

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Н.А. Морозов, Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ MATHCAD**

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 Техносферная безопасность, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.04.01 Машиностроение

Оренбург  
2018

УДК 531 (075.8)  
ББК 22.21я73  
М 80

Рецензент – профессор, доктор технических наук В. М. Кушнарченко

**Морозов, Н. А.**  
М 80 Теоретическая механика. Лабораторный практикум на базе Mathcad: учебное пособие / Н.А. Морозов, Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 144 с.  
ISBN 978-5-7410-2188-0

Учебное пособие содержит задания для лабораторных работ по статике, кинематике и динамике на базе системы компьютерной математики Mathcad, краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ, а также примеры их выполнения.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 Техносферная безопасность, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.04.01 Машиностроение, при выполнении лабораторных работ по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем». Учебное пособие может быть рекомендовано для самостоятельной работы студентов технических направлений бакалавриата, специалитета и магистратуры всех форм обучения при изучении дисциплины «Теоретическая механика».

УДК 531 (075.8)  
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-7410-2188-0

© Морозов А.А.,  
Кудина Л.И.,  
Гаврилов А.А., 2018  
©ОГУ, 2018

## Содержание

Введение .....	5
1 Лабораторная работа №1. Исследование равновесия плоских систем сил ....	6
5.1 Краткие теоретические сведения .....	6
1.2 Задание для лабораторной работы .....	18
1.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	21
2 Лабораторная работа №2. Исследование равновесия пространственной системы сил .....	44
2.1 Краткие теоретические сведения .....	44
2.2 Задание для лабораторной работы .....	55
2.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	58
3 Лабораторная работа № 3. Исследование кинематических характеристик материальной точки .....	67
3.1 Краткие теоретические сведения .....	67
3.2 Задание для лабораторной работы .....	74
3.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	76
4 Лабораторная работа № 4. Исследование кинематических характеристик твердых тел при различных видах движения .....	86
4.1 Краткие теоретические сведения .....	86
4.2 Задание для лабораторной работы .....	92
4.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	97
5 Лабораторная работа № 5. Исследование движения материальной точки ....	103
5.1 Краткие теоретические сведения .....	103
5.2 Задание для лабораторной работы .....	106
5.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	109
6 Лабораторная работа № 6. Исследование движения механической системы с помощью общих теорем динамики .....	115
6.1 Краткие теоретические сведения .....	115

6.2 Задание для лабораторной работы .....	122
6.3 Пример выполнения лабораторной работы .....	125
Список использованных источников .....	144

## Введение

В инженерной практике нередко возникает необходимость решения задач, связанных с исследованием равновесия и движения твердых тел.

Настоящее учебное пособие содержит шесть заданий для лабораторных работ по основным темам статики, кинематики и динамики твердого тела, изучаемым в традиционном вузовском курсе теоретической механики или отдельных ее разделов, входящих в ряд других дисциплин, таких как механика, техническая механика и т.п.

Выполнение каждой лабораторной работы предполагает выполнение аналитической, вычислительной и графической частей, включающих в себя получение аналитических зависимостей, вычисление основных характеристик движения или равновесия, построение графиков исследуемых величин и т.п.

Появление современных пакетов математических программ существенно расширило круг задач механики, так как позволило преодолеть некоторые сложности вычислительного характера и визуализации результатов. При всем многообразии современных математических пакетов авторы настоящего пособия ориентировались на систему Matcad по двум основным причинам. Во-первых, использование пакета Matcad не требует дополнительного изучения языка программирования, так как система имеет простой и интуитивно понятный интерфейс, а вычисления и запись операторов ведутся в привычном виде. Во-вторых, система обладает великолепными возможностями в части визуализации и анимации результатов вычислений.

Каждая работа содержит краткие теоретические сведения, варианты заданий и примеры выполнения, а также общие рекомендации по решению задач. Необходимые для выполнения работ исходные данные приведены в виде схем и таблиц. Исходные данные для каждой работы выбираются в соответствии с трехзначным шифром. Таким образом, отличительной особенностью данного учебного пособия является большое количество вариантов, предлагаемых для каждой лабораторной работы.

# 1 Лабораторная работа №1. Исследование равновесия плоских систем сил

## 5.1 Краткие теоретические сведения

Исследование условий равновесия плоских систем сил будем проводить на примере анализа усилий в стержнях плоской статически определимой фермы.

Фермой называется неизменяемая (жесткая) решетчатая система, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных по концам идеальными шарнирами.

Ферма состоит из большого числа стержней, шарнирно соединенных в точках пересечения их осей (рисунок 1.1). Места соединения стержней называют узлами. Если оси всех стержней фермы и линии действующих на нее сил лежат в одной плоскости, то ферма называется плоской. Вертикальные стержни фермы называют стойками, а наклонные – раскосами. Стержни, ограничивающие ферму по верхнему контуру, образуют верхний пояс, а ограничивающие по нижнему контуру – нижний пояс фермы.

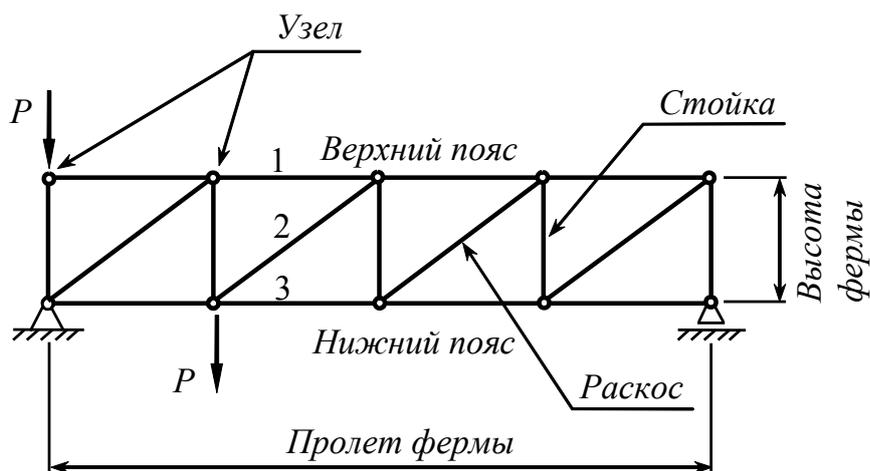
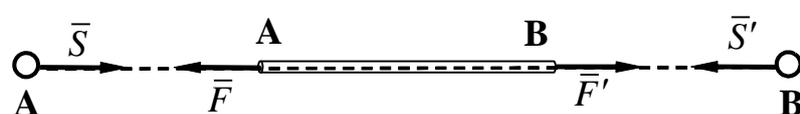


Рисунок 1.1 – Схема фермы

При расчете ферм принимаются следующие допущения:

- собственным весом стержней фермы по сравнению с внешними нагрузками можно пренебречь;
- узлы фермы – идеальные (без трения) шарниры;
- внешняя нагрузка приложена в узлах фермы.

При принятых допущениях, можно считать, что стержни ферм работают только на растяжение или сжатие. На рисунке 1.2 стержень  $AB$  растягивается силами  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ , приложенными к его концам со стороны узлов фермы. Тогда реакции  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$ , действующие на узлы  $A$  и  $B$  фермы со стороны стержня, будут соответственно равны по модулю и противоположно направлены силам  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ . Аналогичная картина будет наблюдаться и при сжатии стержня. Возникающие при этом в самих стержнях внутренние силы, препятствующие изменению их формы, называются усилиями в стержнях. Очевидно, что эти усилия равны реакциям  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$ , действующим на узлы фермы со стороны стержней.



$$\bar{F} = -\bar{F}'; \quad \bar{F} = -\bar{S}; \quad \bar{F}' = -\bar{S}'.$$

Рисунок 1.2

Подобное представление о работе стержней фермы, конечно, является идеализированным. В реальной ферме стержни обладают весом и соединяются между собой наглухо (с помощью сварки, заклепок и т.п.). Вследствие этого под действием собственного веса стержни будут изгибаться.

Однако принятые допущения позволяют наиболее простым способом получить результаты, достаточно близкие к действительности.

Простейшей неизменяемой фермой является так называемый шарнирный треугольник (рисунок 1.3а).

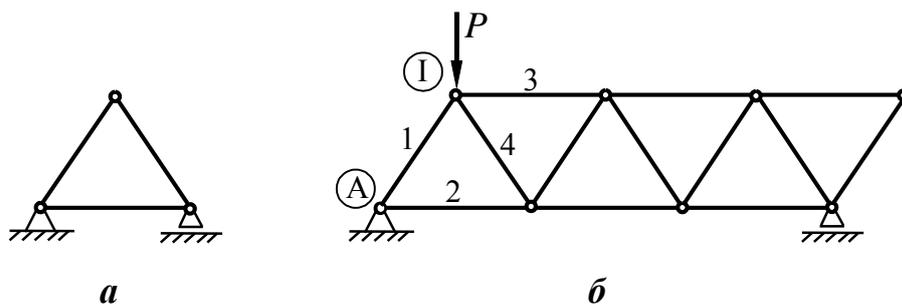


Рисунок 1.3 – Плоские фермы

Очевидно, что плоская ферма, полученная из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух стержней, также является неизменяемой (рисунок 1.3б).

Ферма, теряющая свойство жесткости при удалении хотя бы одного стержня, называется фермой без лишних стержней.

В плоской ферме без лишних стержней число стержней  $m$  и число узлов  $n$  связаны соотношением:

$$m = 2n - 3. \quad (1.1)$$

Условие (1.1) одновременно является и условием статической определимости плоской фермы, так как в случае его выполнения число неизвестных реакций будет равно числу независимых уравнений равновесия, которые можно составить для определения этих реакций.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассмотрев равновесие фермы в целом, как абсолютно твердого тела, находящегося под действием внешней нагрузки и реакций связей.

Для определения усилий в стержнях ферм используют аналитические и графические способы.

Существуют два основных аналитических способа определения усилий в стержнях статически определимых ферм: способ вырезания узлов и способ сечений.

Метод расчета ферм, в основе которого лежит идея вырезания узлов и составления для них уравнений равновесия, был предложен русским ученым Д.И. Журавским. Способ сечений в практически удобной форме был предложен немецким инженером А. Риттером и усовершенствован впоследствии русским инженером и ученым Ф.С. Ясинским.

**Способом вырезания узлов** удобно пользоваться для определения усилий во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному составлению уравнений равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня. Для фермы, изображенной на рисунке 1.3б, таким узлом является, например, узел *A*. Мысленно вырезая узел из фермы, рассматривают его равновесие под действием внешних сил, включая опорные реакции, и реакций отброшенных стержней (рисунок 1.4).

Предполагая все стержни фермы растянутыми, реакции стержней направляют от узла.

Составляя два уравнения равновесия (1.2) плоской сходящейся системы сил, действующей на узел, определяют неизвестные реакции стержней  $S_1$  и  $S_2$ .

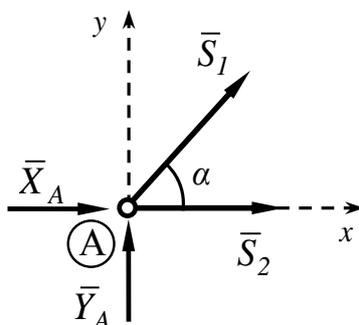


Рисунок 1.4 – Равновесие узла *A*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} X_A + S_1 \cos \alpha + S_2 = 0; \\ Y_A + S_1 \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Если в результате вычислений значение реакции окажется отрицательным, то это означает, что в действительности данный стержень сжат, а не растянут. Найденные реакции будут равны по модулю искомым усилиям в стержнях.

Затем переходят к рассмотрению равновесия узла, в котором может сходиться произвольное число стержней, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 1.5). Составляя два уравнения равновесия (1.3) плоской сходящейся системы сил, действующей на узел, определяют неизвестные реакции стержней  $S_3$  и  $S_4$  и т.д.

Последовательность рассмотрения узлов определяется условием, при котором число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать число независимых уравнений равновесия (для плоской фермы – два).

Усилия в отдельных стержнях фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть *нулевыми*.

Пользуясь признаками нулевых стержней, можно найти такие стержни, не производя расчета всей фермы:

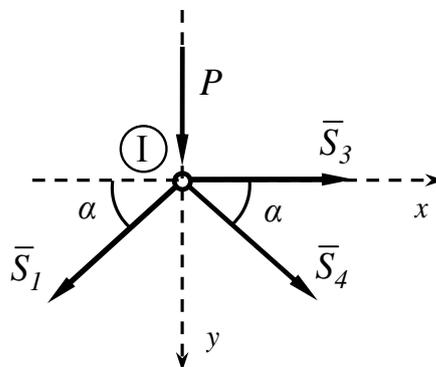


Рисунок 1.5 – Равновесие узла I

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} -S_1 \cos \alpha + S_3 + S_4 \cos \alpha = 0; \\ P + S_1 \sin \alpha + S_4 \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

1 Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рисунок 1.6а).

2 Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, два из которых расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, а в двух других стержнях – равны между собой (рисунок 1.6б).

3 Если в узле плоской фермы сходятся два стержня, и приложенная к узлу сила действует по оси одного из этих стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

Заметим особо, что удалять нулевые стержни из фермы нельзя, так как в этом случае будет нарушено условие геометрической неизменяемости фермы (1.1).

**Способом сечений** удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов.

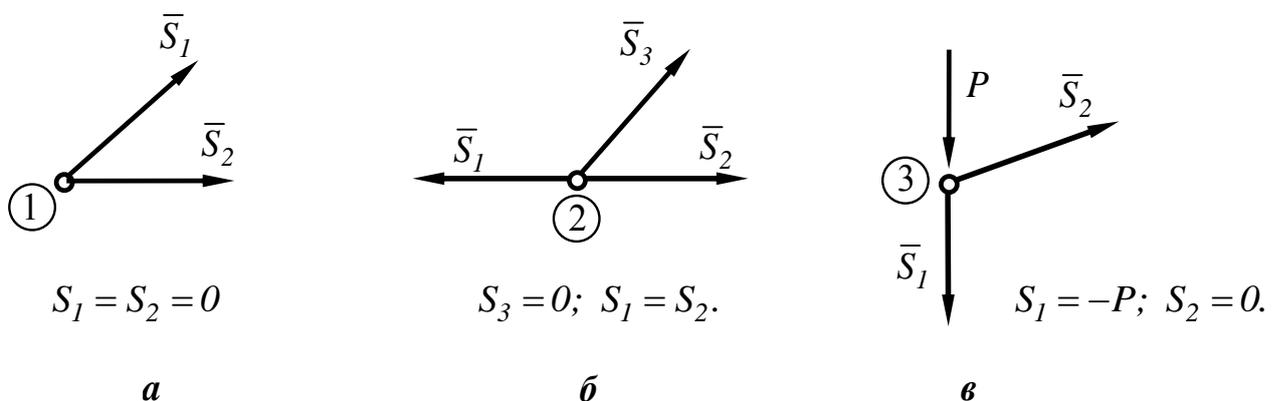


Рисунок 1.6 – Частные случаи загрузки узлов фермы

Поясним идею способа на примере определения усилий в стержнях 1 и 2 фермы, изображенной на рисунке 1.1. Ферму мысленно разрезают на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех (сечение проходит через стержни 1, 2, 3). Затем рассматривают равновесие одной из частей фермы под действием внешних сил (включая опорные реакции) и реакций рассеченных стержней (рисунок 1.7). Предполагая все стержни фермы растянутыми, реакции стержней направляют от сечения.

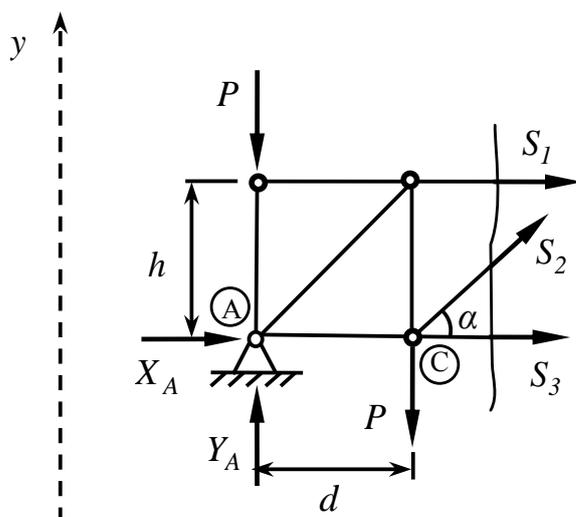


Рисунок 1.7 – Отсеченная часть фермы

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на рассматриваемую часть фермы, должны быть составлены так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная реакция.

Таким образом, усилия в стержнях фермы должны определяться независимо друг от друга, только через внешние силы.

Если два из рассеченных стержней параллельны, то реакция третьего стержня определяется из уравнений проекций на ось, перпендикулярную двум первым стержням. Так, для определения реакции  $S_2$  (рисунок 1.7) нужно составить уравнение проекций сил на ось  $y$ :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2P + S_2 \sin \alpha = 0. \quad (1.4)$$

В остальных случаях искомая реакция определяется из уравнения моментов относительно точки пересечения линий действия двух других реакций. Так, для определения реакции  $S_1$  (рисунок 1.7) составляется уравнение моментов относительно точки С пересечения линий действия  $S_2$  и  $S_3$  :

$$\sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad Pd - Y_A d - S_1 h = 0. \quad (1.5)$$

Найденные реакции будут равны по модулю усилиям в соответствующих стержнях. Отрицательный знак реакции стержня будет указывать, что в действительности данный стержень сжат, а не растянут.

Сравнивая два рассмотренных способа определения усилий в стержнях ферм, следует заметить, что способ вырезания узлов более прост, хорошо программируется. К его недостаткам можно отнести то, что усилия в стержнях фермы определяются последовательно: каждое усилие определяется через вычисленные ранее усилия. Это приводит к суммирующейся при переходе от узла к узлу погрешности вычислений. Способ Риттера позволяет определить усилие в любом стержне фермы, не находя усилий в других. В этом его большое преимущество перед способом вырезания узлов.

Графическая интерпретация способа вырезания узлов была предложена английским физиком Дж. К. Максвеллом, а затем развита итальянским геометром Л. Кремоной. Способ Максвелла - Кремоны сводится к построению единой диаграммы, дающей возможность графически определить усилия во всех стержнях фермы. Дж. К. Максвелл дал теоретическое обоснование этого способа, а Л. Кремона применил его на практике в приложении к фермам.

Идея этого способа состоит в построении замкнутого многоугольника сил для каждого узла фермы. Так как усилие в каждом стержне входит в силовые многоугольники двух узлов фермы, то объединив все построенные многоугольники общими сторонами, получают геометрическую фигуру, называемую *диаграммой Максвелла – Кремоны*.

Порядок построения диаграммы Максвелла – Кремоны.

1 Построить схему фермы в произвольном масштабе.

2 Определить опорные реакции фермы (графическим или аналитическим способом).

3 Обозначить внешние зоны фермы, границами которых являются линии действия внешних сил и опорных реакций.

4 Обозначить внутренние зоны фермы, границами которых являются элементы (стержни) фермы.

5 Обходя ферму по часовой стрелке, в принятом масштабе построить многоугольник внешних сил. При этом каждая сила обозначается двумя индексами: первый (начало вектора) – совпадает с обозначением зоны, расположенной перед силой, второй (конец вектора) – совпадает с обозначением зоны, расположенной за силой. Силы изображаются на диаграмме отрезками, откладываемыми по направлению действия сил в той последовательности, в которой они встречаются при обходе внешних зон фермы. Если опорные реакции определены верно, то многоугольник внешних сил будет замкнут.

6 Построение диаграммы необходимо начинать с узла, в котором сходятся два стержня. Обходя узел по часовой стрелке, обозначить стержни в соответствии с правилом, принятым при обозначении сил (п. 5).

7 Из точек, входящих в обозначения стержней и уже присутствующих на диаграмме, провести прямые, параллельные соответствующим стержням. Точку пересечения этих прямых обозначить общим индексом, который входит в обозначение стержней, и положение которого ранее было неизвестно.

8 Следующим рассмотреть узел, в котором сходится произвольное число стержней, но усилия неизвестны только в двух из них. Для данного узла повторить действия, изложенные в п. 6 и п. 7.

Действия, изложенные в п. 8, повторяют до тех пор, пока на диаграмме не появятся все точки, соответствующие наименованиям внутренних зон фермы.

Построенная диаграмма должна быть замкнутой.

Рассмотрим построение диаграммы Максвелла - Кремоны на примере фермы, изображенной на рисунке 1.8.

В произвольном масштабе строим схему фермы. Опорные реакции фермы определяем из условия симметрии фермы и внешней нагрузки:  $R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$ .

Внешние силы и опорные реакции должны быть изображены на схеме таким образом, чтобы они проходили вне контура фермы. Силы разбивают пространство вокруг фермы на три внешние зоны, которые обозначаем буквами: от силы  $\bar{R}_2$  до силы  $\bar{P}$  – зона *A*; от силы  $\bar{P}$  до силы  $\bar{R}_1$  – зона *B*; от силы  $\bar{R}_1$  до силы  $\bar{R}_2$  – зона *C*. Внутренние зоны, границами которых являются стержни фермы, обозначаем римскими цифрами – зоны *I* и *II*.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны), обозначаем внешние силы и откладываем их на диаграмме в выбранном масштабе. Согласно принятому правилу сила  $\bar{P}$  будет изображаться на диаграмме отрезком *AB* длиной 4 см, который откладываем из произвольно выбранной точки *A* вниз (по направлению действия силы  $\bar{P}$ ). Сила  $\bar{R}_1$  получает обозначение *BC*. Из точки *B* откладываем вверх (по направлению действия силы  $\bar{R}_1$ ) отрезок *BC* длиной 2 см. Сила  $\bar{R}_2$  получает обозначение *CA*. Из точки *C* откладываем вверх (по направлению действия силы  $\bar{R}_2$ ) отрезок  $|CA| = 2$  см. В результате попадаем в точку *A*, с которой начиналось построение диаграммы: многоугольник внешних сил оказывается замкнутым.

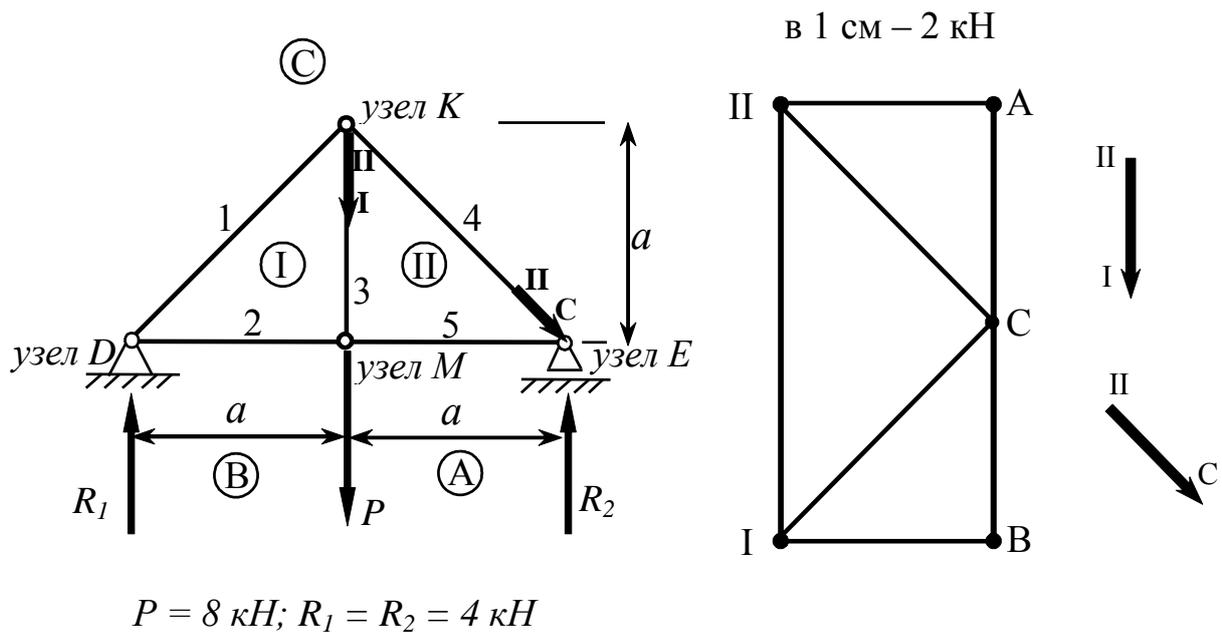


Рисунок 1.8 – Диаграмма Максвелла - Кремоны

Определение усилий в стержнях фермы начинаем с узла  $D$ , в котором сходятся два стержня  $1$  и  $2$ . Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами, соответствующими наименованиям зон перед стержнем и после него. Стержень  $1$  получает обозначение  $C-I$ , стержень  $2$  – обозначение  $I-B$ . Из точек  $C$  и  $B$ , которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки  $C$  – параллельную стержню  $C-I$ , из точки  $B$  – параллельную стержню  $I-B$ . Точку пересечения этих прямых обозначаем  $I$  (общий индекс в обозначениях стержней). Отрезки  $C-I$  и  $I-B$  в принятом масштабе изображают усилия в соответствующих стержнях.

Следующим рассмотрим узел  $M$ , в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (стержни  $3$  и  $5$ ). Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень  $3$  получает обозначение  $I-II$ , стержень  $5$  – обозначение  $II-A$ . Из точки  $I$  проводим прямую, параллельную стержню  $I-II$ , из точки  $A$  – прямую, параллельную стержню  $II-A$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $II$ . Отрезки  $I-II$  и  $II-A$  изображают усилия в

соответствующих стержнях. Так как на диаграмме присутствуют все точки, соответствующие обозначениям внешних и внутренних зон фермы, построение диаграммы считается законченным.

При определении значений усилий в стержнях фермы по диаграмме Максвелла - Кремоны рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1 Выбрать один из двух узлов фермы, примыкающих к стержню, усилие в котором требуется определить.

2 Обходя узел по часовой стрелке, обозначить стержень двумя индексами по принятому ранее правилу. Длина соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе и есть значение усилия в данном стержне.

3 Для определения знака усилия изобразить соответствующий отрезок вектором (первый индекс в обозначении стержня – начало вектора, второй – его конец). Мысленно перенести вектор на стержень на схеме фермы. Если вектор направлен от выбранного узла, то стержень растянут (величина усилия принимается со знаком «плюс»), если к узлу – сжат ( «минус»).

Определим по построенной диаграмме (рисунок 1.8) усилие в стержне 3. Выбираем один из двух узлов, к которому примыкает этот стержень, например, узел  $K$ . При обходе узла  $K$  по часовой стрелке стержень 3 получает обозначение  $II-I$ . Длина отрезка  $II-I$  составляет 4 см, что в выбранном масштабе соответствует 8 кН. Переносим вектор  $\overline{II-I}$  на стержень 3 на схеме фермы. Вектор направлен от узла  $K$ , следовательно, стержень 3 растянут. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_3 = 8 \text{ кН}$ .

Тот же результат получим, если будем рассматривать узел  $M$ . В этом случае стержень 3 получит обозначение  $I-II$ . Длина отрезка  $I-II$  останется прежней, а направление вектора  $\overline{I-II}$  изменится на противоположное. При наложении на схему фермы вектор  $\overline{I-II}$  будет направлен от узла  $M$ , что соответствует положительному знаку усилия (растянутому стержню).

Определим усилие в стержне 4. Выбираем узел  $E$ . При обходе узла  $E$  по часовой стрелке стержень 4 получает обозначение  $II-C$ . Длина отрезка  $II-C$  составляет 2,8 см, что в выбранном масштабе соответствует 5,6 кН. Переносим вектор  $\overline{II-C}$  на стержень 4 на схеме фермы. Вектор направлен к узлу  $E$ , следовательно, стержень 4 сжат. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_4 = -5,6 \text{ кН}$ .

## 1.2 Задание для лабораторной работы

Для плоской фермы (рисунок 1.9) с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой (таблица 1.1) требуется:

- 1) определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях;
- 2) определить способом сечений (способом Риттера) усилия в трех указанных стержнях;
- 3) построить диаграмму Максвелла - Кремоны и определить по ней усилия во всех стержнях;
- 4) результаты расчета оформить в виде таблицы и сравнить значения, полученные способом вырезания узлов и по диаграмме Максвелла – Кремоны.
- 5) Определить усилия в стержнях ферм с помощью системы Mathcad.

Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, направлены вертикально вниз. При решении задачи собственным весом стержней пренебречь.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	d, м	Величина вертикальной нагрузки, кН			Вторая цифра варианта	H, м	Узлы приложения внешних сил			№ стержней	Третья цифра варианта (№ схемы)
		<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>F</i>			<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>F</i>		
<b>0</b>	1,5	5	10	15	<b>0</b>	2,4	I, IV	VI	II	2, 5, 8	<b>0</b>
<b>1</b>	1,6	10	15	35	<b>1</b>	2,6	I, V	III	VI	7, 8, 11	<b>1</b>
<b>2</b>	1,8	15	20	40	<b>2</b>	2,8	I, VI	IV	III	4, 9, 10	<b>2</b>
<b>3</b>	2	20	25	35	<b>3</b>	3	II, VI	III	IV	6, 7, 8	<b>3</b>
<b>4</b>	2,2	25	5	45	<b>4</b>	3,2	IV, V	II	III	3, 6, 8	<b>4</b>
<b>5</b>	2,5	5	20	30	<b>5</b>	3,4	I, III	V	II	4, 5, 6	<b>5</b>
<b>6</b>	2,7	10	25	45	<b>6</b>	3,6	III, V	IV	VI	5, 8, 10	<b>6</b>
<b>7</b>	2,9	15	5	40	<b>7</b>	3,8	II, III	I	IV	3, 4, 10	<b>7</b>
<b>8</b>	3,1	20	10	50	<b>8</b>	4	II, IV	VI	V	4, 6, 7	<b>8</b>
<b>9</b>	3,3	25	10	30	<b>9</b>	4,2	I, II	III	VI	3, 8, 10	<b>9</b>

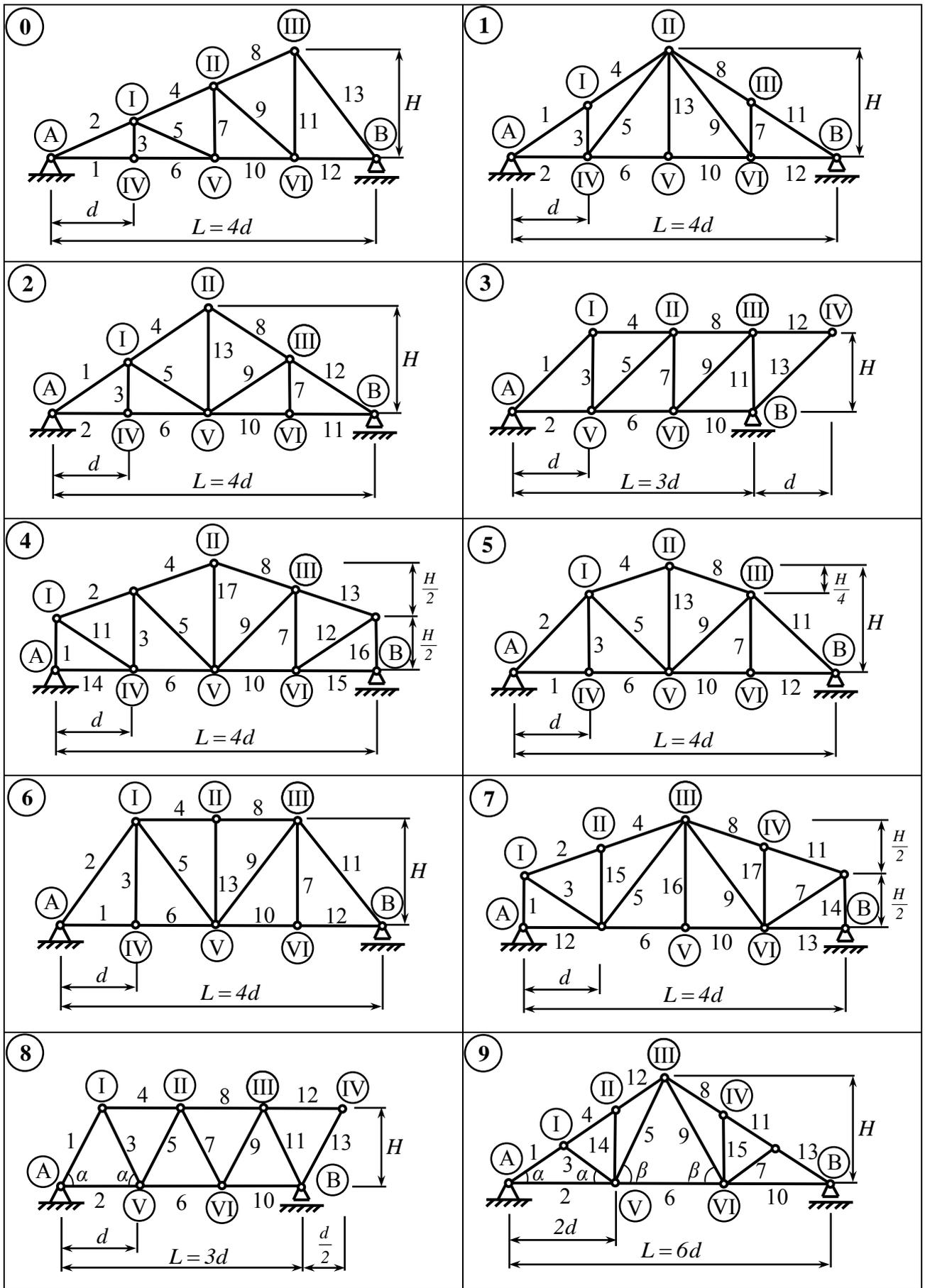


Рисунок 1.9

### 1.3 Пример выполнения лабораторной работы

**Дано:**  $d = 3 \text{ м}$ ;  $H = 2 \text{ м}$ ;  $Q = 5 \text{ кН}$ ;  $P = 20 \text{ кН}$ ;  $F = 15 \text{ кН}$ . Узлы приложения внешних сил:  $Q - I, II$ ;  $P - IV$ ;  $F - V$ . Номера стержней: 3, 4, 9, 11. Схема фермы – рисунок 1.10.

- 1 Определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях.
- 2 Определить способом сечений (способом Риттера) усилия в четырех указанных стержнях.
- 3 Построить диаграмму Максвелла - Кремоны и определить по ней усилия во всех стержнях.
- 4 Сравнить значения, полученные способом вырезания узлов и по диаграмме Максвелла -Кремоны.
- 5 Определить усилия в стержнях ферм с помощью системы Mathcad.

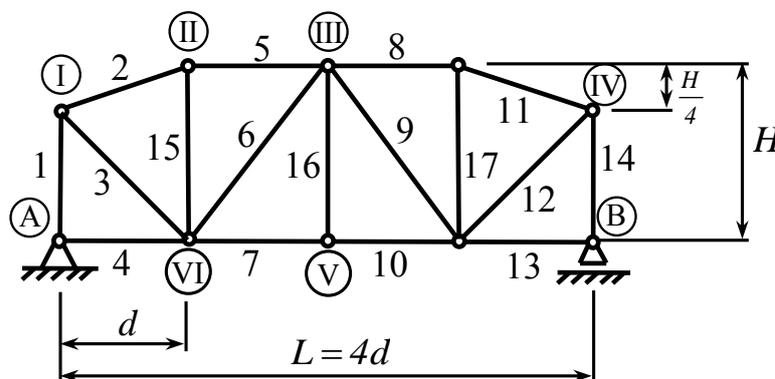


Рисунок 1.10 – Схема фермы

#### **Решение**

Схема фермы с нагрузкой показана на рисунке 1.11. Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, изображаем таким образом, чтобы они проходили вне контура фермы.

- 1) Проверка условия статической определимости фермы.

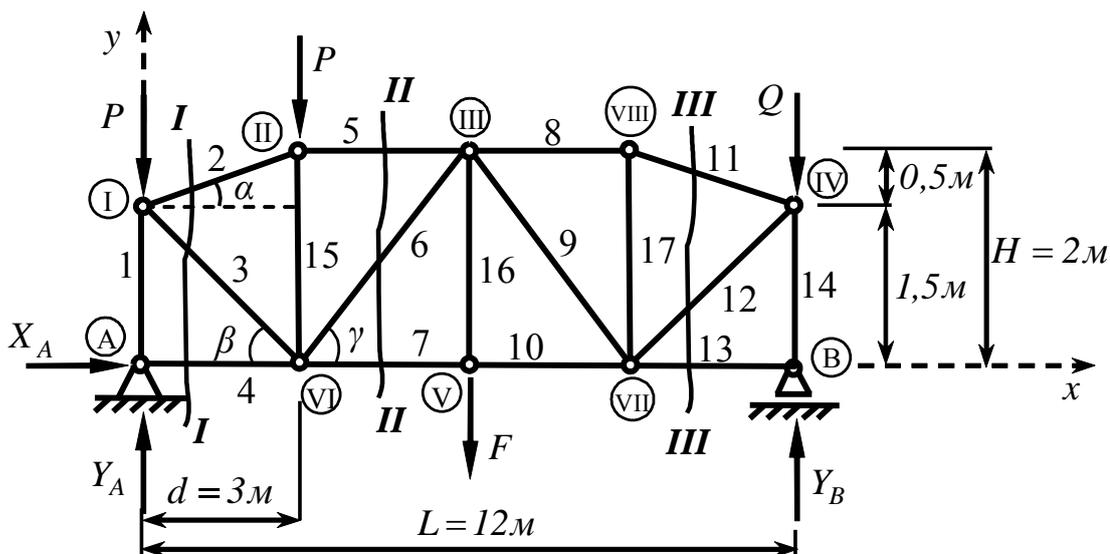


Рисунок 1.11 – Схема фермы с нагрузкой.

Проверяем условие статической определимости фермы (1.1). Число стержней фермы  $m = 17$ . Число узлов фермы (включая опорные)  $n = 10$ .

$$m = 2n - 3;$$

$$17 = 2 \cdot 10 - 3;$$

$$17 = 17.$$

Условие выполняется, следовательно, ферма статически определима.

## 2) Определение опорных реакций фермы.

Рассмотрим равновесие фермы в целом как твердого тела. Мысленно отбросим опоры и заменим их действие реакциями  $Q$  (рисунок 1.11). Так как направление реакции неподвижного шарнира  $A$  неизвестно, то изобразим ее двумя составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . Реакция подвижного шарнира  $B$  направлена по нормали к опорной поверхности шарнира.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на ферму:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0; \\ 12Y_B - 3P - 6F - 12Q = 0; \\ 12P + 9P + 6F - 12Y_A = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0; \\ Y_B = \frac{3P + 6F + 12Q}{12} = 17,5 \text{ кН}; \\ Y_A = \frac{21P + 6F}{12} = 42,5 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим дополнительно уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - 2P - F - Q = 42,5 + 17,5 - 40 - 15 - 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

3) Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Определим необходимые для дальнейших расчетов углы наклона верхнего пояса и раскосов фермы.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{H}{4d} = \frac{0,5}{3} = 0,1667; & \alpha &= 9,5^\circ; & \cos \alpha &= 0,9864; & \sin \alpha &= 0,1644; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{3H}{4d} = \frac{1,5}{3} = 0,5; & \beta &= 26,6^\circ; & \cos \beta &= 0,8944; & \sin \beta &= 0,4472; \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{H}{d} = \frac{2}{3} = 0,6667; & \gamma &= 33,7^\circ; & \cos \gamma &= 0,8320; & \sin \gamma &= 0,5547. \end{aligned}$$

Расчет начинаем с узла, в котором сходятся два стержня, например, с узла *A*. Вырезаем узел из фермы и показываем действующие на него силы, включая реакции отброшенных стержней. Реакции стержней направляем от узла, предполагая стержни растянутыми (рисунок 1.12).

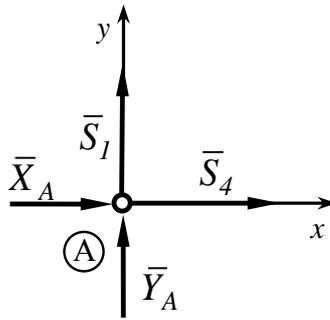


Рисунок 1.12 – Равновесие узла  $A$

Составим уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил, действующей на узел  $A$ :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} X_A + S_4 = 0; \\ Y_A + S_I = 0; \end{cases} \begin{cases} S_I = -Y_A = -42,5 \text{ кН}; \\ S_4 = -X_A = 0. \end{cases}$$

Найденные значения реакций стержней равны по модулю возникающим в них усилиям. Отрицательный знак у реакции  $S_I$  означает, что стержень  $I$  в действительности сжат, а не растянут.

Затем рассматриваем равновесие узла  $I$ , в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 1.13). Повторяя действия, выполненные для узла  $A$ , получим:

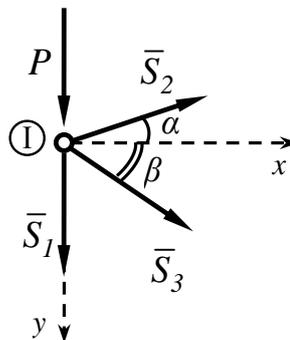


Рисунок 1.13 – Равновесие узла  $I$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta = 0; & (a) \\ S_1 - S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \beta + P = 0. & (b) \end{cases}$$

Выразим из (a)  $S_3$  и подставим в (b):

$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta};$$

$$S_1 - S_2 \sin \alpha - S_2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + P = 0;$$

$$S_2 = \frac{P + S_1}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{20 - 42,5}{0,1644 + 0,9864 \cdot 0,5} = -34,215 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -(-34,215) \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 37,735 \text{ кН}.$$

Последовательно переходя от узла к узлу так, чтобы каждый раз в рассматриваемом узле сходилось не более двух стержней с неизвестными усилиями, определим значения усилий во всех стержнях фермы.

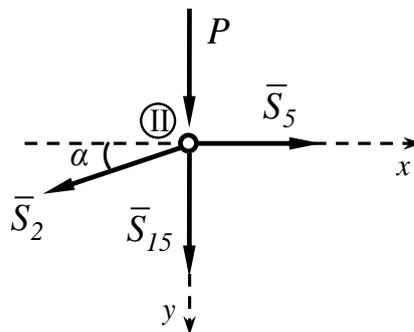


Рисунок 1.14 – Равновесие узла II

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -S_2 \cos \alpha + S_5 = 0; \\ S_2 \sin \alpha + S_{15} + P = 0. \end{cases}$$

$$S_5 = S_2 \cos \alpha = -34,215 \cdot 0,9864 = -33,750 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{15} = -S_2 \sin \alpha - P = 34,215 \cdot 0,1644 - 20 = -14,375 \text{ кН (сжат)}.$$

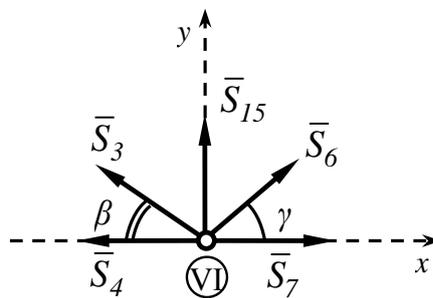


Рисунок 1.15 – Равновесие узла VI

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -S_3 \cos \beta - S_4 + S_6 \cos \gamma + S_7 = 0; \\ S_3 \sin \beta + S_6 \sin \gamma + S_{15} = 0. \end{cases}$$

$$S_6 = -\frac{S_3 \sin \beta + S_{15}}{\sin \gamma} = -\frac{37,735 \cdot 0,4472 - 14,375}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_7 = S_3 \cos \beta + S_4 - S_6 \cos \gamma = 37,735 \cdot 0,8944 + 4,507 \cdot 0,832 = 37,50 \text{ кН}.$$

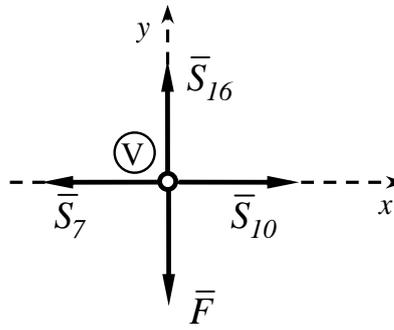


Рисунок 1.16 – Равновесие узла V

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} -S_7 + S_{10} = 0; \\ S_{16} - F = 0; \end{cases} \begin{cases} S_{10} = S_7 = 37,50 \text{ кН}; \\ S_{16} = F = 15 \text{ кН}. \end{cases}$$

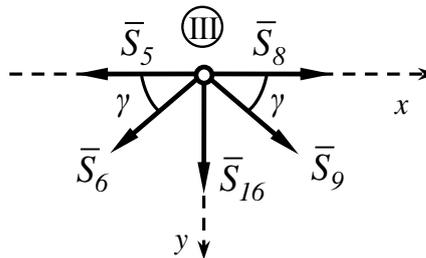


Рисунок 1.17 – Равновесие узла III

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \begin{cases} -S_5 - S_6 \cos \gamma + S_8 + S_9 \cos \gamma = 0; \\ S_6 \sin \gamma + S_9 \sin \gamma + S_{16} = 0; \end{cases}$$

$$S_9 = -\frac{S_6 \sin \gamma + S_{16}}{\sin \gamma} = -\frac{-4,507 \cdot 0,5547 + 15}{0,5547} = -22,535 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_8 = S_5 + S_6 \cos \gamma - S_9 \cos \gamma = -33,75 + (-4,507 + 22,535) \cdot 0,832 = -18,750 \text{ кН (сжат)}.$$

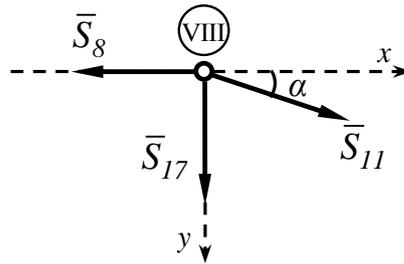


Рисунок 1.18 – Равновесие узла VIII

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -S_8 + S_{11} \cos \alpha = 0; \\ S_{11} \sin \alpha + S_{17} = 0. \end{cases}$$

$$S_{11} = \frac{S_8}{\cos \alpha} = \frac{-18,75}{0,9864} = -19,0 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{17} = -S_{11} \sin \alpha = 19,0 \cdot 0,1644 = 3,125 \text{ кН}.$$

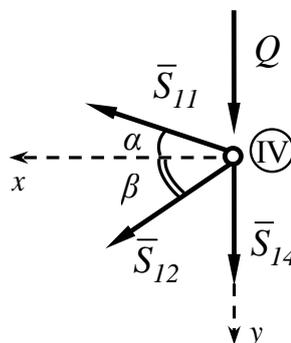


Рисунок 1.19 – Равновесие узла IV

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} S_{11} \cos \alpha + S_{12} \cos \beta = 0; \\ -S_{11} \sin \alpha + S_{12} \sin \beta + S_{14} + Q = 0. \end{cases}$$

$$S_{12} = -S_{11} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 19,0 \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 20,954 \text{ кН};$$

$$S_{14} = S_{11} \sin \alpha - S_{12} \sin \beta - Q = -19,0 \cdot 0,1644 - 20,954 \cdot 0,4472 - 5 = -17,50 \text{ кН (сжат)}.$$

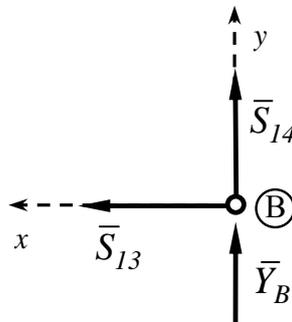


Рисунок 1.20 – Равновесие узла B

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} S_{13} = 0; & (a) \\ Y_B + S_{14} = 0. & (b) \end{cases}$$

Уравнение (b) используем для проверки найденного значения  $S_{14}$ :

$$Y_B + S_{14} = 17,5 - 17,5 = 0.$$

Так как усилия во всех стержнях определены, то равновесие узла VII рассматриваем для контроля правильности вычислений.

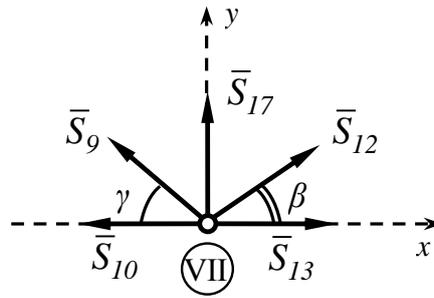


Рисунок 1.21 – Равновесие узла VII

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -S_9 \cos \gamma - S_{10} + S_{12} \cos \beta + S_{13} = 22,535 \cdot 0,832 - 37,5 + 20,954 \cdot 0,8944 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = S_9 \sin \gamma + S_{12} \sin \beta + S_{17} = -22,535 \cdot 0,5547 + 20,954 \cdot 0,4472 + 3,125 = 0.$$

4) Определение усилий в стержнях фермы способом сечений (способом Риттера).

Для определения усилий в стержнях 3 и 4 проведем сквозное сечение фермы I-I (рисунок 1.11) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рисунок 1.22). На нее действуют силы  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $P$  и реакции рассеченных стержней  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

Для определения реакции  $S_3$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_2$  и  $S_4$  (точки O).

$$OA = \frac{3}{4} H \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4} H \cdot \frac{4d}{H} = 3d;$$

$$h_3 = 4d \sin \beta;$$

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_A \cdot 3d - P \cdot 3d - S_3 \cdot 4d \sin \beta = 0;$$

$$S_3 = (Y_A - P) \cdot \frac{3d}{4d \sin \beta} = \frac{3 \cdot (Y_A - P)}{4 \sin \beta} = \frac{3 \cdot (42,5 - 20)}{4 \cdot 0,4472} = 37,735 \text{ кН}.$$

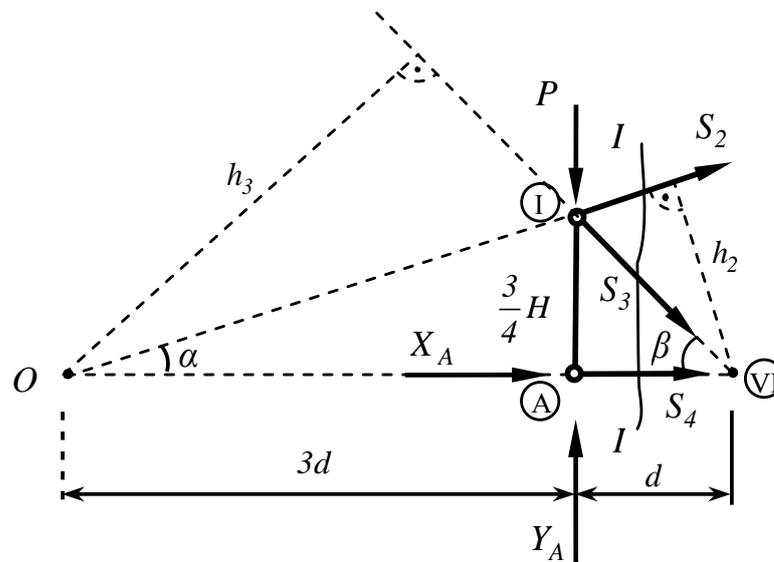


Рисунок 1.22 – Часть фермы, отсеченная сечением I – I

Для определения реакции  $S_2$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_3$  и  $S_4$  (узла VI).

$$h_2 = 4d \sin \alpha;$$

$$\sum_{k=1}^n m_{VI}(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot d - Y_A \cdot d - S_2 \cdot 4d \sin \alpha = 0;$$

$$S_2 = (P - Y_A) \cdot \frac{d}{4d \sin \alpha} = \frac{P - Y_A}{4 \sin \alpha} = \frac{20 - 42,5}{4 \cdot 0,1644} = -34,215 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне *b* проведем сквозное сечение фермы *II–II* (рисунок 1.11) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части под действием сил  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $P$  и реакций рассеченных стержней  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $S_7$  (рисунок 1.23). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

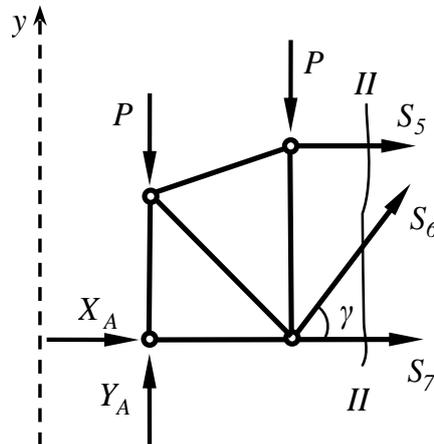


Рисунок 1.23 – Часть фермы, отсеченная сечением *II – II*

Для определения реакции  $S_6$  составим уравнение проекций на ось, перпендикулярную линиям действия реакций  $S_5$  и  $S_6$ .

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2P + S_6 \cdot \sin \gamma = 0;$$

$$S_6 = \frac{2P - Y_A}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot 20 - 42,5}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне *11* проведем сквозное сечение фермы *III-III* (рисунок 1.11) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части под действием сил  $Y_B$ ,  $Q$  и реакций рассеченных стержней  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$  (рисунок 1.24). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

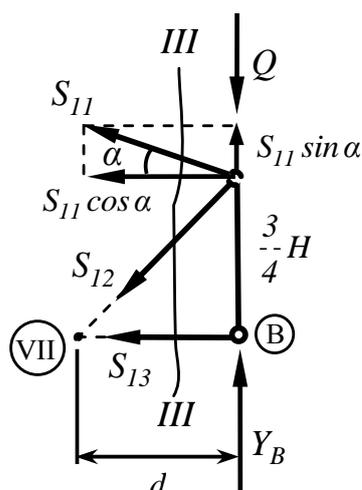


Рисунок 1.24 – Часть фермы, отсеченная сечением III – III

Для определения реакции  $S_{11}$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_{12}$  и  $S_{13}$  (узла VII).

$$\sum_{k=1}^n m_{VII}(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_B \cdot d - Q \cdot d + S_{11} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{3H}{4} + S_{11} \cdot \sin \alpha \cdot d = 0;$$

$$S_{11} = \frac{(Q - Y_B) \cdot d}{\left( \frac{3H}{4} \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha \right)} = \frac{(5 - 17,5) \cdot 3}{1,5 \cdot 0,9864 + 3 \cdot 0,1644} = -19,0 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденные значения реакций  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_6$ ,  $S_{11}$  совпадают со значениями, полученными ранее способом вырезания узлов.

5) Определение усилий в стержнях фермы графическим способом (построение диаграммы Максвелла – Кремоны).

Строим в произвольном масштабе схему фермы (рисунок 1.25). Обозначаем внешние зоны фермы, границами которых являются линии действия внешних сил и

опорных реакций, прописными буквами. Внутренние зоны фермы, границами которых являются стержни фермы, обозначаем строчными буквами.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны) обозначаем внешние силы двумя индексами, соответствующими названиям зон, на границе которых находится сила, и откладываем их на диаграмме в выбранном масштабе. Сила  $P$ , приложенная в узле  $I$ , будет изображаться на диаграмме отрезком  $CD$  длиной 4 см, который откладываем из произвольно выбранной точки  $C$  вниз (по направлению действия силы  $P$ ). Сила  $P$ , приложенная в узле  $II$ , получает обозначение  $DE$  и изображается на диаграмме отрезком  $DE$  длиной 4 см, который откладываем из точки  $D$  вниз (по направлению действия силы  $P$ ). Сила  $Q$ , приложенная в узле  $IV$ , изображается отрезком  $EK = 1$  см (из точки  $E$  вниз по направлению силы). Сила  $Y_B$  изображается отрезком  $KM = 3,5$  см (из точки  $K$  вверх по направлению силы). Сила  $F$  – отрезком  $MN = 3$  см (из точки  $M$  вниз по направлению силы). Сила  $Y_A$  изображается отрезком  $NC = 8,5$  см (из точки  $N$  вверх по направлению силы). В результате возвращаемся в точку  $C$ , с которой начиналось построение диаграммы, следовательно, многоугольник внешних сил оказывается замкнутым.

Определение усилий в стержнях фермы начинаем с узла  $A$ , в котором сходятся два стержня. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами, соответствующим наименованиям зон перед стержнем и после него. Стержень  $I$  получает обозначение  $C-a$ , стержень  $4$  – обозначение  $a-N$ . Из точек  $C$  и  $N$ , которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки  $C$  – параллельную стержню  $C-a$ , из точки  $N$  – параллельную стержню  $a-N$ . Точку пересечения этих прямых обозначаем  $a$  (общий индекс, входящий в обозначения стержней). Положение точки  $a$  на диаграмме совпадает с точкой  $N$ . Это означает, что стержень  $a-N$  – нулевой.

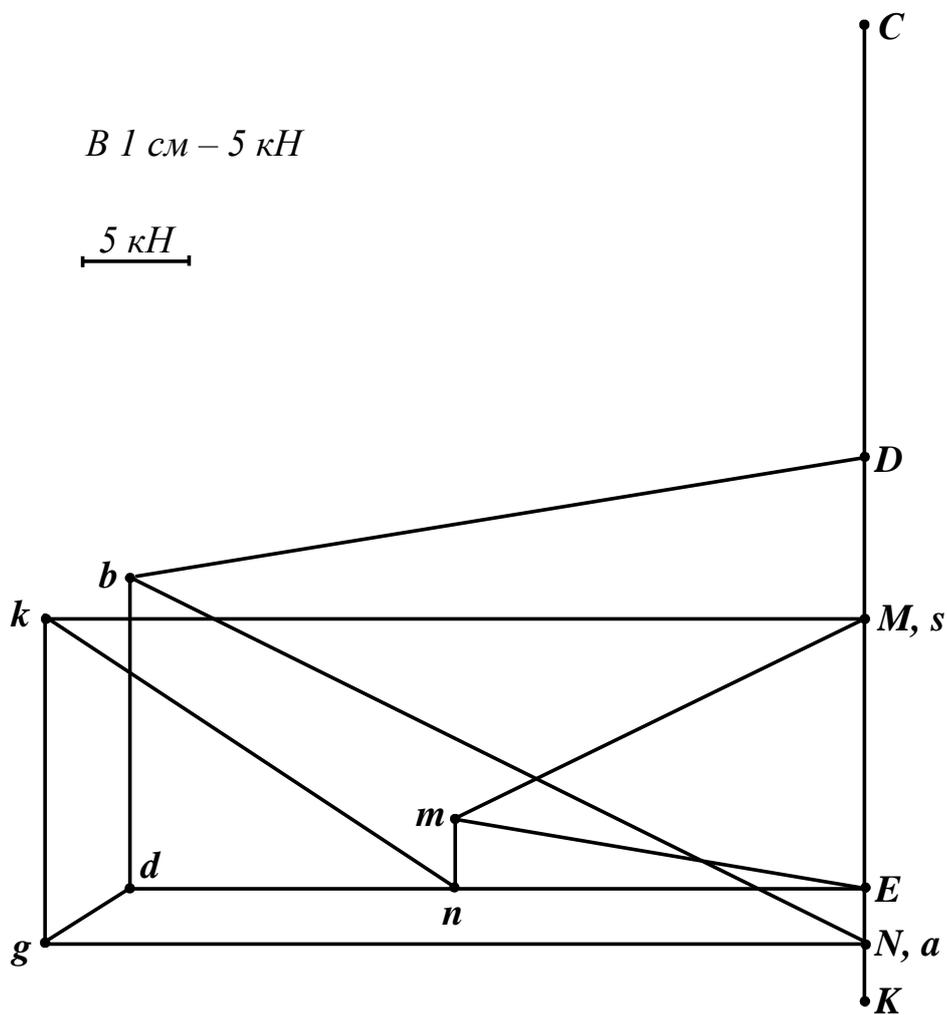
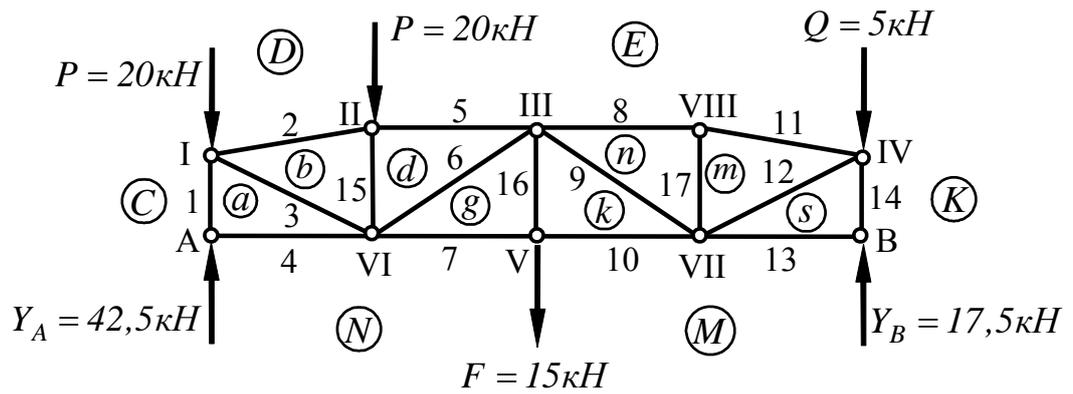


Рисунок 1.25 – Диаграмма Максвелла – Кремоны

Следующим рассмотрим узел  $I$ , в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (стержни 2 и 3). Обходя узел по часовой стрелке,

обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень 2 получает обозначение  $D-b$ , стержень 3 – обозначение  $b-a$ . Из точки  $D$  проводим прямую, параллельную стержню  $D-b$ , из точки  $a$  – прямую, параллельную стержню  $b-a$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $b$ .

Рассмотрим узел  $II$ . Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень 5 получает обозначение  $E-d$ , стержень 15 – обозначение  $d-b$ . Из точки  $E$  проводим прямую, параллельную стержню  $E-d$ , из точки  $b$  – прямую, параллельную стержню  $d-b$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $d$  и т. д. Последовательность рассмотрения узлов при построении диаграммы аналогична способу вырезания узлов. Построенная диаграмма приведена на рисунке 1.25.

Построенная диаграмма позволяет определить усилия во всех стержнях фермы. Вычисление усилий и определение их знаков покажем на примере стержней, сходящихся в узле  $I$ .

Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами. Стержень 1 получает обозначение  $a-C$ . Длина отрезка  $aC$  составляет 8,5 см, что в выбранном масштабе соответствует 42,5 кН. Мысленно переносим вектор  $\overline{aC}$  на стержень 1 на схеме фермы. Вектор направлен к узлу  $I$ , следовательно, стержень 1 сжат. Усилие в стержне  $S_1 = -42,5 \text{ кН}$ .

Стержень 2 получает обозначение  $D-b$ . Длина отрезка  $Db$  составляет 6,8 см, что в выбранном масштабе соответствует 34 кН. Переносим вектор  $\overline{Db}$  на стержень 2. Вектор направлен к узлу  $I$ , следовательно, стержень 2 сжат. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_2 = -34 \text{ кН}$ .

Стержень 3 получает обозначение  $b-a$ . Длина отрезка  $ba$  составляет 7,5 см, что в выбранном масштабе соответствует 37,5 кН. Переносим вектор  $\overline{ba}$  на стержень 3. Вектор направлен от узла  $I$ , следовательно, стержень 3 растянут. Усилие в стержне  $S_3 = 37,5 \text{ кН}$ .

Аналогично определяются усилия во всех стержнях фермы. Результаты вычислений представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Усилия в стержнях фермы

№ стержня	Усилия в стержнях фермы, кН			Погрешность, %
	Способ вырезания узлов	Способ Риттера	Диаграмма Максвелла- Кремоны	
1	-42,5		-42,5	-
2	-34,215	-34,215	-34	0,6%
3	37,735	37,735	37,5	0,7%
4	0		0	-
5	-33,75		-33,5	0,7%
6	-4,507	-4,507	-4,5	0,1%
7	37,50		37,5	-
8	-18,75		-18,5	1,3%
9	-22,535		-22,5	0,2%
10	37,50		37,5	-
11	-19,0	-19,0	-19	-
12	20,954		21	0,2%
13	0		0	-
14	-17,50		-17,5	-
15	-14,375		-14	2,6%
16	15		15	-
17	3,125		3	4%

Погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta = \left| \frac{S^{\text{аналит}} - S^{\text{граф}}}{S^{\text{аналит}}} \right| \cdot 100\%,$$

где  $S^{\text{аналит}}$  – значение усилия в стержне, вычисленное способом вырезания узлов;

$S^{\text{граф}}$  – значение усилия в стержне по диаграмме Максвелла - Кремоны.

б) Определение усилий в стержнях ферм с помощью системы Mathcad.

Заметим, что в приведенном примере можно обойтись без предварительного определения опорных реакций фермы. Число узлов фермы, включая опорные, равно  $n$ . Общее число независимых уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил, которые можно составить для всех узлов, равно  $2n$ . Число неизвестных усилий в стержнях равно числу стержней фермы  $m = 2n - 3$ . Включая в число неизвестных три опорные реакции фермы, получим, что число уравнений и неизвестных совпадает. Запишем уравнения равновесия узлов, при вычислении усилий способом вырезания узлов, в виде системы линейных уравнений (1.6). С целью единства обозначений опорные реакции фермы  $X_A, Y_A, Y_B$  обозначим соответственно  $S_{18}, S_{19}, S_{20}$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 S_4 + S_{18} = 0; & (1) \\
 S_1 + S_{19} = 0; & (2) \\
 S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta = 0; & (3) \\
 S_1 - S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \beta = -P; & (4) \\
 -S_2 \cos \alpha + S_5 = 0; & (5) \\
 S_2 \sin \alpha + S_{15} = -P; & (6) \\
 -S_3 \cos \beta - S_4 + S_6 \cos \gamma + S_7 = 0; & (7) \\
 S_3 \sin \beta + S_6 \sin \gamma + S_{15} = 0; & (8) \\
 -S_7 + S_{10} = 0; & (9) \\
 S_{16} = F; & (10) \\
 -S_5 - S_6 \cos \gamma + S_8 + S_9 \cos \gamma = 0; & (11) \\
 S_6 \sin \gamma + S_9 \sin \gamma + S_{16} = 0; & (12) \\
 -S_8 + S_{11} \cos \alpha = 0; & (13) \\
 S_{11} \sin \alpha + S_{17} = 0; & (14) \\
 S_{11} \cos \alpha + S_{12} \cos \beta = 0; & (15) \\
 -S_{11} \sin \alpha + S_{12} \sin \beta + S_{14} = -Q; & (16) \\
 S_{13} = 0; & (17) \\
 S_{14} + S_{20} = 0; & (18) \\
 -S_9 \cos \gamma - S_{10} + S_{12} \cos \beta + S_{13} = 0; & (19) \\
 S_9 \sin \gamma + S_{12} \sin \beta + S_{17} = 0. & (20)
 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Обозначим  $\|\mathbf{A}\|$  – матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных системы уравнений,  $\{\mathbf{S}\}$  – вектор-столбец неизвестных усилий  $S_1 - S_{20}$ ,  $\{\mathbf{D}\}$  – вектор-столбец свободных членов уравнений.

Запишем систему уравнений (1.6) в виде:

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{D}\}.$$

Умножая обе части равенства на матрицу, обратную  $\|\mathbf{A}\|$ , слева, получим:

$$\|\mathbf{A}\|^{-1} \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \{\mathbf{S}\} = \|\mathbf{A}\|^{-1} \cdot \{\mathbf{D}\};$$

$$\{\mathbf{S}\} = \|\mathbf{A}\|^{-1} \cdot \{\mathbf{D}\}.$$

Ниже приводятся примерные тексты программ для определения усилий в стержнях плоской фермы в системе Mathcad.

**Определение усилий в стержнях плоской фермы**

**Исходные данные:**

$$d := 3 \quad H := 2 \quad Q := 5 \quad P := 20 \quad F := 15$$

**Углы наклона стержней фермы:**

$$\text{atan}(\alpha) := \frac{H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\beta) := \frac{3 \cdot H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{H}{d}$$

**Коэффициенты матрицы  $A_{ij}$ , где  $i$  – порядковый номер уравнения в системе (4.1);  $j$  – порядковый номер усилия  $S_j$ :**

ORIGIN:=1

$$i := 1 \dots 20 \quad j := 1 \dots 20 \quad A_{i,j} := 0$$

$$A_{1,4} := 1 \quad A_{1,18} := 1 \quad A_{2,1} := 1$$

$$A_{2,19} := 1 \quad A_{3,2} := \cos(\alpha) \quad A_{3,3} := \cos(\beta)$$

$$A_{4,1} := 1 \quad A_{4,2} := -\sin(\alpha) \quad A_{4,3} := \sin(\beta)$$

$$\begin{array}{lll}
A_{5,2} := -\cos(\alpha) & A_{5,5} := 1 & A_{6,2} := \sin(\alpha) \\
A_{6,15} := 1 & A_{7,3} := -\cos(\beta) & A_{7,4} := -1 \\
A_{7,6} := \cos(\gamma) & A_{7,7} := 1 & A_{8,3} := \sin(\beta) \\
A_{8,6} := \sin(\gamma) & A_{8,15} := 1 & A_{9,7} := -1 \\
A_{9,10} := 1 & A_{10,16} := 1 & A_{11,5} := -1 \\
A_{11,6} := -\cos(\gamma) & A_{11,8} := 1 & A_{11,9} := \cos(\gamma) \\
A_{12,6} := \sin(\gamma) & A_{12,9} := \sin(\gamma) & A_{12,16} := 1 \\
A_{13,8} := -1 & A_{13,11} := \cos(\alpha) & A_{14,11} := \sin(\alpha) \\
A_{14,17} := 1 & A_{15,11} := \cos(\alpha) & A_{15,12} := \cos(\beta) \\
A_{16,11} := -\sin(\alpha) & A_{16,12} := \sin(\beta) & A_{16,14} := 1 \\
A_{17,13} := 1 & A_{18,14} := 1 & A_{18,20} := 1 \\
A_{19,9} := -\cos(\gamma) & A_{19,10} := -1 & A_{19,12} := \cos(\beta) \\
A_{19,13} := 1 & A_{20,9} := \sin(\gamma) & A_{20,12} := \sin(\beta) \\
A_{20,17} := 1 & & 
\end{array}$$

**Коэффициенты матрицы свободных членов  $D_i$ , где  $i$  – порядковый номер уравнения в системе (4.1):**

$$\begin{array}{llll}
i := 1 \dots 20 & D_i := 0 & & \\
D_4 := -P & D_6 := -P & D_{10} := F & D_{16} := Q
\end{array}$$

**Решение системы линейных уравнений:**

$$S := A^{-1} \cdot D$$

В Mathcad для решения систем линейных уравнений предусмотрена встроенная функция **lsolve(A,D)**, которая возвращает вектор решения  $\{S\}$  при заданной матрице коэффициентов  $\|A\|$  и векторе свободных членов  $\{D\}$ . В случае использования встроенной функции последняя строка программы выглядит следующим образом:

$$S := \text{lsolve}(A, D)$$

Результаты вычисления усилий представлены на рисунке 1.26.

Использование вычислительного блока **Given-Find** позволяет вводить линейные уравнения в той естественной форме, в которой они были составлены при рассмотрении равновесия узлов. Строго говоря, блок **Given-Find** предусмотрен для численного решения систем нелинейных уравнений, а точность решения во многом зависит от выбора начальных приближений неизвестных. При использовании блока для решения систем линейных уравнений, начальные условия могут быть заданы произвольно, например, нулевые. При вводе уравнений равновесия вместо обычного знака равенства используется оператор логического сравнения, расположенный на панели булевых операторов (выглядит как «жирный» знак равенства).

$$S =$$

	1
1	-42.5
2	-34.216
3	37.734
4	0
5	-33.75
6	-4.507
7	37.5
8	-18.75
9	-22.535
10	37.5
11	-19.009
12	20.963
13	0
14	-17.5
15	-14.375
16	15
17	3.125
18	0
19	42.5
20	17.5

Рисунок 1.26 – Результаты вычисления усилий в стержнях фермы

**Определение усилий в стержнях плоской фермы**

**Исходные данные:**

$$d := 3 \quad H := 2 \quad Q := 5 \quad P := 20 \quad F := 15$$

**Углы наклона стержней фермы:**

$$\text{atan}(\alpha) := \frac{H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\beta) := \frac{3 \cdot H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{H}{d}$$

**Задание начальных приближений для неизвестных усилий и опорных реакций:**

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1 \dots 20 \quad D_i := 0 \quad R := D^T$$
$$(S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ S_{10} \ S_{11} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{14} \ S_{15} \ S_{16} \ S_{17} \ X_A \ Y_A \ Y_B) := R$$

**Формирование блока решений системы алгебраических уравнений:**

Given

$$\begin{array}{ll} X_A + S_4 = 0 & Y_A + S_1 = 0 \\ S_2 \cdot \cos(\alpha) + S_3 \cdot \cos(\beta) = 0 & S_1 - S_2 \cdot \sin(\alpha) + S_3 \cdot \sin(\beta) + P = 0 \\ -S_2 \cdot \cos(\alpha) + S_5 = 0 & S_2 \cdot \sin(\alpha) + S_{15} + P = 0 \\ -S_3 \cdot \cos(\beta) - S_4 + S_6 \cdot \cos(\gamma) + S_7 = 0 & S_3 \cdot \sin(\beta) + S_6 \cdot \sin(\gamma) + S_{15} = 0 \\ -S_7 + S_{10} = 0 & S_{16} - F = 0 \\ -S_5 - S_6 \cdot \cos(\gamma) + S_8 + S_9 \cdot \cos(\gamma) = 0 & S_6 \cdot \sin(\gamma) + S_9 \cdot \sin(\gamma) + S_{16} = 0 \\ -S_8 + S_{11} \cdot \cos(\alpha) = 0 & S_{11} \cdot \sin(\alpha) + S_{17} = 0 \\ S_{11} \cdot \cos(\alpha) + S_{12} \cdot \cos(\beta) = 0 & -S_{11} \cdot \sin(\alpha) + S_{12} \cdot \sin(\beta) + S_{14} + Q = 0 \\ S_{13} = 0 & Y_B + S_{14} = 0 \\ -S_9 \cdot \cos(\gamma) - S_{10} + S_{12} \cdot \cos(\beta) + S_{13} = 0 & S_{19} \cdot \sin(\gamma) + S_{12} \cdot \sin(\beta) + S_{17} = 0 \end{array}$$

**Вычисление неизвестных усилий в стержнях и опорных реакций фермы:**

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix}$$

	1
1	-42.5
2	-34.216
3	37.734
4	0
5	-33.75
6	-4.507
7	37.5
8	-18.75
9	-22.535
10	37.5
11	-19.009
12	20.963
13	0
14	-17.5
15	-14.375
16	15
17	3.125
18	-0
19	42.5
20	17.5

## 2 Лабораторная работа №2. Исследование равновесия пространственной системы сил

### 2.1 Краткие теоретические сведения

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком («плюс» или «минус») длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на эту ось (рисунок 2.1).

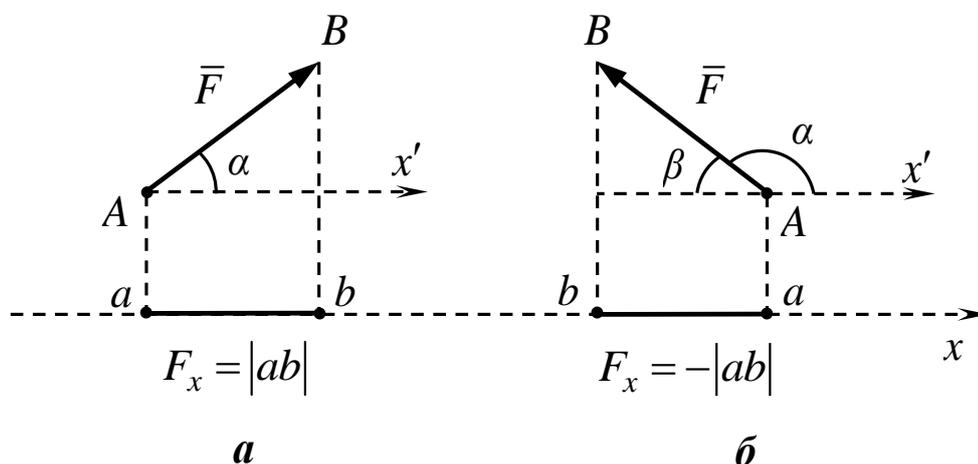


Рисунок 2.1 – Проекция силы на ось

Проекция силы считается положительной, если перемещение от проекции ее начала к проекции ее конца происходит в положительном направлении оси (рисунок 2.1а) и отрицательной, если наоборот (рисунок 2.1б).

Обозначив угол между направлением силы и положительным направлением оси  $\alpha$ , получим, что проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси:

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (2.1)$$

В выражении (2.1) знак проекции силы определяется знаком косинуса угла  $\alpha$ : если угол  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , проекция силы на ось положительна (рисунок 2.1а), если угол  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то отрицательна (рисунок 2.1б).

Очевидно, что проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярна оси.

В некоторых случаях при определении проекции силы на ось удобнее рассматривать острый угол  $\beta$ , образуемый силой с осью (рисунок 2.1б). Тогда проекция силы на ось определяется соотношением:

$$F_x = F \cos \alpha = F \cos(180^\circ - \beta) = -F \cos \beta. \quad (2.2)$$

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость (рисунок 2.2).

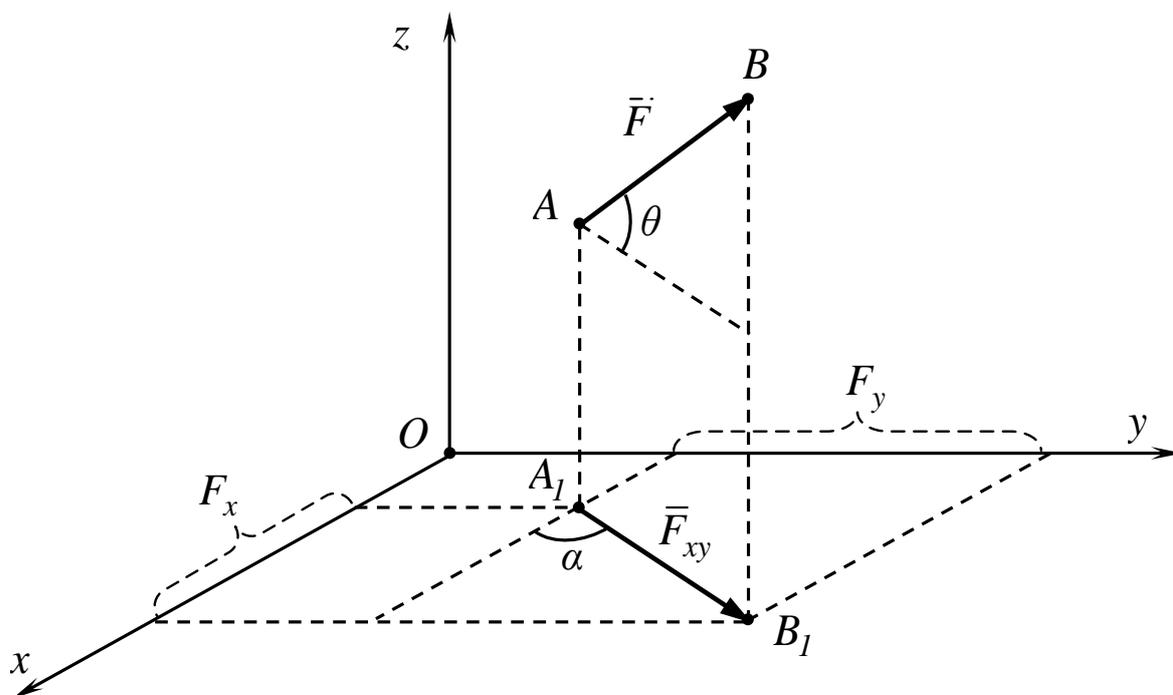


Рисунок 2.2 – Проекция силы на плоскость

Очевидно, что длины векторов связаны соотношением:

$$|\bar{F}_{xy}| = |\bar{F}| \cos \theta; \quad (2.3)$$

где  $\theta$  – угол между направлением силы  $\bar{F}$  и ее проекцией  $\bar{F}_{xy}$  на плоскость  $Oxy$ .

При решении задач на равновесие пространственных систем сил для нахождения проекции силы на ось удобно также пользоваться правилом двойного проецирования силы.

Для того чтобы найти проекцию силы на ось, нужно спроецировать силу на плоскость, содержащую эту ось, а затем полученный вектор проекции силы на плоскость спроецировать еще раз на заданную ось (рисунок 2.2).

Например, для силы  $\bar{F}$ , изображенной на рисунке 2.2, проекции на оси координат  $x$  и  $y$  будут равны:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \alpha = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha; \\ F_y &= F_{xy} \cos(90^\circ - \alpha) = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вектором-моментом силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  называется вектор, равный по модулю произведению модуля силы  $\bar{F}$  на ее плечо  $h$  относительно этого центра, приложенный в центре  $O$  перпендикулярно плоскости поворота силы  $OAB$ , образованной силой и этим центром, и направленный в ту сторону, откуда поворот силы вокруг центра видится происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 2.3).

Плечо  $h$  силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  находится как длина перпендикуляра, опущенного из центра  $O$  на линию действия силы  $\bar{F}$ .

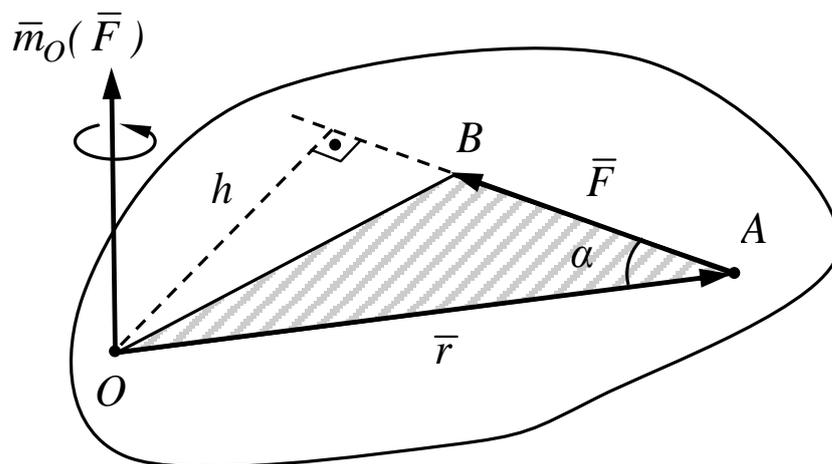


Рисунок 2.3 – Вектор-момент силы относительно центра

Вектор-момент силы относительно центра определяется соотношением:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}; \quad (2.5)$$

т.е. вектор-момент силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  равен векторному произведению радиуса-вектора  $\bar{r} = \overline{OA}$  точки приложения силы на вектор силы.

Выражение (2.5) называется *векторной формулой для определения момента силы относительно центра*.

Очевидно, что модуль вектора-момента силы относительно центра  $O$  равен:

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = |\bar{r} \times \bar{F}| = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin \alpha = F \cdot h. \quad (2.6)$$

Моментом пары сил называется вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение, производимое парой, видится происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 2.4).

Плечо пары  $d$  находится как плечо одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

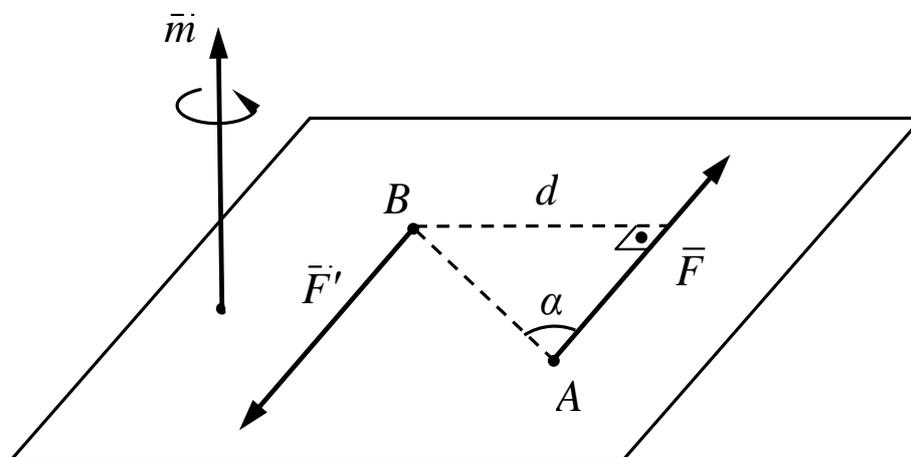


Рисунок 2.4 – Вектор-момент пары сил

В соответствии с (2.5) вектор-момент пары сил определяется соотношением:

$$\vec{m} = \overline{BA} \times \vec{F} = \overline{AB} \times \vec{F}'. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что модуль вектора-момента пары сил равен:

$$|\vec{m}| = |\overline{BA} \times \vec{F}| = |\vec{F}| \cdot |\overline{BA}| \cdot \sin \alpha = F \cdot d. \quad (2.8)$$

Так как пару можно переносить в любую другую плоскость, параллельную плоскости ее действия, то вектор-момент пары может быть приложен в любой точке пространства, т.е. вектор-момент пары – *вектор свободный*.

Моментом силы относительно оси называется проекция вектора-момента силы относительно произвольной точки, лежащей на этой оси, на саму эту ось (рисунок 2.5).

Тогда в соответствии с (2.1) имеем:

$$m_z(\bar{F}) = |\bar{m}_O(\bar{F})| \cdot \cos \gamma; \quad (2.9)$$

где  $\gamma$  – угол между направлением вектора-момента силы  $\bar{m}_O(\bar{F})$  и положительным направлением оси  $z$ .

Заметим, что момент силы относительно оси – величина скалярная.

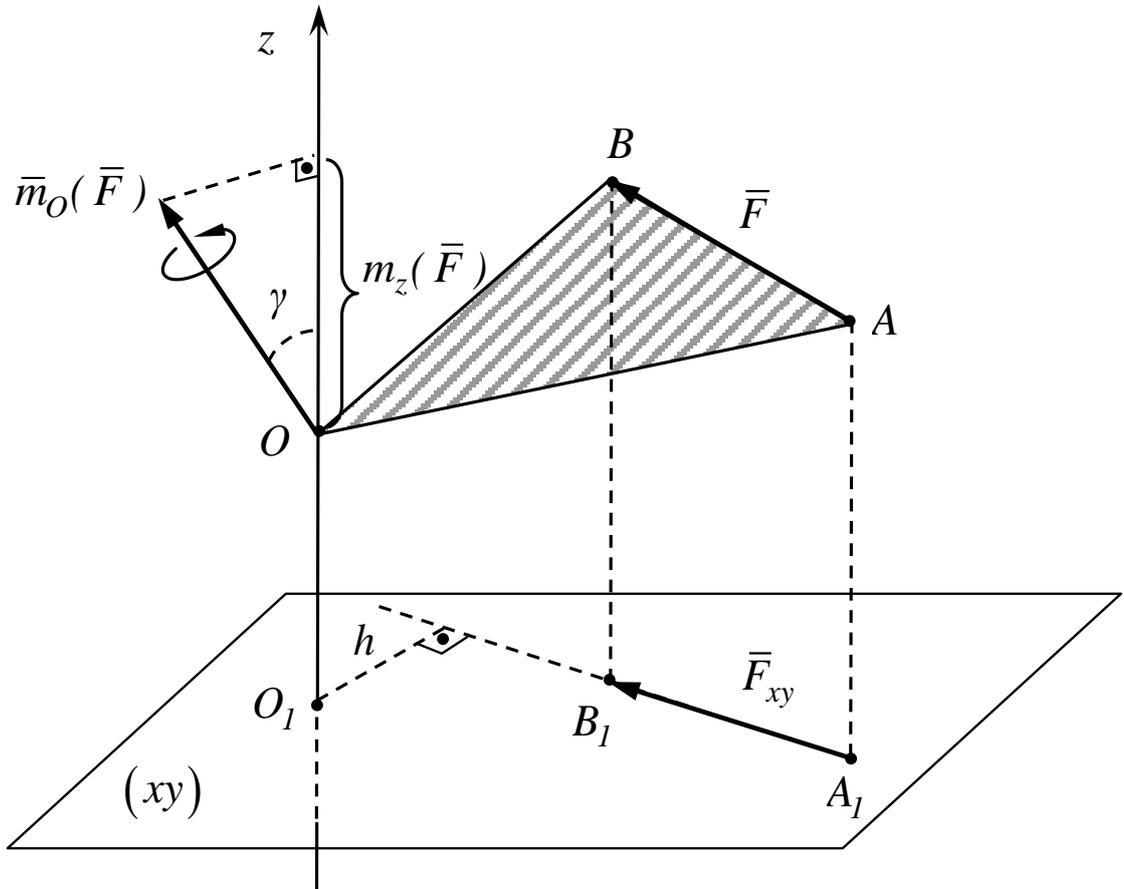


Рисунок 2.5 – Момент силы относительно оси

Соотношение (2.9) выражает зависимость между вектором-моментом силы относительно произвольного центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр.

При решении задач для нахождения момента силы относительно оси можно рекомендовать следующую последовательность действий (рисунок 2.5):

1) провести плоскость, перпендикулярную заданной оси (плоскость  $xy$  на рисунке;

2) спроецировать силу  $\vec{F}$  на плоскость  $xy$  и найти модуль проекции  $\vec{F}_{xy}$  по формуле (2.3);

3) из точки  $O_I$  пересечения оси и плоскости опустить перпендикуляр на линию действия вектора  $\vec{F}_{xy}$ , т.е. найти плечо  $h$  вектора  $\vec{F}_{xy}$  относительно центра  $O_I$ ;

4) определить алгебраический момент вектора  $\vec{F}_{xy}$  относительно центра  $O_I$ , как взятое с соответствующим знаком («плюс» или «минус») произведение модуля вектора  $\vec{F}_{xy}$  на плечо  $h$ . Произведение берется со знаком «плюс», если при взгляде с положительного направления оси поворот вектора  $\vec{F}_{xy}$  вокруг центра  $O_I$  видится происходящим против хода часовой стрелки, и со знаком «минус», если – по ходу часовой стрелки.

С учетом вышеизложенного, формула для вычисления момента силы относительно оси примет вид:

$$m_z(\vec{F}) = m_{O_I}(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h; \quad (2.10)$$

т.е. момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент силы относительно оси положителен, если при взгляде с положительного направления оси поворот силы вокруг оси видится происходящим против хода часовой стрелки, и отрицателен, если – по ходу часовой стрелки.

Так, для силы  $\vec{F}$ , изображенной на рисунке 2.5, момент относительно оси  $z$  положителен.

Из (2.10) следует, что момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  равен нулю, если:

1) сила  $\vec{F}$  параллельна оси  $z$  (в этом случае проекция  $\vec{F}_{xy} = 0$ );

2) линия действия силы  $\vec{F}$  пересекает ось  $z$  (в этом случае  $h = 0$ ).

Таким образом, момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Пусть  $\bar{R}$  - равнодействующая некоторой системы сил. Тогда:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (2.11)$$

Зависимость между моментами равнодействующей и моментами составляющих сил устанавливается теоремой Вариньона.

Вектор-момент равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме векторов-моментов составляющих сил относительно того же центра.

$$\bar{m}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (2.12)$$

Проецируя (2.12) на какую-либо координатную ось и учитывая зависимость (2.9) между вектором-моментом силы относительно центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр, получим формулировку теоремы Вариньона для моментов сил относительно оси.

Момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

$$m_z(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k). \quad (2.13)$$

Произвольной пространственной системой сил называется такая система, в которой линии действия сил не лежат в одной плоскости, не пересекаются в одной точке и не параллельны между собой.

Главным вектором системы сил называется вектор  $\bar{R}^*$ , равный геометрической сумме всех сил системы:

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (2.14)$$

Главным вектором-моментом системы сил (главным моментом) относительно некоторого центра  $O$  называется вектор, равный геометрической сумме векторов-моментов всех сил системы относительно этого центра:

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (2.15)$$

Согласно основной теореме статики (теореме Пуансо) произвольную пространственную систему сил в общем случае можно заменить одной силой, равной главному вектору системы  $\bar{R}^*$  и приложенной в произвольно выбранном центре  $O$ , и одной парой сил с вектором-моментом, равным главному моменту системы относительно выбранного центра приведения  $O$ .

Отметим особо, что в общем случае главный вектор  $\bar{R}^*$  не является равнодействующей данной системы сил, так как он заменяет исходную систему совместно с парой сил.

Отсюда следует, что для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и главный вектор-момент относительно произвольно выбранного центра приведения одновременно равнялись нулю.

$$\bar{R}^* = 0; \quad \bar{M}_O = 0. \quad (2.16)$$

Равенства (2.16) выражают условия равновесия произвольной пространственной системы сил в геометрической форме.

Спроецировав (2.16) на оси координат, с учетом (2.14) и (2.15) получим шесть уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю.

Уравнения (2.17) выражают условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме.

Отметим особо, что при составлении уравнений (2.17) можно, если это целесообразно, для нахождения проекций сил использовать одну систему осей, а при вычислений моментов сил – другую.

Уравнения равновесия (2.17) произвольной пространственной системы сил, приложенной к свободному твердому телу, строго говоря, не являются уравнениями равновесия этого твердого тела, т.к. при выполнении этих условий тело может

двигаться равномерно и прямолинейно вдоль координатных осей или равномерно вращаться вокруг этих осей. Для того чтобы уравнения (2.17) являлись одновременно и уравнениями равновесия свободного тела, необходимо, чтобы тело находилось в покое относительно выбранной системы координат и до приложения указанной системы сил.

При исследовании равновесия произвольной пространственной системы сил рекомендуется придерживаться следующей последовательности.

1 Выбрать тело, равновесие которого будет рассматриваться.

2 Изобразить на чертеже действующие на тело активные силы.

3 Используя принцип освобожденности от связей, мысленно отбросить наложенные на тело связи и заменить их действие реакциями этих связей.

4 Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на рассматриваемое тело.

5 Выбрать систему декартовых осей координат. Оси координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными либо перпендикулярными к возможно большому числу неизвестных сил, а также, чтобы линии действия этих сил пересекали эти оси.

6 Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил в форме (2.17). При вычислении моментов сил относительно осей следует пользоваться теоремой Вариньона (2.13), предварительно раскладывая силы на взаимно перпендикулярные составляющие, направленные вдоль координатных осей.

7 Убедиться, что данная задача является статически определимой, т.е. число неизвестных равно числу составленных уравнений равновесия.

8 Решив систему составленных уравнений, определить неизвестные величины.

9 Проанализировать полученные результаты.

## 2.2 Задание для лабораторной работы

Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 2.6) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром, цилиндрическим шарниром (подшипником) и невесомым шарнирным стержнем  $BB'$ . Размеры плит указаны на чертеже. Вес большей из плит равен  $\bar{G}_1$ , меньшей –  $\bar{G}_2$ . На плиты действуют силы  $\bar{F}$  и  $\bar{Q} = -\bar{Q}'$ .

Для конструкции с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой требуется:

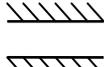
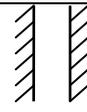
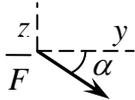
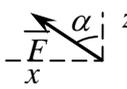
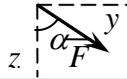
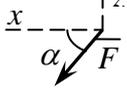
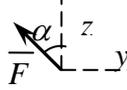
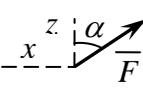
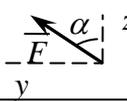
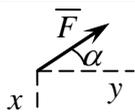
- 1) составить аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на заданное твердое тело;
- 2) составить уравнения равновесия в геометрической форме;
- 3) решить полученные системы уравнений и определить неизвестные реакции;
- 4) проанализировать и сравнить полученные результаты.

Исходные данные для выполнения работы выбираются студентом в соответствии с трехзначным вариантом по таблицам 2.1, 2.2 и рисунку 2.6. Номер схемы на рисунке 2.6 соответствует последней цифре варианта.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	Силы, кН				Угол $\alpha$	Размеры, м			
	$Q$	$G_1$	$G_2$	$F$		$a$	$b$	$c$	$d$
<b>0</b>	12	20	16	14	$0^\circ$	4	3	2	3
<b>1</b>	4	10	4	8	$30^\circ$	7	5	4	3
<b>2</b>	8	36	22	20	$60^\circ$	8	10	6	4
<b>3</b>	11	12	6	16	$45^\circ$	6	8	5	2
<b>4</b>	2	24	10	10	$90^\circ$	4	6	2	3
<b>5</b>	9	26	20	14	$45^\circ$	5	11	4	4
<b>6</b>	8	18	6	22	$60^\circ$	12	6	2	1
<b>7</b>	3	30	22	25	$30^\circ$	10	8	6	5
<b>8</b>	6	16	12	10	$0^\circ$	6	5	4	2
<b>9</b>	1	20	4	4	$90^\circ$	3	6	2	4

Таблица 2.2 – Исходные данные

Вторая цифра варианта	Точки расположения опор				Сила $F$	
					Направление	Точка приложения
0	$D$	$C$	-	-		$E$
1	$D$	-	$H$	-		$K$
2	$D$	-	-	$E$		$C$
3	$E$	-	-	$C$		$L$
4	$C$	-	$H$	-		$A$
5	$A$	$C$	-	-		$H$
6	$D$	-	-	$E$		$L$
7	$D$	-	$H$	-		$K$
8	$A$	$C$	-	-		$E$
9	$E$	-	-	$C$		$D$

Например, при варианте 407 величина сил и размеры принимаются по строке 4 таблицы 2.1, расположение опор и точка приложения силы  $F$  – по строке 0 таблицы 2.2. По рисунку 2.6 выбирается схема 7.

Силы  $Q$  и  $Q'$  следует рассматривать как пару и изобразить их действие на плиты вектором-моментом пары. Точка  $B'$  лежит на одной вертикали с  $D$  (схемы 0 – 4, 7) или  $C$  (схемы 5, 6, 8, 9). Точки  $K$  и  $L$  находятся посередине соответствующих сторон плит.

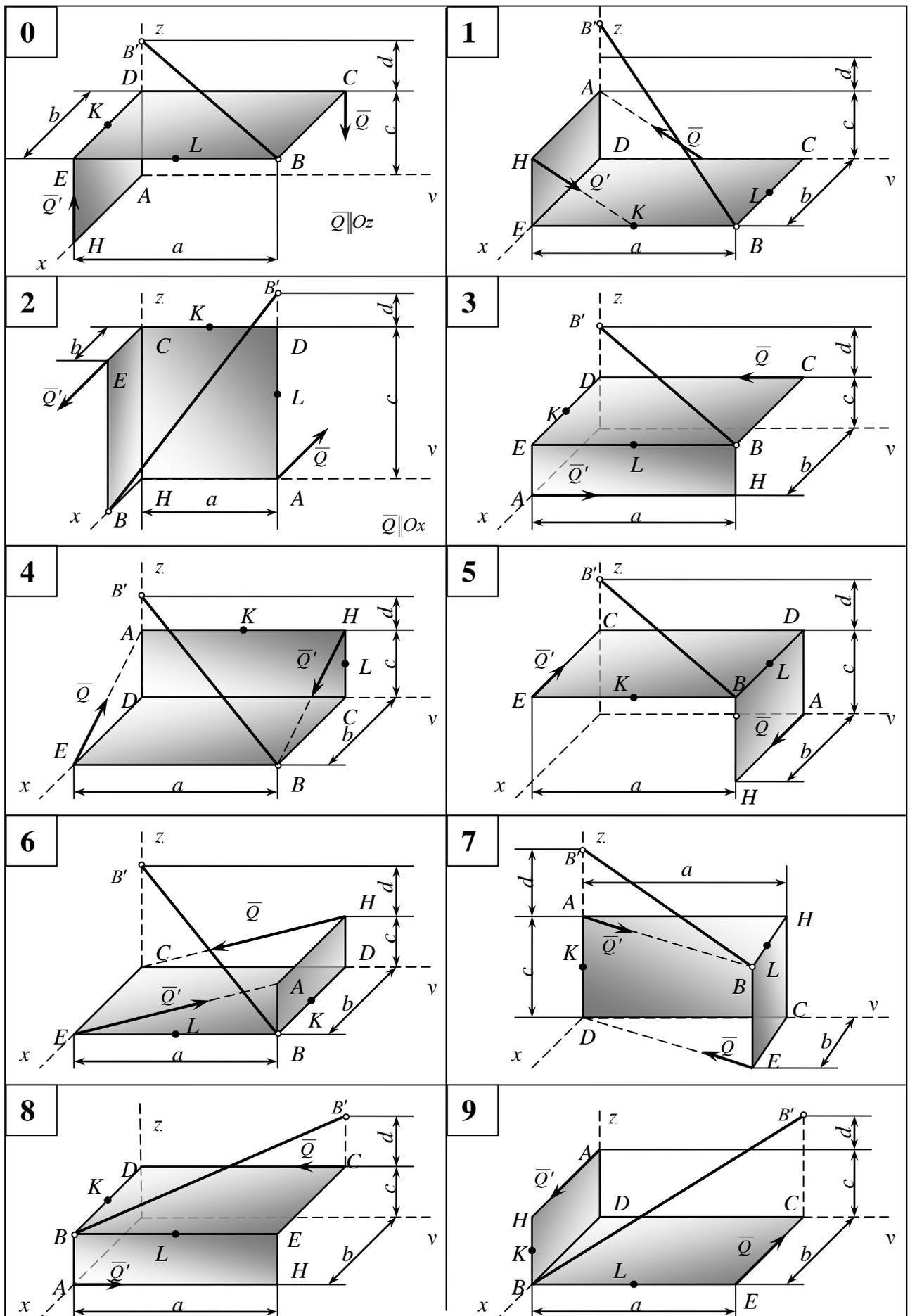


Рисунок 2.6

## 2.3 Пример выполнения лабораторной работы

Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 2.7) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $K$  и невесомым шарнирным стержнем  $BB'$ . Размеры плит указаны на чертеже,  $BL = LC$ . Вес плит  $ABCD$  и  $CDEK$  соответственно равен  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$ . На плиты действуют силы  $\bar{F}$  и  $\bar{Q} = -\bar{Q}'$ . Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $K$  и стержня  $BB'$ .

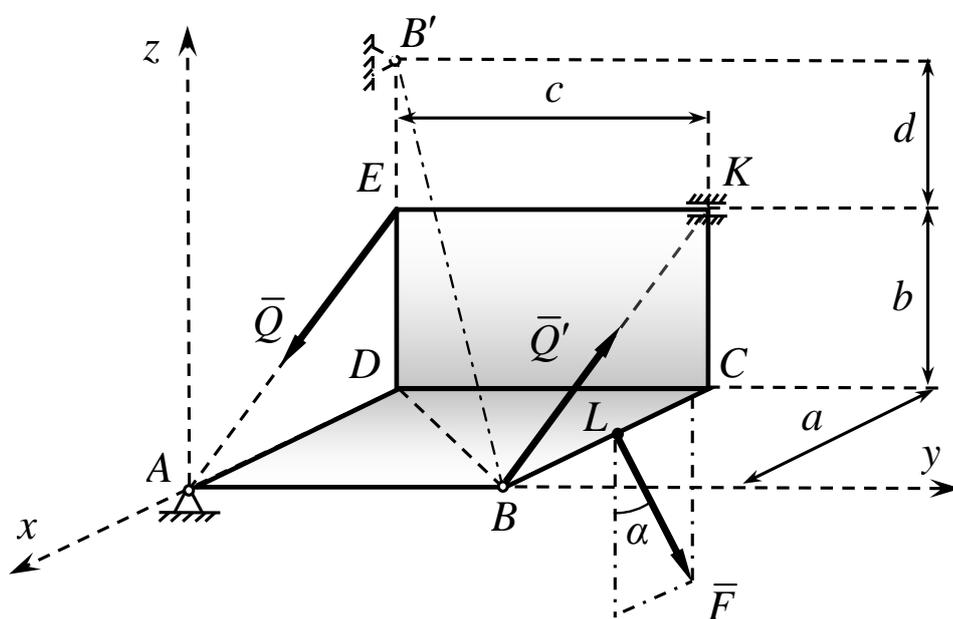


Рисунок 2.7 – Схема задания

**Дано:**  $a = 2$  м;  $b = 3$  м;  $c = 2$  м;  $d = 1$  м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $Q = Q' = 5$  кН;  $F = 8$  кН;  $G_1 = 10$  кН;  $G_2 = 12$  кН.

- 1 Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на конструкцию, в аналитической форме (2.17).
- 2 Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на конструкцию, в геометрической форме (2.16).
- 3 Решить полученные системы уравнений в Mathcad.
- 4 Сравнить полученные результаты.

Решение.

Рассмотрим равновесие плит  $ABCD$  и  $CDEK$ . Изобразим на чертеже (рисунок 2.8) действующие на конструкцию активные силы и реакции связей.

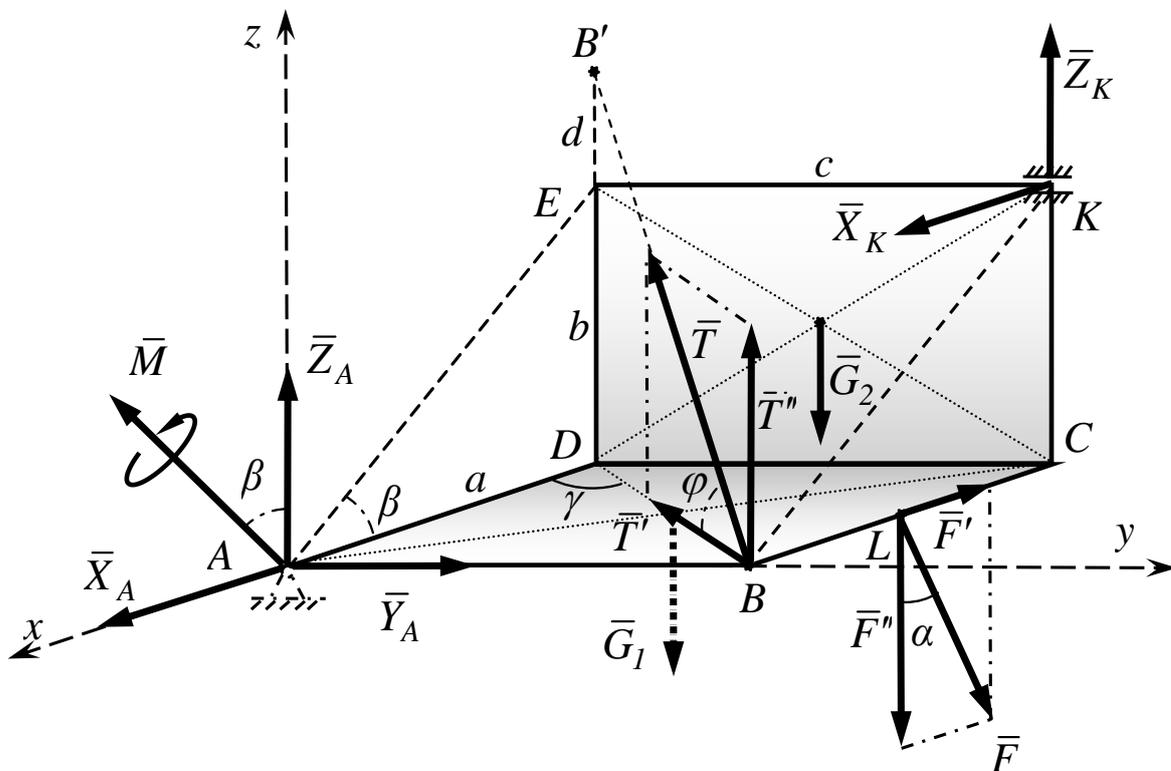


Рисунок 2.8 – Расчетная схема

На плиты действуют заданные силы  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$ ,  $\bar{F}$ , пара сил  $(\bar{Q}; \bar{Q}')$  и реакции связей. Пару сил  $(\bar{Q}; \bar{Q}')$  изобразим на чертеже вектором-моментом  $\bar{M}$ , перпендикулярным плоскости действия пары  $ABKE$ , модуль вектора-момента равен  $M = Q \cdot c$ . Реакцию сферического шарнира  $A$  разложим на три составляющих  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Z}_A$ . Реакцию цилиндрического шарнира (подшипника)  $K$  – на две составляющих  $\bar{X}_K$  и  $\bar{Z}_K$ , расположенных в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Реакцию  $\bar{T}$  стержня  $BB'$  направим вдоль оси стержня, предполагая его растянутым.

Силу  $\bar{F}$  разложим на две составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , параллельные осям координат  $x$  и  $z$  соответственно, причем  $F' = F \sin \alpha$  и  $F'' = F \cos \alpha$ . Реакцию стержня  $\bar{T}$  – на две составляющие  $\bar{T}'$  и  $\bar{T}''$ , где  $T' = T \cos \varphi$  и  $T'' = T \sin \varphi$ .

Определим необходимые для дальнейших расчетов углы:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{DE}{AD} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{AB}{AD} = \operatorname{arctg} \frac{c}{a};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B'D}{BD} = \operatorname{arctg} \frac{b+d}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Составим уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил (2.17), действующей на конструкцию:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + X_K - T \cos \varphi \cos \gamma - F \sin \alpha = 0; \\ Y_A - T \cos \varphi \sin \gamma = 0; \\ Z_A + Z_K + T \sin \varphi - G_1 - G_2 - F \cos \alpha = 0; \\ Z_K \cdot c + T \sin \varphi \cdot c - G_1 \cdot \frac{c}{2} - G_2 \cdot \frac{c}{2} - F \cos \alpha \cdot c + M \cdot \sin \beta = 0; \\ X_K \cdot b + Z_K \cdot a - G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot a - F \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} = 0; \\ -X_K \cdot c + T \cos \varphi \cdot a \cdot \sin \gamma + F \sin \alpha \cdot c + M \cdot \cos \beta = 0. \end{array} \right.$$

Для решения полученной системы уравнений в системе Mathcad матричным способом представим уравнения в виде:

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{P}\};$$

где  $\|\mathbf{A}\|$  – матрица коэффициентов при неизвестных реакциях системы уравнений,

$\{\mathbf{S}\}$  – вектор-столбец неизвестных реакций;

$\{\mathbf{P}\}$  – вектор-столбец свободных членов уравнений.

В Mathcad для решения систем линейных уравнений предусмотрена встроенная функция **lsolve(A,D)**, которая возвращает вектор решения **{S}** при заданной матрице коэффициентов **||A||** и векторе свободных членов **{P}**.

Для удобства представим коэффициенты матрицы **||A||** в виде таблицы 2.3:

Таблица 2.3 – Коэффициенты матрицы **||A||**

	1	2	3	4	5	6
	$X_A$	$Y_A$	$Z_A$	$X_K$	$Z_K$	$T$
1	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b><math>-\cos\varphi \cdot \cos\gamma</math></b>
2	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b><math>-\cos\varphi \cdot \sin\gamma</math></b>
3	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b><math>\sin\varphi</math></b>
4	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>c</b>	<b><math>c \cdot \sin\varphi</math></b>
5	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>b</b>	<b>a</b>	<b>0</b>
6	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-c</b>	<b>0</b>	<b><math>a \cdot \cos\varphi \cdot \sin\gamma</math></b>

Ниже приводится текст программы для определения неизвестных реакций системы линейных уравнений в системе Mathcad.

**Определение неизвестных реакций пространственной конструкции (1 способ).**

**Исходные данные:**

$$a := 2 \quad b := 3 \quad c := 2 \quad d := 1$$

$$F := 8 \quad Q := 5 \quad G_1 := 10 \quad G_2 := 12$$

$$\alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$M := Q \cdot c$$

$$\text{atan}(\beta) := \frac{b}{a} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{c}{a} \quad \text{atan}(\varphi) := \frac{b+d}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

**Коэффициенты матрицы  $\|A\|$ :**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos \varphi \cdot \cos \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos \varphi \cdot \sin \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c \cdot \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}$$

**Вектор свободных членов  $\{P\}$ :**

$$P := (-1) \cdot \begin{pmatrix} -F \cdot \sin \alpha \\ 0 \\ -G_1 - G_2 - F \cdot \cos \alpha \\ -G_1 \cdot \frac{c}{2} - G_2 \cdot \frac{c}{2} - F \cdot \cos \alpha \cdot c + M \cdot \sin \beta \\ -G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot a - F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} \\ F \cdot \sin \alpha \cdot c + M \cdot \cos \beta \end{pmatrix}$$

**Решение системы линейных уравнений:**

$$S := \text{lsolve}(A, D)$$

**Результаты вычисления реакций:**

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} := S = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.774 \\ 6.928 \\ 15.16 \\ 13.702 \\ -0.088 \\ 16.971 \end{pmatrix}$$

Решим теперь поставленную задачу, составив уравнения равновесия в векторной форме (2.16).

Каждую из заданных сил и неизвестных реакций опор определим матрицей-столбцом, элементы которой определяют проекции соответствующего вектора силы на декартовы оси.

При определении момента сил относительно центра воспользуемся векторной формулой (2.5). Тогда момент силы относительно оси будет получен на основании (2.9) как проекция вектора-момента силы на соответствующую ось координат. Момент пары сил найдем по формуле (2.8).

**Определение неизвестных реакций пространственной конструкции (2 способ) .**

**Исходные данные :**

$$a := 2 \quad b := 3 \quad c := 2 \quad d := 1$$

$$F := 8 \quad Q := 5 \quad G_1 := 10 \quad G_2 := 12 \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$\text{atan}(\beta) := \frac{b}{a} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{c}{a} \quad \text{atan}(\varphi) := \frac{b+d}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

**Векторы неизвестных реакций и заданных сил :**

$$R_A := \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad R_K := \begin{pmatrix} X_K \\ 0 \\ Z_K \end{pmatrix} \quad R_T := \begin{pmatrix} -T \cos(\varphi) \cos(\gamma) \\ -T \cos(\varphi) \sin(\gamma) \\ T \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_F := \begin{pmatrix} -F \sin(\alpha) \\ 0 \\ -F \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad R_{G1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_1 \end{pmatrix} \quad R_{G2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_2 \end{pmatrix}$$

$$R_Q := \begin{pmatrix} Q \cos(\beta) \\ 0 \\ -Q \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

**Радиусы-векторы точек приложения неизвестных реакций и заданных**

**сил :**

$$r_A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_K := \begin{pmatrix} -a \\ c \\ b \end{pmatrix} \quad r_T := \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad BE := \begin{pmatrix} -a \\ -c \\ b \end{pmatrix}$$

$$r_F := \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_{G1} := \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_{G2} := \begin{pmatrix} -a \\ \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

**Вычисление главного вектора пространственной системы сил (1.14) :**

$$R := R_A + R_K + R_T + R_F + R_{G1} + R_{G2}$$

**Вычисление главного момента пространственной системы сил**

**(1.15) относительно центра A :**

$$M_A := r_A \times R_A + r_K \times R_K + r_T \times R_T + r_F \times R_F + r_{G1} \times R_{G1} + r_{G2} \times R_{G2} + BE \times R_Q$$

**Формирование системы шести уравнения равновесия :**

**Встроенная функция stack объединяет матрицы по вертикали**

$$P := \text{stack}(R, M_A)$$

$$P \rightarrow \begin{pmatrix} X_A + X_K - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{6} - 4 \\ Y_A - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{6} \\ Z_A + Z_K - 4 \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} - 22 \\ 2 \cdot Z_K - 8 \cdot \sqrt{3} + \frac{30 \cdot \sqrt{13}}{13} + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} - 22 \\ 3 \cdot X_K + 2 \cdot Z_K - 4 \cdot \sqrt{3} - 34 \\ \frac{20 \cdot \sqrt{13}}{13} - 2 \cdot X_K + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} + 8 \end{pmatrix}$$

**Решение системы линейных уравнений:**

**Начальное приближение неизвестных реакций. Так как полученная система уравнения является линейной, то начальное приближение можно задавать произвольно, например, нулевое.**

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Решение полученной системы уравнений с помощью программного блока Given-Find.**

**Систему уравнений записываем с помощью операций копирования <Ctrl> + <C> и вставки <Ctrl> + <V>. Знак логического равенства (жирный знак равенства) вводим клавишами <Ctrl> + <=>).**

Given

$$\left( \begin{array}{l} X_A + X_K - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{6} - 4 \\ Y_A - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{6} \\ Z_A + Z_K - 4 \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} - 22 \\ 2 \cdot Z_K - 8 \cdot \sqrt{3} + \frac{30 \cdot \sqrt{13}}{13} + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} - 22 \\ 3 \cdot X_K + 2 \cdot Z_K - 4 \cdot \sqrt{3} - 34 \\ \frac{20 \cdot \sqrt{13}}{13} - 2 \cdot X_K + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot T}{3} + 8 \end{array} \right) = 0$$

**Результаты вычисления реакций:**

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_A \\ \bar{Y}_A \\ \bar{Z}_A \\ \bar{X}_K \\ \bar{Z}_K \\ \bar{T} \end{pmatrix} := \text{Find} \left( \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2.774 \\ 6.928 \\ 15.16 \\ 13.702 \\ -0.088 \\ 16.971 \end{pmatrix}$$

Полученные результаты вычисления неизвестных реакций совпадают со значениями, вычисленными первым способом. Знаки «минус» у реакций  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Z}_K$  означают, что истинное направление реакций противоположно показанному на рисунке 2.8.

### 3 Лабораторная работа № 3. Исследование кинематических характеристик материальной точки

#### 3.1 Краткие теоретические сведения

Различают две основные задачи кинематики материальной точки:

- 1) определение математических способов задания движения точки относительно выбранной системы отсчета (определение закона движения);
- 2) определение по заданному закону движения всех кинематических характеристик этого движения (траектории, скорости и ускорения точки).

Рассмотрим решение первой задачи. Движение материальной точки можно считать заданным, если известен способ, позволяющий определить ее положение относительно выбранной системы отсчета в каждый момент времени. Существуют три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

При *векторном способе* задания движения положение точки относительно начала отсчета  $O$  будет определено, если в каждый момент времени будет известен радиус-вектор  $\vec{r} = \overline{OM}$  (рисунок 3.1). Следовательно, закон движения точки в векторной форме будет описываться уравнением:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (3.1)$$

При *координатном способе* задания движения положение точки будет считаться известным, если в каждый момент времени известны ее декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рисунок 3.1). Таким образом, закон движения точки в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

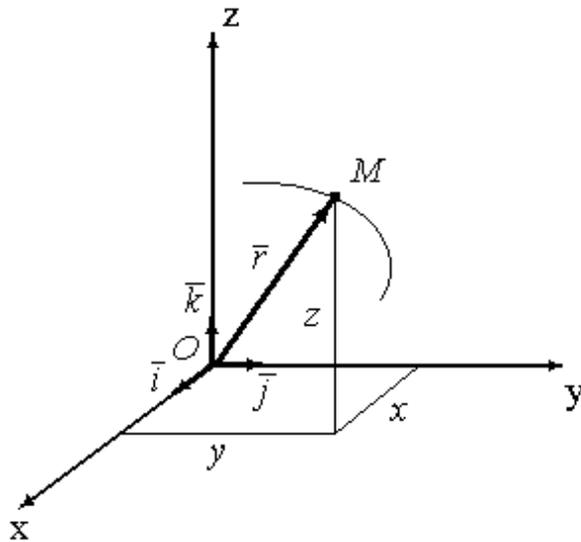


Рисунок 3.1 – Определение положения точки при векторном и координатном способах задания движения

*Естественный способ* задания движения используется в случаях, когда известна траектория движения точки. Положение точки на траектории определяется с помощью дуговой координаты  $S$ , которая отсчитывается от некоторой точки  $O$ , принятой за начало отсчета (рисунок 3.2). Дополнительно необходимо выбрать положительное и отрицательное направление отсчета дуговой координаты  $S$ . Таким образом, закон движения материальной точки в естественной форме имеет вид:

$$S = S(t). \quad (3.3)$$

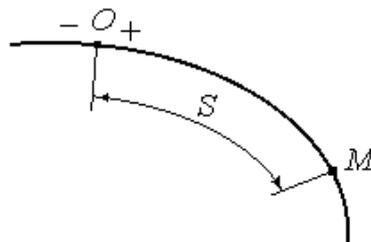


Рисунок 3.2 – Определение положения точки при естественном способе задания движения

Рассмотрим решение второй задачи кинематики точки. Определим скорость и ускорение материальной точки при различных способах задания ее движения.

Скоростью материальной точки называется векторная величина, показывающая, как быстро и в каком направлении меняется положение точки относительно рассматриваемой системы отсчета с течением времени.

При *векторном способе* задания движения скорость  $\bar{v}$  определяется как первая производная по времени  $t$  от закона изменения радиус-вектора этой точки:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \quad (3.4)$$

Вектор скорости  $\bar{v}$  направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рисунок 3.3).

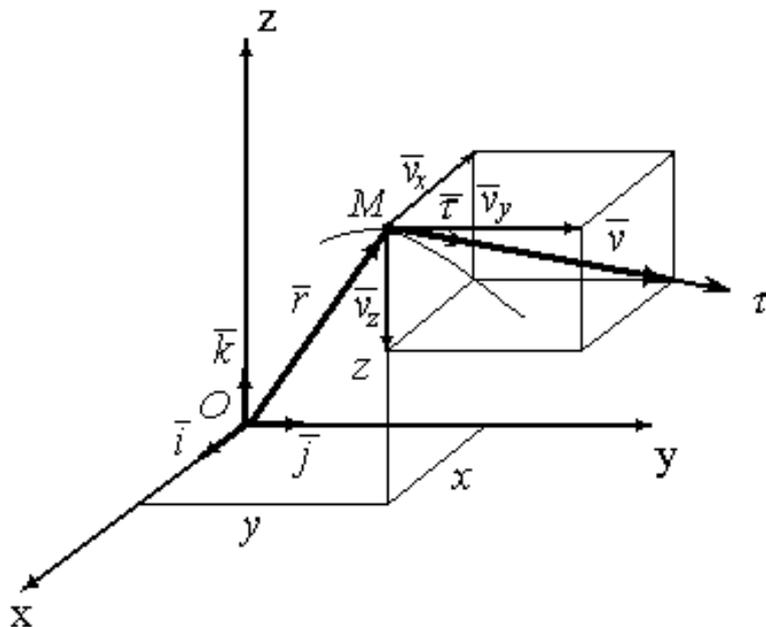


Рисунок 3.3 – Вектор скорости материальной точки

При *координатном способе* задания движения скорость точки определяется через ее проекции на декартовы оси координат. Радиус-вектор определяется выражением:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Тогда в соответствии с формулой (3.4) получим:

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}, \\ v_y = \dot{y}, \\ v_z = \dot{z}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – орты соответствующих координатных осей;

$v_x, v_y, v_z$  - проекции вектора скорости на оси координат, м/с.

Модуль вектора скорости равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.7)$$

Направление вектора скорости определяется с помощью направляющих косинусов (косинусов углов между вектором скорости и ортами осей):

$$\begin{cases} \cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}. \end{cases} \quad (3.8)$$

При *естественном способе* задания движения скорость точки определяется соотношением:

$$\bar{v} = v_\tau \cdot \bar{\tau} = \dot{S} \cdot \bar{\tau}, \quad (3.9)$$

где  $\bar{\tau}$  – орт касательной, направленный в сторону возрастания дуговой координаты  $S$ ,

$v_\tau$  – алгебраическая скорость (проекция вектора скорости на направление вектора  $\bar{\tau}$ ), м/с.

Если алгебраическая скорость  $v_\tau > 0$ , то вектор скорости  $\bar{v}$  направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты  $S$ , если  $v_\tau < 0$ , то вектор скорости  $\bar{v}$  направлен в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты  $S$ .

Ускорением материальной точки называется векторная величина, показывающая, как быстро и в каком направлении меняется скорость точки с течением времени.

При *векторном способе* задания движения ускорение точки  $\bar{a}$  определяется как производная по времени от закона изменения скорости точки  $\bar{v}$ :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (3.10)$$

При *координатном способе* задания движения ускорение точки (рисунок 3.4) находится через проекции на декартовы оси координат по формулам (3.11), (3.12), (3.13) и (3.14).

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad (3.11)$$

Здесь проекции вектора ускорения  $\bar{a}$  на декартовы оси определяются соотношениями:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (3.13)$$

а направляющие косинусы, определяющие направление вектора ускорения  $\bar{a}$

$$\begin{cases} \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \\ \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \\ \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}. \end{cases} \quad (3.14)$$

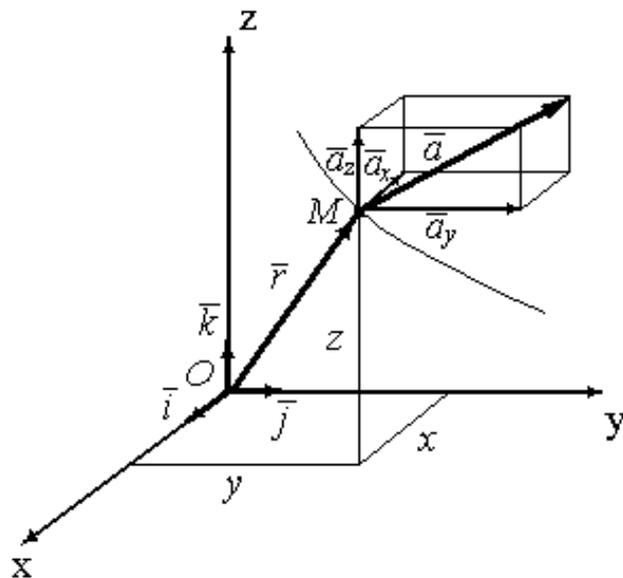


Рисунок 3.4 – Вектор ускорения материальной точки

При *естественном способе* задания движения вектор ускорения точки  $\bar{a}$  определяется как сумма касательного (тангенциального)  $\bar{a}_\tau$  и нормального  $\bar{a}_n$  ускорений (рисунок 3.5):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (3.15)$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (3.16)$$

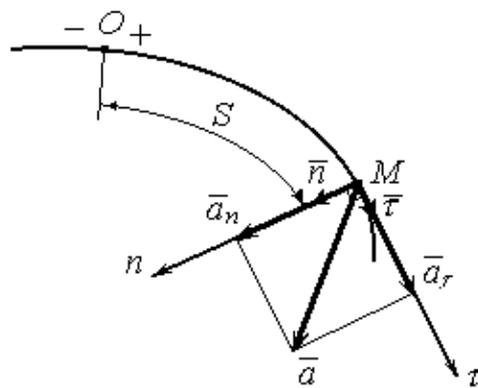


Рисунок 3.5 – Вектор ускорения материальной точки при естественном способе задания движения

Касательное (тангенциальное) и нормальное ускорения определяются по формулам:

$$\bar{a}_\tau = \ddot{S} \cdot \bar{\tau} = \dot{v} \cdot \bar{\tau}, \quad (3.17)$$

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{v}, \quad (3.18)$$

$$\bar{a}_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho} \cdot \bar{n} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad (3.19)$$

$$a_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, \quad (3.20)$$

где  $\bar{n}$  – орт главной нормали,

$\rho$  – радиус кривизны траектории в данной точке, м.

Касательное (тангенциальное) ускорение направлено по касательной к траектории в данной точке, а нормальное ускорение направлено перпендикулярно касательному к центру кривизны траектории.

### 3.2 Задание для лабораторной работы

Движение точки  $M$  в пространстве задано в координатной форме уравнениями вида:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases} \quad (3.21)$$

По заданным уравнениям движения требуется:

- 1) изобразить траекторию движения точки, указав на ней начальное положение точки и положение точки в момент времени  $t_1$ ;
- 2) определить скорость, касательное (тангенциальное), нормальное и полное ускорения точки для момента времени  $t_1$ ;
- 3) вычислить радиус кривизны траектории в положении точки, соответствующем моменту времени  $t_1$ ;

4) построить графики изменения скорости, касательного (тангенциального), нормального и полного ускорений точки в промежутке времени от начала движения до момента времени  $t_1$ ;

5) создать анимационный файл движения точки с помощью системы Mathcad.

Исходные данные для задания принимаются по таблицам 3.1 и 3.2 в соответствии с трехзначным номером варианта.

Первая цифра варианта соответствует уравнению  $x = f_1(t)$ , вторая –  $y = f_2(t)$ , третья –  $z = f_3(t)$ , где  $x, y, z$  – в метрах,  $t$  – в секундах. Значения момента времени  $t_1$  представлены в таблице 3.2 и определяются по последней цифре трехзначного варианта.

Таблица 3.1 – Уравнения движения материальной точки

Цифра	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Уравнение	$\frac{t^5}{11} - (t+1)^t$	$\sin^2(t - e^t)$	$\cos\left(\frac{1}{t+2}\right) + t$	$e^t + \ln(t+0,2)$	$\sin(t^3 - 1)$
Цифра	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
Уравнение	$\cos^{-2}(\sin(t))$	$t^3 + \frac{t}{1+t^4}$	$(t+0,5)^{\cos(2t)}$	$\sin\left(\frac{t}{3}\right) - t^2$	$\cos(t^5)$

Таблица 3.2 – Значение времени  $t_1$

Цифра	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$t_1, c$	1,5	5	2,5	3	2
Цифра	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
$t_1, c$	3,5	4	6	3,5	1

### 3.3 Пример выполнения лабораторной работы

**Дано:**

Закон движения точки  $M$  в пространстве имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^t \cdot t^2 - 2, \\ y = \sin(t) + t^2 - 2, \\ z = 5(\cos(t) - 1), \end{cases}$$

где  $x, y, z$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

- 1) Построить траекторию движения точки, указав на ней начальное положение точки и положение точки в момент времени  $t_1 = 0,5$  с;
- 2) Определить для момента времени  $t_1 = 0,5$  с скорость, ускорение, тангенциальное и нормальное ускорения точки, а также радиус кривизны траектории;
- 3) Построить графики изменения скорости, ускорения, касательного и нормального ускорений точки в промежутке времени с момента начала движения до момента времени  $t_1 = 0,5$  с;
- 4) Создать анимационный файл движения точки.

**Решение:**

Для выполнения лабораторной работы воспользуемся возможностями системы Mathcad.

Введем закон движения материальной точки, а также значения начального  $t_0$  и заданного  $t_1$  моментов времени (рисунок 3.6).

Определим с помощью формул (3.6) и (3.7) скорость точки (рисунок 3.7). По формулам (3.12) и (3.13) определим ускорение точки (рисунок 3.8). Определим

касательное и нормальное ускорения точки (рисунок 3.9). Найдем радиус кривизны траектории для данного положения точки (рисунок 3.10).

Для построения траектории движения точки зададим матрицу координат точки  $M$ , количество точек в интервале построения *tgrid* и графическую функцию *CreatSpace* для построения трехмерных графиков (рисунок 3.11).

Для построения векторов скорости и ускорений, а также их составляющих необходимо также воспользоваться функцией *CreatSpace* (рисунки 3.12, 3.13, 3.14).

Полученные в результате графики представлены на рисунках 3.15 и 3.16.

Для изменения углов обзора графика необходимо навести курсор на график и перемещать мышь, удерживая левую кнопку (рисунок 3.17).

Построим графики зависимостей от времени модулей скорости, ускорения, касательного и нормального ускорений точки в промежутке от момента начала движения  $t_0$  до заданного момента времени  $t_1$  (рисунок 3.18, 3.19).

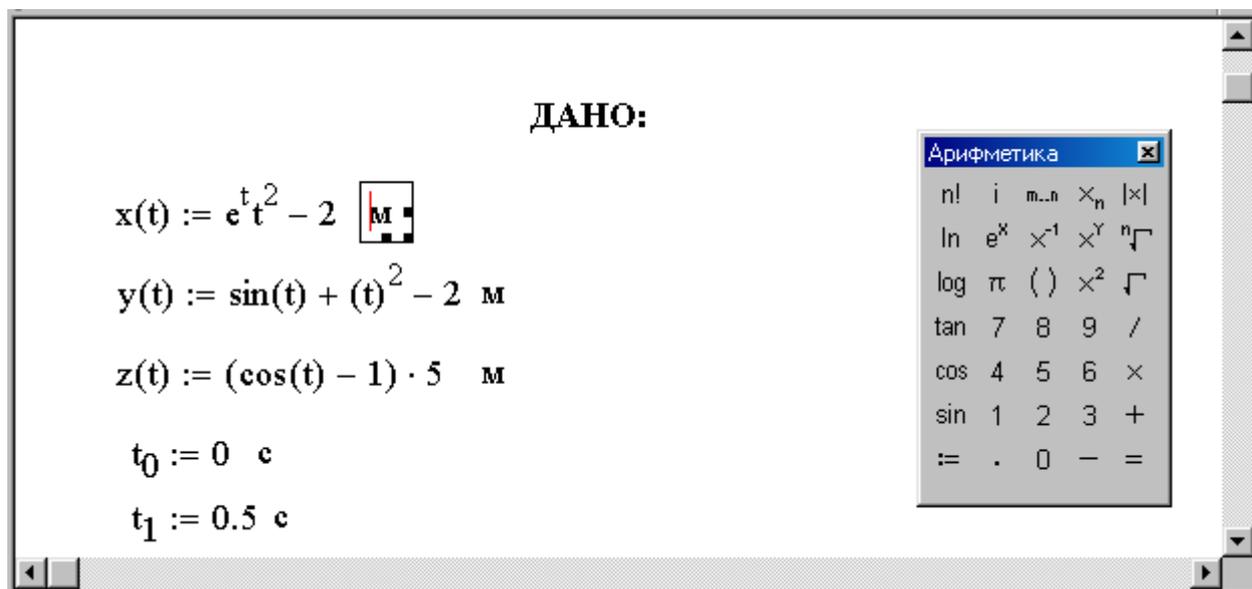


Рисунок 3.6 – Ввод исходных данных

### РЕШЕНИЕ:

#### 1) Определение скорости точки

Проекции скорости определяются по формулам:

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad v_z(t) := \frac{d}{dt}z(t)$$

Скорость точки равна

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

Для момента времени  $t_1$

$$v_x(t_1) = 2.061 \text{ м/с}; \quad v_y(t_1) = 1.878 \text{ м/с}; \quad v_z(t_1) = -2.397 \text{ м/с}$$

$$v(t_1) = 3.677 \text{ м/с}$$

Рисунок 3.7 – Определение скорости точки

#### 2) Определение ускорения точки

Проекции ускорения определяются по формулам:

$$a_x(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad a_y(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t) \quad a_z(t) := \frac{d^2}{dt^2}z(t)$$

Ускорение точки равно

$$a(t) := \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$$

Для момента времени  $t_1$

$$a_x(t_1) = 7.007 \text{ м/с}^2; \quad a_y(t_1) = 1.521 \text{ м/с}^2; \quad a_z(t_1) = -4.388 \text{ м/с}^2$$

$$a(t_1) = 8.406 \text{ м/с}^2$$

Рисунок 3.8 – Определение ускорения точки

Шрифт

3) Определение тангенциального ускорения точки

$$a_t(t) := \frac{a_x(t) \cdot v_x(t) + a_y(t) \cdot v_y(t) + a_z(t) \cdot v_z(t)}{v(t)}$$

Для момента времени  $t_1$

$$a_t(t_1) = 7.565 \quad \text{м/с}^2$$

4) Определение нормального ускорения точки

$$a_n(t) := \sqrt{a(t)^2 - a_t(t)^2}$$

Для момента времени  $t_1$

$$a_n(t_1) = 3.666 \quad \text{м/с}^2$$

Рисунок 3.9 – Определение касательного и нормального ускорений точки

5) Определение радиуса кривизны траектории

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{a_n(t)}$$

Для момента времени  $t_1$

$$\rho(t_1) = 3.688 \quad \text{м}$$

Рисунок 3.10 – Определение радиуса кривизны траектории

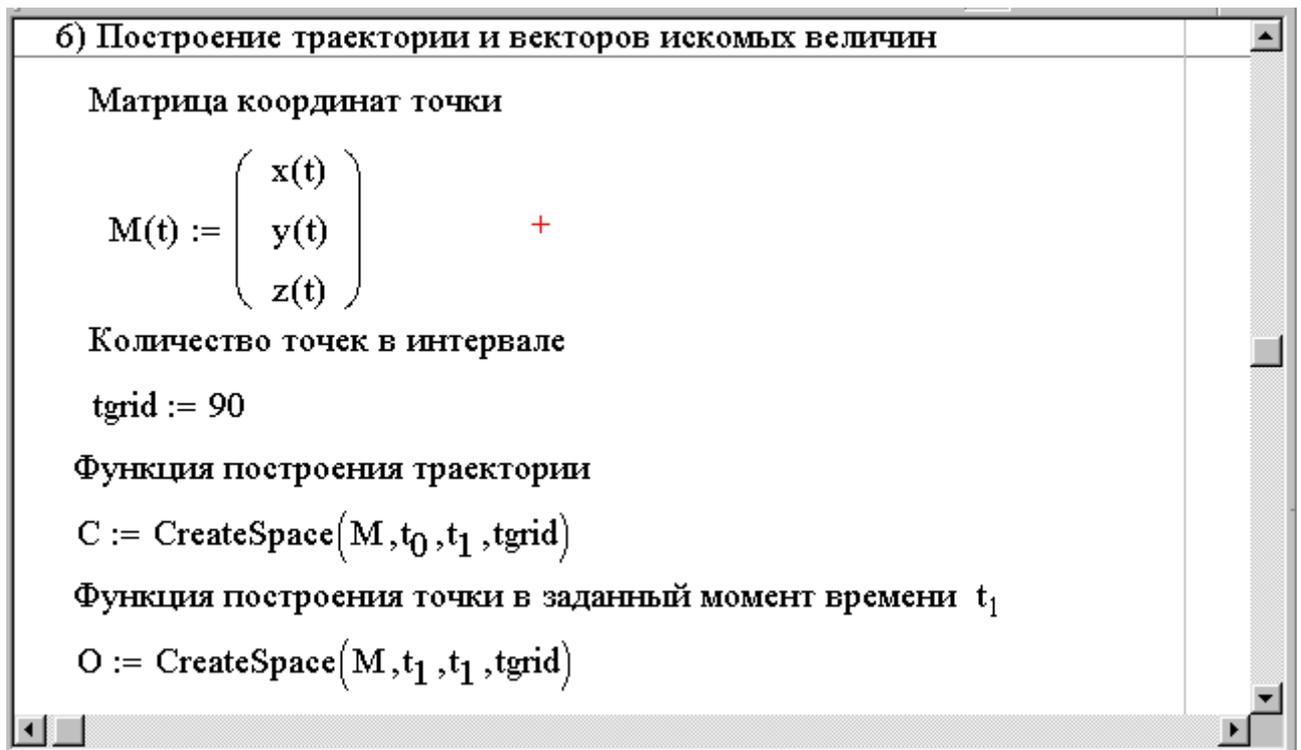


Рисунок 3.11 – Задание траектории движения точки



Рисунок 3.12 – Задание вектора скорости точки



Рисунок 3.13 – Задание вектора ускорения точки

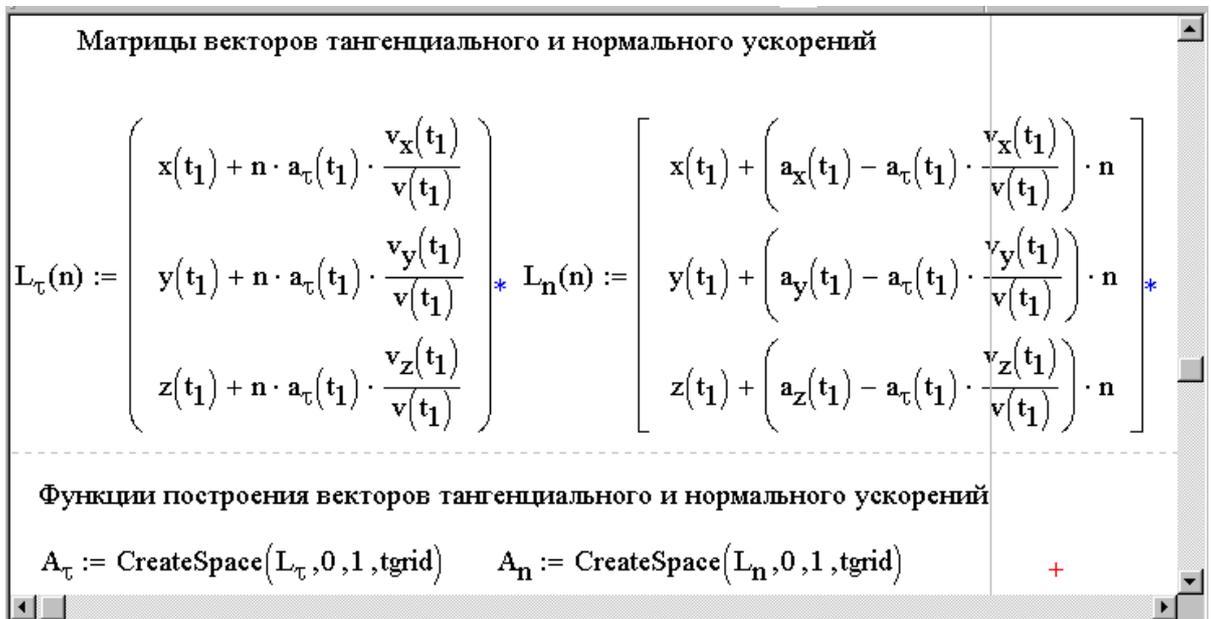


Рисунок 3.14 – Задание векторов тангенциального и нормального ускорений

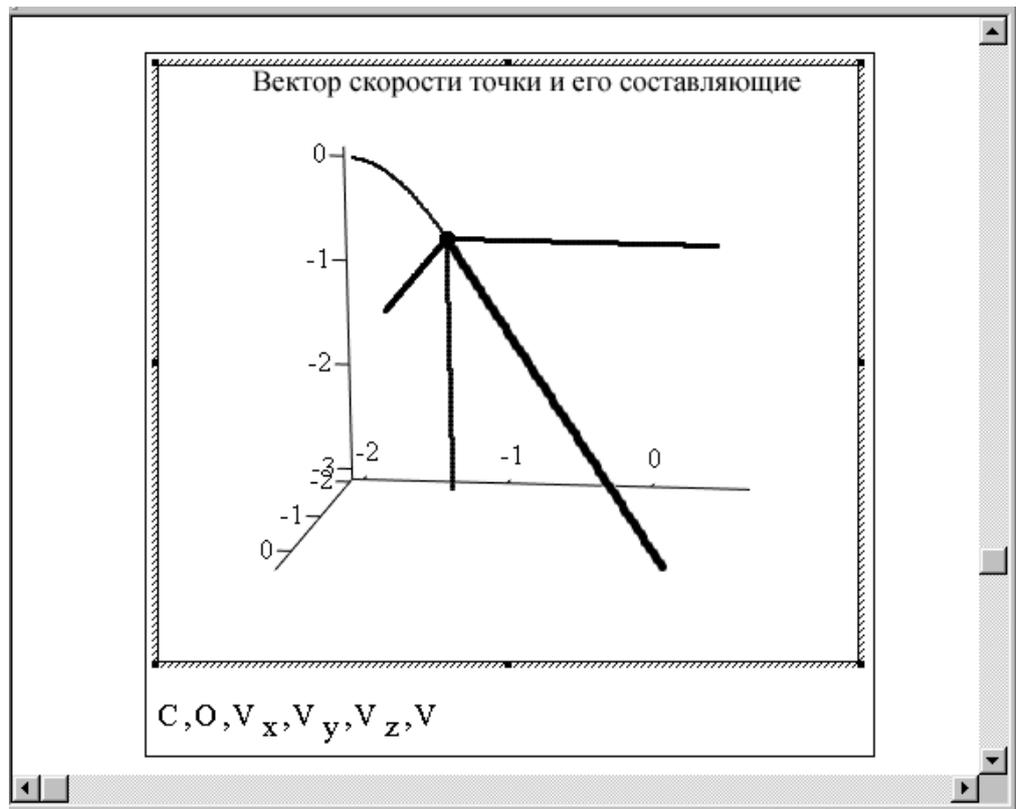


Рисунок 3.15 – Построение вектора скорости точки

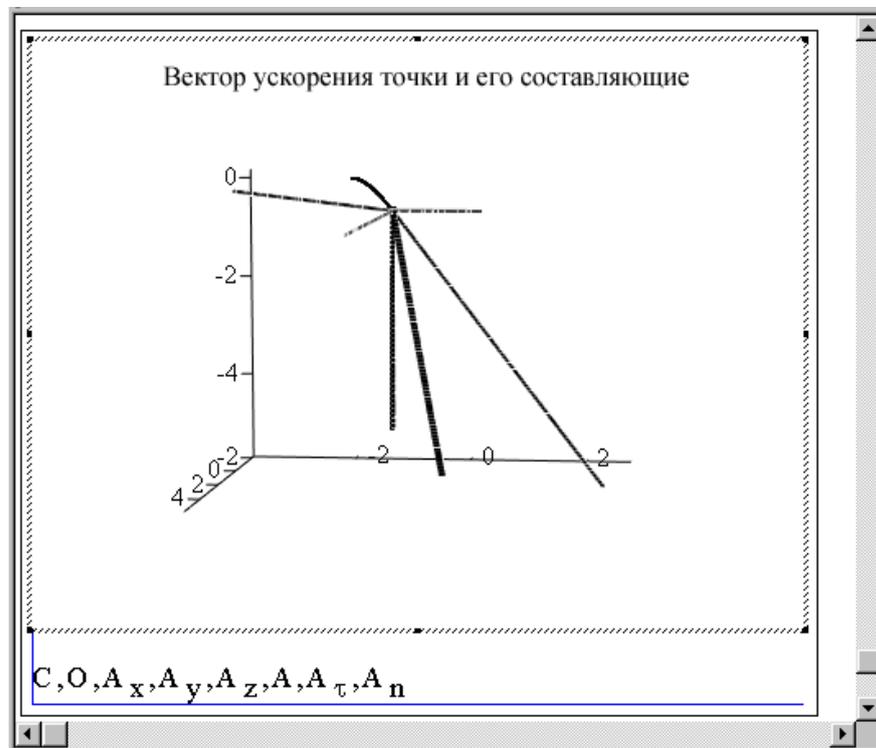


Рисунок 3.16 – Построение вектора ускорения точки

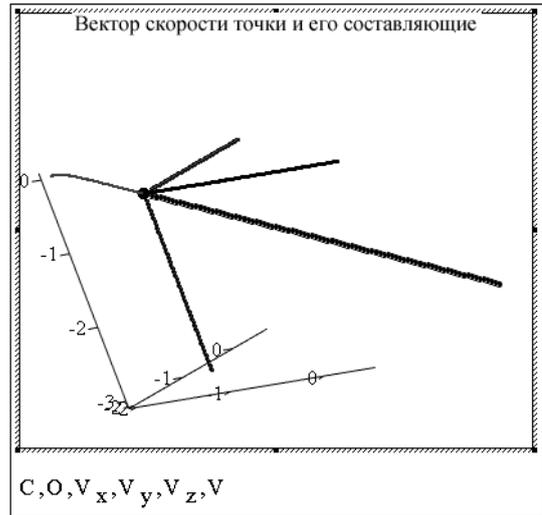
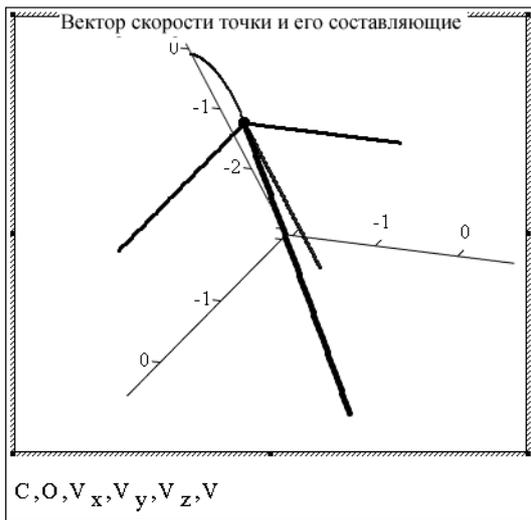


Рисунок 3.17 – Изменение обзора графика

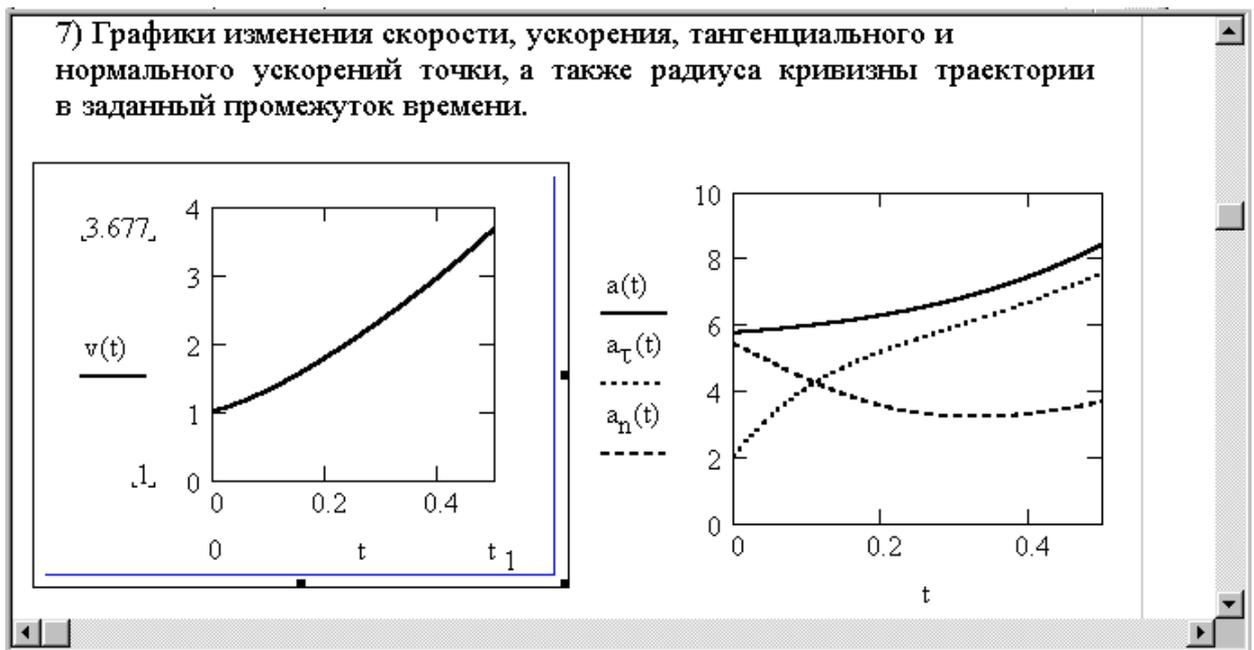


Рисунок 3.18 – Графики зависимостей кинематических характеристик точки от времени движения

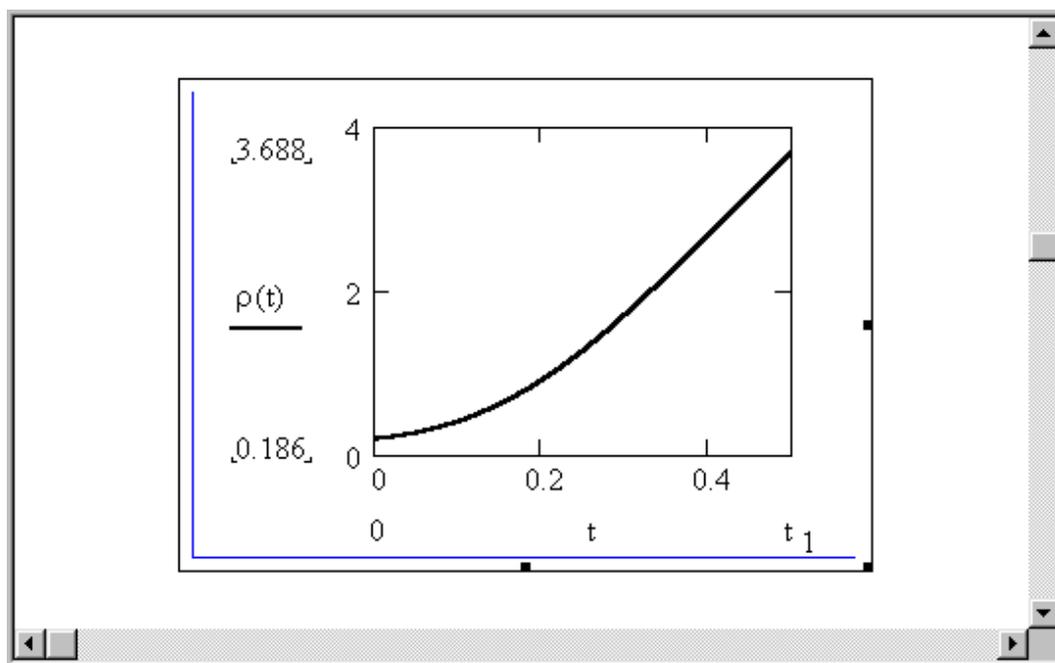


Рисунок 3.19 – График зависимости радиуса кривизны траектории точки от времени движения

Создадим анимационный файл движения точки. В системе Mathcad существует переменная **FRAME**, которая принимает целые значения, соответствующие текущему кадру анимации. В рассматриваемом примере переменной величиной является время  $t$ , поэтому зададим зависимость времени от переменной **FRAME** (рисунок 3.20). Далее следует выделить мышью необходимый для анимации фрагмент изображения (рисунок 3.21).

После создания анимации появится проигрыватель **Playback** (рисунок 3.22).

**РЕШЕНИЕ:**

$$t_1 := t_1 \cdot \frac{\text{FRAME}}{50}$$

$t := t_1$

1) Определение скорости точки

Проекции скоростей определяются по формулам:

Рисунок 3.20 – Создание счетчика кадров анимации

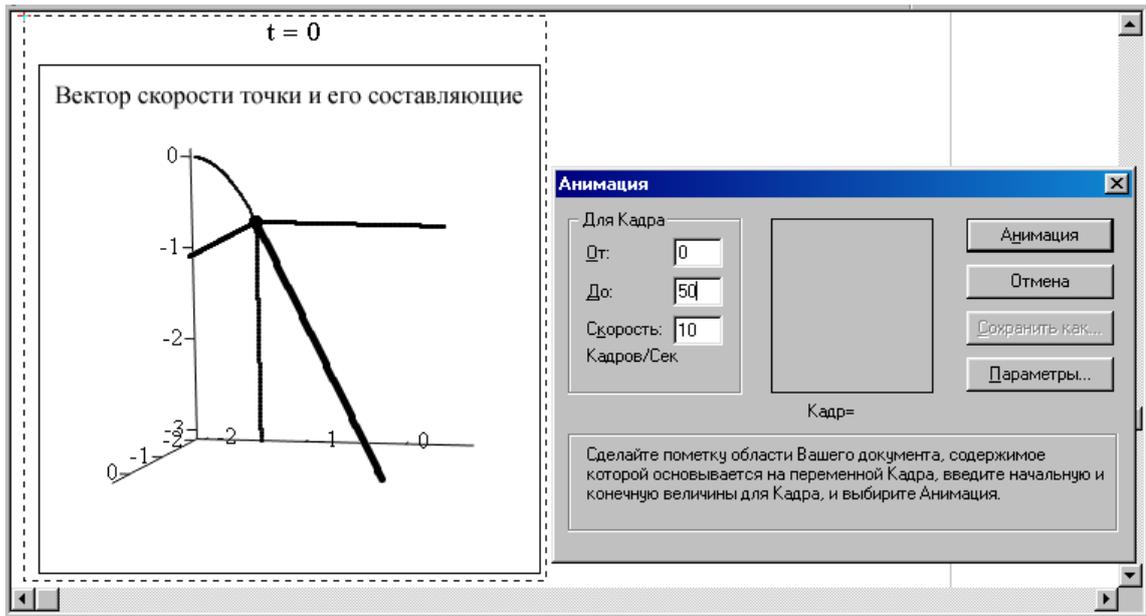


Рисунок 3.21 – Создание области анимации

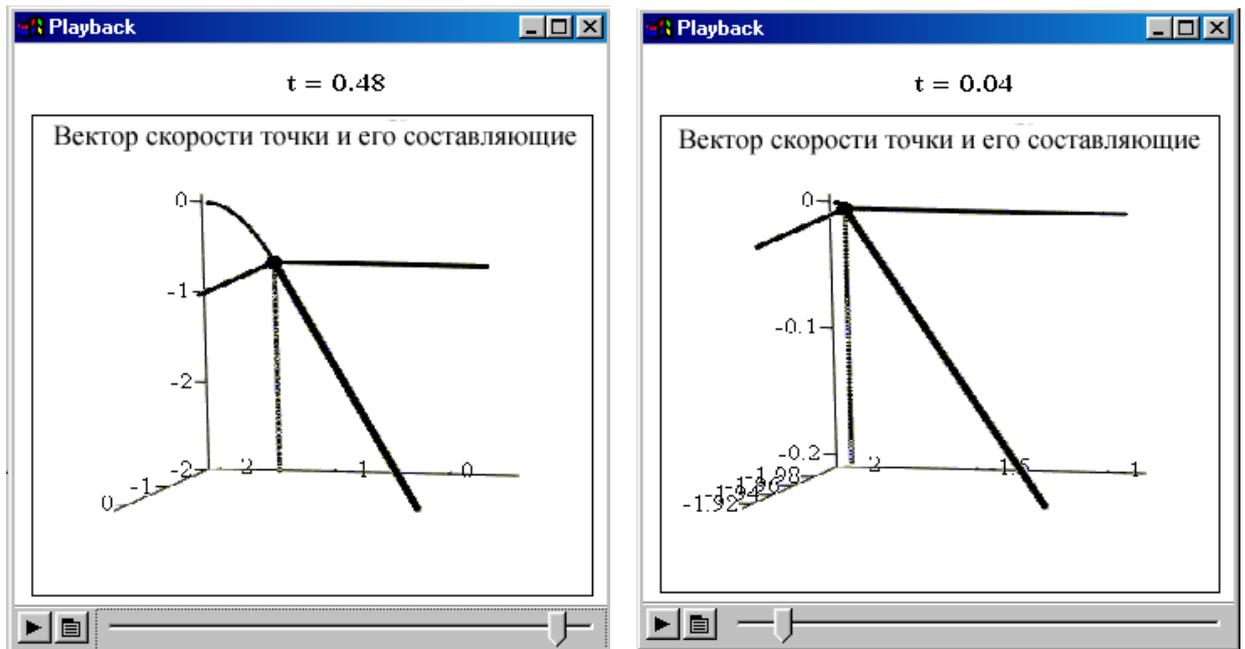


Рисунок 3.22 – Воспроизведение анимации движения точки

## 4 Лабораторная работа № 4. Исследование кинематических характеристик твердых тел при различных видах движения

### 4.1 Краткие теоретические сведения

В кинематике различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоскопараллельное (плоское);
- сферическое;
- общий случай движения твердого тела.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими видами движения твердого тела.

Основными задачами кинематики твердого тела являются:

- задание закона движения и определение кинематических характеристик твердого тела;
- определение основных кинематических характеристик (траектории, скорости и ускорения) отдельных точек твердого тела.

*Поступательным* называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная на этом теле, остается во все время движения параллельной самой себе.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением какой-либо одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения одной его точки.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость  $\bar{v}$  называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение  $\bar{a}$  - ускорением поступательного движения. Векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{a}$  можно, очевидно, изображать приложенными в любой точке тела.

Движение твердого тела, при котором две его точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета, называется *вращательным движением* твердого тела вокруг неподвижной оси. Прямая, все точки которой остаются неподвижными во все время движения, называется осью вращения. Все точки тела, не принадлежащие оси вращения, будут двигаться в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Положение вращающегося тела в любой момент времени будет известно, если задана зависимость угла поворота  $\varphi$  от времени  $t$  (рисунок 4.1):

$$\varphi = f(t). \quad (4.1)$$

Зависимость (4.1) называется уравнением или законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$ . Угол поворота  $\varphi$  задается в радианах (рад).

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$ .

Угловая скорость вращающегося тела равна первой производной по времени от закона изменения угла поворота тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (4.2)$$

Угловая скорость характеризует быстроту изменения угла поворота в данный момент времени.

Угловое ускорение вращающегося тела равно первой производной по времени от закона изменения угловой скорости или второй производной по времени от закона изменения угла поворота тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (4.3)$$

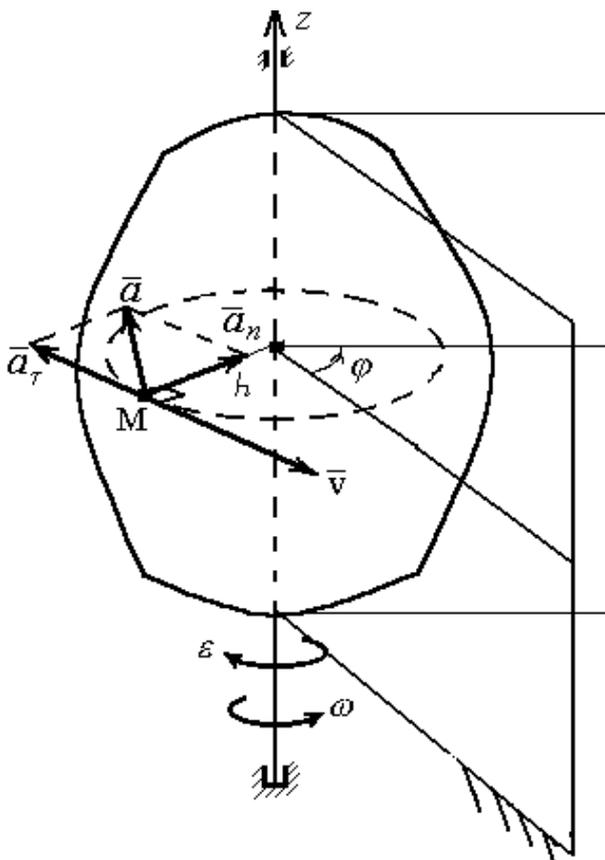


Рисунок 4.1 – Кинематические характеристики вращающегося тела

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в данный момент времени.

Единицами угловой скорости в СИ являются рад/с ( $1/\text{с}$ ,  $\text{с}^{-1}$ ), углового ускорения – рад/с<sup>2</sup> ( $1/\text{с}^2$ ,  $\text{с}^{-2}$ ).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет

ускоренным, если величины  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеют одинаковые знаки, и замедленным, если  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеют разные знаки.

Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения:

$$v = h \cdot |\omega|, \quad (4.4)$$

где  $v$  - модуль скорости точки, м/с;

$h$  - расстояние от точки до оси вращения, м;

$\omega$  - модуль угловой скорости тела, рад/с.

Вектор скорости точки тела направлен по касательной к траектории точки перпендикулярно плоскости, содержащей ось вращения и точку, в сторону вращения тела (рисунок 4.1).

Полное ускорение точки  $\bar{a}$  определяется как сумма его касательной  $\bar{a}_\tau$  (тангенциальной) и нормальной  $\bar{a}_n$  составляющих:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (4.5)$$

Модули касательного  $a_\tau$  и нормального  $a_n$  ускорений точки определяются по формулам (4.6) и (4.7):

$$a_\tau = h \cdot |\varepsilon|, \quad (4.6)$$

$$a_n = h \cdot \omega^2. \quad (4.7)$$

Касательное ускорение  $a_\tau$  направлено по касательной к траектории точки: в сторону движения, если тело вращается ускоренно, и в противоположную сторону, если тело вращается замедленно. Нормальное ускорение  $a_n$  всегда направлено по радиусу  $h$  к оси вращения (рисунок 4.1).

Модуль полного ускорения точки будет определяться по формуле:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (4.8)$$

где  $a$  – полное ускорение точки,  $\text{м/с}^2$ .

*Плоскопараллельное (плоское) движение* твердого тела – движение, при котором все точки тела движутся по траекториям, лежащих в плоскостях, параллельных некоторой условно неподвижной плоскости.

Для того чтобы задать положение тела, совершающего плоское движение, необходимо задать положение плоской фигуры, принадлежащей телу и лежащей в плоскости, параллельной заданной неподвижной плоскости. Положение плоской фигуры в данной плоскости (рисунок 4.2) будет задаваться положением произвольного отрезка  $AB$ , принадлежащего фигуре.

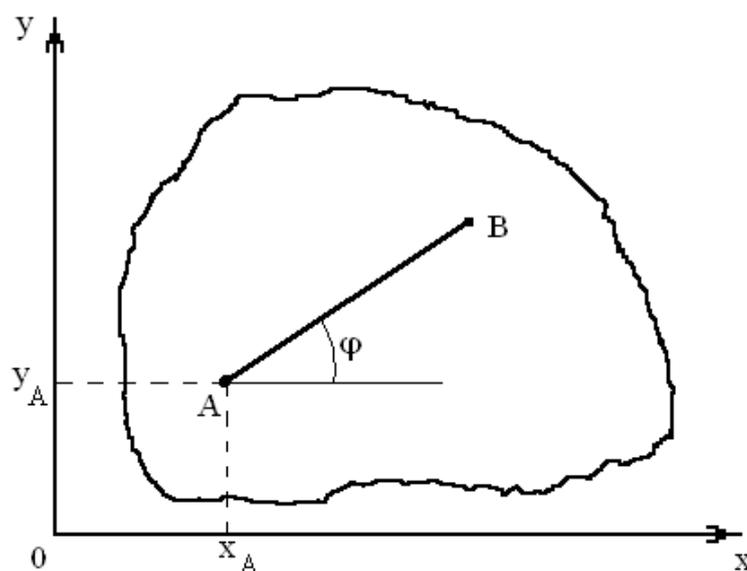


Рисунок 4.2 – Плоская фигура

Положение отрезка  $AB$  можно задать, если определить положение какой-либо точки отрезка (полюса) и угол наклона отрезка к какой-либо оси. Следовательно, закон плоскопараллельного движения имеет вид:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $x_A$ ,  $y_A$  - координаты полюса в декартовой системе координат, м;

$\varphi$  - угол поворота тела, рад.

Плоскопараллельное движение можно разложить на поступательное движение тела вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс. В связи с этим кинематическими характеристиками тела при плоском движении будут являться скорость  $\bar{v}_A$  и ускорение  $\bar{a}_A$  полюса, а также угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  тела.

Для определения скоростей точек тел, совершающих плоское движение, используются три способа:

- применение теоремы о проекциях скоростей двух точек на прямую, проходящую через эти точки;
- применение теоремы о сложении скоростей точек при плоском движении;
- определение скоростей с помощью мгновенного центра скоростей.

Для определения ускорений точек тела при плоском движении, используются два способа:

- применение теоремы о сложении ускорений точек при плоском движении;
- определение ускорений с помощью мгновенного центра ускорений.

В лабораторной работе в качестве тела, совершающего плоское движение, рассматривается каток. Скорости точек катка рекомендуется определять с помощью мгновенного центра скоростей.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это связанная с телом точка, скорость которой в данный момент равна нулю. Если данную точку выбрать за полюс, то движение тела можно представить как мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через МЦС, а скорости точек тела в данный момент времени определять по формуле (4.4).

При качении тела по неподвижной поверхности без проскальзывания скорость точки касания с неподвижной поверхностью в каждый момент времени будет равна нулю. Эта точка и будет являться мгновенным центром скоростей, который обозначается  $P$  (рисунок 4.3).

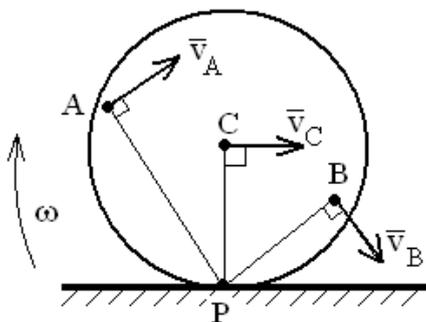


Рисунок 4.3 – Скорости точек катка

При определении ускорений точек за полюс, как правило, выбирают центр катка. Центр катка  $C$  движется прямолинейно, поэтому ускорение полюса можно определить по формуле:

$$a_C = a_C^{\tau} = \dot{v}_C. \quad (4.10)$$

#### 4.2 Задание для лабораторной работы

Механическая система состоит из двух грузов ( $1$  и  $2$ ), двух ступенчатых блоков ( $3$  и  $4$ ) и катка  $5$ , связанных невесомыми нерастяжимыми нитями. Радиусы блоков и катка соответственно равны  $r_3, r_4, R_3, R_4, R_5$ . Груз  $1$  перемещается вниз вертикально или по наклонной плоскости в соответствии с законом  $S_1 = S_1(t)$ , приводя в механическую систему в движение.

В начальный момент система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободу блоков и катка пренебречь. При определении ускорений за полюс катка 5 принять его центр.

1 Определить кинематические характеристики всех тел системы в заданный момент времени  $t_1$ .

2 Построить в Mathcad графики изменения кинематических характеристик исследуемого тела, указанного в таблице 4.1, как функции времени  $t$ .

Исходные данные для лабораторной работы выбираются в соответствии с трехзначным номером варианта по таблице 4.1. Последняя цифра варианта соответствует номеру схемы. Схемы вариантов представлены на рисунках 4.4 – 4.6.

Таблица 4.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	$r_3$ , см	$r_4$ , см	$R_3$ , см	$R_4$ , см	$R_5$ , см	Вторая цифра варианта	$S_I = S_I(t)$ , мм	Исследуемое тело	$t_1$ , с
<b>0</b>	10	15	35	60	30	<b>0</b>	$S_I = 3t^5 - 2t^2$	2	3
<b>1</b>	15	20	45	35	75	<b>1</b>	$S_I = e^{t+1} + 3t^3$	3	5
<b>2</b>	25	25	60	50	65	<b>2</b>	$S_I = t^5 + 8t^3$	4	7
<b>3</b>	30	10	55	45	45	<b>3</b>	$S_I = e^t + 2t^2$	5	6
<b>4</b>	20	30	50	55	50	<b>4</b>	$S_I = 8 + 15t^4$	2	9
<b>5</b>	25	15	40	40	80	<b>5</b>	$S_I = 9t^4 + 3t^2$	3	8
<b>6</b>	15	30	35	50	35	<b>6</b>	$S_I = t^4 - t$	4	4
<b>7</b>	30	25	60	55	60	<b>7</b>	$S_I = e^{t+2} + t$	5	11
<b>8</b>	25	20	45	60	70	<b>8</b>	$S_I = t^6 - 1$	2	10
<b>9</b>	10	15	50	45	25	<b>9</b>	$S_I = t^3 + 2t^2 + 1$	3	12

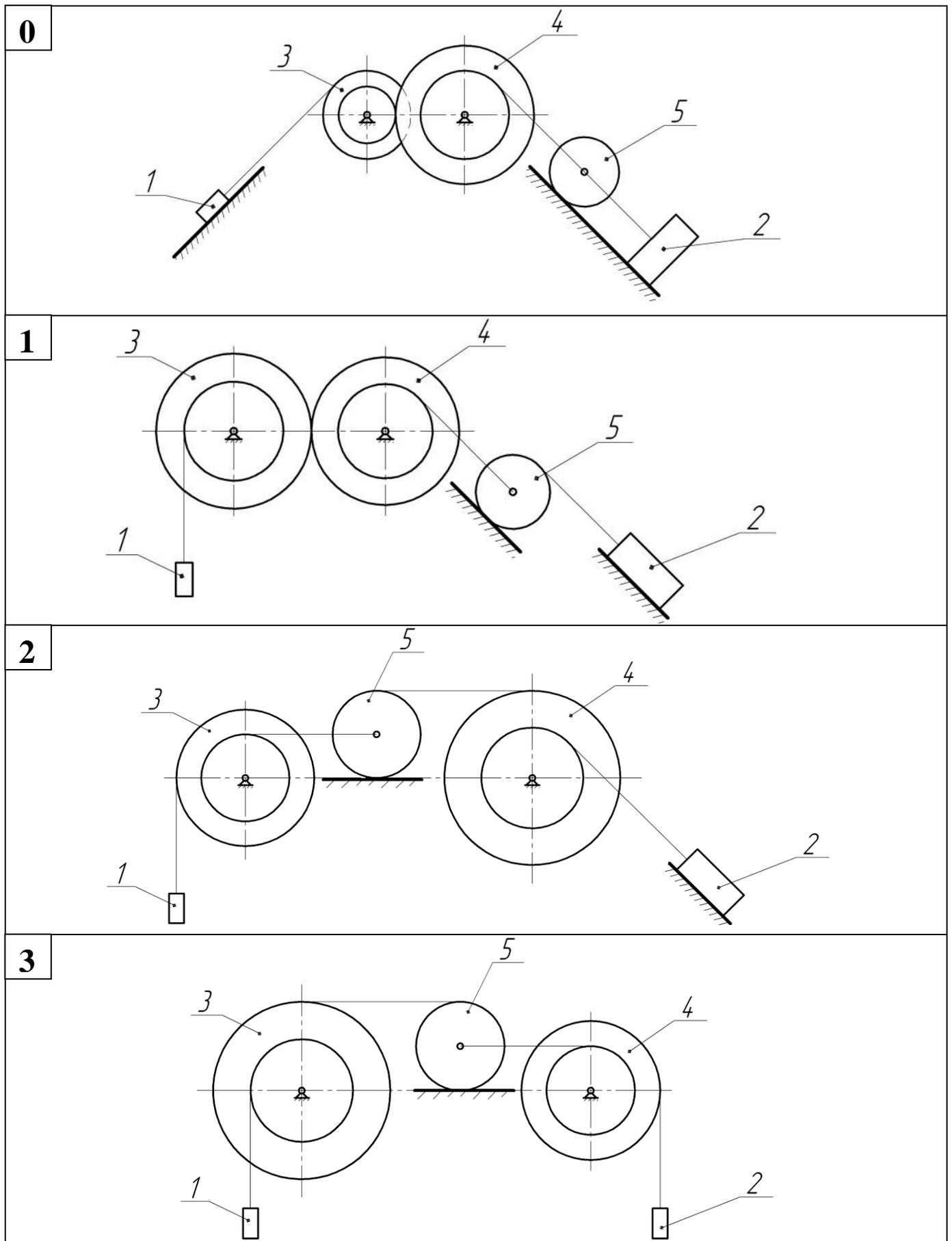


Рисунок 4.4 – Схемы вариантов

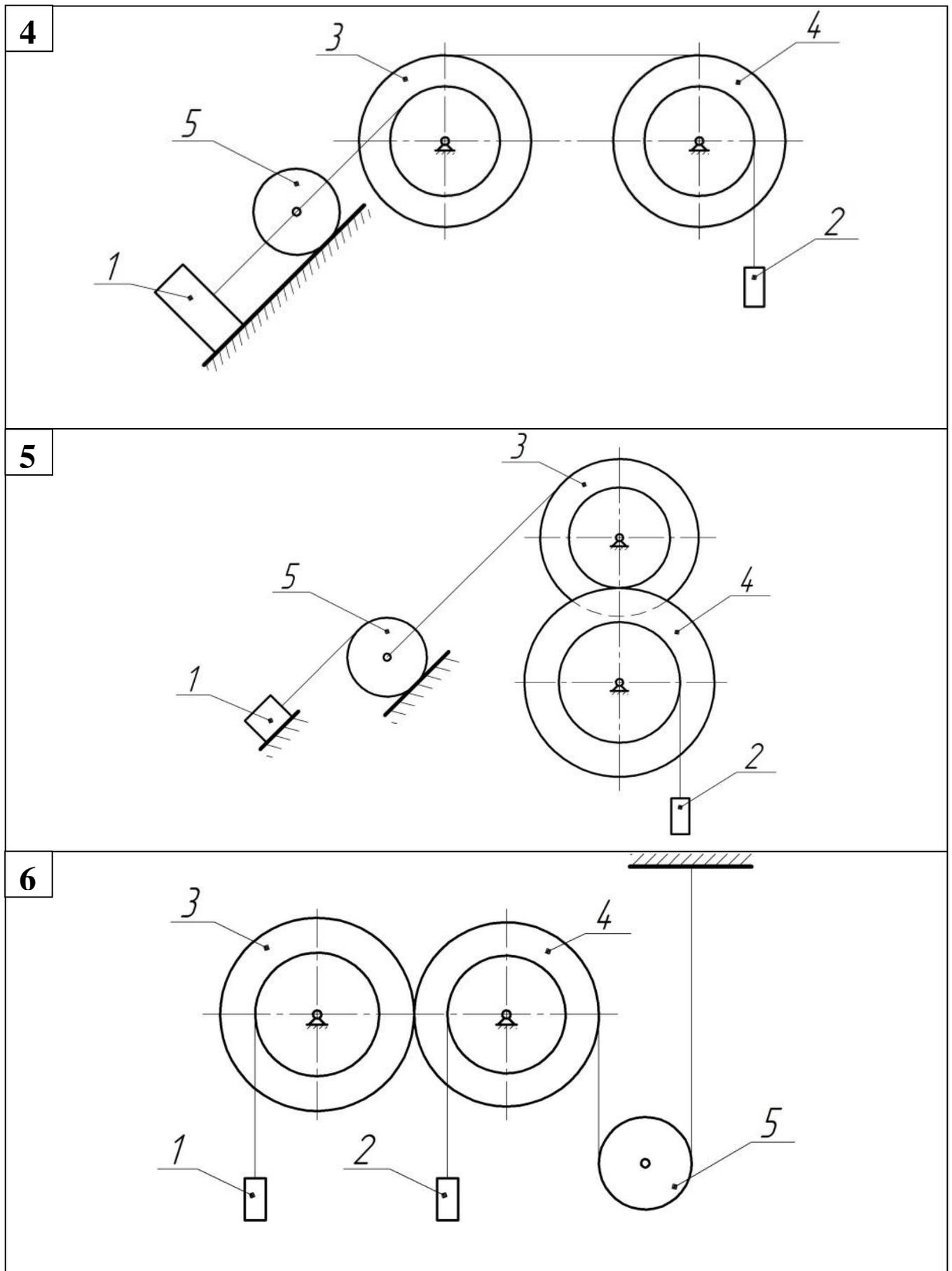


Рисунок 4.5 – Схемы вариантов

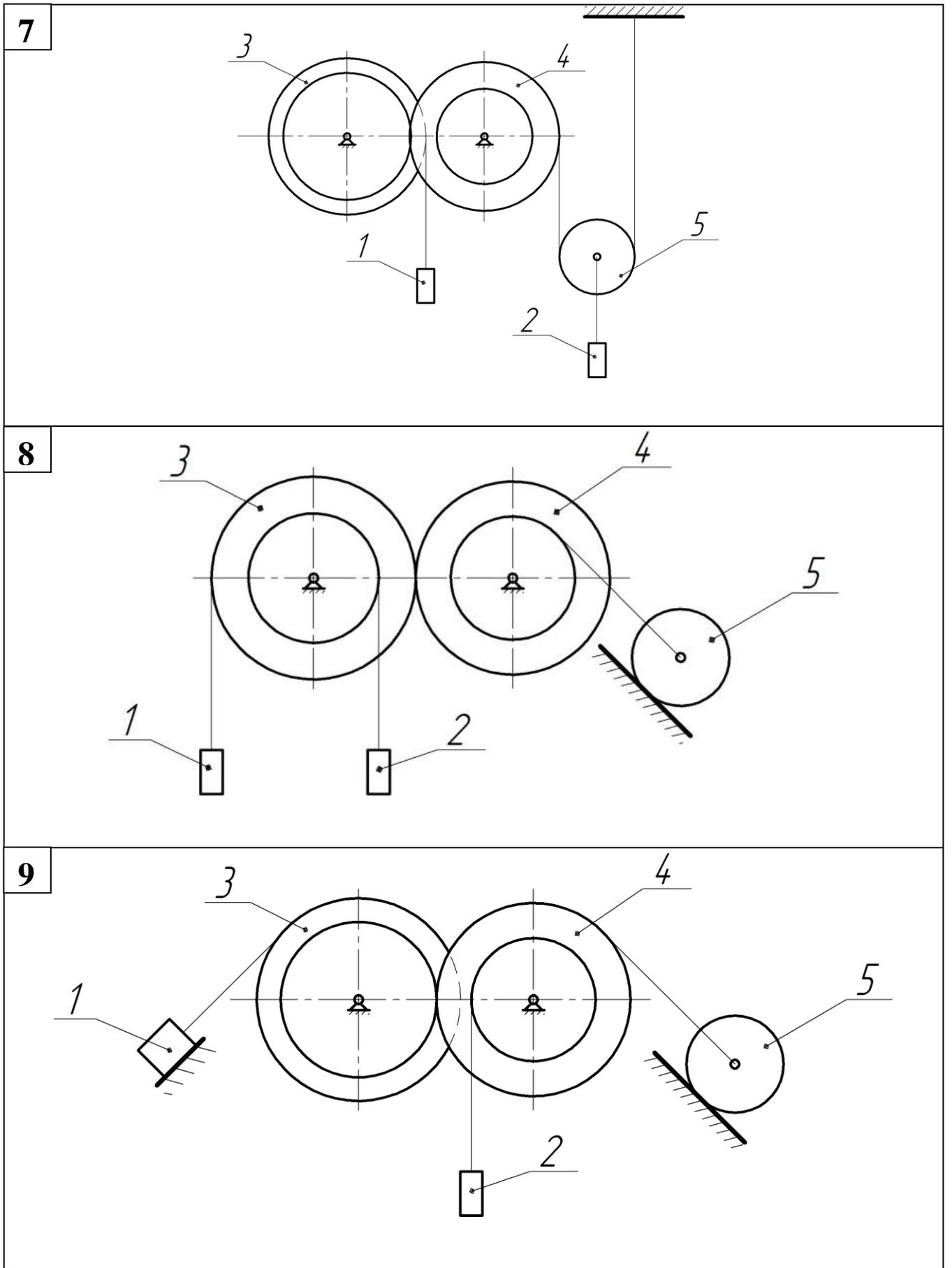


Рисунок 4.6 – Схемы вариантов

### 4.3 Пример выполнения лабораторной работы

Механическая система состоит из двух грузов (1 и 2), двух ступенчатых блоков (3 и 4) и катка 5, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями (рисунок 4.7). Радиусы блоков и катка соответственно равны  $r_3 = 20 \text{ см}$ ,  $r_4 = 25 \text{ см}$ ,  $R_3 = 50 \text{ см}$ ,  $R_4 = 30 \text{ см}$ ,  $R_5 = 40 \text{ см}$ . Груз 1 перемещается вниз по наклонной плоскости в соответствии по закону  $S_1 = 8e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3 \text{ (мм)}$ , приводя механическую систему в движение.

В начальный момент времени система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободу блоков 3, 4 и катка 5 пренебречь. При определении ускорений за полюс катка 5 принять его центр.

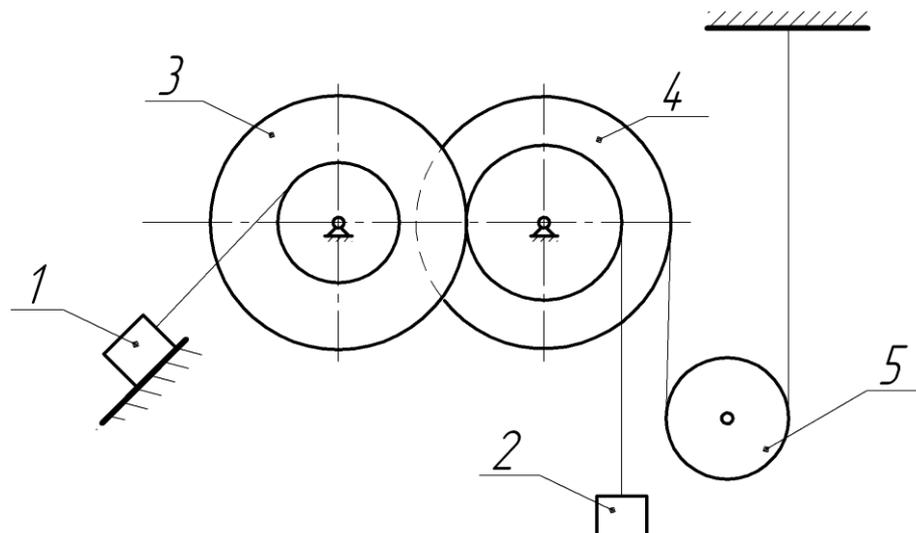


Рисунок 4.7 – Механическая система

1 Определить кинематические характеристики тел системы в момент времени  $t_1 = 5 \text{ с}$ .

2 Построить графики изменения кинематических характеристик тела 5 как функции времени на отрезке от  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 5 \text{ с}$ .

**Дано:**  $r_3 = 20 \text{ см}$ ,  $r_4 = 25 \text{ см}$ ,  $R_3 = 50 \text{ см}$ ,  $R_4 = 30 \text{ см}$ ,  $R_5 = 40 \text{ см}$ ,  
 $S_1 = 8e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3 \text{ (см)}$ ,  $t_1 = 5 \text{ с}$ .

**Найти:**  $v_1, v_2, v_C, a_1, a_2, a_C, \omega_3, \varepsilon_3, \omega_4, \varepsilon_4, \omega_5, \varepsilon_5, v_C(t), a_C(t), \omega_5(t), \varepsilon_5(t)$ .

**Решение:**

1 Определим линейные и угловые скорости тел

$$v_1 = \dot{S}_1 = 8e^{t+3} + 20t^3 - 9t^2,$$

при  $t_1 = 5 \text{ с}$

$$v_1 = 8e^8 + 20 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 = 26122,66 \text{ мм/с} = 26,12 \text{ м/с}.$$

2 Проведем кинематический анализ. Выразим скорости характерных точек и угловые скорости тел системы через скорость тела 1 и покажем их на рисунке 4.8.

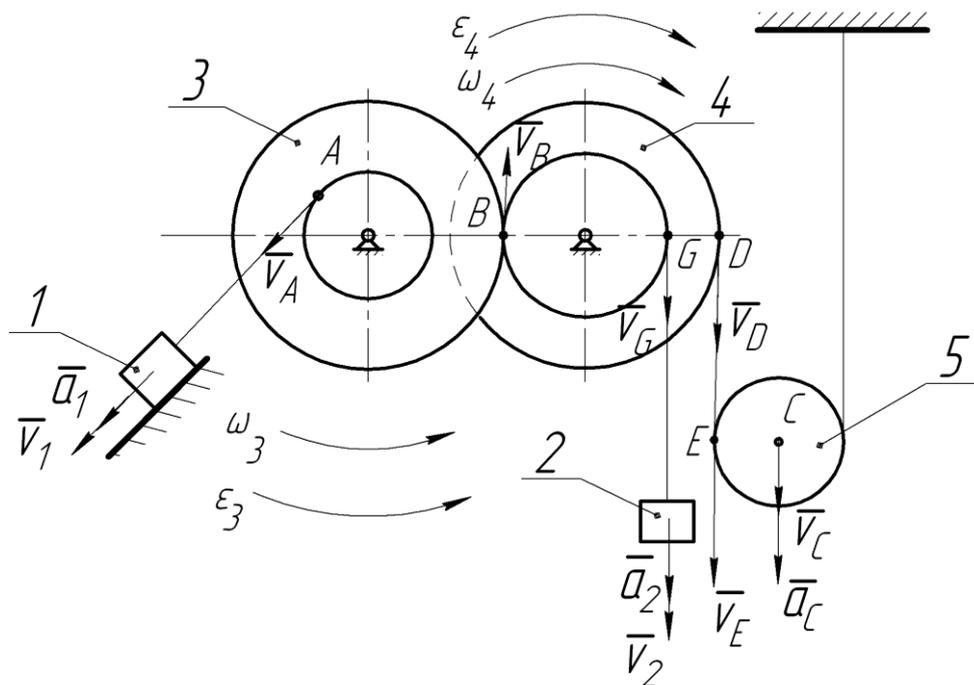


Рисунок 4.8 – Кинематические характеристики

$$v_A = v_1; \quad \omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \frac{v_1}{r_3};$$

$$v_B = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3}; \quad \omega_4 = \frac{v_B}{r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4};$$

$$v_2 = v_G = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot r_4}{r_3 \cdot r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = v_B;$$

$$v_D = \omega_4 \cdot R_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4}; \quad v_E = v_D = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4};$$

$$\omega_5 = \frac{v_E}{2R_5} = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5}; \quad v_C = \omega_5 \cdot R_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4}.$$

Для момента времени  $t_1 = 5$  с :

$$v_1 = 26122,66 \text{ мм/с} = 26,12 \text{ м/с}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3} = \frac{26,12}{0,2} = 130,6 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{26,12 \cdot 0,5}{0,2 \cdot 0,25} = 261,2 \text{ рад/с}; \quad v_2 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{26,12 \cdot 0,5}{0,2} = 65,31 \text{ м/с};$$

$$\omega_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{26,12 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,4} = 98,0 \text{ рад/с};$$

$$v_C = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4} = \frac{26,12 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25} = 39,18 \text{ м/с}.$$

Определим ускорения характерных точек и угловые ускорения тел системы. Для этого вычислим первые производные по времени от соответствующих функций скоростей точек и угловых скоростей тел системы.

$$a_1 = a_1^r = \dot{v}_1 = 8e^{t+3} + 60t^2 - 18t.$$

Для момента времени  $t_1 = 5c$

$$a_1 = 8e^8 + 60 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 = 25257,66 \text{ мм/с} = 25,26 \text{ м/с};$$

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{25,26 \cdot 0,5}{0,2} = 63,14 \text{ м/с}; \quad \varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\dot{v}_1}{r_3} = \frac{a_1}{r_3} = \frac{25,26}{0,2} = 126,3 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{25,26 \cdot 0,5}{0,2 \cdot 0,25} = 252,6 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_5 = \dot{\omega}_5 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{a_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4 \cdot R_5} = \frac{25,26 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,4} = 94,7 \text{ рад/с};$$

$$a_C = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{2r_3 \cdot r_4} = \frac{25,26 \cdot 0,5 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25} = 37,89 \text{ м/с}.$$

3 Построим графики изменения кинематических характеристик тела 5, используя возможности системы Mathcad. Результаты построения приведены на рисунках 4.9 – 4.12.

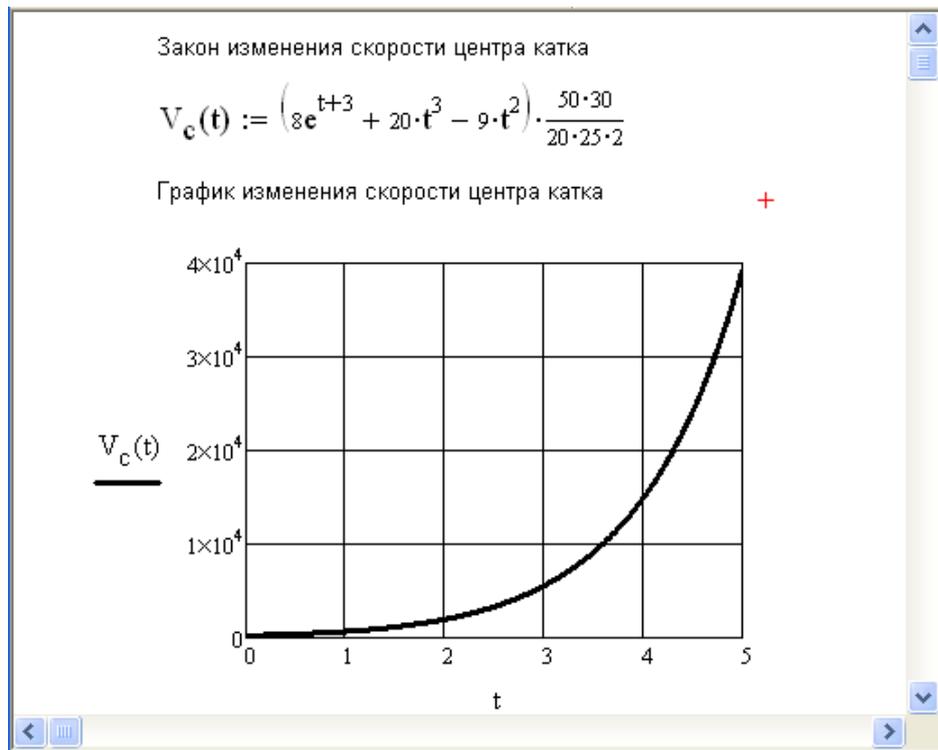


Рисунок 4.9 – График  $v_C(t)$

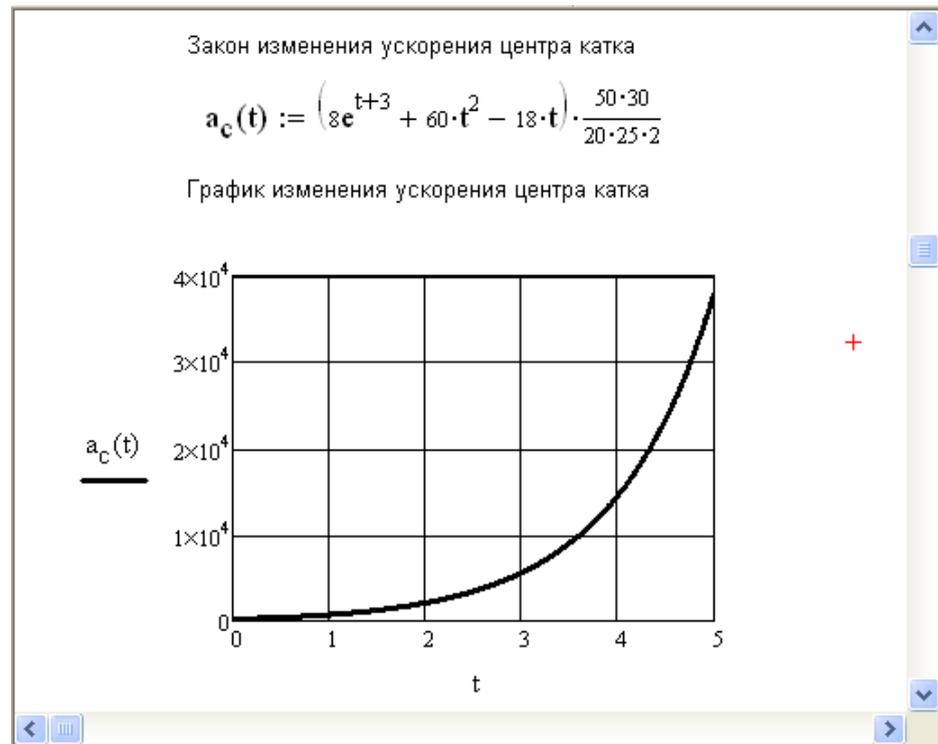


Рисунок 4.10 – График  $a_C(t)$

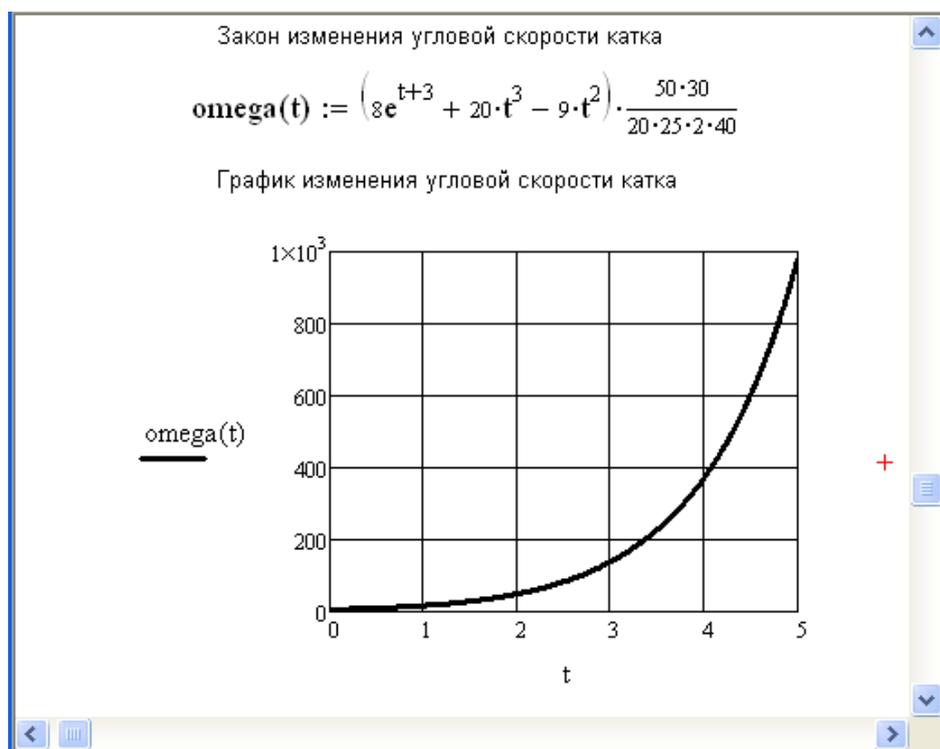


Рисунок 4.11 – График  $\omega_5(t)$

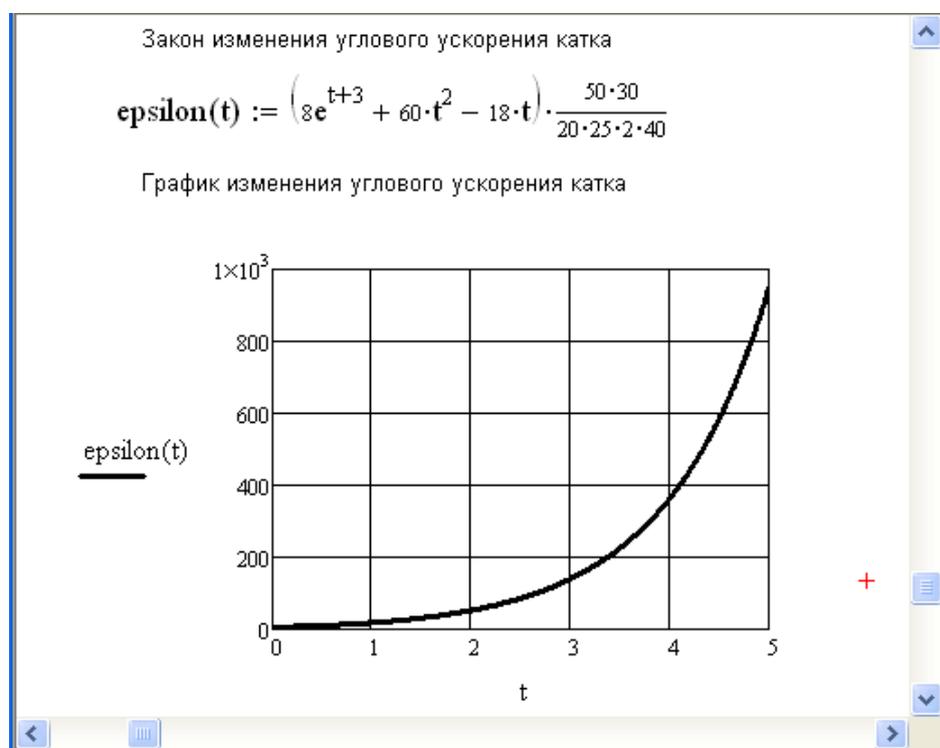


Рисунок 4.12 – График  $\epsilon_5(t)$

## 5 Лабораторная работа № 5. Исследование движения материальной точки

### 5.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим движение материальной точки в плоскости  $xu$  в случае действия постоянных сил.

Основное уравнение динамики материальной точки в данном случае имеет вид:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (5.1)$$

где  $m$  – масса материальной точки,

$\bar{a}$  – ускорение материальной точки,

$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  – главный вектор, действующих на точку сил.

Проецируя уравнение (5.1) на координатные оси  $x$  и  $y$ , получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x$  – проекция вектора ускорения точки на ось  $x$ ,

$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = a_y$  – проекция вектора ускорения точки на ось  $y$ .

Разделив обе части уравнений (5.2) на массу  $m$ , получим:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n F_{kx} = A = const, \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n F_{ky} = B = const, \end{cases} \quad (5.3)$$

т.к. масса точки и действующие на нее силы постоянны.

Запишем выражение (5.3) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = A = const, \\ \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = B = const. \end{cases} \quad (5.4)$$

Умножая обе части выражения (5.4) на  $dt$  и интегрируя дважды по времени  $t$ , получим:

$$\begin{cases} \int d\dot{x} = \int A dt, \\ \int d\dot{y} = \int B dt, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = At + C_1, \\ \dot{y} = Bt + C_2, \end{cases} \quad (5.6)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Запишем систему уравнений (5.6) в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = At + C_1, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Bt + C_2, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \int dx = \int (At + C_1) dt, \\ \int dy = \int (Bt + C_2) dt, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2}t^2 + C_1t + C_3, \\ y = \frac{B}{2}t^2 + C_2t + C_4, \end{cases} \quad (5.9)$$

где  $C_3, C_4$  – постоянная интегрирования.

Для нахождения четырех постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  необходимо записать четыре начальных условия, определяющих значения начальных координат точки  $x_0, y_0$  и проекций вектора начальной скорости точки  $\bar{v}_0$  на оси  $x, y$  ( $v_{0x} = \dot{x}_0, v_{0y} = \dot{y}_0$ ) в момент начала движения точки ( $t_0=0$ ):

$$\text{при } t_0=0 \quad \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0, \\ \dot{y} = \dot{y}_0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Подставляя начальные условия (5.10) в уравнения (5.6) и (5.9), найдем значения всех постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A \cdot 0 + C_1 = C_1, \\ \dot{y}_0 = B \cdot 0 + C_2 = C_2, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_3 = C_3, \\ y_0 = \frac{B}{2} \cdot 0^2 + C_2 \cdot 0 + C_4 = C_4, \end{cases} \quad (5.12)$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования (5.11) и (5.12), а также принятых в выражении (5.3) обозначения для постоянных  $A$  и  $B$  закон изменения проекций скорости точки на оси координат  $x$  и  $y$  (5.6) и закон движения точки (5.9) примут соответственно вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n F_{kx} \right) \cdot t + \dot{x}_0, \\ \dot{y} = \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n F_{ky} \right) \cdot t + \dot{y}_0, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} x = \left( \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^n F_{kx} \right) t^2 + \dot{x}_0 t + x_0, \\ y = \left( \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^n F_{ky} \right) t^2 + \dot{y}_0 t + y_0. \end{cases} \quad (5.14)$$

С учетом выражения (5.13) закон изменения полной скорости точки примет вид:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (5.15)$$

## 5.2 Задание для лабораторной работы

Материальная точка массой  $m$  движется под действием постоянных по модулю и направлению сил  $F_1, F_2, F_3$ . В момент начала движения ( $t_0 = 0$ ) точка находится в начале координат и имеет скорость  $v_0$ .

Найти закон движения точки, закон изменения скорости точки как функцию времени, скорость точки в момент времени  $t_1$ .

Построить в Mathcad траекторию движения точки, график изменения скорости точки на отрезке времени  $[t_0; t_2]$ . Показать на построенной траектории положение точки и вектор ее скорости в момент времени  $t_1$ . Проанализировать полученные результаты.

Исходные данные для выполнения работы выбираются в соответствии с двузначным вариантом. Номер условия в таблице 5.1 соответствует первой цифре варианта, номер схемы на рисунке 5.1 соответствует второй (последней) цифре варианта.

Таблица 5.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	$m, кг$	$v_0, м/с$	$F_1, Н$	$F_2, Н$	$F_3, Н$	$t_1, с$	$t_2, с,$
<b>0</b>	3	7,0	10	65	80	2	5
<b>1</b>	4,5	5,2	20	75	60	2,5	6
<b>2</b>	5	6,3	30	85	40	3	6
<b>3</b>	2	8,4	40	75	20	3,5	7
<b>4</b>	2,5	3,5	50	65	10	4	7
<b>5</b>	1,7	3,4	40	55	20	5,5	9
<b>6</b>	4,5	9,2	30	45	70	4,5	8
<b>7</b>	2,4	2,6	20	35	50	3,5	7
<b>8</b>	3,8	5,5	10	25	30	1	4
<b>9</b>	1,5	4,5	50	15	10	1,5	5

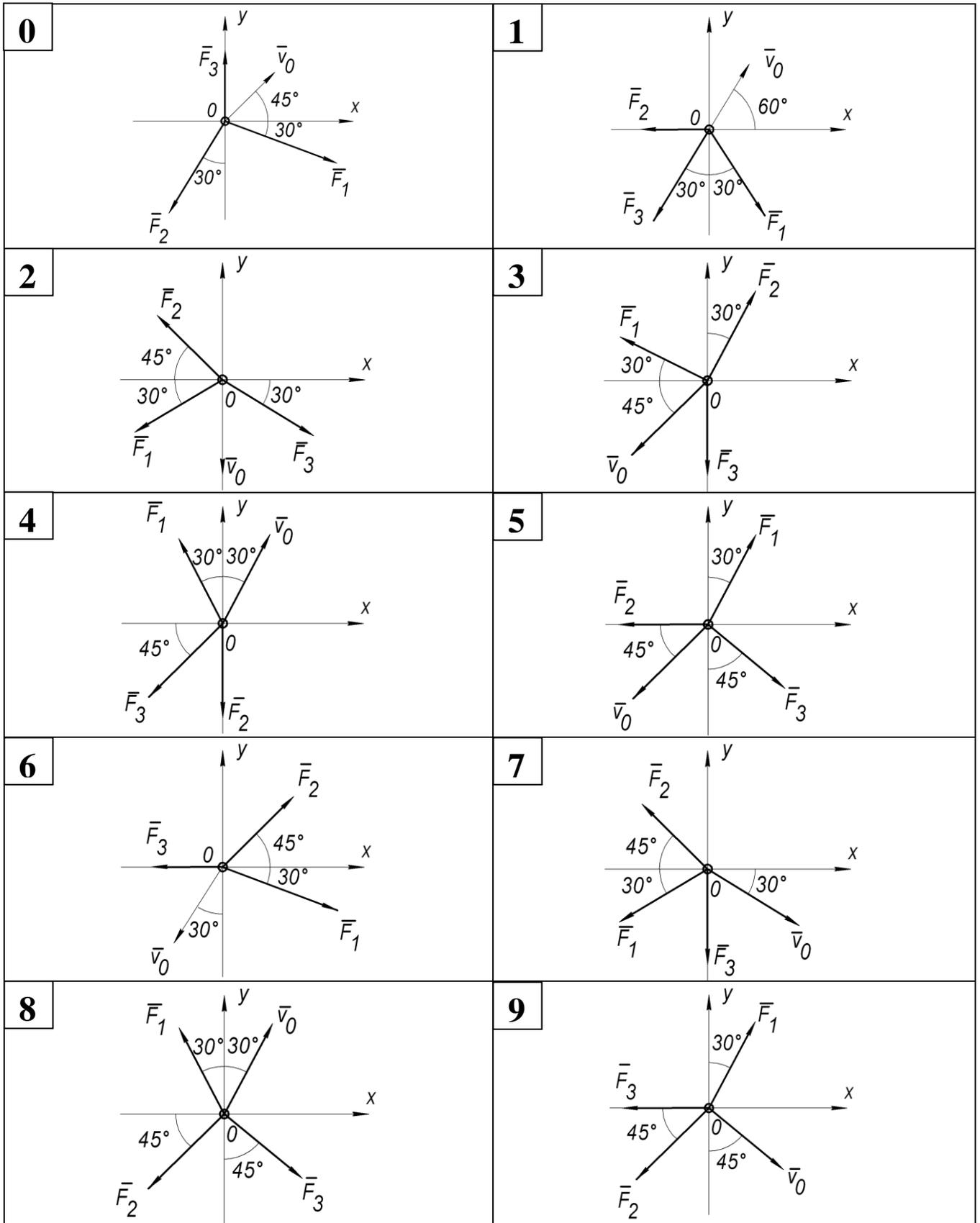


Рисунок 5.1

### 5.3 Пример выполнения лабораторной работы

Материальная точка массой  $m = 3\text{ кг}$  движется под действием постоянных по модулю и направлению сил  $F_1 = 40\text{ Н}$ ,  $F_2 = 5\text{ Н}$  и  $F_3 = 20\text{ Н}$ . В момент начала движения ( $t_0 = 0$ ) точка находится в начале координат и имеет скорость  $v_0 = 2\text{ м/с}$  (рисунок 5.2).

Найти закон движения точки, закон изменения скорости точки как функцию времени, скорость точки в момент времени  $t_1$ .

Построить в Mathcad траекторию движения точки, график изменения скорости точки на отрезке времени от  $t_0 = 0$  до  $t_2 = 2\text{ с}$ . Показать на построенной траектории положение точки и вектор ее скорости в момент времени  $t_1 = 0,5\text{ с}$ . Проанализировать полученные результаты.

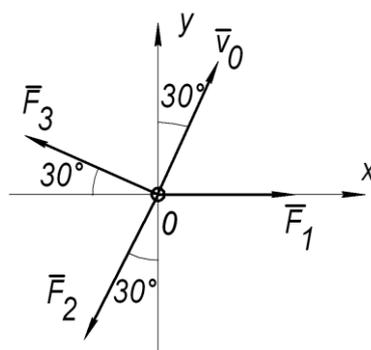


Рисунок 5.2 – Начальное положение точки

**Дано:**  $m = 3\text{ кг}$ ,  $F_1 = 40\text{ Н}$ ,  $F_2 = 5\text{ Н}$ ,  $F_3 = 20\text{ Н}$ ,  $v_0 = 2\text{ м/с}$ .

**Найти:**  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; v(t); v(t_1)$ .

**Решение.**

Изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и покажем действующие на нее силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (рисунок 5.3).

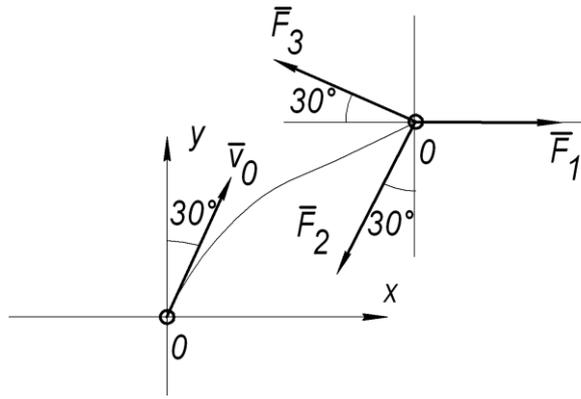


Рисунок 5.3 – Произвольное положение точки

Запишем основное уравнение динамики материальной точки (5.1):

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Проецируя уравнение (5.1) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_1 - F_2 \sin 30^\circ - F_3 \cos 30^\circ; \\ m\ddot{y} = -F_2 \cos 30^\circ + F_3 \sin 30^\circ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_1 - F_2 \sin 30^\circ - F_3 \cos 30^\circ}{m} = \frac{40 - 5 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,866}{3} = 6,73; \\ \ddot{y} = \frac{-F_2 \cos 30^\circ + F_3 \sin 30^\circ}{m} = \frac{-5 \cdot 0,866 + 20 \cdot 0,5}{3} = 1,88. \end{cases} \quad (5.16)$$

Проинтегрируем дважды по времени  $t$  полученную систему уравнений (5.16):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 6,73; \\ \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = 1,88; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d\dot{x} = 6,73dt; \\ d\dot{y} = 1,88dt; \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \int d\dot{x} = \int 6,73dt; \\ \int d\dot{y} = \int 1,88dt; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 6,73t + C_1; \\ \dot{y} = 1,88t + C_2; \end{array} \right. \quad (5.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 6,73t + C_1; \\ \frac{dy}{dt} = 1,88t + C_2; \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \int dx = \int (6,73t + C_1)dt; \\ \int dy = \int (1,88t + C_2)dt; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3,37t^2 + C_1t + C_3; \\ y = 0,94t^2 + C_2t + C_4. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  запишем начальные условия задачи:

$$\text{при } t_0=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \\ \dot{x}_0 = v_0 \sin 30^\circ = 1 \text{ м/с}, \\ \dot{y}_0 = v_0 \cos 30^\circ = 1,73 \text{ м/с}. \end{array} \right.$$

Подставляя начальные условия в выражения (5.17) и (5.18), найдем значения постоянных интегрирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \sin 30^\circ = 0 + C_1; \\ v_0 \cos 30^\circ = 0 + C_2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = v_0 \sin 30^\circ = 1 \text{ м/с}; \\ C_2 = v_0 \cos 30^\circ = 1,73 \text{ м/с}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 + C_3; \\ 0 = 0 + 0 + C_4; \end{cases} \quad \begin{cases} C_3 = 0; \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования закон изменения проекций скорости точки (5.16) и закон движения точки (5.18) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 6,73t + 1; \\ \dot{y} = 1,88t + 1,73; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3,37t^2 + t; \\ y = 0,94t^2 + 1,73t. \end{cases}$$

Закон изменения скорости точки:

$$v(t) = \sqrt{(6,73t + 1)^2 + (1,88t + 1,73)^2} = \sqrt{48,83t^2 + 19,96t + 3,99} \text{ (м/с)}.$$

В момент времени  $t_1 = 0,5 \text{ с}$  скорость точки равна:

$$v(t) = \sqrt{48,83 \cdot (0,5)^2 + 19,96 \cdot 0,5 + 3,99} = 5,12 \text{ м/с}.$$

Проверим полученные результаты вычислений с помощью Mathcad.

На рисунке 5.4 представлены результаты вычисления скорости точки в момент времени  $t_1 = 0,5 \text{ с}$ .

График изменения скорости точки на отрезке времени от  $t_0 = 0$  до  $t_2 = 2 \text{ с}$  показан на рисунке 5.5.

Построение траектории движения точки и вектора ее скорости точки в момент времени  $t_1 = 0,5 \text{ с}$  показаны на рисунках 5.6 и 5.7.

**Дано:**

$$x(t) := 3.37 \cdot t^2 + t \text{ м}$$

$$y(t) := 0.94 \cdot t^2 + 1.73 \cdot t \text{ м}$$

$$t_0 := 0 \text{ с}; \quad t_1 := 0.5 \text{ с}; \quad t_2 := 2 \text{ с}$$

**Решение:**

1) Определим скорость точки

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t)$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

Значение скорости в момент времени  $t_1$

$$v(t_1) = 5.121 \text{ м/с}$$

Рисунок 5.4 – Определение скорости точки

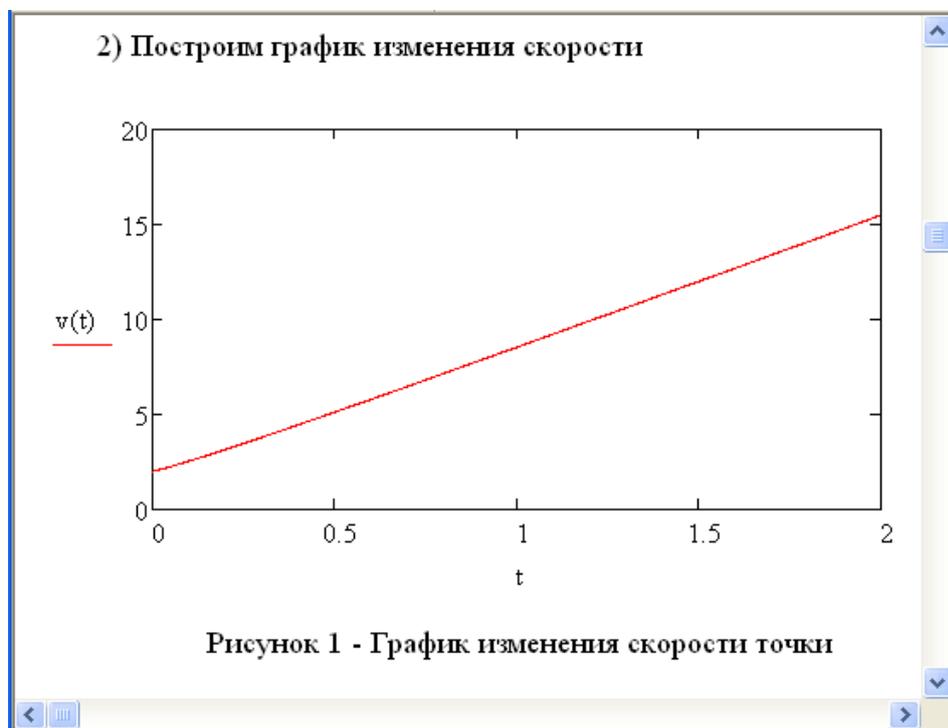


Рисунок 5.5– График изменения скорости точки

```

3) Построим траекторию движения точки
M(t) :=  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$    tgrid := 90
C := CreateSpace(M, t0, t2, tgrid)

4) Построим вектор скорости точки в момент времени t1
n := 0, 0.01 .. 1
R_x(n) :=  $\begin{pmatrix} x(t_1) + n \cdot v_x(t_1) \\ y(t_1) \\ 0 \end{pmatrix}$    R_y(n) :=  $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) + n \cdot v_y(t_1) \\ 0 \end{pmatrix}$ 
R(n) :=  $\begin{pmatrix} x(t_1) + n \cdot v_x(t_1) \\ y(t_1) + n \cdot v_y(t_1) \\ 0 \end{pmatrix}$    V := CreateSpace(R, 0, 1, tgrid)

```

Рисунок 5.6 – Задание траектории и вектора скорости точки

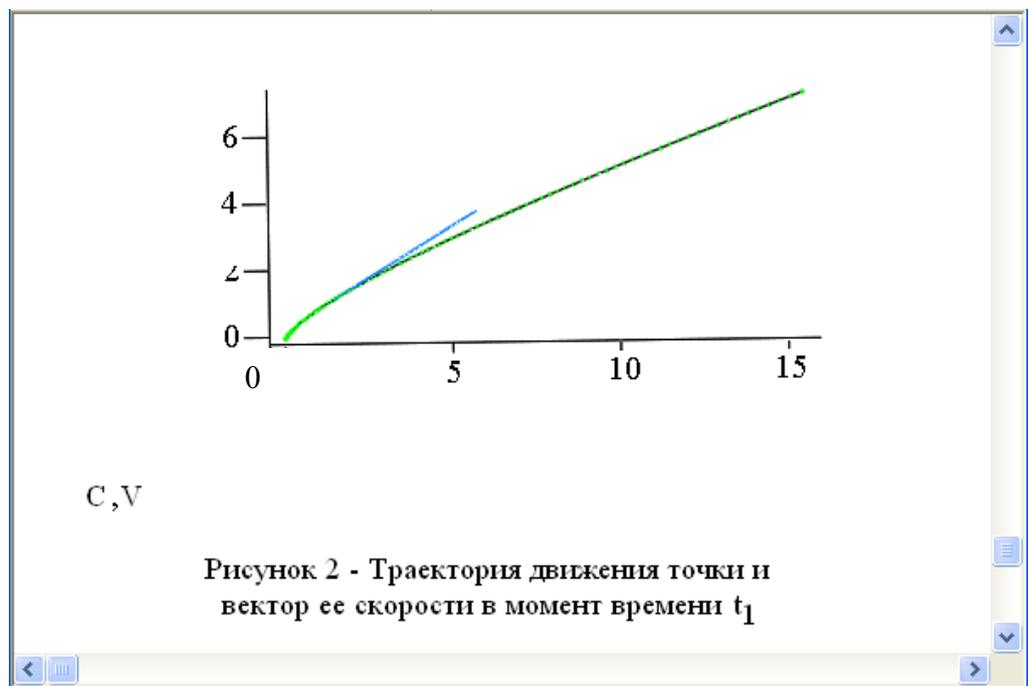


Рисунок 5.7 – Траектория и вектор скорости точки

## 6 Лабораторная работа № 6. Исследование движения механической системы с помощью общих теорем динамики

### 6.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим общие теоремы динамики механической системы.

*Теорема о движении центра масс механической системы:* центр масс механической системы движется так же как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и к которой приложены все внешние силы системы:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e, \quad (6.1)$$

где  $M$  – масса системы,

$\bar{a}_C$  – ускорение центра масс,

$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e$  – главный вектор внешних сил системы.

Аналитическая запись теоремы (6.1) аналогична записи второго закона Ньютона, или основного уравнения динамики точки. Спроецировав выражение (6.1) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Перейдем к *теореме об изменении количества движения*.

Количеством движения точки массы  $m$  движущейся со скоростью  $\bar{v}$  называется вектор

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (6.3)$$

Количеством движения механической системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы:

$$\bar{Q} = \sum \bar{q}_k. \quad (6.4)$$

Можно доказать, что количество движения механической системы равно произведению массы системы  $M$  на скорость ее центра масс  $\bar{v}_C$ :

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C. \quad (6.5)$$

Пусть к движущейся материальной точке приложена сила  $\bar{F}$ . Элементарным импульсом силы  $\bar{F}$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  называется вектор

$$d\bar{S} = \bar{F}dt. \quad (6.6)$$

Импульсом силы  $\bar{F}$  за конечный промежуток времени  $\Delta t = (t_2 - t_1)$  называется вектор:

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} d\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt. \quad (6.7)$$

Существует три формулировки теоремы об изменении количества движения.

Теорема об изменении количества движения *в дифференциальной форме*: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил системы:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e. \quad (6.8)$$

*Вторая дифференциальная формулировка* теоремы об изменении количества движения: дифференциал количества движения системы равен геометрической сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$d\bar{Q} = \sum d\bar{S}_k^e. \quad (6.9)$$

Теорема об изменении количества движения *в интегральной форме* (теорема импульсов): изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum \bar{S}_k^e, \quad (6.10)$$

где векторы  $\bar{Q}_2$  и  $\bar{Q}_1$  соответствуют моментам времени  $t_2$  и  $t_1$ .

Рассмотрим *теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра*.

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра  $O$  называется вектор  $\bar{m}_O(m\bar{v})$ , равный векторному произведению радиус-вектора, соединяющего центр  $O$  с этой точкой, на вектор количества движения точки  $m\bar{v}$ :

$$\bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (6.11)$$

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения) механической системы относительно некоторого центра  $O$  называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно данного центра:

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O (m_k \bar{v}_k). \quad (6.12)$$

Моментом количества движения точки относительно оси  $z$  называется скалярная величина  $m_z(m\bar{v})$ , равная проекции вектора момента количества движения точки относительно произвольного центра  $O$ , лежащего на этой оси, на саму эту ось. Вычисляется моментом количества движения точки относительно оси по тем же правилам, что и момент силы относительно оси.

Кинетическим моментом механической системы относительно оси  $z$  называется скалярная величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно данной оси:

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_z (m_k \bar{v}_k). \quad (6.13)$$

Кинетический момент твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$  вычисляется по формуле:

$$K_z = J_z \omega, \quad (6.14)$$

где  $J_z$  – момент инерции твердого тела относительно оси  $z$ .

*Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра:* производная по времени от кинетического

момента относительно любого неподвижного центра  $O$  равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{m}_O (\bar{F}_k^e). \quad (6.15)$$

Проецируя (6.15) на какую-либо неподвижную ось  $z$ , получим *теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e). \quad (6.16)$$

Если в формулу (6.16) подставить выражение для кинетического момента твердого тела (6.14), получим *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{F}_k^e), \quad (6.17)$$

где  $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение вращающегося твердого тела.

Перейдем к *теореме об изменении кинетической энергии*.

Введем понятие работы силы  $\bar{F}$  на бесконечно малом перемещении точки ее приложения  $d\bar{r}$  (рисунок 6.1). Элементарной работой силы  $\bar{F}$  на перемещении  $d\bar{r}$  называется скалярная величина

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F dr \cdot \cos \alpha. \quad (6.18)$$

Выражение (6.20) можно представить в виде:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (6.19)$$

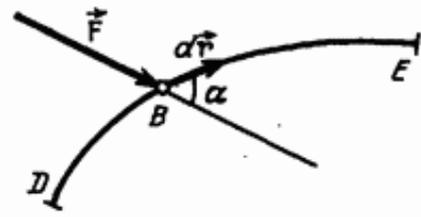


Рисунок 6.1

Элементарная работы силы положительна при  $(-\pi/2) < \alpha < (\pi/2)$ , отрицательна при  $(\pi/2) < \alpha < (3\pi/2)$  и равна нулю при  $\alpha = (\pm\pi/2)$ .

Примеры вычисления элементарной работы в частных случаях.

Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси  $z$ , находится по формуле

$$dA = \pm m_z(\bar{F}) d\varphi. \quad (6.20)$$

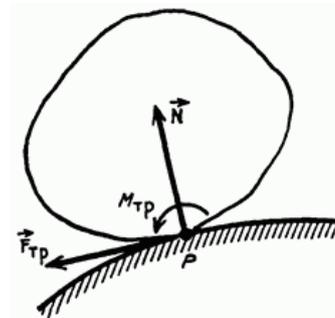


Рисунок 6.2

При качении твердого тела без проскальзывания на него действуют (рисунок 6.2) сила нормального давления и сила трения скольжения, приложенные в точке касания  $P$ , а также пара сил трения качения с моментом  $M_{тр}$ . В силу отсутствия проскальзывания точка касания  $P$  является мгновенным центром скоростей и ее скорость равна нулю, откуда:

$$dA_N = dA_{mp} = 0; \quad dA_M = -M_{mp} d\varphi.$$

Работа силы  $\bar{F}$  на конечном перемещении  $S$  равна криволинейному интегралу:

$$A = \int_s dA = \int_s \bar{F} d\bar{r} = \int_s (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (6.21)$$

Кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки  $m$  на квадрат ее скорости  $v$ :

$$\frac{mv^2}{2}. \quad (6.22)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (6.23)$$

Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела:

а) при поступательном движении тела массой  $M$  со скоростью  $v$ :

$$T = \frac{Mv^2}{2}. \quad (6.24)$$

б) при вращении вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$  твердого тела с моментом инерции относительно оси вращения  $J_z$ :

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (6.25)$$

в) при плоскопараллельном движении:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi}\omega^2}{2}, \quad (6.26)$$

где  $J_{C\xi}$  – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс  $C$ ;

$v_C$  – скорость центра масс.

*Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:* дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ всех сил, приложенных к точкам системы:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k. \quad (6.27)$$

*Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме:* изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на систему сил на соответствующих перемещениях точек их приложения:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (6.28)$$

## 6.2 Задание для лабораторной работы

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, движется под действием сил тяжести. Коэффициент трения

скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения качения равен  $\delta$ .

Пользуясь общими теоремами динамики, определить ускорение и скорость тела  $I$ , натяжения нитей между телами и реакции опор в момент времени  $t_1$ .

При расчетах принять  $m=2$  кг,  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>. Если радиус инерции  $i_{3\xi}$  для катка не задан, то считать его однородным круглым цилиндром.

Исходные данные для выполнения работы выбираются в соответствии с двузначным вариантом. Номер условия в таблице 6.1 соответствует первой цифре варианта, номер схемы на рисунке 6.3 соответствует второй (последней) цифре варианта.

Таблица 6.1 – Исходные данные

Первая цифра варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2z}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3$ , см	$f$	$\alpha$ , град	$t_1$ , с
0	$3m$	$m$	$m$	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30	1,2
1	$4m$	$2m$	$m$	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60	0,5
2	$5m$	$3m$	$3m$	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30	1,0
3	$2m$	$m$	$m/2$	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30	1,5
4	$m$	$2m$	$m/5$	0,4	0,7	0,01	28	0	60	1,0
5	$4m$	$3m$	$2m$	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30	0,5
6	$2m$	$m$	$m$	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45	1,5
7	$3m$	$2m$	$1,5m$	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60	2,0
8	$m$	$m$	$m$	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45	1,0
9	$5m$	$2m$	$4m$	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30	0,5

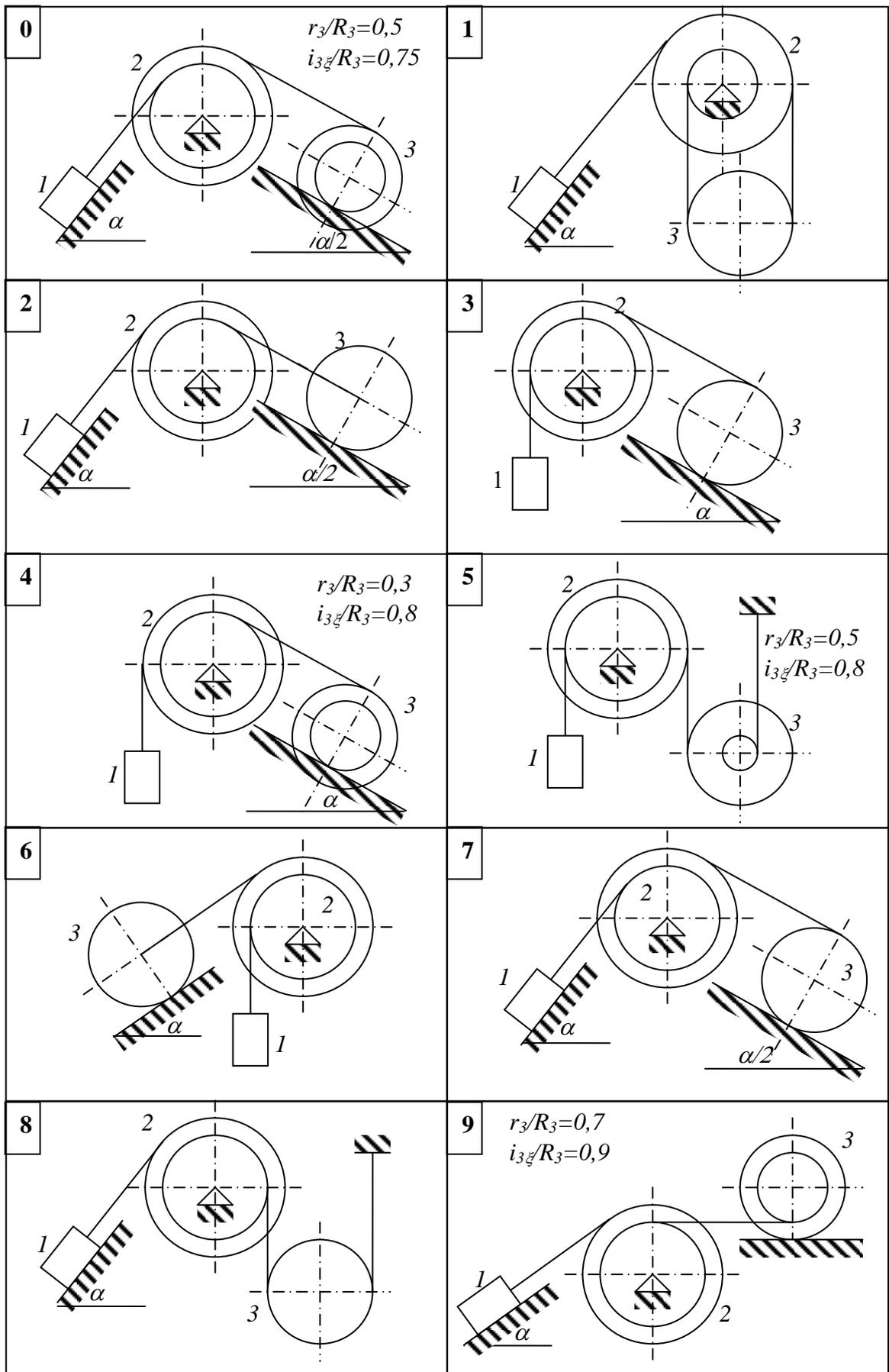


Рисунок 6.3

### 6.3 Пример выполнения лабораторной работы

Система из трех абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, движется под действием сил тяжести (рисунок 6.4). Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения качения равен  $\delta$ .

Пользуясь общими теоремами динамики, определить ускорение и скорость тела  $1$ , натяжения нитей между телами и реакции опор в момент времени  $t_1$ .

Исходные данные для выполнения работы приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m, кг$	$r_2/R_2$	$i_{2z}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3, см$	$f$	$t_1, с$
$5m$	$m$	$2m$	$1,02$	$2/3$	$4/5$	$1/20$	$20$	$0,1$	$1$

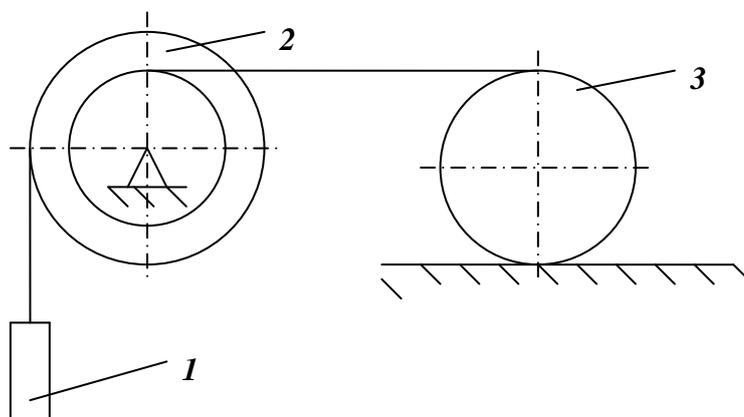


Рисунок 6.4

**Решение.**

Установим зависимости между кинематическими характеристиками тел системы и выразим все характеристики через характеристики движения тела  $1$  (рисунок 6.5а).

Найдем угловую скорость  $\omega_2$  блока 2:

$$v_A = \omega_2 R_2 = v_1; \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (6.29)$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) катка 3 находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности:

$$v_B = v_D;$$

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3;$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}. \quad (6.30)$$

Скорость центра масс катка 3:

$$v_{C_3} = \omega_3 R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \quad (6.31)$$

Связь между ускорениями аналогична полученным зависимостям (6.29) – (6.31):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}; \quad (6.32)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}; \quad (6.33)$$

$$a_{C_3} = \frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1 r_2}{2R_2} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \quad (6.34)$$

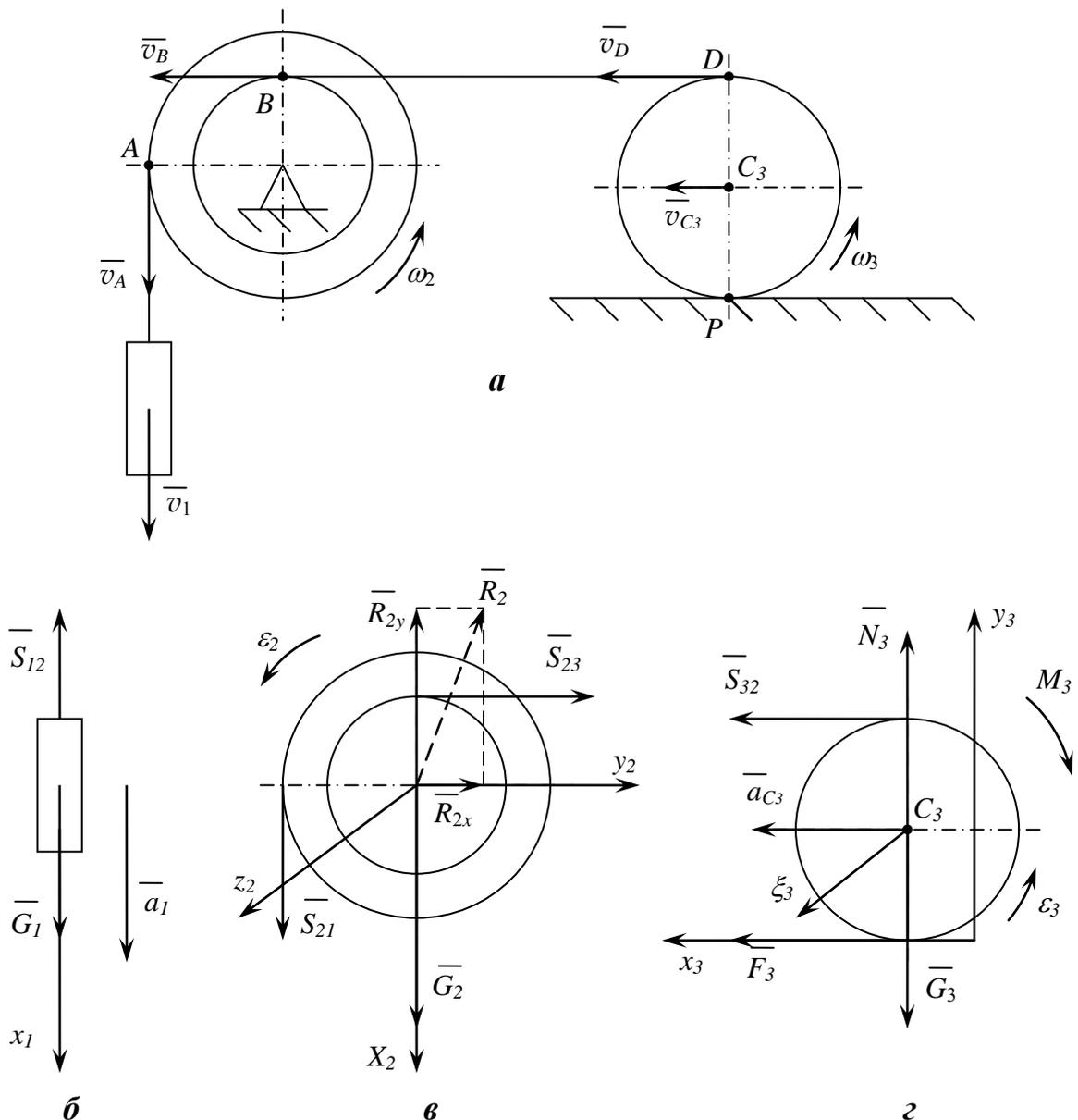


Рисунок 6.5

Составим дифференциальные уравнения движения системы, пользуясь теоремой о движении центра масс (6.1) и теоремой об изменении кинетического момента относительно оси (6.16).

Рассмотрим поступательное движение груза  $1$ . При движении на тело действуют сила тяжести  $\bar{G}_1 = m_1 \bar{g}$  и натяжение нити между телами  $1$  и  $2$   $\bar{S}_{12}$  (рисунок 6.5б). Воспользуемся теоремой о движении центра масс в виде (6.1):

$$m_1 \bar{a}_1 = \bar{G}_1 + \bar{S}_{12}.$$

Проецируя записанное выражение на ось  $x_1$ , получим дифференциальное уравнение движения груза 1:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_{12}. \quad (6.35)$$

Заметим, что уравнение (6.35) содержит два неизвестных – ускорение груза  $\ddot{x}_1 = a_1$  и натяжение нити  $S_{12}$ .

Рассмотрим движение блока 2 (рисунок 6.5в). Блок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси  $z_2$ , перпендикулярной плоскости чертежа.

Блок находится под действием силы тяжести  $\bar{G}_2 = m_2 \bar{g}$ , натяжения нитей между телами 2 и 1  $\bar{S}_{21}$  и телами 2 и 3  $\bar{S}_{23}$ , а также реакций неподвижного шарнира  $\bar{R}_2$ , которую изобразим двумя составляющими по осям координат  $\bar{R}_{2x_1}$  и  $\bar{R}_{2y_1}$ .

Полная реакция неподвижного шарнира  $\bar{R}_2$ :

$$R_2 = \sqrt{R_{2x_1}^2 + R_{2y_1}^2}.$$

Запишем для блока 2 дифференциальное уравнение вращательного движения относительно неподвижной оси (6.17):

$$J_{z_2} \frac{d\omega_2}{dt} = S_{21} R_2 - S_{23} r_2,$$

где  $J_{z_2} = m_2 i_{2z}^2$  – момент инерции блока 2 относительно оси вращения.

Дифференциальное уравнение вращения блока 2 примет вид:

$$m_2 i_{2z}^2 \ddot{\varphi}_2 = S_{21} R_2 - S_{23} r_2. \quad (6.36)$$

В уравнении (6.36) три неизвестных – угловое ускорение блока  $\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$  и натяжения нитей  $S_{21}, S_{23}$ .

Рассмотрим движение катка 3 (рисунок 6.5z). Каток катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, совершая плоскопараллельное движение. Разложим плоскопараллельное движение на два простейших: поступательное движение катка вместе с центром масс, которое определяется координатами центра масс  $x_C$  и  $y_C$ , и вращательное движение вокруг подвижной оси  $z_3$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения катка.

На каток действуют сила тяжести  $\bar{G}_3 = m_3 \bar{g}$ , натяжение нити между телами 3 и 2  $\bar{S}_{32}$ , нормальная реакция  $\bar{N}_3$ , сила трения скольжения  $\bar{F}_3$  и момент сопротивления качению  $\bar{M}_3$ . Теорема о движении центра масс (6.1) в применении к катку 3 примет вид:

$$m_3 \bar{a}_{C_3} = \bar{G}_3 + \bar{S}_{32} + \bar{N}_3 + \bar{F}_3.$$

Спроецируем на оси  $x_3 y_3$ :

$$\begin{cases} m_3 \ddot{x}_{C_3} = S_{32} + F_3, \\ m_3 \ddot{y}_{C_3} = N_3 - G_3. \end{cases} \quad (6.37)$$

Так как при движении катка  $y_{C_3} = const$ , то  $\ddot{y}_{C_3} = 0$ , то из второго уравнения в системе (6.37) получим нормальную реакцию  $N_3$ , через которую можно определить силу трения скольжения  $F_3$  и момент сопротивления качению  $M_3$ :

$$N_3 = G_3 = m_3 g,$$

$$0 \leq F_3 < f N_3 = f m_3 g, \quad (6.38)$$

$$M_3 = \delta N_3 = \delta m_3 g. \quad (6.39)$$

Заметим, что условие (6.38) является условием отсутствия проскальзывания.

По теореме об изменении кинетического момента (6.16) для катка 3 имеем:

$$J_{C_3} \ddot{\varphi}_3 = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - M_3, \quad (6.40)$$

где  $J_{C_3} = (m_3 R_3^2 / 2)$  – момент инерции катка относительно оси центральной оси  $\xi_3$ .

С учетом выражений (6.37) – (6.39) дифференциальные уравнения движения катка 3 примут вид:

$$\begin{cases} m_3 \ddot{x}_{C_3} = S_{32} + F_3, \\ \frac{m_3 R_3^2 \ddot{\varphi}_3}{2} = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - \delta m_3 g. \end{cases} \quad (6.41)$$

Уравнения (6.41) содержат четыре неизвестные величины – ускорение центра масс  $\ddot{x}_{C_3} = a_{C_3}$ , угловое ускорение катка  $\ddot{\varphi}_3 = \varepsilon_3$ , натяжение нити  $S_{32}$  и силу трения  $F_3$ .

Обозначим

$$S_{12} = S_{21} = S_1, \quad S_{23} = S_{32} = S_2.$$

С учетом введенных обозначений и кинематических соотношений (6.32) – (6.34) уравнения движения (6.35) - (6.37) и (6.41) примут вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_1; \\ m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2} \ddot{x}_1 = S_2 R_2 - S_2 r_2; \\ m_3 \frac{r_2}{2R_2} \ddot{x}_1 = S_2 + F_3; \\ m_3 \frac{r_2 R_3}{4R_2} \ddot{x}_1 = S_2 R_3 - F_3 R_3 - \delta m_3 g. \end{cases} \quad (6.42)$$

Полученная система четырех уравнений содержит четыре неизвестные величины  $\ddot{x}_1, S_1, S_2, F_3$ . После подстановки исходных данных система (6.42) примет вид:

$$\begin{cases} 5m\ddot{x}_1 = 5mg - S_1; \\ \frac{16m}{25} \ddot{x}_1 = S_1 - \frac{2}{3} S_2; \\ \frac{2m}{3} \ddot{x}_1 = S_2 + F_3; \\ \frac{m}{3} \ddot{x}_1 = S_2 - F_3 - \frac{mg}{10}. \end{cases} \quad (6.43)$$

Из трех первых уравнений системы (6.43) найдем:

$$S_1 = 5m(g - \ddot{x}_1), \quad (6.44)$$

$$S_2 = \frac{m}{50}(375g - 423\ddot{x}_1) \quad (6.45)$$

$$F_3 = \frac{m}{150}(1369\ddot{x}_1 - 1125g). \quad (6.46)$$

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение системы (6.43), после преобразований получим:

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{2235}{2688} g = 0,831g = 8,16 \text{ м/с}^2. \quad (6.47)$$

Подставляя полученное значение (6.47) в выражения (6.44) - (6.46), найдем величину натяжения нитей  $S_1 = 0,845mg = 8,45H$ ,  $S_2 = 0,47mg = 4,7H$  и силы трения  $F_3 = 0,084mg = 0,84H$ .

Определим остальные реакции. Ранее получено, что нормальная реакция поверхности  $N_3 = 2mg = 20H$  и момент пары сил трения качения  $M_3 = 2\delta mg = 0,2H\text{м}$ .

Проверим условие отсутствия проскальзывания (6.38):  $F_3 = 0,2H < fm_3g = 2H$ . Условие выполняется, следовательно, проскальзывание отсутствует.

Реакции опоры блока вычислим, используя теорему о движении центра масс блока в виде (6.1), Так как центр масс лежит на оси вращения, то будем иметь:

$$\bar{G}_2 + \bar{R}_2 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0. \quad (6.48)$$

Спроецируем выражение (6.47) на оси  $x_1$  и  $y_1$ :

$$\begin{cases} R_{2x_1} + S_2 = 0; \\ G_2 - R_{2y_1} + S_1 = 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Откуда  $R_{2x_1} = -S_2 = -4,7H$ ,  $R_{2y_1} = G_2 + S_1 = 18,45H$ .

Отрицательный знак  $R_{2x_1}$  говорит о том, что истинное направление этой реакции противоположно показанному на рисунке 6.5в. Полное значение реакции шарнира  $R_2 = \sqrt{R_{2x_1}^2 + R_{2y_1}^2} = 19,04H$ .

Получим уравнение движения груза  $I$ , проинтегрировав его дифференциальное уравнение движения (6.47).

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = 8,16; \quad d\dot{x}_1 = 8,16dt; \quad \int d\dot{x}_1 = \int 8,16dt;$$

$$\dot{x}_1 = 8,16t + C_1; \tag{6.50}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 8,16t + C_1; \quad dx_1 = (8,16t + C_1)dt; \quad \int dx_1 = \int 8,16tdt + \int C_1dt;$$

$$x_1 = 4,08t^2 + C_1t + C_2. \tag{6.51}$$

Определим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из нулевых начальных условия движения тела  $I$ : при  $t_0 = 0$   $x_1 = x_{10} = 0$ ,  $\dot{x}_1 = v_{10} = 0$ . Подставив начальные условия в выражения (6.50) и (6.51), получим  $C_1 = v_{10} = 0$ ,  $C_2 = x_{10} = 0$ .

С учетом найденных значений постоянных интегрирования закон изменения скорости груза  $I$  (6.50) и закон его движения (6.51) будут иметь вид:

$$v_1 = \dot{x}_1 = 8,16t, \quad x_1 = 4,08t^2. \tag{6.52}$$

В заданный момент времени  $t_1 = 1c$   $v_1 = 8,16 \text{ м/с}$ ,  $x_1 = 4,08 \text{ м}$ .

Проверим полученные результаты с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (6.28).

Рассмотрим перемещение системы из начального ( $t_0 = 0$ ) в конечное ( $t_1 = 1c$ ) положение. Запишем теорему (6.28) в виде:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \tag{6.53}$$

где  $T_0$  и  $T$  – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно;

$\sum_{k=1}^n A_k^e$  и  $\sum_{k=1}^n A_k^i$  – сумма работ внешних и внутренних сил системы на

соответствующих перемещениях точек их приложения.

Так как по условию задачи в начальный момент система находилась в покое, то  $T_0 = 0$ . С другой стороны,  $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$ , так как все тела системы абсолютно твердые, а нити нерастяжимые.

Тогда теорема (6.53) примет вид:

$$T = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (6.54)$$

Кинетическая энергия всей системы равна сумме кинетических энергий отдельных тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Для тела 1, движущегося поступательно, по формуле (6.24):

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Для вращающегося блока 2 по формуле (6.25):

$$T_2 = \frac{J_{z_2} \omega_2^2}{2}.$$

Для катка 3, совершающего плоскопараллельное движение, по формуле (6.26):

$$T_3 = \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} + \frac{J_{C_3} \omega_3^2}{2}.$$

Учитывая значения осевых моментов инерции тел и кинематические соотношения (6.29) - (6.31), после преобразований получим:

$$T = \left( m_1 + m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + m_3 \frac{3r_2^2}{8R_2^2} \right) \frac{v_1^2}{2}. \quad (6.55)$$

После подстановки исходных данных и найденного значения скорости груза  $v_1 = 8,16 \text{ м/с}$  получим:

$$T = \frac{448 m v_1^2}{150} = 202,64 \text{ Дж}. \quad (6.56)$$

Найдем работу внешних сил системы: сил тяжести тел  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ , реакции опоры блока  $\bar{R}_2$ , нормальной реакции  $\bar{N}_3$ , силы трения скольжения  $\bar{F}_3$  и момента сопротивления качению  $M_3$  (рисунок 6.6). Определим работу каждой силы, учитывая, что при исследуемом перемещении системы груз опустился на расстояние  $x_1 = 4,08 \text{ м}$ .

Работа силы тяжести груза 1:

$$A_{G_1} = m_1 g x_1.$$

Сила тяжести блока 2 и реакция опоры приложены в неподвижной точке, поэтому:

$$A_{G_2} = A_{R_2} = 0.$$

Силы  $\bar{N}_3$  и  $\bar{F}_3$  приложены в мгновенном центре скоростей, а направление силы тяжести катка перпендикулярно перемещению точки ее приложения, следовательно:

$$A_{N_3} = A_{F_3} = A_{G_3} = 0.$$

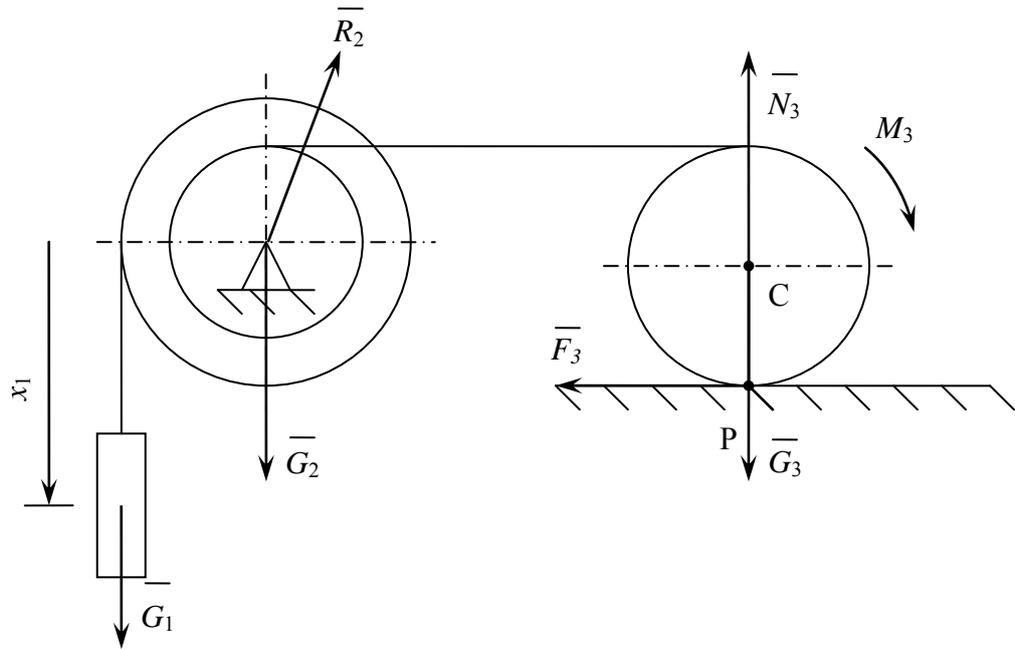


Рисунок 6.6

Работа пары сил с постоянным моментом  $M_3$  определяется как произведение момента пары на угол поворота тела:

$$A_{M_3} = -M_3\varphi_3. \quad (6.57)$$

Работа будет отрицательной, так как пара сил препятствует перемещению тела. Угол поворота тела определим, воспользовавшись кинематическим соотношением (6.30), которое представим в виде:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{r_2}{2R_2R_3} \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow d\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3} dx_1 \Rightarrow \int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = \int_0^{x_1} \frac{r_2}{2R_2R_3} dx_1,$$

$$\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3} x_1. \quad (6.58)$$

С учетом соотношения (6.58) работа (6.57) примет вид:

$$A_{M_3} = -\delta m_3 g \frac{r_2}{2R_2R_3} x_1.$$

После подстановки исходных данных и найденного значения  $x_1 = 4,08\text{ м}$  сумма работ внешних сил системы будет равна:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = 5mgx_1 - \frac{1}{30}mgx_1 = \frac{1490}{30}x_1 = 202,64\text{ Нм}. \quad (6.59)$$

После найденных значений (6.56), (6.59) в выражение (6.54) получим тождество. Следовательно, значение скорости  $v_1$  и перемещения  $x_1$  определены верно.

Для численного решения линейных систем уравнений в Mathcad имеется специальная матричная функция **Isolve(A,B)**.

Она решает систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{B}\},$$

где  $\|\mathbf{A}\|$  – квадратная матрица коэффициентов при неизвестных;

$\{\mathbf{X}\}$  – вектор-столбец неизвестных решений;

$\{\mathbf{B}\}$  – вектор-столбец свободных членов системы уравнений.

Пример решения системы уравнений (6.43) приведен на рисунке 6.7.

Исходные данные:

$$\underline{m} := 1.02 \quad \underline{g} := 9.81$$

Решение:

Решение системы в матричной форме.

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 5m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{25}m & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3}m & 0 & -1 & -1 \\ \frac{m}{3} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} 5m \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ -m \cdot \frac{g}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} := \text{lsolve}(\underline{A}, \underline{B}) \quad \text{или} \quad \underline{X} := \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 8.157 \\ 8.432 \\ 4.66 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

Рисунок 6.7

Другой путь решения системы алгебраических уравнений (6.43) в Mathcad – использование символьного вычислительного блока **Given-Find**. При символьном решении не надо вводить начальные значения, а после ключевого слова **Find** вместо знака равенства следует ввести символичный знак равенства (при помощи комбинации [**Ctrl**+**.**] или с помощью соответствующей пиктограммы на панели **Evaluation**).

Пример решения с использованием вычислительного блока **Given-Find** приведен на рисунке 6.8.

Исходные данные:

$$m := 1.02 \quad g := 9.81$$

Решение с помощью "Блока решения"

Given

$$5 \cdot m \cdot x'' = 5 \cdot m \cdot g - S_1$$

$$\frac{16}{25} \cdot m \cdot x'' = S_1 - \frac{2}{3} S_2$$

$$\frac{2}{3} \cdot m \cdot x'' = S_2 + F_3$$

$$\frac{1}{-} \cdot m \cdot x'' = S_3 - F_2 - m \cdot \frac{g}{-}$$

$$\text{find}(x'', S_1, S_2, F_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 8.1567522321428571429 \\ 8.4315636160714285714 \\ 4.6602536383928571429 \\ 0.88633787946428571429 \end{pmatrix}$$

Рисунок 6.8

Для численного решения одиночного дифференциального уравнения в MathCAD имеется функция **Odesolve**. Эта функция входит в состав вычислительного блока **Given-Odesolve**.

Команда **Odesolve(x,b,[step])** возвращает функцию, которая является решением дифференциального уравнения (**x** – переменная интегрирования, действительное число, **b** – конечная точка отрезка интегрирования; **step** – величина шага по переменной интегрирования (необязательный аргумент)).

Решение дифференциального уравнения  $\ddot{x}_1 = 8,16$  с построением графиков скорости и координаты приведено на рисунке 6.9.

Исходные данные:

$$x_0 := 0 \quad v_0 := 0 \quad t_1 := 1$$

Given

$$x''(t) = 8.16$$

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 2t_1)$$

$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

В исследуемый момент времени координата и скорость:

$$x(t_1) = 4.08$$

$$v(t_1) = 8.16$$

Строим графики изменения координаты и скорости точки:

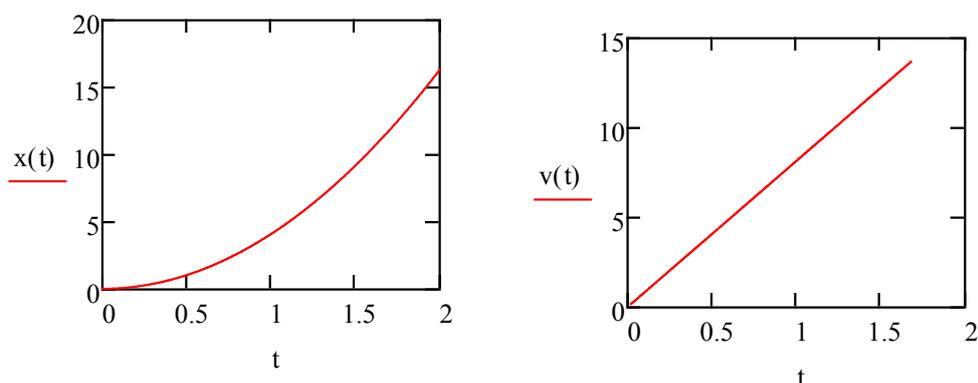


Рисунок 6.9

Рассмотрим возможные частные случаи при определении направления и значения силы трения скольжения. При выборе направления силы трения необходимо исходить из того, что эта сила препятствует проскальзыванию тела по поверхности. В том случае, если тело совершает поступательное движение, направление этой силы однозначно противоположно направлению движения. В случае качения тела по поверхности необходимо провести дополнительный анализ.

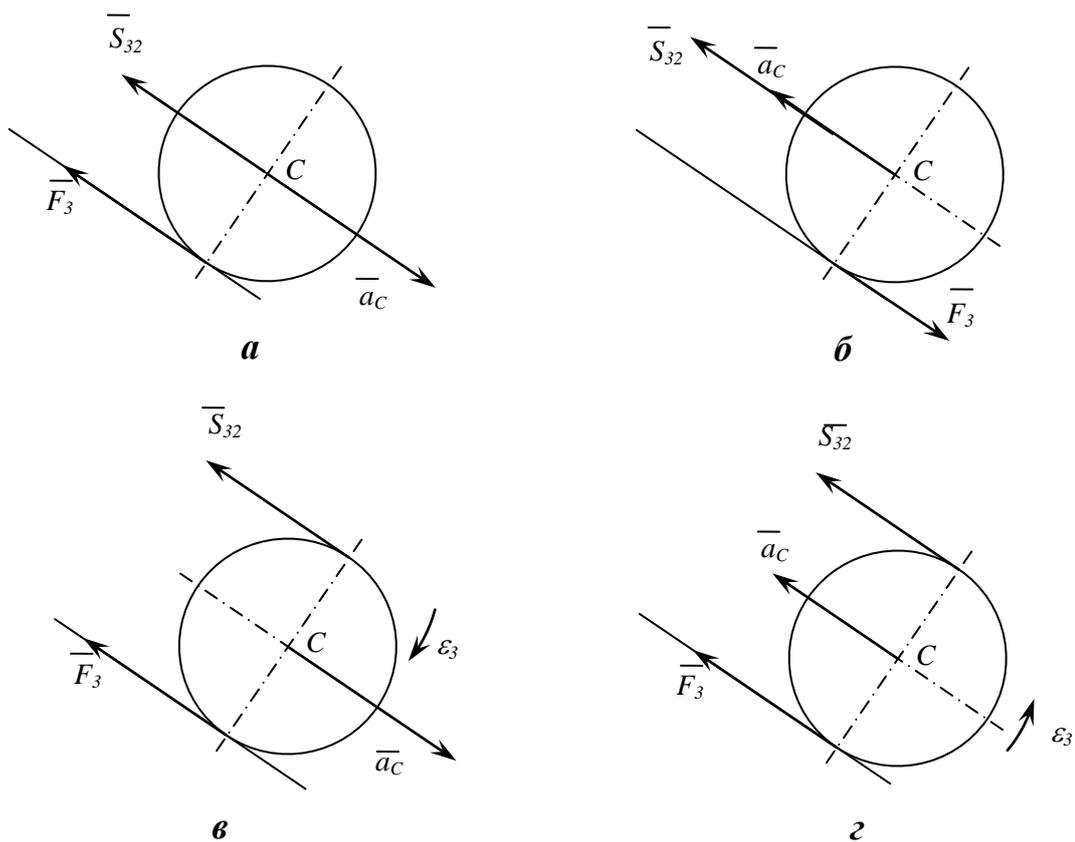


Рисунок 6.10

Рассмотрим следующие варианты:

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 6.10а): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 6.10б): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вверх, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, на которое намотана нить, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 6.10в): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, так как тело, разматывая нить, также двигалось бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, на которое намотана нить, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 6.10z): в данном случае однозначно направить силу трения нельзя, так как при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью может скользить вместе с центром вверх, но может скользить и вниз, разматывая нить.

В последнем примере направление силы трения скольжения выбирается произвольным образом, а полученный в результате решения знак сообщит об истинном направлении силы.

В заключение рассмотрим случай, когда полученное значение силы трения превышает ее предельное значение.

Вернемся к рассматриваемому примеру, приняв значение коэффициента трения скольжения  $f = 0,04$ , тогда, при проверке условия отсутствия проскальзывания (6.38), получим  $F_3 = 0,084mg = 0,84H > fm_3g = 0,8H$ . Следовательно, тело проскальзывает по поверхности.

В этом случае скорость точки  $D$  катка (рисунок 6.5a) будет равна:

$$v_D = v_{C_3} + \omega_3 R_3,$$

или

$$\omega_2 r_2 = v_{C_3} + \omega_3 R_3.$$

Откуда скорость точки  $C_3$

$$v_{C_3} = v_1 \frac{r_2}{R_2} - \omega_3 R_3, \quad (6.60)$$

а ее ускорение

$$a_{C_3} = \frac{dv_{C_3}}{dt} = a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3. \quad (6.61)$$

При подстановке полученных выражений в уравнения (6.41) получим для катка 3 уравнения движения в виде:

$$\begin{cases} m_3 \frac{r_2}{R_2} \ddot{x}_1 - m_3 \ddot{\varphi}_3 R_3 = S_2 + F_3; \\ \frac{m_3 R_3^2}{2} \ddot{\varphi}_3 = S_2 R_3 - F_3 R_3 - \delta m_3 g. \end{cases}, \quad (6.62)$$

Здесь сила трения принимает предельное значение  $F_3 = 0,08mg$ . В дальнейшем, учитывая уравнения для тел 1 и 2, получим систему дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных: ускорения груза 1  $\ddot{x}_1 = a_1$ , углового ускорения катка 3  $\ddot{\varphi}_3 = \varepsilon_3$  и сил натяжения нитей  $S_1, S_2$ .

$$\begin{cases} 5m\ddot{x}_1 = 5mg - S_1; \\ \frac{16m}{25}\ddot{x}_1 = S_1 - \frac{2}{3}S_2; \\ \frac{4m}{3}\ddot{x}_1 - 2mR_3\ddot{\varphi}_3 = S_2 + 0,08mg; \\ mR_3\ddot{\varphi}_3 = S_2 - 0,18mg. \end{cases} \quad (6.63)$$

После решения системы уравнений (6.63), получим:

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{3333}{4007}g = 8,16 \text{ м/с}^2;$$

$$S_1 = 5m(g - \ddot{x}_1) = 8,25m = 8,42 \text{ Н};$$

$$S_2 = \frac{3}{2}\left(S_1 - \frac{16m}{25}\ddot{x}_1\right) = 4,68 \text{ Н};$$

$$\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{S_2 - 0,18mg}{mR_3} = 13,96 \text{ рад/с}^2.$$

## Список использованных источников

- 1 Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с.
- 2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. - СПб. : Лань, 2009. - 736 с.
- 3 Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. - СПб.: Лань, 2016. - 336 с.
- 4 Диевский, В.А. Теоретическая механика. Сборник заданий : учебное пособие / В.А. Диевский, И.А. Малышева - СПб.: Лань, 2018. - 192 с.
- 5 Доев, В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad: учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин. – СПб.: Лань, 2010. – 592 с.
- 6 Кудина, Л.И. Определение усилий в стержнях плоских ферм: методические указания / Л.И. Кудина. - Оренбург : ОГУ, 2013. - 43 с.
- 7 Кудина, Л.И. Равновесие произвольной пространственной системы сил: методические указания/ Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов. - Оренбург : ОГУ, 2012. – 32 с.
- 8 Морозов, Н.А. Определение скорости и ускорения точки по заданному закону движения с применением системы Mathcad: методические указания/ Н. А. Морозов. - Оренбург: ОГУ, 2004. - 26 с.
- 9 Морозов, Н.А. Определение кинематических характеристик твердого тела: методические указания / Н.А. Морозов. - Оренбург: ОГУ, 2013. – 24 с.
- 10 Морозов, Н.А. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки / Н.А. Морозов. - Оренбург: ОГУ, 2012. – 21 с.
- 11 Гаврилов, А.А. Применение основных теорем динамики к изучению движения механических систем: методические указания / А.А.Гаврилов. - Оренбург: ОГУ, 2017. – 30 с.