .

Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей. Размеры плит указаны на чертеже. Вес большей из плит равен \bar{G}_1 , меньшей – \bar{G}_2 . На плиты действуют силы \bar{F} и $\bar{Q} = -\bar{Q}'$. Силы Q и Q' рассматривать как пару и заменять их действие вектором-моментом пары.

Исходные данные для решения задания приведены в таблице 4.1. Схемы конструкций изображены на рисунке 4.1. Точки K и L расположены посередине соответствующих сторон плит.

Таблица 4.1

Первая цифра варианта	Силы, кН				Размеры, м			Сила F			Вторая цифра варианта (номер схемы)
	Q	G_1	G_2	F	a	b	c	Направление	Точка приложения	Угол α	
0	12	20	16	14	4	3	2		<i>E</i>	75°	0
1	4	10	4	8	7	5	4		<i>K</i>	30°	1
2	8	36	22	20	8	10	6		<i>C</i>	60°	2
3	11	12	6	16	6	8	5		<i>L</i>	45°	3
4	2	24	10	10	4	6	2		<i>D</i>	50°	4
5	9	26	20	14	5	11	4		<i>H</i>	45°	5
6	8	18	6	22	12	6	2		<i>L</i>	60°	6
7	3	30	22	25	10	8	6		<i>K</i>	30°	7
8	6	16	12	10	6	5	4		<i>E</i>	15°	8
9	1	20	4	4	3	6	2		<i>D</i>	20°	9

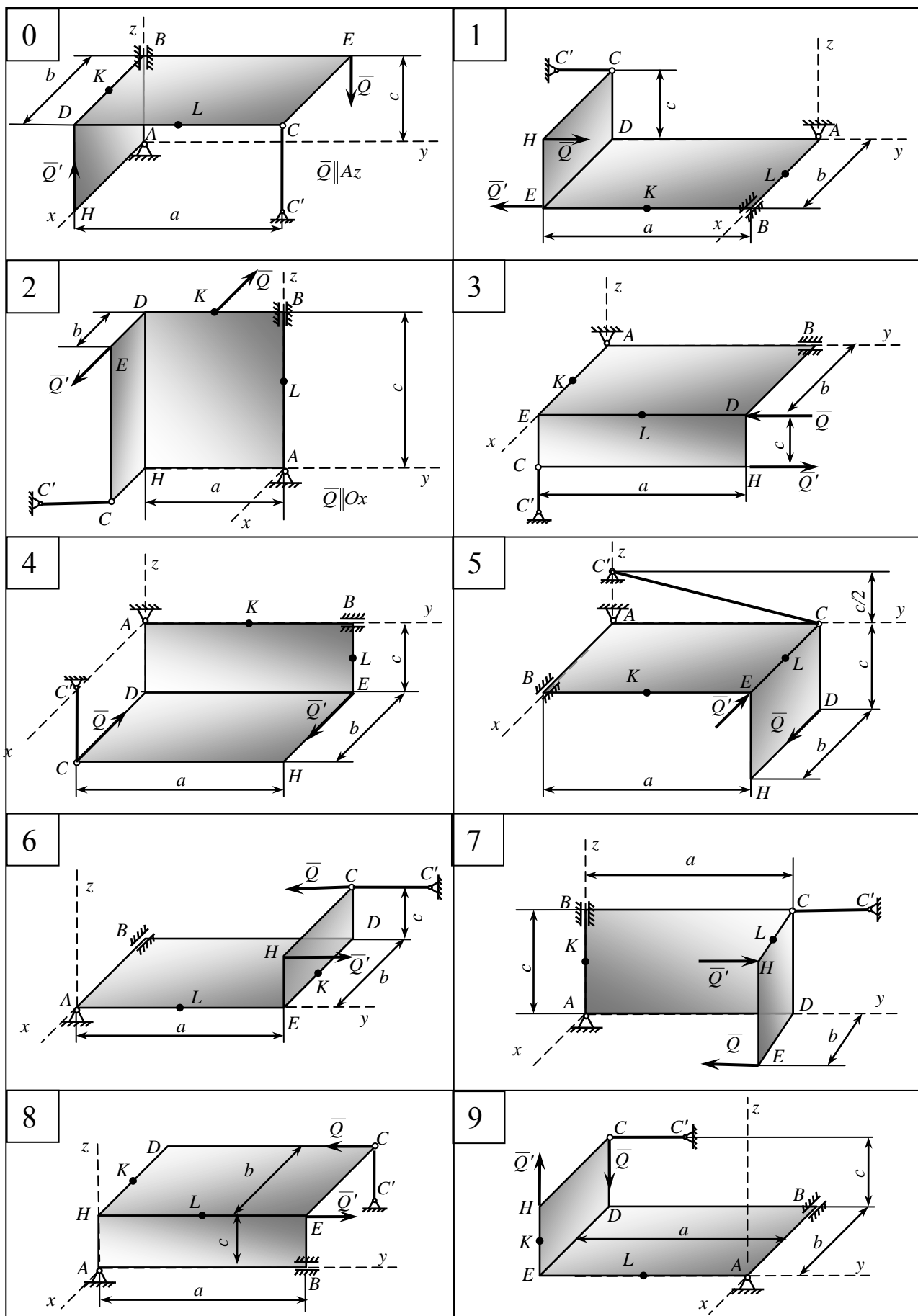


Рисунок 4.1

4.2 Пример выполнения задания С4

Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 4.2) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым шарнирным стержнем CC' . Размеры плит указаны на чертеже, $CL = LK$. Вес плит $ABCD$ и $CDEK$ соответственно равен \bar{G}_1 и \bar{G}_2 . На плиты действуют силы \bar{F} и пара сил $\bar{Q} = -\bar{Q}'$.

Определить реакции связей в точках A , B и стержня CC' .

Дано: $a = 2$ м; $b = 3$ м; $c = 2$ м; $\alpha = 30^\circ$; $Q = Q' = 5$ кН; $F = 8$ кН; $G_1 = 10$ кН; $G_2 = 12$ кН.

Найти: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, R_C$.

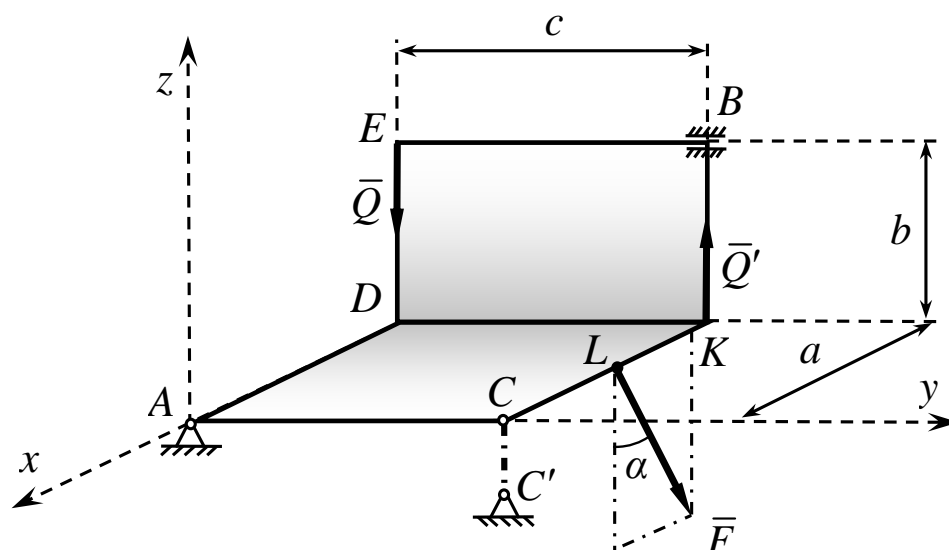


Рисунок 4.2

Решение.

Рассмотрим равновесие плит $ADKC$ и $BKDE$. Изобразим на чертеже (рисунок 4.3) действующие на конструкцию активные силы и реакции связей.

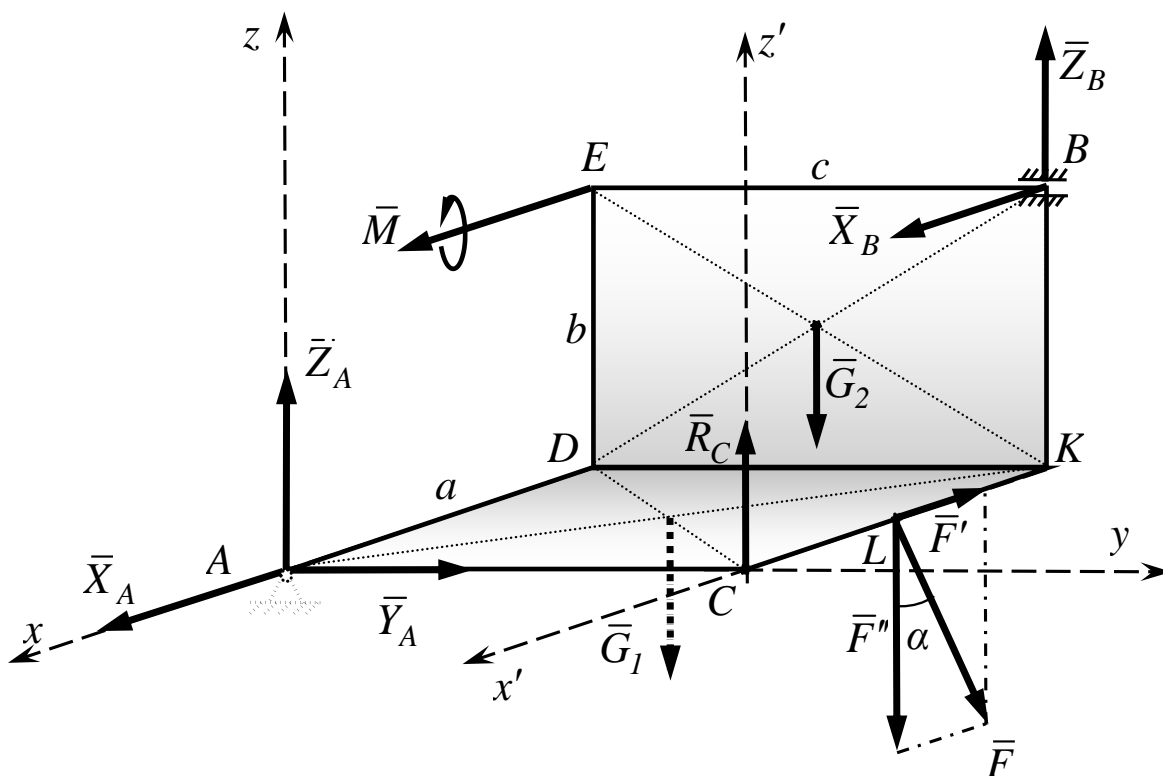


Рисунок 4.3 – Расчетная схема

На плиты действуют заданные силы \bar{G}_1 , \bar{G}_2 , \bar{F} , пара сил $(\bar{Q}; \bar{Q}')$ и реакции связей. Пару сил $(\bar{Q}; \bar{Q}')$ изобразим на чертеже вектором-моментом \bar{M} , перпендикулярным плоскости действия пары $BKDE$, модуль вектора-момента равен $M = Q \cdot c = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кНм}$. Реакцию сферического шарнира A разложим на три составляющих \bar{X}_A , \bar{Y}_A и \bar{Z}_A . Реакцию цилиндрического шарнира (подшипника) B – на две составляющих \bar{X}_B и \bar{Z}_B , расположенных в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Реакцию \bar{R}_C стержня CC' направим вдоль оси стержня, предполагая его растянутым.

Силу \bar{F} разложим на две составляющие \bar{F}' и \bar{F}'' , параллельные осям координат x и z соответственно, причем $F' = F \sin \alpha$ и $F'' = F \cos \alpha$.

Составим уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на конструкцию:

$$\begin{cases} X_A + X_B - F \sin \alpha = 0; \\ Y_A = 0; \\ Z_A + Z_B + R_C - G_1 - G_2 - F \cos \alpha = 0; \\ Z_B \cdot c + R_C \cdot c - G_1 \cdot \frac{c}{2} - G_2 \cdot \frac{c}{2} - F \cos \alpha \cdot c + M = 0; \\ X_B \cdot b + Z_B \cdot a - G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot a - F \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} = 0; \\ -X_B \cdot c + F \sin \alpha \cdot c = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Определим значения неизвестных реакций, решив полученную систему уравнений (4.1):

$$X_B = F \sin \alpha = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ кН};$$

$$Z_B = \frac{G_1}{2} + G_2 + \frac{F}{2} \cdot \cos \alpha - X_B \cdot \frac{b}{a} = \frac{10}{2} + 12 + \frac{8}{2} \cdot 0,866 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 14,464 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} R_C &= -Z_B + \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2} + F \cos \alpha + \frac{M}{c} = -14,464 + \frac{10}{2} + \frac{12}{2} + 8 \cdot 0,866 - \frac{10}{2} = \\ &= -1,536 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Z_A = -Z_B - R_C + G_1 + G_2 + F \cos \alpha = -14,464 + 1,536 + 10 + 12 + 8 \cdot 0,866 = 16 \text{ кН};$$

$$X_A = -X_B + F \sin \alpha = -4 + 8 \cdot 0,5 = 0.$$

Для проверки правильности решения составим дополнительно два уравнения моментов относительно новых осей:

$$\sum m_{x'}(\bar{F}_k) = -Z_A \cdot c + M + G_1 \cdot \frac{a}{2} + G_2 \cdot \frac{a}{2} = -16 \cdot 2 + 10 + 10 \cdot \frac{2}{2} + 12 \cdot \frac{2}{2} = 0;$$

$$\sum m_{z'}(\bar{F}_k) = X_A \cdot c = 0.$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, реакции определены правильно.

Ответ: $X_A = 0$, $Y_A = 0$, $Z_A = 16 \text{ кН}$, $X_B = 4 \text{ кН}$, $Z_B = 14,464 \text{ кН}$,
 $R_C = -1,536 \text{ кН}$.

5 Задание К1 Кинематика точки

5.1 Содержание задания К1

Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$,

где x, y – в см., t – в с.

Найти:

- 1) уравнение траектории в явном виде;
- 2) для момента времени $t_1 = 1$ с, определить скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения; радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Необходимые для выполнения работы данные приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

№ вар.	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1 , с
1	2	3	4
<i>1</i>	$x = 2t^2 - 3$	$y = 3t$	1
<i>2</i>	$x = 2t - 5$	$y = t^2 - 2t$	1
<i>3</i>	$x = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	2
<i>4</i>	$x = 2t^2 + 2$	$y = 2t$	2
<i>5</i>	$x = t - 3$	$y = 2t^2$	1
<i>6</i>	$x = 10 \cos \frac{\pi t}{6}$	$y = 10 \sin \frac{\pi t}{6}$	1
<i>7</i>	$x = 3t^2$	$y = 4t + 1$	1
<i>8</i>	$x = 2t$	$y = 4t^2$	1

Продолжение таблицы 5.1

1	2	3	4
9	$x = 5 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$	$y = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$	0,5
10	$x = 2 - 3t^2$	$y = 5t$	1,5
11	$x = 5t + 4$	$y = t^2$	1
12	$x = 1 - t^2$	$y = 2t$	0,5
13	$x = \sin \frac{\pi t}{3}$	$y = 3 - \cos \frac{\pi t}{3}$	1
14	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$	0,5
15	$x = 3t$	$y = 2t^2 - 1$	1
16	$x = t^2 - 4$	$y = 2t^2$	1
17	$x = t + 1$	$y = 2t^2$	1
18	$x = 3t^2 - 2t$	$y = 6t^2 - 4t + 5$	1
19	$x = 2 - \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 4$	1
20	$x = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$	$y = \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - 2$	0,5
21	$x = 2t^2$	$y = 1 - 4t^2$	0,3
22	$x = 2 - 5t$	$y = 5t^2$	0,5
23	$x = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 2$	$y = 4 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 3$	1
24	$x = t - 2$	$y = t^2 + 2$	0,5
25	$x = 5t^2$	$y = 0,2t$	0,1
26	$x = 2 - t$	$y = 4t^2$	1

Продолжение таблицы 5.1

1	2	3	4
27	$x = 2 - \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$y = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
28	$x = 10 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$y = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
29	$x = t^2 - 1$	$y = 2t$	1
30	$x = 3t$	$y = t^2 - 3$	1

5.2 Примеры выполнения задания К1

Пример 5.2.1

Дано: Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \\ y = 3 - 5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \end{cases} \quad (5.1)$$

где x, y – координаты, см;

t – время, с.

Найти:

- 1) уравнение траектории в явном виде;
- 2) для момента времени $t_1 = 1$ с, определить скорость точки; полное, касательное и нормальное ускорения; радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1 Для определения траектории, из уравнений движения, нужно исключить из уравнений движения время t . Поскольку t входит в уравнение движения как аргумент тригонометрических функций, то для его исключения воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (5.2)$$

Из уравнений движения имеем:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \frac{x}{3}; \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = -\frac{y-3}{5}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Возведем обе части уравнений (5.1) в квадрат:

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^2; \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \left(\frac{y-3}{5}\right)^2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Сложив левые и правые части уравнений (5.4) и применив тождество (5.2), получим уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{5}\right)^2 = 1. \quad (5.5)$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 5$ и с центром в точке $O_I(0; 3)$ (рисунок 5.1).

2 Координаты точки в заданный момент времени $t_1 = 1$ с :

$$x_1 = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \text{ см},$$

$$y_1 = 3 - 5 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,33 \text{ см}.$$

Положение точки М в заданный момент времени показано на рисунке 5.1.

3 Определение скорости.

Определяем проекции на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$v_y = \dot{y} = -5 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 1$ с

$$v_x = -\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2,72 \text{ см/с},$$

$$v_y = -5 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -5 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = -2,62 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки в рассматриваемый момент времени равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2,72^2 + 2,62^2} = 3,77 \text{ см/с}.$$

Составляющие $\bar{v}_x = v_x \bar{i}$ и $\bar{v}_y = v_y \bar{i}$ показаны на рисунке 5.1. Вектор \bar{v} строим по составляющим \bar{v}_x и \bar{v}_y , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории.

4 Проекция ускорения точки находим на оси координат:

$$a_x = \dot{v}_x = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{5\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$

$$a_x = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -1,64 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = \frac{5\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,74 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1,64^2 + 4,74^2} = 5,02 \text{ см/с}^2.$$

Составляющие \bar{a}_x и \bar{a}_y показаны на рисунке 5.1. Вектор ускорения точки \bar{a} строим по составляющим \bar{a}_x и \bar{a}_y и затем раскладываем его на составляющие \bar{a}_τ и \bar{a}_n .

5 Касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) = \frac{2v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \cdot \frac{dv_y}{dt}}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v}.$$

Подставив найденные ранее значения, получим

$$a_\tau = \frac{(-2,72) \cdot (-1,64) + (-2,62) \cdot 4,74}{3,77} = -2,11 \text{ см/с}^2.$$

Знак «-» означает, что движение точки замедленное, направление касательного ускорения \bar{a}_τ противоположно направлению вектора скорости \bar{v} .

6 Нормальное ускорение точки определяем по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{5,02^2 - 2,11^2} = 4,55 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau$ и направлен в сторону вогнутости траектории.

Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

7 Радиус кривизны траектории точки

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3,77^2}{4,55} = 3,12 \text{ см.}$$

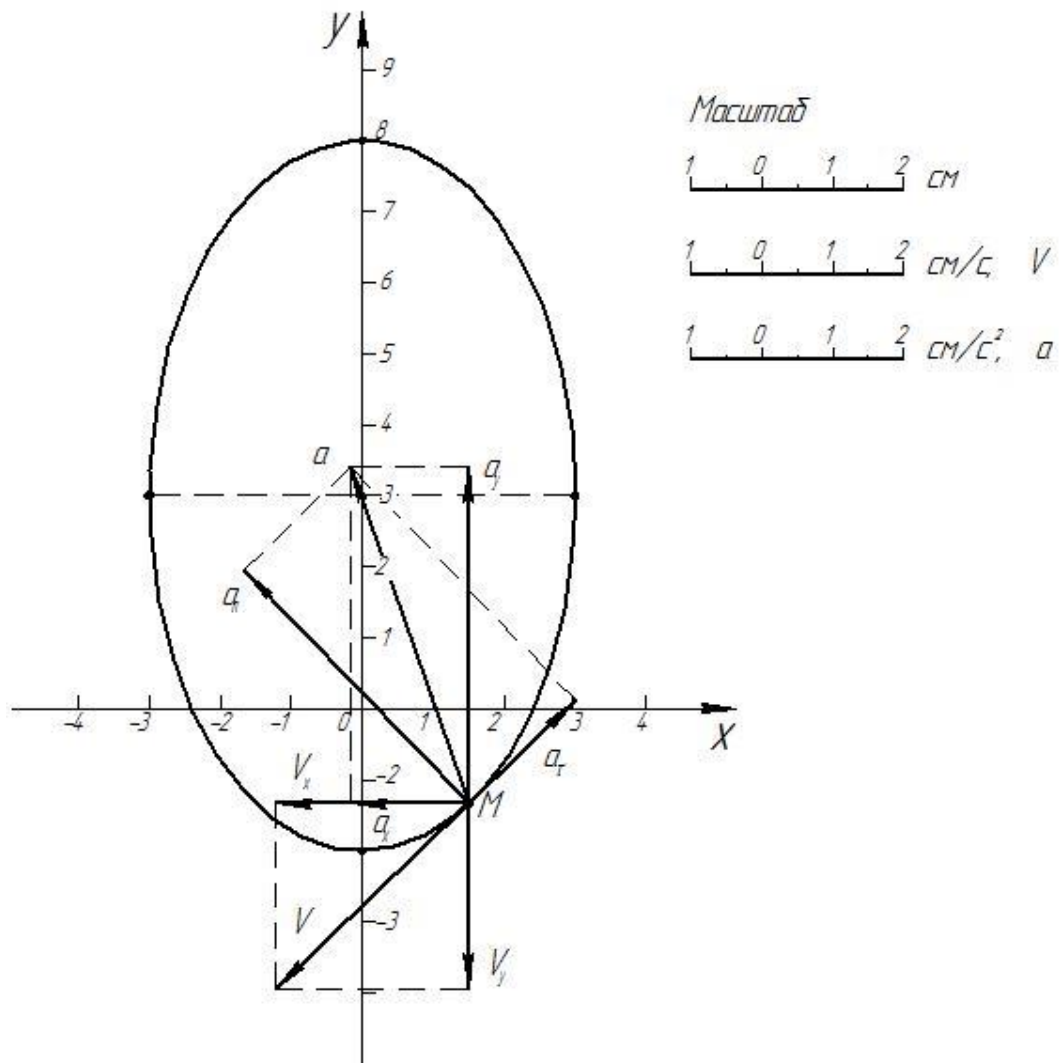


Рисунок 5.1

Ответ: $v = 3,77 \text{ см/с}$, $a = 5,02 \text{ см/с}^2$, $a_t = -2,11 \text{ см/с}^2$, $a_n = 4,55 \text{ см/с}^2$,
 $\rho = 3,12 \text{ см}$.

Пример 5.2.2

Дано: Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2, \\ y = 1 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \end{cases} \quad (5.6)$$

Найти уравнение траектории точки в явном виде.

Решение

Из уравнения движения (5.6) получим:

$$\begin{cases} x - 2 = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \\ y - 1 = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \end{cases} \quad (5.7)$$

Возведем обе части уравнений (5.7) в квадрат:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = \left[3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right]^2; \\ (y - 1)^2 = \left[3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right]^2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Сложив левые и правые части уравнений (5.8) и применив тождество (5.2), получим уравнение траектории в виде

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2. \quad (5.9)$$

Это уравнение окружности радиуса $R = 3$ см и с центром в точке $O_1(2; 1)$ (рисунок 5.2).

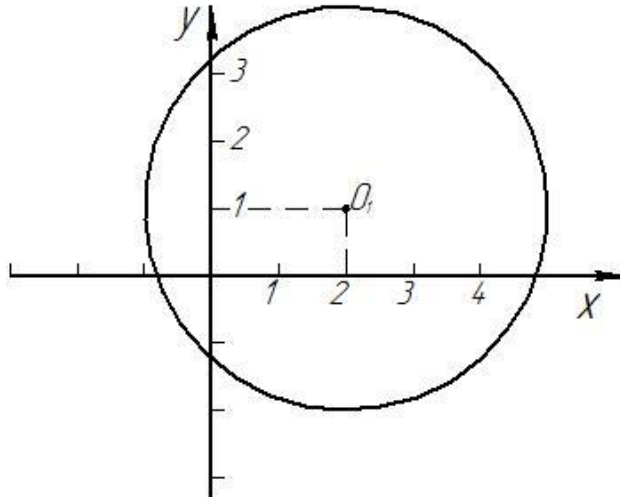


Рисунок 5.2

Пример 5.2.3

Дано: Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 6 - 5t^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Найти уравнение траектории точки в явном виде.

Решение

Исключим время t из уравнений движения:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{3}; \\ y = 6 - 5 \cdot \frac{x^2}{9}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Траекторией точки является парабола $y = 6 - \frac{5}{9}x^2$ (рисунок 5.3).

Для её построения зададим значения:

Таблица 5.2

$x, \text{ см}$	0	± 1	± 2	± 3
$y, \text{ см}$	6	5,4	3,8	1

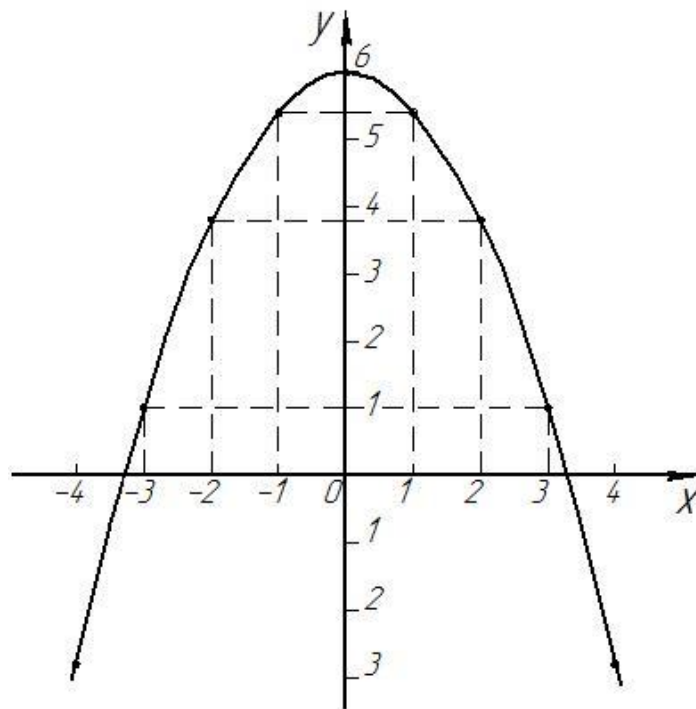


Рисунок 5.3

Пример 5.2.4

Дано: Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 5t^2 + \frac{5}{3}t - 3, \\ y = 3t^2 + t + 3. \end{cases} \quad (5.12)$$

Найти уравнение траектории точки в явном виде.

Решение

Для того, чтобы исключить время t из уравнений движения, уравняем коэффициенты при переменной t . Для этого умножим первое уравнение на 3, а второе – на 5:

$$\begin{cases} 3x = 15t^2 + 5t - 9, \\ 5y = 15t^2 + 5t + 15. \end{cases}$$

а затем вычтем из первого уравнения второе:

$$3x - 5y = 15t^2 + 5t - 9 - 15t^2 - 5t - 15,$$

или

$$3x - 5y = -24.$$

Это уравнение прямой (рисунок 5.4). Для её построения достаточно знать две точки:

- 1) при $x = 0$, $y = 4,8$;
- 2) при $y = 0$, $x = -8$.

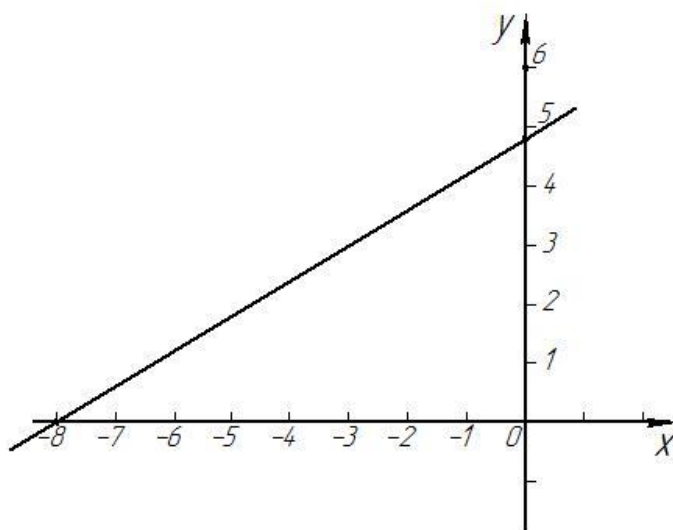


Рисунок 5.4

Пример 5.2.5

Дано: Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 3 - 5t^2, \\ y = 4t^2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Найти уравнение траектории точки в явном виде.

Решение

Выразим время t из одного из уравнений движения и подставим в другое:

$$t^2 = \frac{y}{4} \Rightarrow x = 3 - 5 \cdot \frac{y}{4}.$$

Таким образом, получили уравнение прямой $x = 3 - \frac{5}{4}y$ (рисунок 5.5). Для

построения достаточно знать две точки:

1) при $x = 0$, $y = 2,4$;

2) при $y = 0$, $x = 3$.

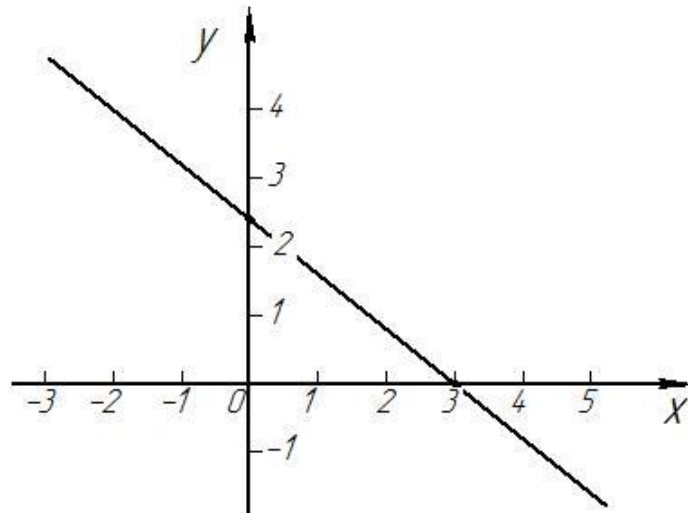


Рисунок 5.5

6 Задание К2 Определение кинематических характеристик тел механической системы

6.1 Содержание задания К2

Механическая система состоит из двух грузов (1 и 2), двух ступенчатых блоков (3 и 4) и катка 5 , связанных невесомыми нерастяжимыми нитями. Радиусы блоков и катка соответственно равны r_3, r_4, R_3, R_4, R_5 . Груз 1 перемещается вниз вертикально или по наклонной плоскости в соответствии с законом $S_1 = S_1(t)$, приводя в механическую систему в движение.

В начальный момент система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободу блоков и катка пренебречь. При определении ускорений за полюс катка 5 принять его центр. Определить скорость и ускорение тела в заданный момент времени t_1 .

Исходные данные для лабораторной работы выбираются в соответствии с трехзначным номером варианта по таблице 6.1. Последняя цифра варианта соответствует номеру схемы. Схемы вариантов представлены на рисунках 6.4 – 6.6.

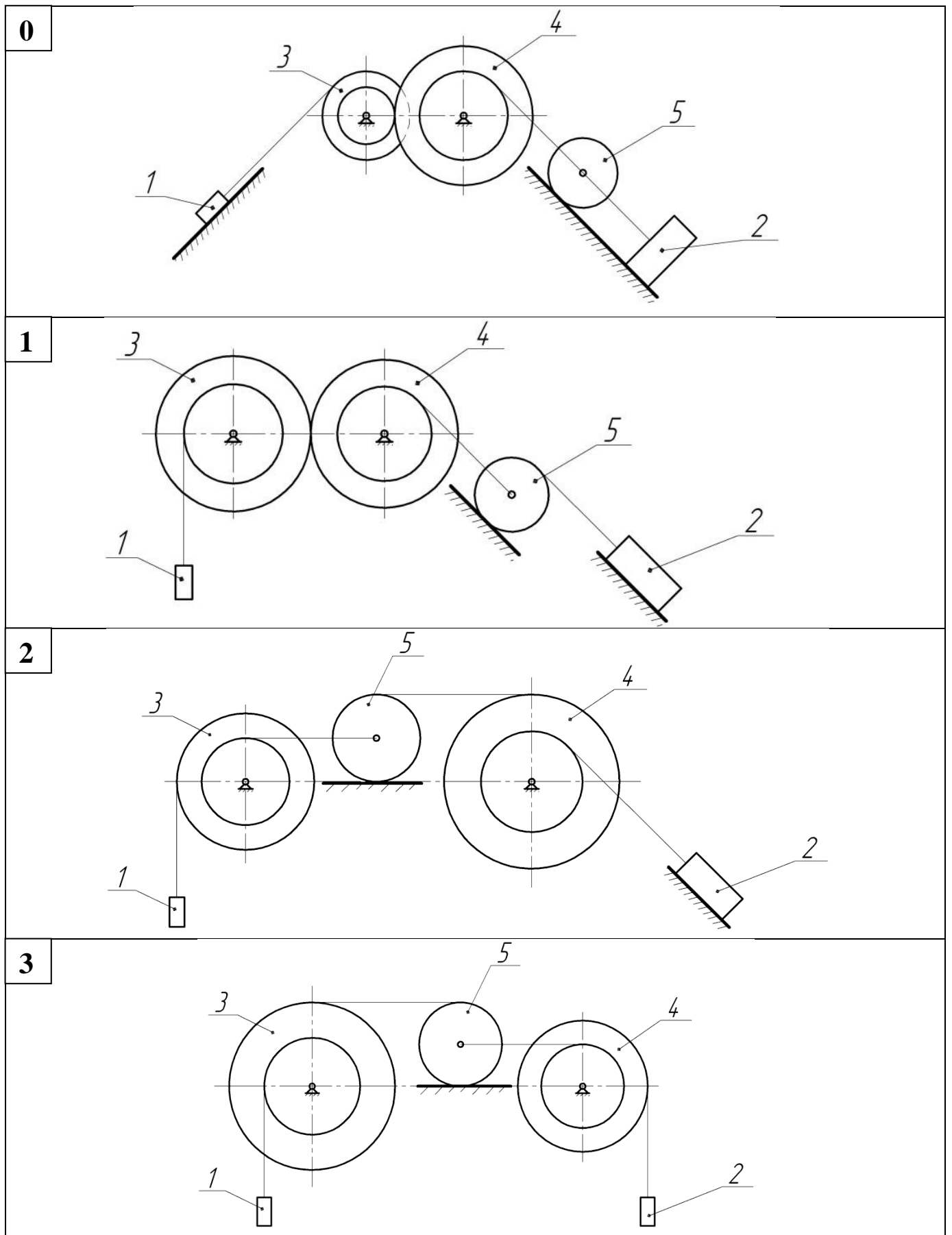


Рисунок 6.1 – Схемы вариантов

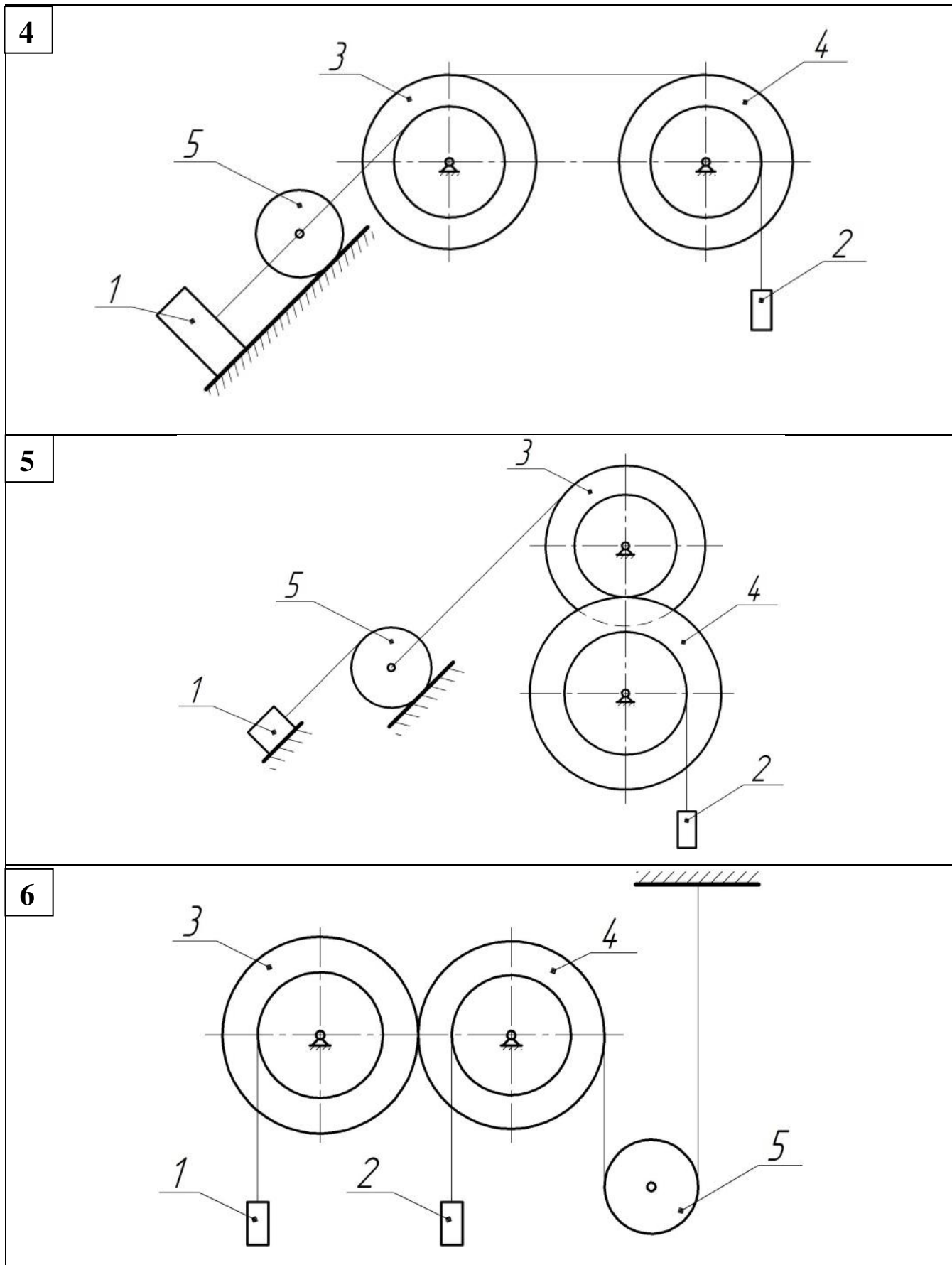


Рисунок 6.2 – Схемы вариантов

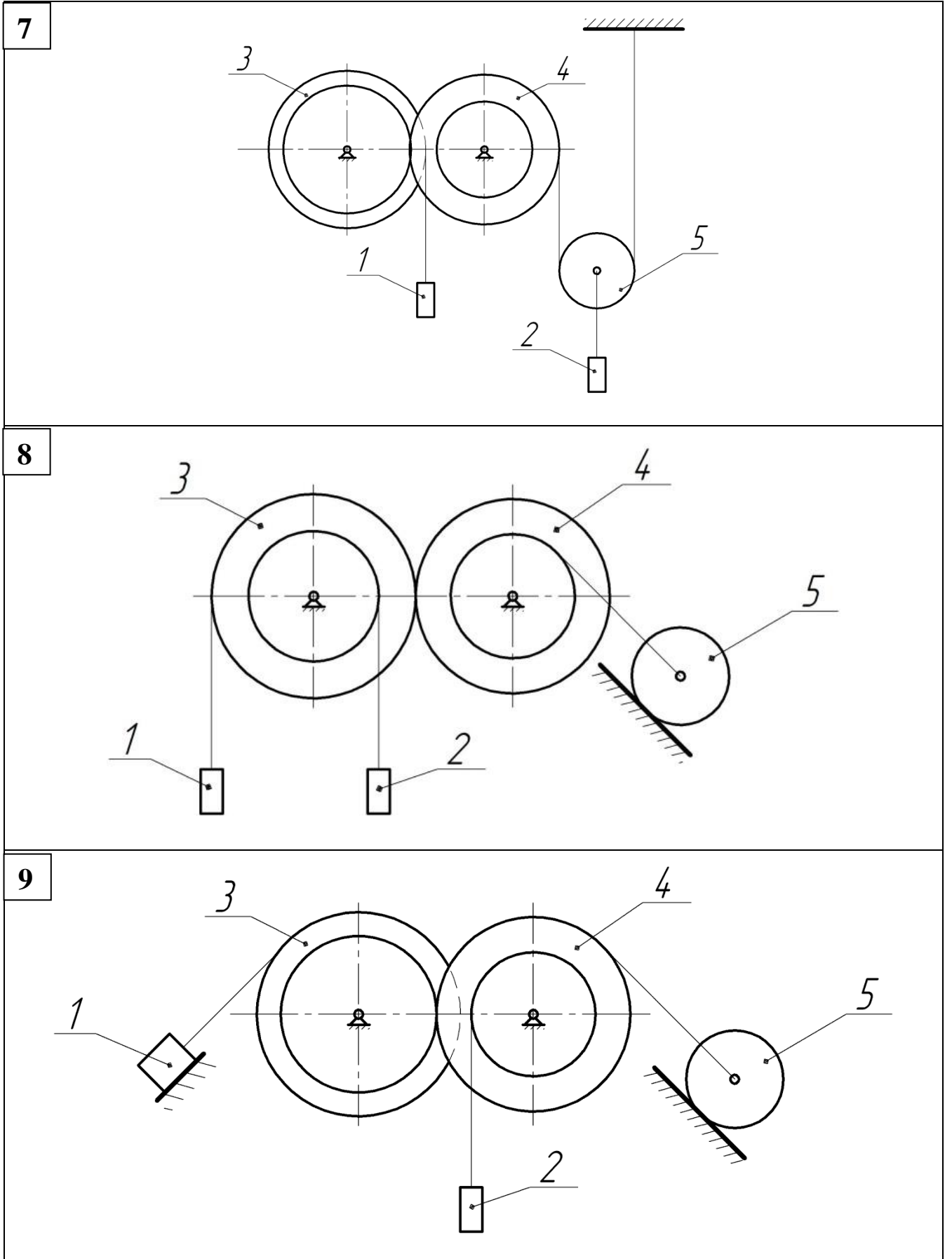


Рисунок 6.3 – Схемы вариантов

Таблица 6.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	r_3 , см	r_4 , см	R_3 , см	R_4 , см	R_5 , см	Вторая цифра варианта	$S_1 = S_1(t)$, мм	Исследуемое тело	t_1 , с
0	10	15	35	60	30	0	$S_1 = 3t^5 - 2t^2$	2	3
1	15	20	45	35	75	1	$S_1 = e^{t+1} + 3t^3$	3	5
2	25	25	60	50	65	2	$S_1 = t^5 + 8t^3$	4	7
3	30	10	55	45	45	3	$S_1 = e^t + 2t^2$	5	6
4	20	30	50	55	50	4	$S_1 = 8 + 15t^4$	2	9
5	25	15	40	40	80	5	$S_1 = 9t^4 + 3t^2$	3	8
6	15	30	35	50	35	6	$S_1 = t^4 - t$	4	4
7	30	25	60	55	60	7	$S_1 = e^{t+2} + t$	5	11
8	25	20	45	60	70	8	$S_1 = t^6 - 1$	2	10
9	10	15	50	45	25	9	$S_1 = t^3 + 2t^2 + 1$	3	12

6.2 Пример выполнения задания К2

Механическая система состоит из двух грузов (1 и 2), двух ступенчатых блоков (3 и 4) и катка 5 , связанных невесомыми нерастяжимыми нитями (рисунок 6.4). Радиусы блоков и катка соответственно равны $r_3 = 20$ см, $r_4 = 25$ см, $R_3 = 50$ см, $R_4 = 30$ см, $R_5 = 40$ см. Груз 1 перемещается вниз по наклонной плоскости в соответствии по закону $S_1 = 8e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3$ (мм), приводя механическую систему в движение.

В начальный момент времени система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободу блоков 3, 4 и катка 5 пренебречь. При определении ускорений за полюс катка 5 принять его центр.

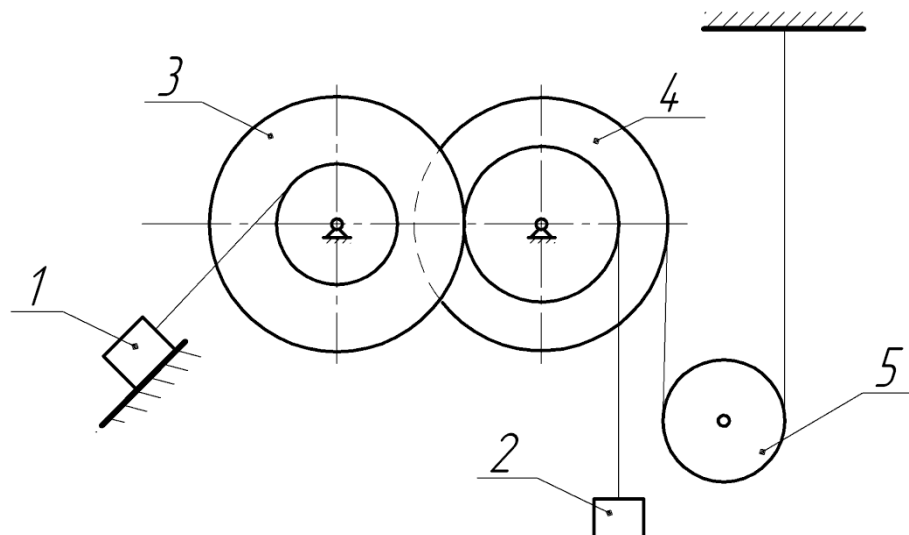


Рисунок 6.4– Механическая система

1 Определить кинематические характеристики тел системы в момент времени $t_1 = 5 \text{ с}$.

2 Построить графики изменения кинематических характеристик тела 5 как функции времени на отрезке от $t_0 = 0$ до $t_1 = 5 \text{ с}$.

Дано: $r_3 = 20 \text{ см}$, $r_4 = 25 \text{ см}$, $R_3 = 50 \text{ см}$, $R_4 = 30 \text{ см}$, $R_5 = 40 \text{ см}$,
 $S_1 = 8e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3 \text{ (см)}$, $t_1 = 5 \text{ с}$.

Найти: $v_1, v_2, v_C, a_1, a_2, a_C, \omega_3, \varepsilon_3, \omega_4, \varepsilon_4, \omega_5, \varepsilon_5, v_C(t), a_C(t), \omega_5(t), \varepsilon_5(t)$.

Решение:

1 Определим линейные и угловые скорости тел

$$v_1 = \dot{S}_1 = 8e^{t+3} + 20t^3 - 9t^2,$$

при $t_1 = 5 \text{ с}$

$$v_1 = 8e^8 + 20 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 = 26122,66 \text{ мм/с} = 26,12 \text{ м/с}.$$

2 Проведем кинематический анализ. Выразим скорости характерных точек и угловые скорости тел системы через скорость тела 1 и покажем их на рисунке 6.5.

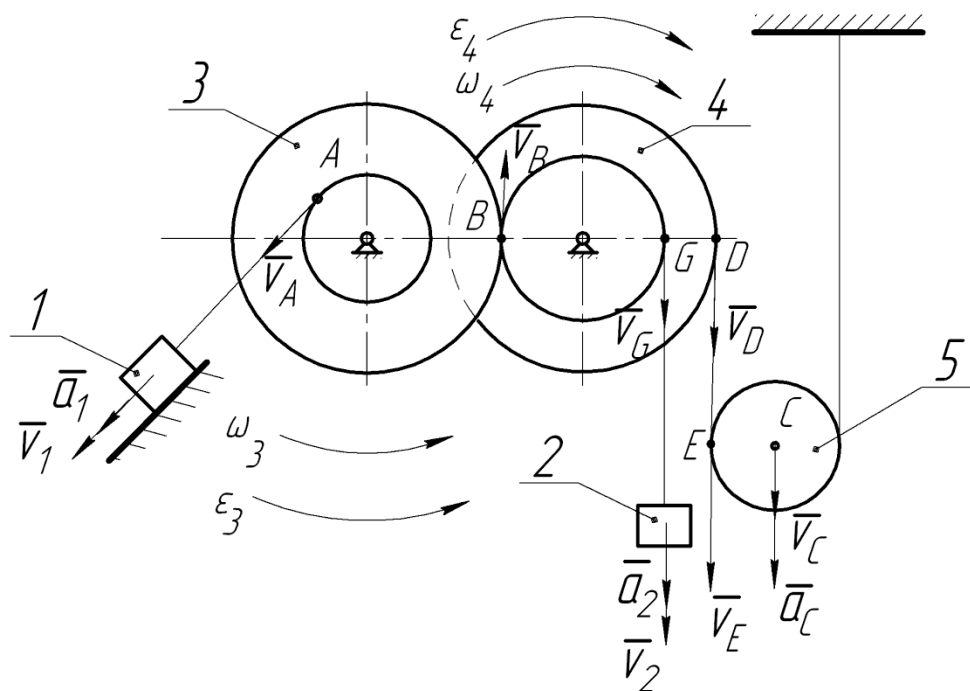


Рисунок 6.5 – Кинематические характеристики

$$v_A = v_1; \quad \omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \frac{v_1}{r_3};$$

$$v_B = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3}; \quad \omega_4 = \frac{v_B}{r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4};$$

$$v_2 = v_G = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot r_4}{r_3 \cdot r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = v_B;$$

$$v_D = \omega_4 \cdot R_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4}; \quad v_E = v_D = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4};$$

$$\omega_5 = \frac{v_E}{2R_5} = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5}; \quad v_C = \omega_5 \cdot R_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4}.$$

Для момента времени $t_1 = 5$ с:

$$v_1 = 26122,66 \text{ мм/с} = 26,12 \text{ м/с}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3} = \frac{26,12}{0,2} = 130,6 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{26,12 \cdot 0,5}{0,2 \cdot 0,25} = 261,2 \text{ рад/с}; \quad v_2 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{26,12 \cdot 0,5}{0,2} = 65,31 \text{ м/с};$$

$$\omega_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{26,12 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,4} = 98,0 \text{ рад/с};$$

$$v_C = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4} = \frac{26,12 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25} = 39,18 \text{ м/с}.$$

Определим ускорения характерных точек и угловые ускорения тел системы. Для этого вычислим первые производные по времени от соответствующих функций скоростей точек и угловых скоростей тел системы.

$$a_1 = a_1^r = \dot{v}_1 = 8e^{t+3} + 60t^2 - 18t.$$

Для момента времени $t_1 = 5$ с

$$a_1 = 8e^8 + 60 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 = 25257,66 \text{ мм/с} = 25,26 \text{ м/с};$$

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{25,26 \cdot 0,5}{0,2} = 63,14 \text{ м/с}; \quad \varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\dot{v}_1}{r_3} = \frac{a_1}{r_3} = \frac{25,26}{0,2} = 126,3 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{25,26 \cdot 0,5}{0,2 \cdot 0,25} = 252,6 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_5 = \dot{\omega}_5 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{a_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{25,26 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,4} = 94,7 \text{ рад/с};$$

$$a_C = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4} = \frac{25,26 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25} = 37,89 \text{ м/с}.$$

7 Задание К3 Кинематический анализ плоского механизма

7.1 Содержание задания К3

Плоский механизм состоит из стержней OA , AB и ползуна B (схемы 0 - 7 на рисунке 7.1) или стержней O_1A , AB и O_2B (схемы 8, 9 на рисунке 7.1), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O , O_1 , O_2 шарнирами. Длины стержней равны $OA=0,1$ м; $O_2B=0,235$ м. Положение механизма определяется углом φ , значения которого указаны в таблице 7.1. Значения других заданных величин указаны в таблице 7.2 и на схемах (рисунок 7.1).

Для заданного положения механизма найти скорости и ускорения точек B и C , а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схему механизма построить в масштабе. Построение начинать со звена, положение которого определяется углом φ . Заданные угловую скорость ω_{OA} и угловое ускорение ε_{OA} считать направленными против хода часовой стрелки. Необходимые при решении задачи расстояния и углы обозначать на чертеже и измерять с учетом масштаба (или вычислять аналитически).

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$, где A – точка, ускорение \bar{a}_A которой определяется по условиям задачи (если точка A движется по окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$); B – точка, ускорение \bar{a}_B которой нужно определить.

Таблица 7.1 – Значения угла φ

Первая цифра варианта	Вторая цифра варианта (Номер схемы)									
	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
<i>0</i>	30°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
<i>1</i>	60°	30°	30°	45°	30°	60°	30°	30°	60°	30°
<i>2</i>	90°	60°	45°	60°	45°	90°	60°	60°	90°	60°
<i>3</i>	120°	90°	90°	90°	90°	120°	90°	90°	120°	90°
<i>4</i>	150°	120°	135°	120°	120°	150°	120°	120°	150°	150°
<i>5</i>	180°	150°	180°	135°	150°	180°	180°	180°	180°	180°
<i>6</i>	210°	210°	210°	180°	210°	210°	210°	210°	210°	210°
<i>7</i>	240°	240°	240°	225°	270°	240°	240°	240°	240°	240°
<i>8</i>	300°	300°	300°	270°	300°	270°	270°	270°	300°	270°
<i>9</i>	330°	330°	330°	300°	330°	300°	300°	330°	330°	330°

Таблица 7.2 – Исходные данные

Первая цифра варианта	АС	Угловая скорость ω_{OA} , рад/с	Угловое ускорение ε_{OA} , рад/с ²
<i>0</i>	0,5 · АВ	2	3
<i>1</i>	0,3 · АВ	3	2
<i>2</i>	0,4 · АВ	1	2
<i>3</i>	0,5 · АВ	4	3
<i>4</i>	0,3 · АВ	5	2
<i>5</i>	0,4 · АВ	2	3
<i>6</i>	0,5 · АВ	3	2
<i>7</i>	0,3 · АВ	1	2
<i>8</i>	0,4 · АВ	4	2
<i>9</i>	0,25 · АВ	5	3

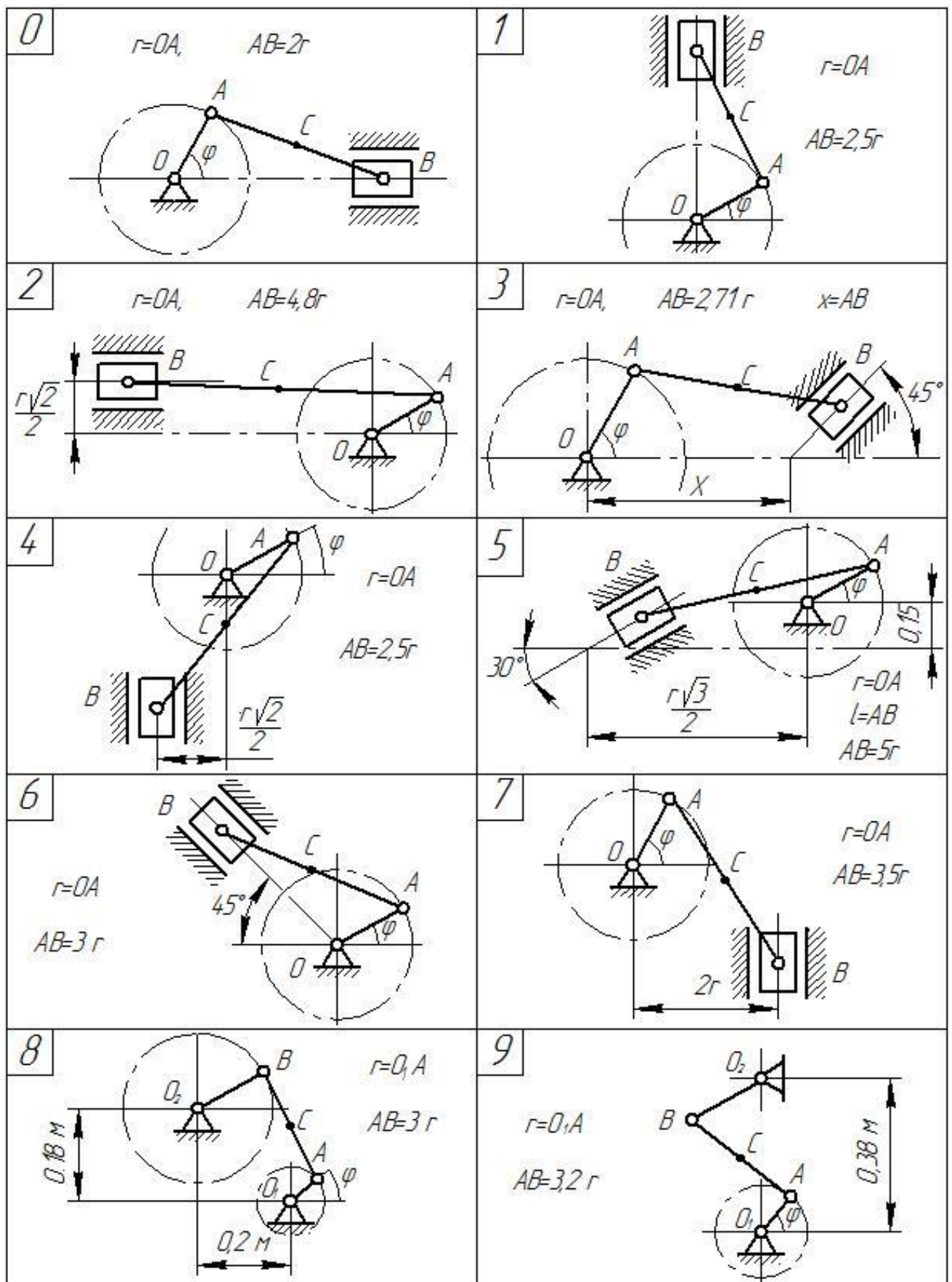


Рисунок 7.1

7.2 Пример выполнения задания К3

Для заданного положения механизма (рисунок 7.2) определить скорости и ускорения точек D и E , а также угловую скорость и угловое ускорение звена AD .

Дано: $OA=0,25\text{ м}$; $\omega_{OA}=2\text{ рад/с}$; $\varepsilon_{OA}=2\text{ рад/с}^2$; $CD = AD = 0,46\text{ м}$; $AE = ED$;
 $\angle CDA = 30^\circ$; $\angle OAD = 60^\circ$.

Найти: v_D ; v_E ; a_D ; a_E ; ω_{AD} ; ε_{AD} .

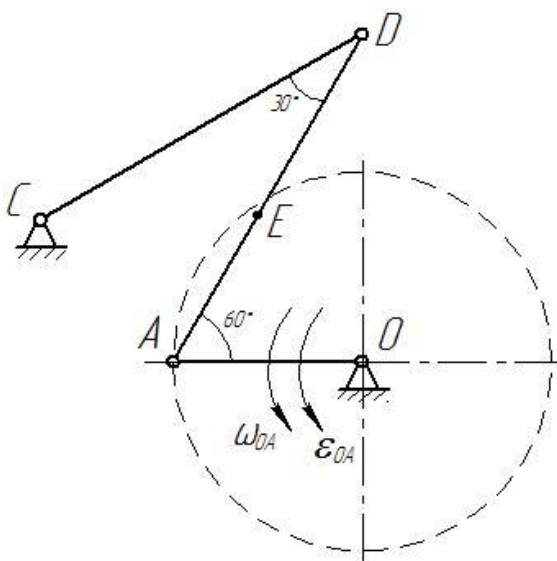


Рисунок 7.2

Решение.

1) Строим механизм в заданном положении в выбранном масштабе (рисунок 7.3).

2) Определяем скорости точек и угловые скорости звеньев.

Скорость точки A звена OA равна

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,25 = 0,5\text{ м/с}.$$

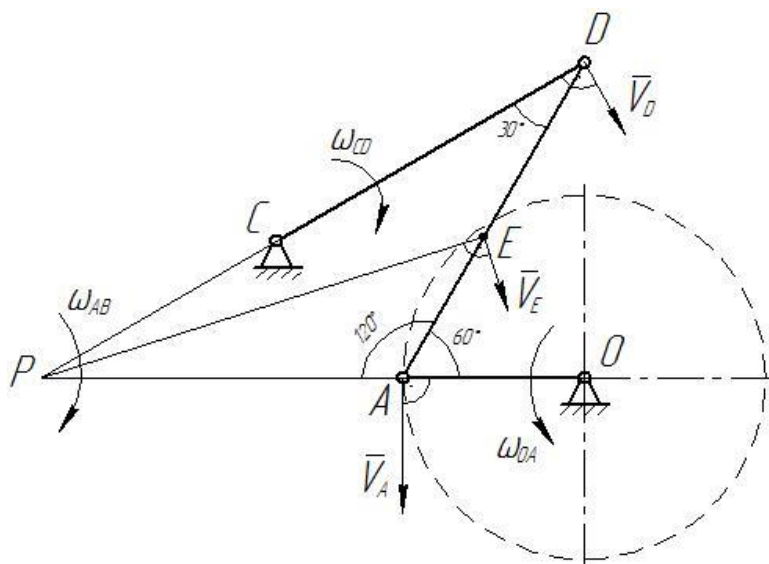


Рисунок 7.3

Вектор \vec{v}_A перпендикулярен OA и направлен соответственно вращению звена OA .

Учитывая, что точка D принадлежит одновременно звену CD , вращающемуся вокруг точки C , найдем направление вектора скорости точки D : вектор \vec{v}_D перпендикулярен CD .

Мгновенный центр скоростей (МЦС) P звена AD находится на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и D к направлению их скоростей.

Угловая скорость звена AD

$$\omega_{AD} = \frac{v_A}{AP} \quad (7.1)$$

Скорости точек D и E звена AD

$$v_D = \omega_{AD} \cdot DP; \quad v_E = \omega_{AD} \cdot PE. \quad (7.2)$$

Расстояния AP , DP , PE измеряем на чертеже (рисунок 7.3) с учетом масштаба или вычисляем аналитически.

$\triangle APD$ – равнобедренный; $AP = AD = 0,46$ м;

$$DP = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2 \cdot AP \cdot AD \cos 120^\circ} = \\ = \sqrt{0,46^2 + 0,46^2 - 2 \cdot 0,46 \cdot 0,46 \cdot \cos 120^\circ} = 0,8 \text{ м.}$$

$PE = 0,6$ м (измеряем по чертежу с учетом масштаба).

Угловая скорость звена AD

$$\omega_{AD} = \frac{0,5}{0,46} = 1,09 \text{ рад/с};$$

$$v_D = 1,09 \cdot 0,8 = 0,87 \text{ м/с}; v_E = 1,09 \cdot 0,6 = 0,65 \text{ м/с}.$$

По направлению \bar{v}_A определяем направление поворота стержня AD вокруг МЦС звена AD (точки P) – по ходу часовой стрелки. Вектор \bar{v}_E перпендикулярен отрезку EP и направлен в сторону этого поворота.

Угловая скорость звена CD

$$\omega_{CD} = \frac{v_D}{CD} = \frac{0,87}{0,46} = 1,86 \text{ рад/с}.$$

По направлению \bar{v}_D определяем направление поворота стержня CD вокруг центра вращения C – по часовой стрелке.

3) Определяем ускорения точек и угловые ускорения звеньев.

По данным задачи можно определить ускорение точки A звена OA . Точка A движется по окружности, поэтому

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n.$$

Численно

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,25 = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_A^n направлен вдоль AO , от точки A к центру вращения O звена OA ; вектор \bar{a}_A^{τ} перпендикулярен AO и совпадает с вектором \bar{v}_A (рисунок 7.4), так как вращение звена OA – ускоренное.

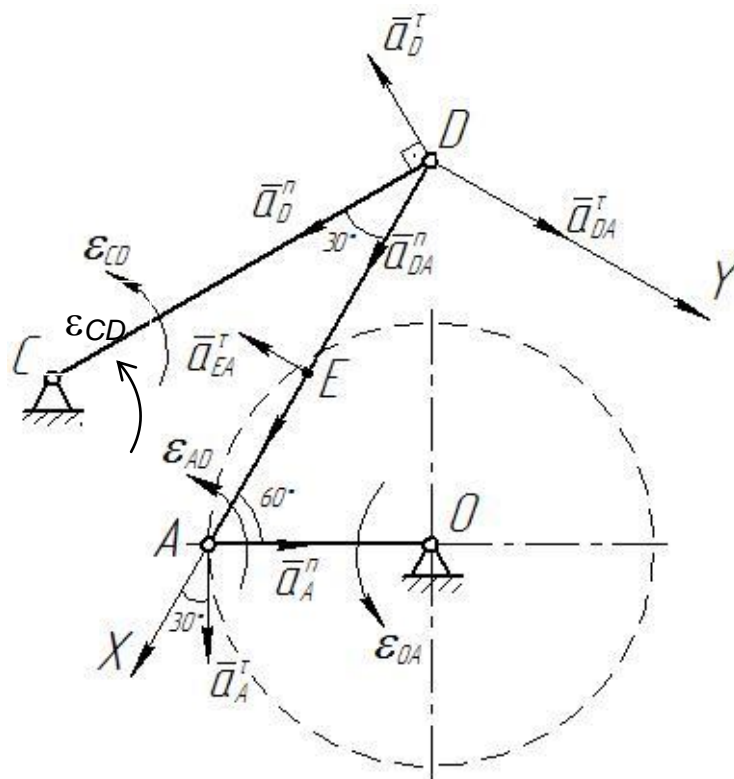


Рисунок 7.4

Примем точку A за полюс. Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение точки D :

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{DA}^\tau + \bar{a}_{DA}^n. \quad (7.3)$$

Так как точка D одновременно принадлежит звену CD , вращающемуся вокруг точки C , то

$$\bar{a}_D = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau.$$

Следовательно, выражение (7.3) примет вид

$$\bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{DA}^n + \bar{a}_{DA}^\tau. \quad (7.4)$$

Вектор \bar{a}_D^n направлен вдоль DC от точки D к центру вращения C звена CD , вектор \bar{a}_D^τ - перпендикулярно DC . Числовое значение

$$a_D^n = \omega_{CD}^2 \cdot CD = \frac{v_D^2}{CD} = \frac{0,87^2}{0,46} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки D во вращательном движении стержня AD вокруг полюса A :

$$a_{DA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot DA = 1,09^2 \cdot 0,46 = 0,55 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_{DA}^n направлен от точки D к полюсу A .

Для ускорения \bar{a}_{DA}^τ известна только линия действия – перпендикулярно DA .

Зададимся направлениями \bar{a}_D^τ и \bar{a}_{DA}^τ по указанным линиям (рисунок 7.4). Значения этих ускорений найдем, проецируя векторное равенство (7.4) на оси координат.

Выбрав направление осей X и Y , как показано на рисунке 7.4, получаем:

$$a_D^n \cos 30^\circ - a_D^\tau \cos 60^\circ = -a_A^n \cos 60^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{DA}^n; \quad (7.5)$$

$$-a_D^n \sin 30^\circ - a_D^\tau \sin 60^\circ = a_A^n \sin 60^\circ + a_A^\tau \sin 30^\circ + a_{DA}^\tau. \quad (7.6)$$

Из уравнения (7.5) находим

$$\begin{aligned} a_D^\tau &= \frac{a_D^n \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ - a_A^\tau \cos 30^\circ - a_{DA}^n}{\cos 60^\circ} = \\ &= \frac{1,65 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,55}{0,5} = 1,9 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Из уравнения (7.6) находим

$$\begin{aligned} a_{DA}^\tau &= -a_D^n \sin 30^\circ - a_D^\tau \sin 60^\circ - a_A^n \sin 60^\circ - a_A^\tau \sin 30^\circ = \\ &= -1,65 \cdot 0,5 - 1,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \cdot 0,5 = -3,6 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Знаки показывают, что вектор \bar{a}_D^τ направлен как показано на рисунке 7.4, направление вектора \bar{a}_{DA}^τ противоположно показанному на рисунке 7.4.

Угловое ускорение звена AD

$$\varepsilon_{AD} = \frac{|a_{DA}^\tau|}{DA} = \frac{3,6}{0,46} = 7,83 \text{ рад}/\text{с}^2.$$

Истинное направление \bar{a}_{DA}^τ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AD} (в данном случае – против хода часовой стрелки).

Ускорение точки D

$$a_D = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_D^\tau)^2} = \sqrt{1,65^2 + 1,9^2} = 2,52 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Найдем ускорение точки E , приняв за полюс точку A :

$$\bar{a}_E = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{EA}^n + \bar{a}_{EA}^\tau.$$

Нормальное и касательное ускорения точки E во вращательном движении стержня AD вокруг полюса A :

$$a_{EA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot EA = 1,09^2 \cdot \frac{0,46}{2} = 0,27 \text{ м}/\text{с}^2;$$

$$a_{EA}^\tau = \varepsilon_{AD} \cdot EA = 7,83 \cdot \frac{0,46}{2} = 1,8 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Вектор \bar{a}_{EA}^n направлен к полюсу A ; вектор \bar{a}_{EA}^τ перпендикулярен вектору \bar{a}_{EA}^n и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AD} .

Ускорение точки E находим способом проекций (рисунок 7.4):

$$a_{Ex} = -a_A^n \cos 60^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{EA}^n = -1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,27 = 0,20 \text{ м}/\text{с}^2;$$

$$a_{Ey} = a_A^n \sin 60^\circ + a_A^\tau \sin 30^\circ - a_{EA}^\tau = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,5 \cdot \frac{1}{2} - 1,8 = -0,68 \text{ м/с}^2;$$

$$a_E = \sqrt{a_{Ex}^2 + a_{Ey}^2} = \sqrt{0,20^2 + 0,68^2} = 0,71 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD} = \frac{|a_D^\tau|}{CD} = \frac{1,9}{0,46} = 4,13 \text{ рад/с}.$$

Истинное направление \bar{a}_D^τ относительно центра вращения C звена CD определяет направление углового ускорения ε_{CD} (в данном случае – против хода часовой стрелки).

Ответ: $v_D = 0,87 \text{ м/с}; v_E = 0,65 \text{ м/с}; a_D = 2,52 \text{ м/с}^2; a_E = 0,71 \text{ м/с}^2;$
 $\omega_{AD} = 1,09 \text{ рад/с}; \varepsilon_{AD} = 7,83 \text{ рад/с}^2.$

8 Задание К4 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

8.1 Содержание задания К4

Зная относительное и переносное движение точки, определить для момента времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

Схемы механизмов показаны на рисунке 8.1, а необходимые для расчета данные приведены в таблице 8.1. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению дуговой координаты S_r ($S_r = OM$ – дуга, соответствующая меньшему центральному углу). При $S_r < 0$ точка M находится по другую сторону от точки O .

Таблица 8.1 – Исходные данные

№ услов.	Относительное движение	Переносное движение	t_1, c	R, m
	$OM=S_r=S_r(t), m$	$\varphi_e=\varphi_e(t), рад$		
0	$0,025\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	2	0,4
1	$0,075\pi(0,1t + 0,3t^3)$	$2t - 0,3t^2$	1	0,9
2	$0,06\pi t^2$	$\pi t^3/6$	1	0,18
3	$0,4\pi \cos(\pi t/6)$	$3t - 0,5t^3$	2	0,3
4	$0,2\pi \cos(\pi t/4)$	$1,2t - t^2$	$4/3$	0,2
5	$0,15\pi t^3/8$	$5t - 4t^2$	2	0,3
6	$1,2\pi t^2$	$8t - 3t$	$1/3$	0,4
7	$0,3\pi \cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	2	0,6
8	$0,025\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	$1/2$	0,25
9	$0,1\pi \sin(\pi t/4)$	$4t - 0,2t^2$	$2/3$	0,3

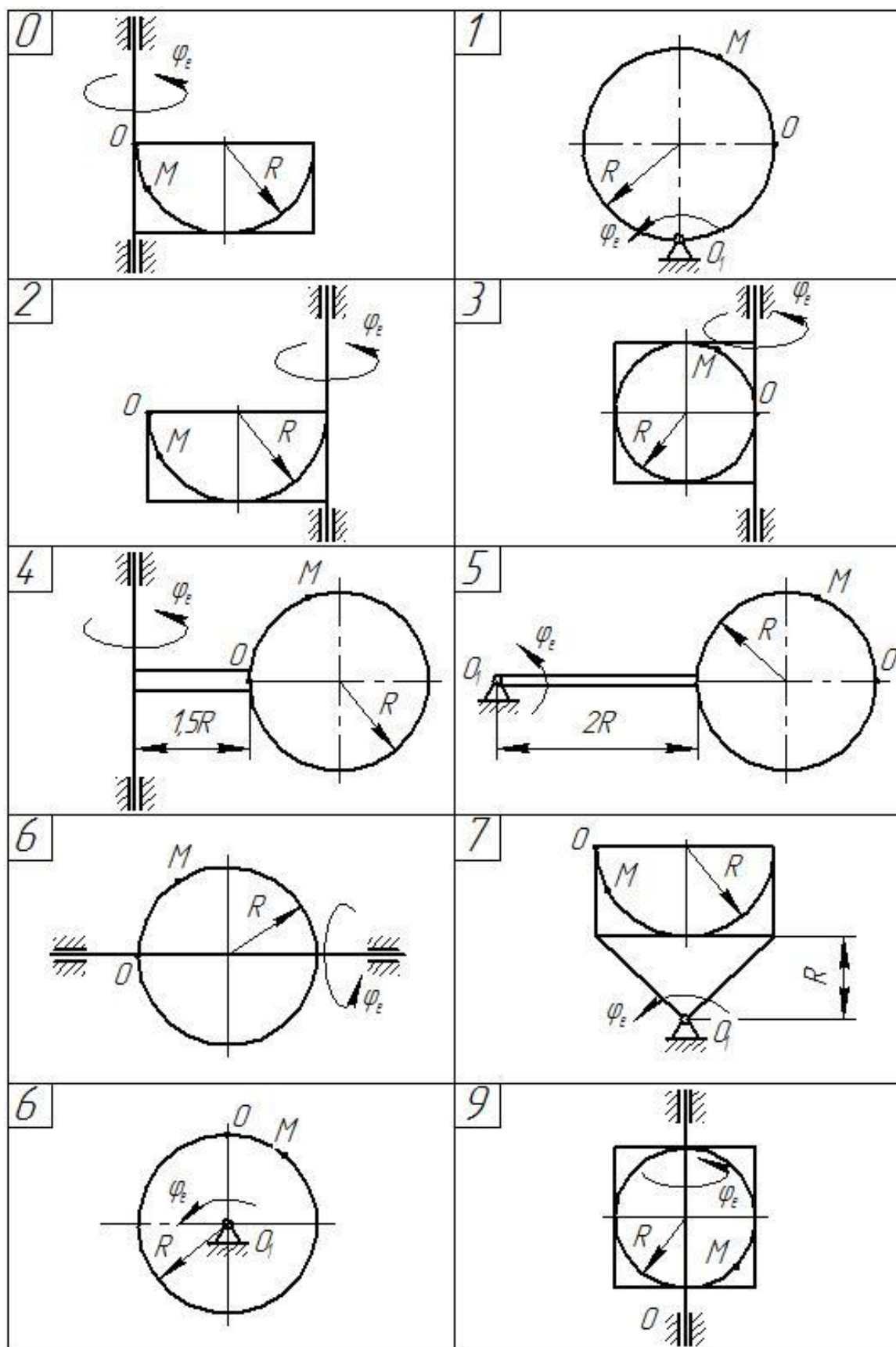


Рисунок 8.1

8.2 Пример выполнения задания К4

Диск радиуса $R=1\text{ м}$ вращается в своей плоскости вокруг неподвижной оси O против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \pi t^2$ (φ - в рад; t - в с), где φ - угол, составляемый диаметром окружности OA с горизонтальной прямой (рисунок 8.2). По ободу диска из точки O движется точка M по ходу часовой стрелки согласно уравнению $OM = S = \pi t^2$ (t - в с, S - в м). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t_1 = 0,5\text{ с}$.

Дано: $\varphi = \pi t^2$; $OM = S = \pi t^2$; $t_1 = 0,5\text{ с}$; $R = 1\text{ м}$.

Найти: \bar{v}_a, \bar{a}_a .

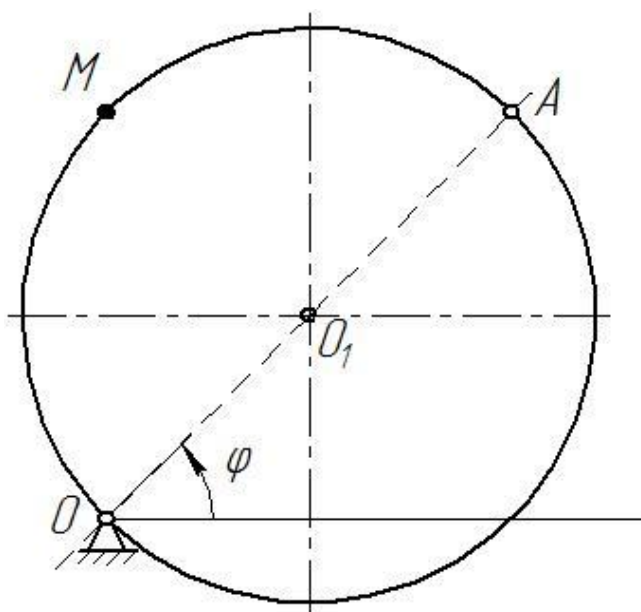


Рисунок 8.2

Решение.

Будем рассматривать движение точки M как сложное: движение по дуге OM относительно диска и движение вместе с вращающимся диском.

Неподвижную систему координат $OXYZ$ жестко свяжем с неподвижной

опорой (рисунок 8.3), причем ось OX совпадет с осью вращения тела и перпендикулярна плоскости чертежа. Подвижную систему координат жестко свяжем с диском (на рисунке 8.3 эта система координат не показана).

Тогда переносным движением будет вращение тела (диска) относительно оси OX , а относительным – движение точки по дуге OM .

Найдем положение точки M в момент времени $t_1 = 0,5c$:

$$S_r = OM|_{t=0,5} = \frac{\pi}{4}(m).$$

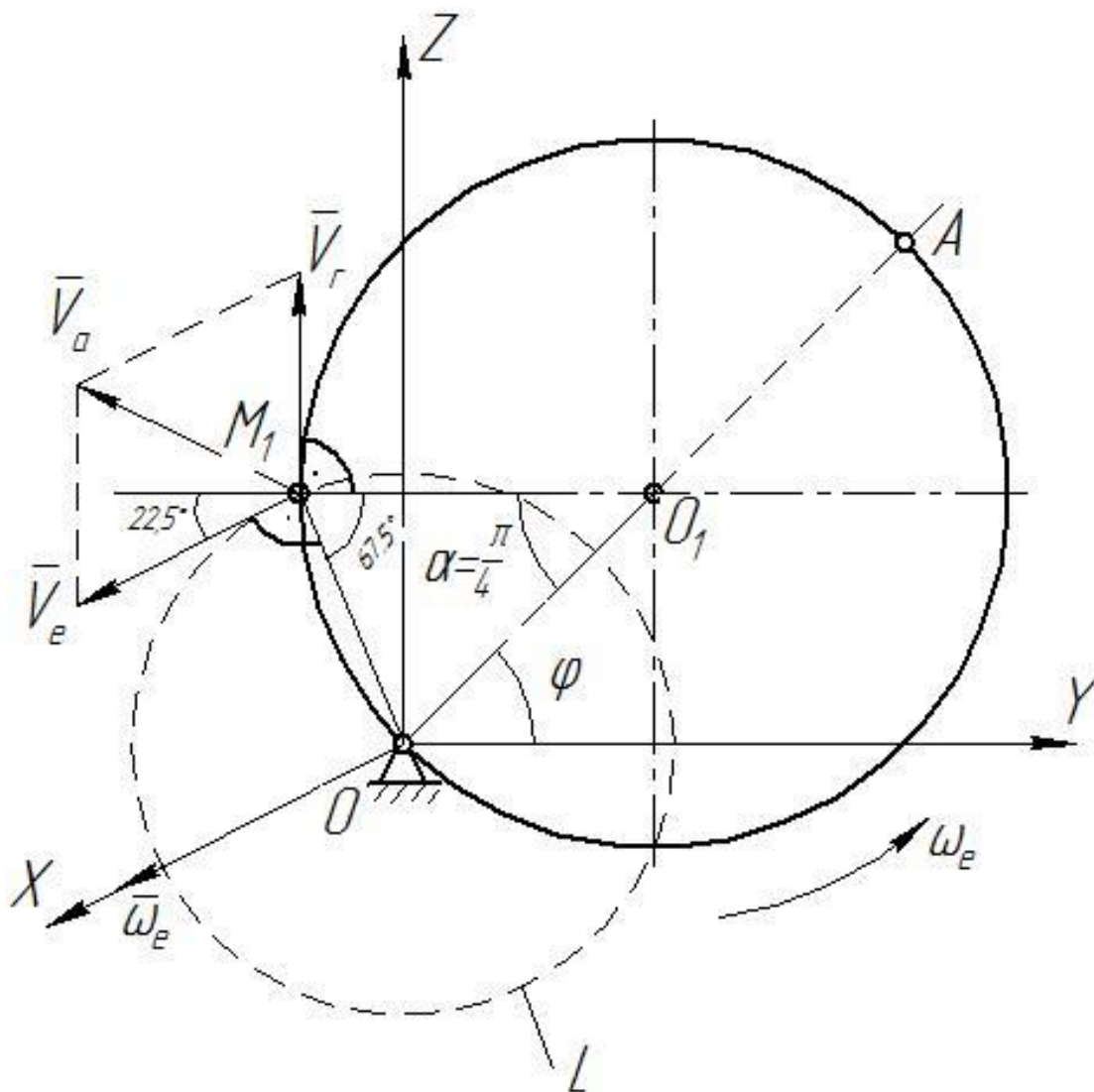


Рисунок 8.3

Следовательно, центральный угол, на который опирается дуга OM :

$$\alpha = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{4 \cdot 1} = \frac{\pi}{4} (\text{rad}).$$

Отложим этот угол от радиуса OO_1 по ходу часовой стрелки (в сторону положительного отсчета координаты S_r) (рисунок 8.3).

Покажем положение точки M на чертеже в момент времени $t_1 = 0,5c$, обозначим его M_1 (рисунок 8.3).

Найдем абсолютную скорость точки M_1 как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

Относительная скорость \bar{v}_r – это скорость точки M_1 в относительном движении (по дуге OM).

$$v_r = \frac{dS_r}{dt} = 2\pi t \Big|_{t=0,5c} = \pi = 3,14 \text{ м/с} > 0.$$

Положительный знак результата означает, что вектор \bar{v}_r направлен в сторону возрастания S_r . Так как относительное движение происходит по дуге окружности OM , то вектор \bar{v}_r направлен по касательной к этой окружности.

Переносной скоростью точки M , когда она занимает положение M_1 , будет скорость этой точки окружности во вращательном движении вокруг оси X вместе с диском:

$$|v_e| = |\omega_e| \cdot h, \tag{8.1}$$

где $h = OM_1$ – радиус окружности L , описываемой точкой M_1 .

Найдем h из ΔOM_1O_1 :

$$\begin{aligned} OM_1 &= \sqrt{O_1M_1^2 + OO_1^2 - 2 \cdot O_1M_1 \cdot OO_1 \cdot \cos\alpha} = \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,707} = 0,77 \text{ м}; \end{aligned}$$

Угловая скорость тела (диска)

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 2\pi t \Big|_{t=0,5} = \pi = 3,14 \text{ рад/с} > 0.$$

Положительный знак показывает, что вращение окружности совпадает с направлением возрастания угла φ . Поэтому вектор $\bar{\omega}_e$ направлен по оси OX в сторону положительных значений координаты X .

Модуль переносной скорости находим по формуле (8.1):

$$v_e = 3,14 \cdot 0,77 = 2,42 \text{ м/с}.$$

Вектор \bar{v}_e направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела (рисунок 8.3).

Абсолютную скорость точки найдем по формуле:

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2 \cdot v_r \cdot v_e \cdot \cos(\bar{v}_r, v_e)} = \\ &= \sqrt{3,14^2 + 2,42^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 2,42 \cdot \cos(90^\circ + 22,5^\circ)} = 3,15 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

где $\cos(\bar{v}_r, v_e) = \cos(90^\circ + 22,5^\circ)$, так как в равнобедренном треугольнике M_1O_1O $\angle OM_1O_1 = \angle M_1OO_1 = 67,5^\circ$.

Абсолютное ускорение точки:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_k. \quad (8.2)$$

Определим ускорение точки M_I в относительном движении по дуге OM :

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 2\pi = 6,28 \text{ м/с}^2 > 0.$$

Положительный знак указывает, что вектор относительного касательного ускорения \bar{a}_r^τ направлен в сторону положительных значений дуговой координаты S_r , т.е. совпадает по направлению с вектором \bar{v}_r (рисунок 8.4).

Относительное нормальное ускорение точки

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{3,14^2}{1} = 9,86 \text{ м/с}^2;$$

где $\rho = R = 1 \text{ м}$ – радиус кривизны относительной траектории точки.

Вектор относительного нормального ускорения \bar{a}_r^n направлен по радиусу к центру O_I окружности.

Определим переносное ускорение точки M_I как ускорение той точки тела (диска), с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.

Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 7,59 \text{ м/с}^2$$

Вектор переносного нормального ускорения \bar{a}_e^n направлен по радиусу

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2\pi = 6,28 \text{ рад/с} > 0.$$

Знаки ω_e и ε_e одинаковы, следовательно, вращение тела ускоренное, направления векторов $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\varepsilon}_e$ совпадают (рисунок 8.4).

Согласно (8.3)

$$a_e^{\tau} = 6,28 \cdot 0,77 = 4,84 \text{ м/с}^2.$$

Так как вращение тела ускоренное, то вектор переносного касательного ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор переносной скорости \bar{v}_e .

Ускорение Кориолиса

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r,$$

а его модуль

$$a_k = 2|\omega_e| \cdot |\bar{v}_r| \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,14 \cdot \sin 90^\circ = 19,72 \text{ м/с}^2.$$

Направление кориолисова ускорения определяем по правилу векторного произведения: вектор кориолисова ускорения перпендикулярен плоскости, в которой расположены вектор угловой переносной скорости $\bar{\omega}_e$ и вектор относительной скорости точки \bar{v}_r , и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору \bar{v}_r виден происходящим против хода часовой стрелки.

Для проверки правильности определения направления вектора кориолисова ускорения можно воспользоваться правилом Жуковского: чтобы найти направление

вектора кориолисова ускорения \bar{a}_k нужно спроецировать вектор относительной скорости точки \bar{v}_r на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, а затем повернуть полученный вектор проекции на плоскость в сторону переносного вращения на 90° .

В рассматриваемой задаче вектор угловой скорости $\bar{\omega}_e$ перпендикулярен плоскости чертежа. Вектор относительной скорости \bar{v}_r точки направлен по касательной к окружности OM и лежит в плоскости чертежа. Векторы $\bar{\omega}_e$ и \bar{v}_r взаимно перпендикулярны $(\bar{\omega}_e; \bar{v}_r) = 90^\circ$. Следовательно, чтобы определить направление вектора кориолисова ускорения \bar{a}_k достаточно повернуть вектор относительной скорости точки \bar{v}_r в плоскости чертежа на 90° в сторону переносного вращения (рисунок 8.4).

Для определения величины абсолютного ускорения точки \bar{a}_a применим метод проекций. Проецируя правую и левую части векторного равенства (8.2) на оси координат $M_1x_1y_1z_1$, получим:

$$a_{ax_1} = 0;$$

$$\begin{aligned} a_{ay_1} &= a_r^n + a_e^n \cos 67,5^\circ - a_e^\tau \cos 22,5^\circ - a_k = \\ &= 9,86 + 7,59 \cdot 0,38 - 4,84 \cdot 0,92 - 19,72 = -11,45 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{az_1} &= a_r^\tau - a_e^n \sin 67,5^\circ - a_e^\tau \sin 22,5^\circ = \\ &= 6,28 - 7,59 \cdot 0,92 - 4,84 \cdot 0,38 = -2,54 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax_1}^2 + a_{ay_1}^2 + a_{az_1}^2} = \sqrt{11,4^2 + 2,54^2} = 11,73 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_a = 3,15 \text{ м/с}$, $a_a = 11,73 \text{ м/с}^2$.

Список использованных источников

- 1 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
- 2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
- 3 Диевский, В.А. Теоретическая механика. Курс лекций: учебное пособие/ В.А. Диевский. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.
- 4 Диевский, В.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: учебное пособие / В.А. Диевский, И.А. Малышева – СПб.: Лань, 2009. – 192 с.
- 5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений/ под общ. ред. А.А. Яблонского. – М.: КноРус, 2011. – 386 с.
- 6 Кудина, Л.И. Определение усилий в стержнях плоских ферм: методические указания/ Л.И. Кудина. - Оренбург : ОГУ, 2013. - 43 с.
- 7 Кудина, Л.И. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел): методические указания/ Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов. - Оренбург : ОГУ, 2013. - 33 с.
- 8 Кудина, Л.И. Равновесие произвольной пространственной системы сил: методические указания / Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов. - Оренбург: Университет, 2012. - 32 с.
- 9 Морозов, Н.А. Определение кинематических характеристик твердого тела: методические указания/ Н.А. Морозов. – Оренбург: ОГУ, 2013. - 23 с.
- 10 Куча, Г.В. Кинематика точки: методические указания / Г.В. Куча, И.И. Мосалева. - Оренбург : ОГУ, 2013. - 29 с.
- 11 Куча, Г.В. Кинематический анализ плоского механизма: методические указания / Г.В. Куча, И.И. Мосалева. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2011. - 27 с.