Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

ВВЕДЕНИЕ В КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания

Составитель: А.Н. Павленко

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»
для обучающихся по образовательной программе высшего образования
по направлению подготовки 03.03.03 Радиофизика

Оренбург
2021

УДК 517
ББК 22.16
В 24

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С.А. Герасименко

В 24 Введение в курс математического анализа: методические указания / составитель А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 32 с.

Методические указания содержат материалы для организации самостоятельной работы по курсу математического анализа для предварительного знакомства с данной дисциплиной. Они предназначены для обучающихся на направлении подготовки 03.03.03 Радиофизика

УДК 517
ББК 22.16

Оглавление

Введение

Важность курса «Математический анализ» для специалистов в области естественнонаучных и инженерных направлений обусловлена чрезвычайной широтой приложений данного математического раздела, как для других математических дисциплин, так и в физике, химии, биологии, экономике, электротехнике, радиотехнике, теории автоматического регулирования и в других областях естественных наук и технических дисциплин.

Не смотря на наличие обширного перечня [1-8 и д.р.] прекрасно зарекомендовавших себя учебников, опубликование данных методических указаний является целесообразным в силу необходимости предварительного знакомства обучающихся с основными идеями математического анализа, его связью с другими математическими дисциплинами и его многочисленными приложениями, что не только повышает мотивацию к изучению данной дисциплины, но и эффективность учебного процесса в целом. Не следует воспринимать приведенный материал как самостоятельное строгое изложение основ математического анализа и считать исчерпывающим приведенный перечень его приложений. Данная работа призвана лишь заинтересовать обучающихся данной дисциплиной и показать ее важность и важность ее приложений.

Кроме направления «03.03.03 Радиофизика» методические указания могут быть применены и на других информационных, естественнонаучных и технических специальностях и направлениях как очной, так и заочной форм обучения. Следует отметить возможность применения методических указаний и в том случае, когда математический анализ изучается не как самостоятельная дисциплина, а является разделом курсов «Математика» и «Высшая математика».

1 Введение в анализ

1.1 Функция

Как известно, современный человек в повседневной жизни имеет дело с огромным количеством разнообразных величин, характеризуемых числовыми значениями. Например: $p = 36\,\frac{руб}{кг}$ – цена сахара, $t = 21^o C$ – температура в жилом помещении, $S = 64\,м^2$ – общая площадь квартиры и т. д.

Можно заметить:

1) величины могут быть неизменными (константами) и переменными;

2) одни величины могут зависеть от других величин.

В качестве примера рассмотрим движение тела, брошенного вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Очевидно, что величина *h* (высота, на которой находится тело) определяется величиной *t* (время, прошедшее от броска тела): каждому значению переменной *t* отвечает ровно одно значение переменной *h*. Зависимости такого типа будем называть функциями одной переменной.

Чаще всего, функции задают формулами. Например, зависимость высоты брошенного тела от времени может быть выражена формулой

$$h(t) = 10t - 5t^2 . \qquad (1)$$

Здесь $t \in [0\,;\,2]$ – время полета тела (в секундах), а *h* – высота тела (в метрах).

Для наглядного представления функциональной зависимости используются графики функций. В качестве примера построим график функции (1) при $t \in [0\,;\,2]$ по точкам. Для этого вычислим значения *h* при *t* равных 0, 0.25, ... , 2 (таблица 1).

Таблица 1

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
h	0	2.19	3.75	4.69	5	4.69	3.75	2.19	0

Отметим полученные точки (0; 0), (0.25; 2.19), … , (2; 2) на координатной плоскости (рисунок 1).

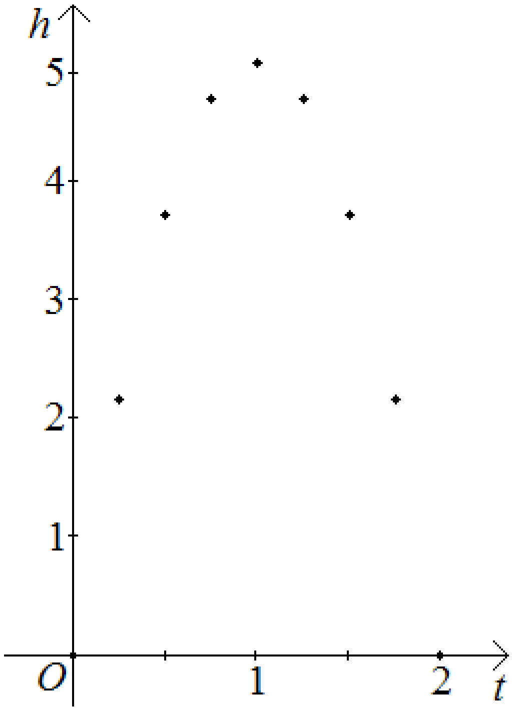


Рисунок 1

Соединим построенные точки плавной кривой (рисунок 2).

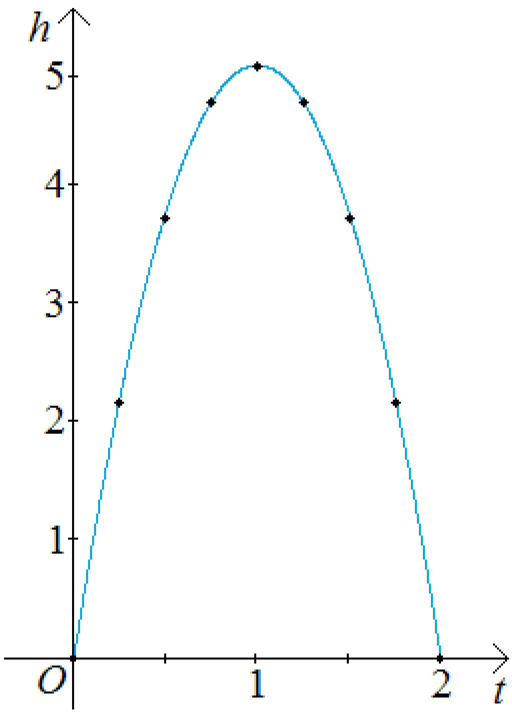


Рисунок 2

По графику функции легко определить свойства свойства функции. Очевидно, что данная функция возрастает при $t \in [0;1]$ и убывает при $t \in [1;2]$, а в точке $t = 1$ она имеет максимум равный 5.

По графику функции можно определить примерное значение функции при данном значении аргумента. Например, найдем $h(0{,}8)$ (рисунок 3).

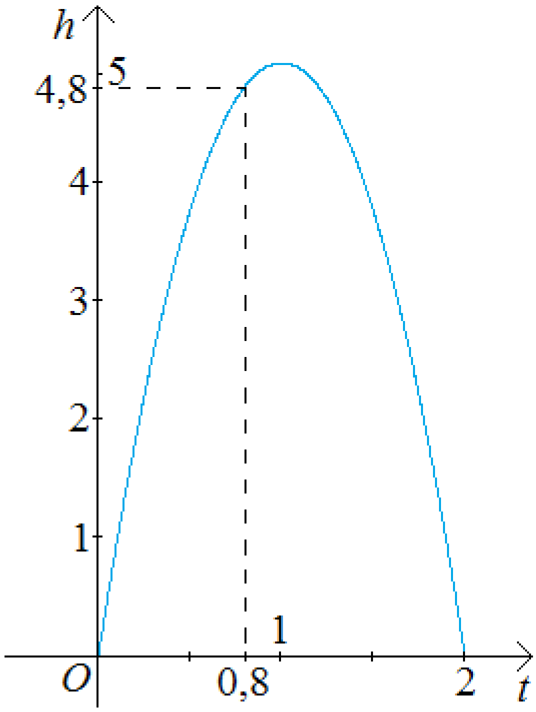


Рисунок 3

Получим, что $h(0{,}8) \approx 4{,}8$.

1.2 Предел

Рассмотрим (рисунок 4) график функции

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{2}$$

Данная функция не определена при $x = 0$, и соответствующая точка графика выделена пустым кружком.

Однако, можно заметить, что если мы будем x неограниченно приближать к нулю, то значение функции будет неограниченно приближаться к ординате пустого кружка. Эта ордината равна так называемому числу $e = 2{,}718281828\ldots$

В этом случае будем говорить, что пределом функции (2) при x стремящемся к 0 будет являться число e.

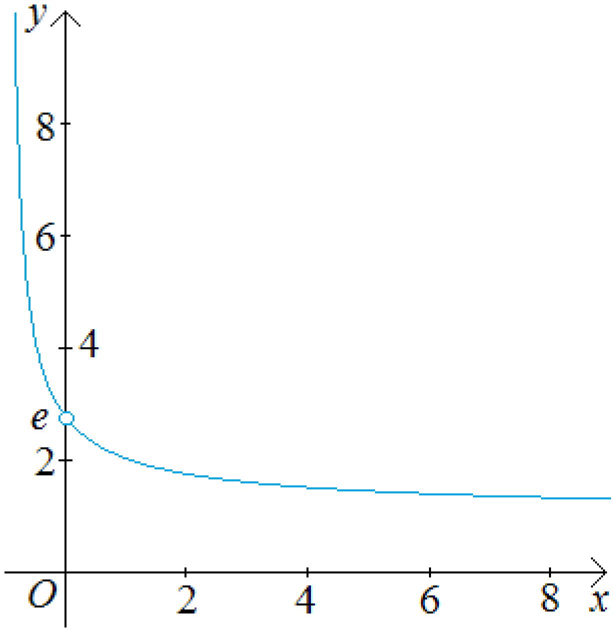


Рисунок 4

Обозначение: $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Обозначение «lim» является сокращением латинского слова «limes», которое в переводе означает «предел».

Предел $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ является одной из форм записи так называемого *второго замечательного предела.*

Понятие предела является центральным понятием всего математического анализа. Фактически математический анализ – это совокупность разделов математики, в которых математические объекты изучаются с помощью пределов и других понятий (производной[1], определенного интеграла[2] и т.д.), построенных на его основе.

В следующих пунктах мы рассмотрим основные разделы математического анализа.

---

1 Формула из определения производной функции одной переменной содержит ***предел***:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2 Формула из определения определенного интеграла также содержит ***предел***:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2 Дифференциальное исчисление

2.1 Понятие производной

Важнейшим понятием дифференциально исчисления является понятие производной.

Вспомним основные свойства производной на конкретном примере. Для этого рассмотрим функцию

$$f(x)=0{,}1\,x^3-1{,}5\,x^2+6{,}3\,x\ .$$

Ее производная имеет вид

$$f\,'(x)=0{,}3\,x^2-3\,x+6{,}3\ .$$

Построим графики функции и ее производной (рисунок 5).

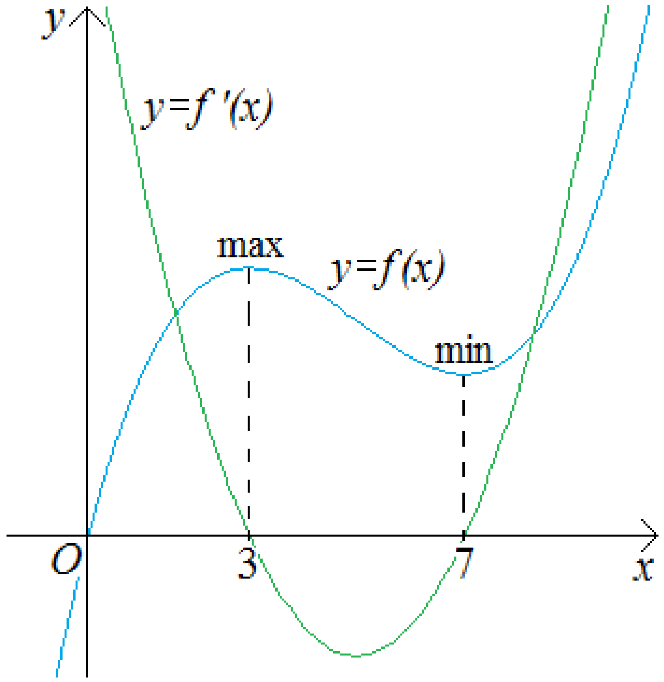


Рисунок 5

Из них можно сделать следующие выводы.

1. На промежутках $(-\infty;3)$ и $(7;+\infty)$ производная функции положительна, и сама функция является возрастающей.

2. На интервале $(3;7)$ производная функции является отрицательной, и сама функция является убывающей.

3. В точке $x=3$ производная функции меняет свой знак с «+» на «-», и в точке $x=3$ функция имеет максимум.

4. В точке $x=7$ производная функции меняет свой знак с «-» на «+», и в точке $x=7$ функция имеет минимум.

Если на интервале производная функции положительна (отрицательна), то сама функция на данном интервале будет возрастающей (убывающей).

Если в точке $x=a$ производная функции меняет свой знак с «+» на «-» («-» на «+»), то в точке $x=a$ функция имеет максимум (минимум).

Величина модуля значения производной функции в точке $|f'(x_0)|$ характеризует «крутизну» графика (скорость роста функции) в достаточно малой окрестности точки x_0 (рисунки 6 и 7).

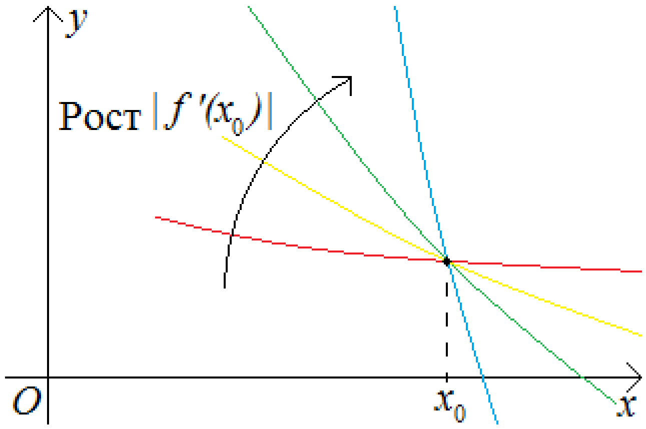


Рисунок 6

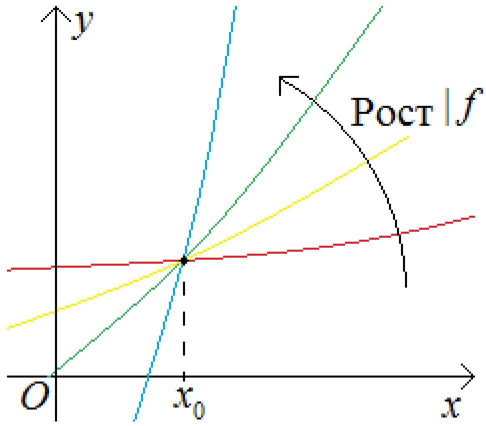


Рисунок 7

Таким образом, *производная функции является мерой скорости возрастания (убывания) этой функции.*

2.2 Практическое применение производной

На первый взгляд практическое применение производной представляется сомнительным. Действительно, можно просто построить график функции по точкам и по нему определить промежутки возрастания и убывания функции, а также ее экстремумы. Кроме того, вообще непонятно, где могут пригодиться функции и для чего нужно их исследовать.

Чрезвычайно широкое практическое применение производных объясняется тем фактом, что огромное количество величин зависит скорости изменения других величин, которые и характеризуются производными. Отсюда следует, что при расчете технических конструкций, исследованиях биологических процессов, химических реакций и т.д. появляются так называемые *дифференциальные уравнения*, в которые неизвестные функции входят под знаками производных. Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то такое дифференциальное уравнение называется обыкновенным, а если нескольких переменных, то уравнением в частных производных.

Теория уравнений в частных производных второго порядка является важнейшей составляющей дисциплины «Уравнения математической физики». Такое название обусловлено тем, что уравнения в частных производных второго порядка имеет многочисленные физические приложения: предсказание погоды, разработка атомного оружия, создание композитных материалов, задачи распространения тепла, конвекции, диффузии, электростатики и электродинамики, аэродинамики и гидродинамики, и т.д.

Ниже рассмотрим ряд примеров, показывающих, что без применения дифференциальных уравнений вообще невозможна современная цивилизация.

2.2.1 Электротехника и радиотехника

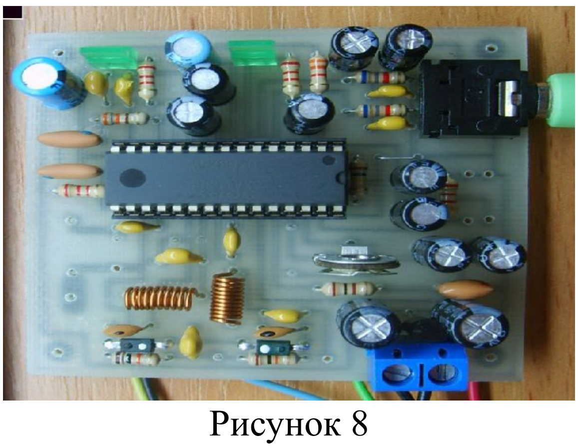


Рисунок 8

Как известно [9, с. 81], ток $I(t)$ через конденсатор и напряжение $U(t)$ на нем связаны соотношением

$$I(t)=CU'(t) .$$

Для катушки индуктивности будем иметь

$$U(t)=LI'(t) .$$

Здесь: C – емкость конденсатора, L – индуктивность катушки.

Отсюда следует, что при конструировании и анализе работы электро и радиоустройств (рисунок 8) часто применяется теория обыкновенных дифференциальных уравнений [9].

Например, исследование работы автогенератора на полевом транзисторе с колебательным контуром в выходной цепи [10, с. 127-128] приводит к уравнению

$$U''+\left(\frac{1}{RC}-\frac{MS(U)}{LC}\right)U'+\frac{1}{LC}U=0 .$$

2.2.2 Сопротивление материалов

Рисунок 9

Сопротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций.

Например, задача о нахождении критической силы при которой происходит изгиб сжатой конструкции (рисунок 10) сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения [11, с. 402-403]

$$y'' + a^2 y = 0 .$$

Коэффициент a^2 определяется параметрами конструкции.

Очевидно, что теория сопротивления материалов широко применяется во многих технических отраслях, например при возведении высотных сооружений.

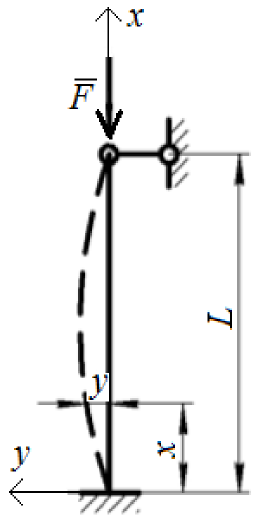


Рисунок 10

2.2.3 Предсказание погоды

Рисунок 11

Для предсказания погоды используются уравнения с частными производными

[12], описывающие аэро- и термодинамические процессы в атмосфере и связывающие такие параметры как плотность, скорость, давление и температуру. Данные уравнения являются нелинейными и не имеют точного решения, поэтому для их решения используются численные методы. Исходные уравнения дискретизируются во времени и пространстве и превращаются в систему линейных уравнений, связывающую наборы физических параметров в выбранных точках (узлах вычислительной сетки). Чем больше используется точек для расчета, тем выше точность модели, но и тем выше требования к вычислительным мощностям ЭВМ.

2.2.4 Теория космических полетов

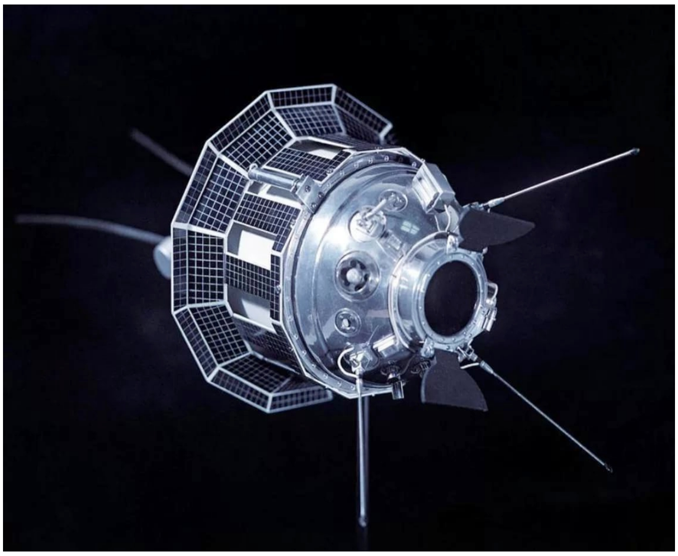


Рисунок 12

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяется для расчета траекторий космических аппаратов [13]. Особенно интересен так называемый гравитационный маневр, позволяющий изменить скорость космического аппарата при пролете вблизи крупного небесного тела. Он впервые использовался во время полета советской автоматической межпланетной станции

«Луна-3» (рисунок 12) в 1959 году для фотографирования обратной стороны Луны (рисунок 13).

В дальнейшем гравитационные маневры стали широко применяться в межпланетных полетах.

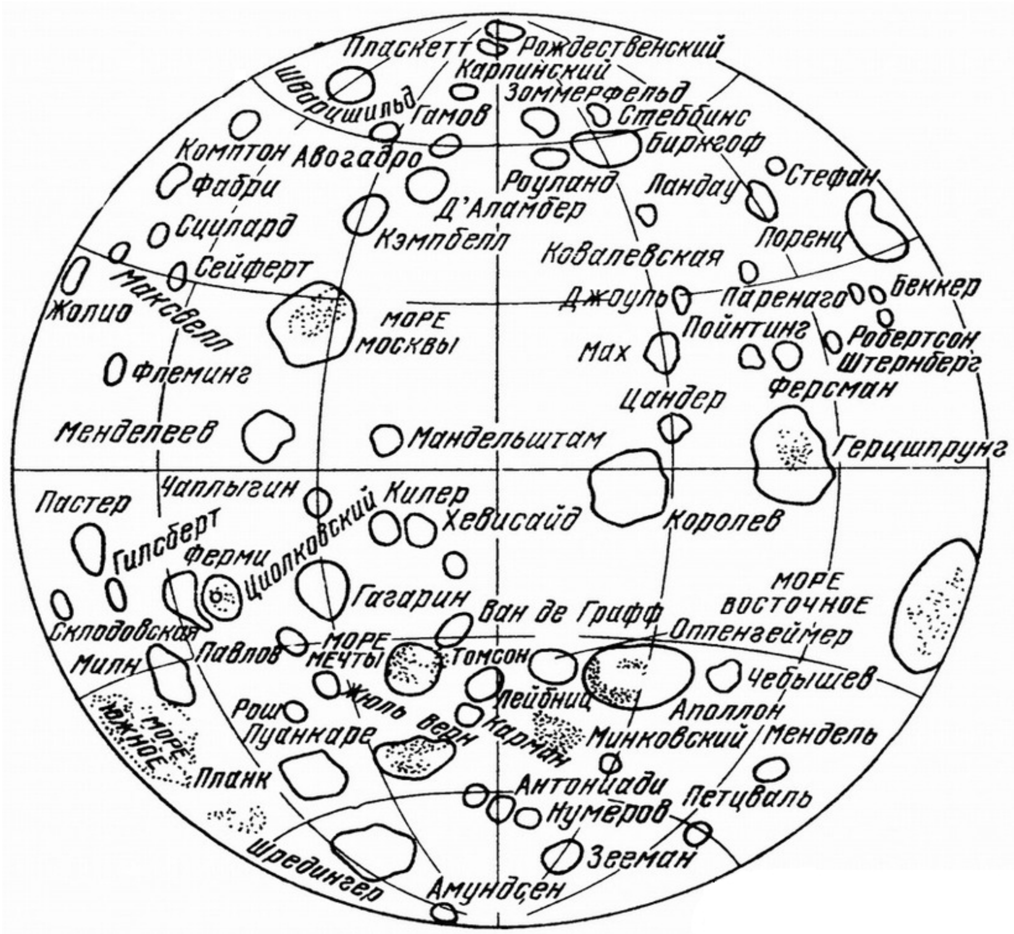


Рисунок 13

2.2.5 Теория автоматического управления

Одним из основоположников теории автоматического регулирования является русский инженер и государственный деятель (министр финансов Российской Империи в 1888-92 гг.) Вышнеградский И.А. (1831/32-1895).

Ему удалось решить важнейшую для того времени проблему устойчивой работы центробежного регулятора (рисунок 14) паровой машины. Для этого была получена и исследована нижеприведенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая работу регулятора [9].

$$\begin{cases} \varphi' = \psi, \\ \psi' = n^2\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi - g\sin\varphi - \dfrac{\mu}{m}\psi, \\ \omega' = \dfrac{k}{J}\cos\varphi - \dfrac{F}{J}. \end{cases}$$

Вышнеградский И.А. получил неравенство относительно параметров центробежного регулятора и самой паровой машины, при выполнении которого регулятор будет работать устойчиво и скорость вращения вала паровой машины будет постоянной.

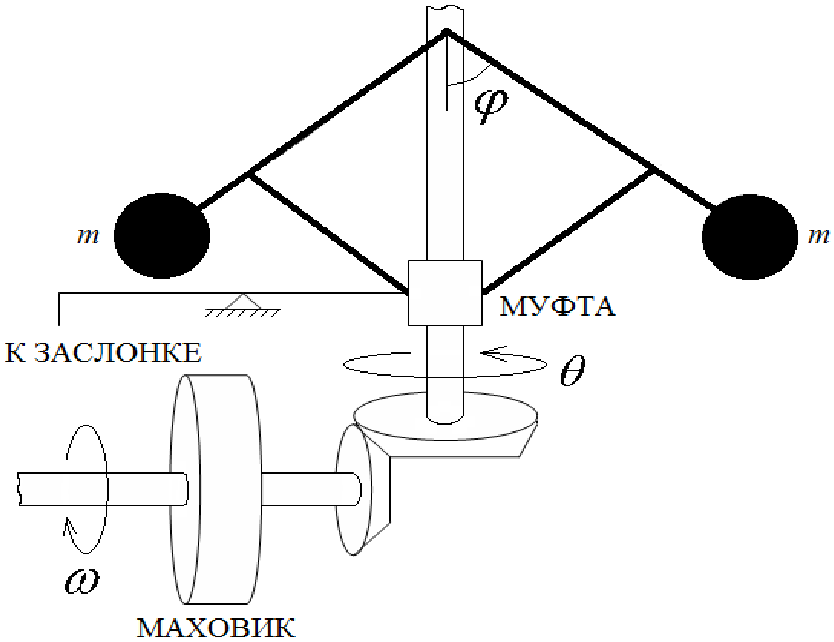


Рисунок 14

В настоящее время теория автоматического регулирования имеет многочисленные технические приложения. На рисунке 15 приведен пульт управления вертолётного автопилота АП-34.

Рисунок 15

2.2.6 Процессы, проходящие при атомном взрыве

Для математического обеспечения ядерного проекта (на рисунке 16 приведена первая советская атомная бомба) в 1948 году был создан коллектив физиков, математиков и вычислителей под руководством математика Тихонова А.Н. (1906-1993) [14].

Математические модели атомных взрывов, учитывающие ядерные реакции, распространение нейтронов и газодинамику, свелись к системам нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные системы решались численно с помощью специально созданных методов.


Рисунок 16

3 Интегральное исчисление

3.1 Понятие определенного интеграла

Определенный интеграл является одним из важнейших понятий всего интегрального исчисления.

Как известно из курса школьной математики, площадь криволинейной трапеции (рисунок 17) равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x)dx \ .$$

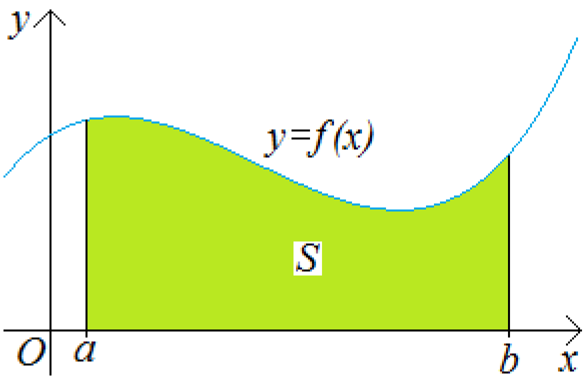


Рисунок 17

Следует отметить, что большое количество величин численно равны площади под графиками некоторых зависимостей:

– пройденный путь численно равен площади под графиком зависимости скорости от времени [11];

– протекший по проводнику заряд численно равен площади под графиком зависимости тока от времени [11];

– работа идеального газа численно равна площади под графиком зависимости давления от объема [11];

– вероятность равна площади под графиком плотности вероятности [11], и т.д.

Кроме того, с помощью ряда методов применения определенного интеграла его можно применить нахождения еще большего количества величин.

В качестве примера рассмотрим применение определенного интеграла для вычисления работы идеального газа при изотермическом процессе.

Как известно из школьного курса физики, работа идеального газа численно равна площади под графиком (рисунок 18) зависимости давления от объема $P=P(V)$.

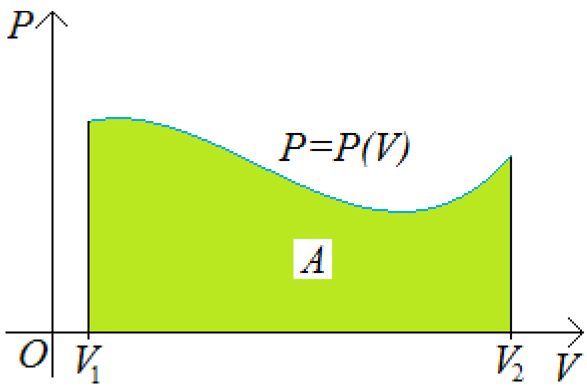


Рисунок 18

Тогда

$$A=\int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV \ .$$

Используем уравнение Клапейрона-Менделеева [11].

$$A=\int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{MV}\,dV \ .$$

Вынесем постоянные множители за знак определенного интеграла.

$$A=\frac{mRT}{M}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \ .$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

получим:

$$A = \frac{mRT}{M}\left(\ln V_2 - \ln V_1\right) = \frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

3.2 Практическое применение интегралов

Интегралы различных типов имеют чрезвычайно широкое применение не только в математике, но и во всех естественнонаучных и технических областях. В качестве примеров, ниже рассмотрим ряд приложений.

3.2.1 Компьютерная томография

В математических алгоритмах, на основе которых работает компьютерная томография (рисунки 19-20), используется преобразование Радона. Трехмерный случай которого имеет вид [15]

$$f(\varphi,\theta,l) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(l\cos\varphi\sin\theta - u\sin\varphi - \upsilon\cos\varphi\cos\theta,$$
$$l\sin\varphi\sin\theta - u\cos\varphi - \upsilon\sin\varphi\cos\theta,\ \ l\cos\theta + \upsilon\sin\theta)\,du\,d\upsilon.$$

Рисунок 19

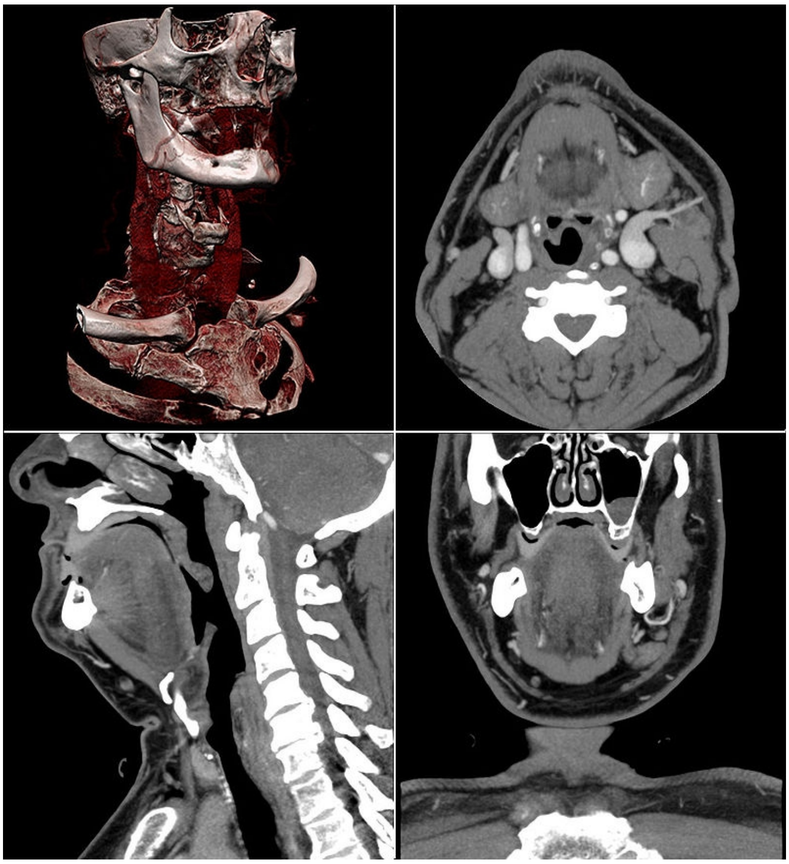


Рисунок 20

3.2.2 Самолетостроение

При проектировании самолетов широко используется интегральное исчисление. Например, формула Чаплыгина С.А. (1869-1942) для вычисления подъемной силы имеет вид [16]

$$\bar{P}=\frac{1}{2}\rho i\int_{L}\left(f'(z)\right)^{2}dz\ .$$

Здесь i – мнимая единица ($i^2=-1$).

3.2.3 Переходные кривые

Переходные кривые применяются для проектирования поворотов автомобильных дорог и развязок (рисунок 21).

В качестве примера, можно привести клотоиду – кривую с кривизной, растущей пропорционально пройденному пути (рисунок 22). Эта кривая задается в параметрическом виде уравнениями [17]

$$\begin{cases} x = a\int\limits_0^t \cos\dfrac{\pi\tau^2}{2}d\tau, \\ y = a\int\limits_0^t \sin\dfrac{\pi\tau^2}{2}d\tau. \end{cases}$$

Рисунок 21

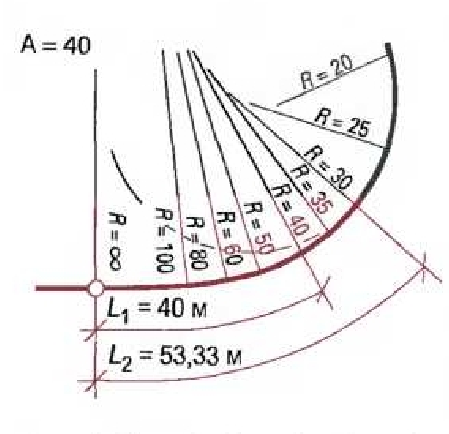


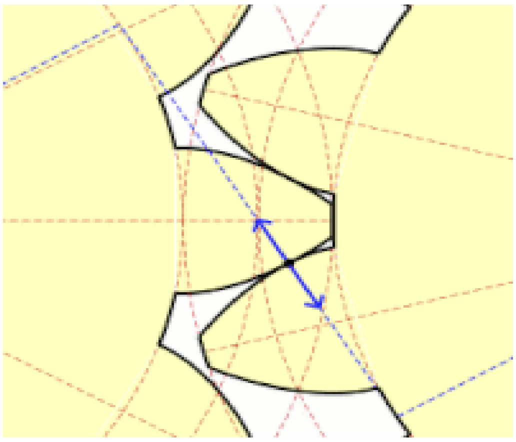
Рисунок 22

3.2.4 Эвольвента

Эвольвента – это кривая, нормаль в каждой точке которой является касательной к исходной кривой. Ее уравнение имеет вид [18]

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{x' \int\limits_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ Y = y - \dfrac{y' \int\limits_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Эвольвента окружности используется для изготовления шестерней (рисунок 23).



Решение 23

3.2.5 Геометрические величины

Определенные интегралы применяются и при решении разнообразных геометрических задач.

В качестве примера рассмотрим следующую геометрическую задачу. Пусть имеется цистерна с бензином длиною L=8 м и с радиусом R=1,5 м. Предположим, что из цистерны отлили некоторое количество бензина, из-за чего недолив составил h=0,9 м. Найти объем (в м^3) отлитого бензина.

Решив данную задачу, получим, что объем отлитого бензина будет равен

$$V=2L\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}}\left(\sqrt{R^2-x^2}+h-R\right)dx=16\int_0^{\sqrt{1{,}89}}\left(\sqrt{2{,}25-x^2}-0{,}6\right)dx\approx 14{,}3\left(\text{м}^3\right)$$

4 Ряды

4.1 Понятие числового и функционального ряда

Ряд представляет собой сумму бесконечного количества слагаемых. Если суммируются числа, то ряд называется числовым, а если функции – функциональным.

Запись $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ обозначает сумму слагаемых вида $\frac{1}{2^n}$, когда $n=1,2,3,\ldots$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$

Под бесконечной суммой понимается предел суммы *n* первых слагаемых, когда *n* стремится к бесконечности.

Для данного ряда сумма *n* первых слагаемых имеет вид

$$S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\ .$$

Величина S_n представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Найдем S_n, используя формулу суммы геометрической прогрессии

$$S_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}\ .$$

Получим

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Найдем сумму ряда

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 .$$

В качестве примера функционального ряда рассмотрим, например, представление косинуса степенным рядом:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

На рисунках 24-28 показано, как графики сумм все большего числа слагаемых приближаются к графику функции $y = \cos x$.

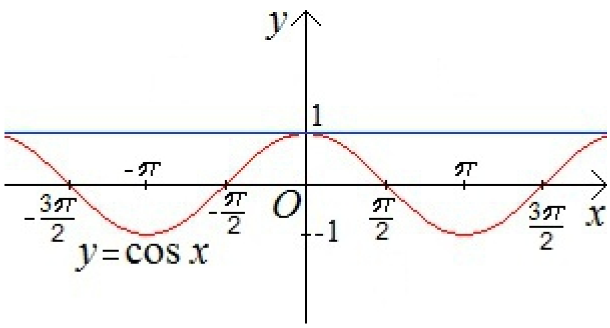


Рисунок 24

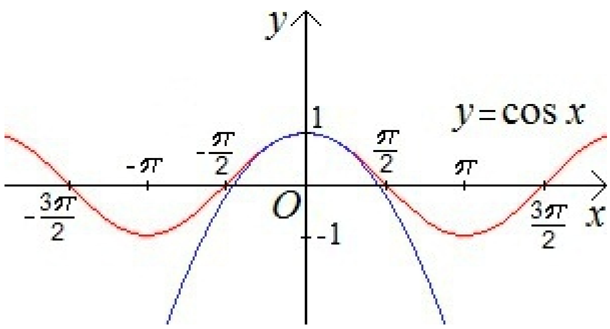


Рисунок 25

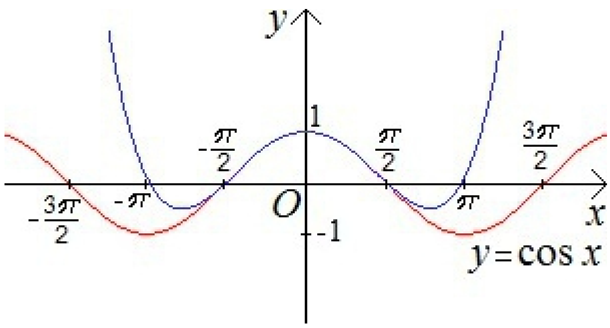


Рисунок 26

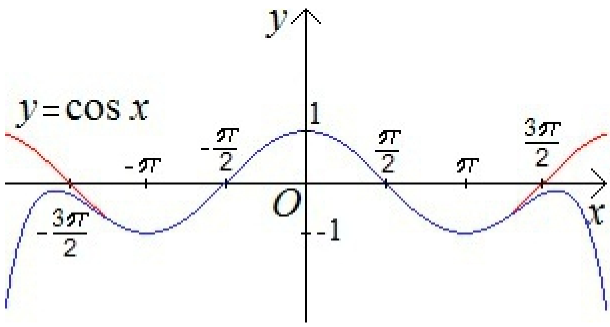


Рисунок 27

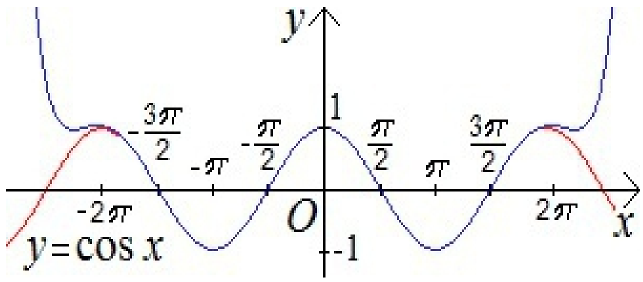


Рисунок 28

4.2 Практическое применение рядов

4.2.1 Решение задач математической физики

При решении задач математической физики методом разделения переменных приходится представлять в виде функциональных рядов функции, задающие начальные условия и/или граничные условия рассматриваемой системы.

4.2.2 Специальные функции

При решении различных задач математической физики используется ряд неэлементарных функций, которые представляются в виде рядов.

В качестве примера можно рассмотреть функции Бесселя первого рода

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\ .$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция, являющаяся обобщением понятия факториала.

Данные функции применяются, например, для расчета цилиндрических волноводов [19], передающих СВЧ-излучение к рупорному облучателю антенны радара (рисунок 29).

Рисунок 29

4.2.3 Электротехника и радиотехника

При расчете электро и радиоцепей переменного тока часто бывает удобно представлять несинусоидальные сигналы в виде бесконечных сумм синусоидальных сигналов (гармоник).

Для этого используются ряды Фурье [10] вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{L} + b_n \sin\frac{\pi n x}{L} \right).$$

Например, пилообразный сигнал $U = f(t)$ (рисунок 30) можно представить в виде ряда

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi t-\frac{1}{2}\sin 2\pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t-\frac{1}{4}\sin 4\pi t+...\right)$$

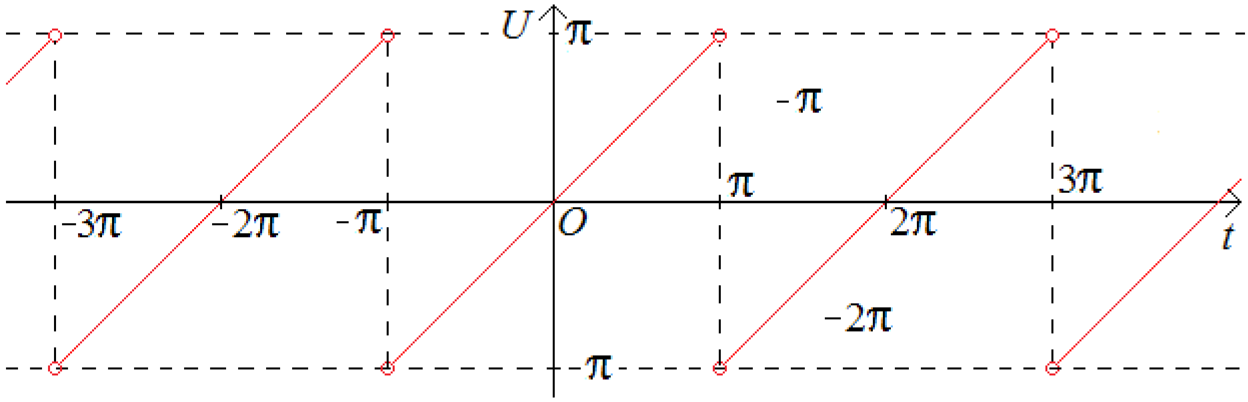


Рисунок 30

При сложении 3 слагаемых данного ряда, получим (рисунок 31).

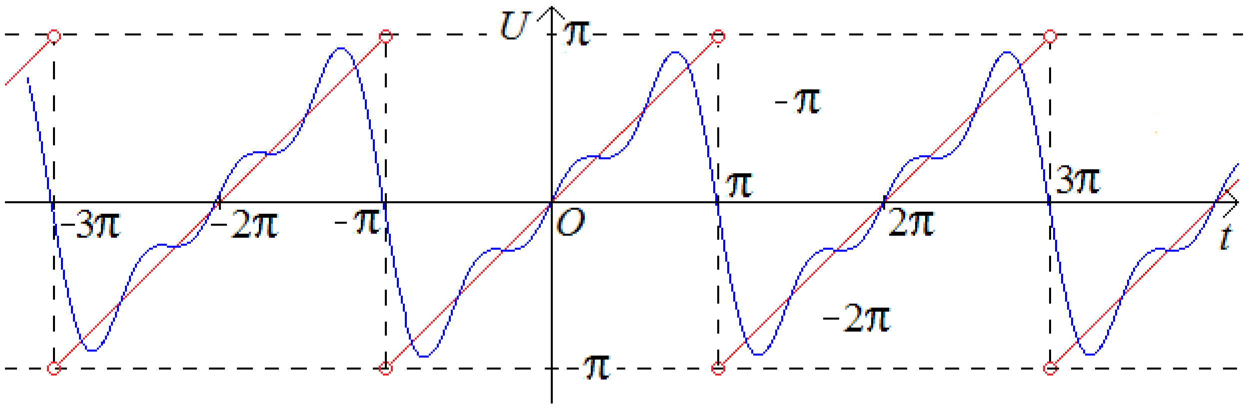


Рисунок 31

При сложении 30 слагаемых данного ряда, получим (рисунок 32).

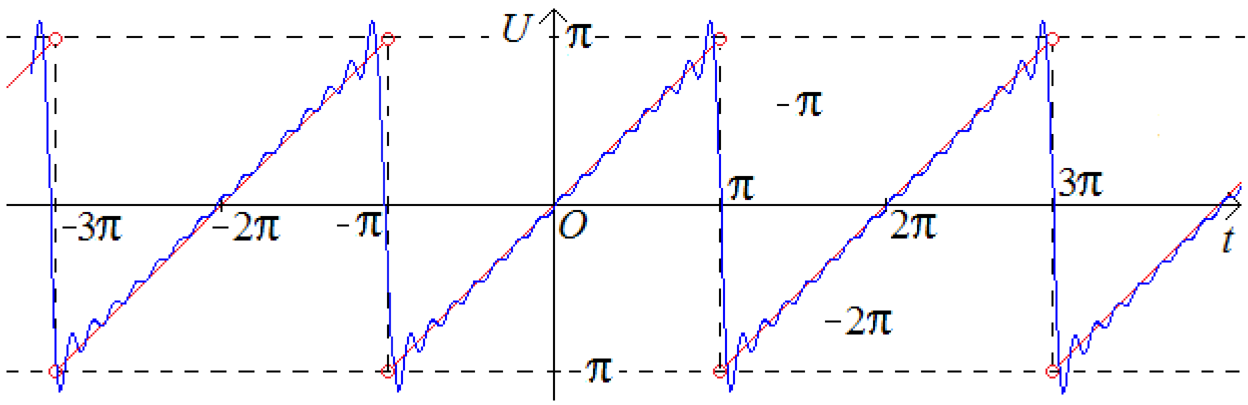


Рисунок 32

Список использованных источников

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоренского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – Т. 1. – 680 с. – ISBN 5-9221-0436-5.

2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 2. – 861 с. – ISBN 978-5-9221-0157-8.

3. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринский. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т. 3. – 728 с. – ISBN 5-9221-0466-7.

4. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу: учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям и специальностям физико-математического профиля / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – 6-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2008. – 640 с. – (Высшее образование. Современный учебник). – Библиогр.: с. 628-629. – ISBN 978-5-358-05925-2.

5. Никольский, С.М. Курс математического анализа: учебник для вузов / С.М. Никольский. – 6-е изд. стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с. – 591 с. – ISBN 5-9221-0160-9.

6. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2008. – ISBN 978-5-9221-0183-7. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. 2008. – 400 с. – Предм. указ.: с. 395-399. – ISBN 978-5-9221-0184-4.

7. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2008. – ISBN 978-5-9221-0183-7. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. 2008. – 424 с. – Предм. указ.: с. 420-424. – ISBN 978-5-9221-0185-1.

8. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов /

А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Библиогр.: с. 736. – ISBN 5-8114-0499-9.

9. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – 4-е изд. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

10. Орлов, И.Я. Основы радиоэлектроники: электронное учебное пособие / И.Я. Орлов и др. – Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И.Лобачевского, 2011. – 169 с.

11. Универсальный справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А.Д. Полянин, В.Д. Полянин, В.А. Попов и др. – М.: Астрель, 2005. – 480 с. – ISBN 5-271-12186-0.

12. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды / П.Н.Белов. – Л.: Гидрометеоиздат,1975.- 391 с.

13. Мирер, С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение: учеб. пособие / С. А. Мирер С. А. - М.: Резолит, 2007. – 267 с.: ил. – ISBN 5-86567-090-5.

14. Самарский А.А. Прямой расчет мощности взрыва // Международный симпозиум «Наука и общество история совместного атомного проекта (40-50-е годы)»: сб. науч. тр. – Дубна, 14-15 мая 1996. – М.: ИПМ, 1996. Т. I. С. 1-9.

15. Лихачев, А.В. Алгоритмы томографической реконструкции: учеб. пособие / А.В. Лихачев. – Новосибирск: НГУ, 2013 – 117 с.

16. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс: учебник, 3-е изд. стер. – Спб.: Лань, 2006. – 960 с.: ил. – ISBN 5-8114-0445-X.

17. Федотов, Г.А. Автоматизированное проектирование автомобильных дорог / Г.А. Федотов – М.: Транспорт, 1986 – 317 с.

18. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М.: Наука, 1998 – 640 с.

19. Полухин, Ю.Н. Цилиндрические волноводы: учебное пособие / Ю.Н. Полухин. – Куйбышев: Областная типография им. Мяги, 1973. – 72 с.