Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7
У 76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.
У 76 Задания для промежуточной аттестации по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: методические указания / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 100 с.

Методические указания содержат задания из каждого раздела по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и два варианта заданий с ответами. Данная разработка поможет в организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины, окажет существенную помощь в подготовке к коллоквиуму, зачету и экзамену.

Они предназначены для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7

Содержание

Введение

Методические указания содержат задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», предназначены для организации самостоятельной работы студентов, для проведения контроля знаний по указанной дисциплине рубежной или итоговой аттестации. Содержание заданий ориентировано на обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

Задания для промежуточной аттестации указанной дисциплины, могут использоваться преподавателями и студентами для самоконтроля при самостоятельной работе в усвоении курса.

В методических указаниях представлены вопросы по разделам «Комплексные числа. Действия над комплексными числами», «Матрицы. Действия с матрицами», «Определитель. Способы вычисления определителей», «Обратная матрица. Ранг матрицы», «Система линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений», «Бинарные операции. Группы. Кольца. Поля», «Многочлены. Действия над многочленами», «Векторное пространство. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение», «Прямая на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимные расположения прямых на плоскости», «Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Взаимные расположения плоскостей в пространстве», «Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Взаимные расположения прямых в пространстве. Взаимные расположения прямой и плоскости в пространстве», «Кривые 2-го порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола», «Поверхности 2-го порядка», «Линейные отображения. Линейные операторы. Квадратичные формы». Все предложенные задания относятся к базовому уровню сложности. Они не предполагают больших вычислений и длительных размышлений, а для правильного(-ых) ответа(-ов) представлены варианты. Для контроля знаний по всему курсу имеется тест из 40-45 вопросов. Если текущая проверка осуществляется по завершению изученного раздела, то студенту предлагается 15-20 вопросов соответствующего содержания. Пороги оценок определяет преподаватель:

«удовлетворительно» – 55-70% правильных ответов; «хорошо» – 71-85%; «отлично» – 86-100%. Формулировка каждого задания предполагает фразу «Выберите среди предложенных вариантов те, которые считаются верными, и укажите соответствующую букву; правильных ответов может быть несколько», которая всякий раз предусматривается.

Приложения к данным методическим указаниям содержат два варианта заданий по 42 вопроса с ответами к ним. Их можно использовать студентам как промежуточный тренировочный материал в процессе подготовки к соответствующему контролю.

1 Раздел «Комплексные числа. Действия над комплексными числами»

Задание 1

Выполните действия $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ над комплексными числами в алгебраической форме: $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$.

Решение.

$z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$; $z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (i - 4) = -7 + 6i$;

$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (i - 4) = -3 + 5i - i + 4 = 1 + 4i$;

$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (i - 4) = -3i + 12 + 5i^2 - 20i = 12 - 23i + 5 \cdot (-1) = 7 - 23i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3+5i)}{(i-4)} = \frac{(-3+5i)(-i-4)}{(i-4)(-i-4)} = \frac{3i + 12 - 5i^2 - 20i}{-i^2 + 16} =$$
$$= \frac{12 - 17i - 5 \cdot (-1)}{-(-1) + 16} = \frac{17 - 17i}{17} = 1 - i.$$

Ответ. а) $z_1 + z_2 = -7 + 6i$; $z_1 - z_2 = 1 + 4i$; $z_1 \cdot z_2 = 7 - 23i$; $\frac{z_1}{z_2} = 1 - i$

Задание 2

Вычислите выражения: $\frac{(5+i) \cdot (7-6i)}{3+i}$.

Решение.

Для вычисления данного выражения необходимо раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и избавиться от рациональности.

$$\frac{(5+i) \cdot (7-6i)}{3+i} = \frac{35 - 30i + 7i - 6i^2}{3+i} = \frac{35 - 23i - 6 \cdot (-1)}{3+i} = \frac{35 - 23i + 6}{3+i} =$$

$$= \frac{41 - 23i}{3+i} = \frac{(41-23i) \cdot (3-i)}{(3+i) \cdot (3-i)} = \frac{123 - 41i - 69i + 23i^2}{9 - i^2} = \frac{123 - 110i - 23}{9+1} =$$

$$= \frac{100 - 110i}{10} = 10 - 11i.$$

Ответ. $10 - 11i$.

Задание 3

Вычислите: i^2, i^3, i^4, i^5, i^{24}, i^{102}, i^{2433} i^{3015}.

Решение.

Поскольку $i^2 = -1$ и используя свойства степени с целым показателем получим $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^{24} = (i^4)^6 = 1^6 = 1$, $i^{102} = (i^2)^{51} = (-1)^{51} = -1$,

$i^{2433} = i^{2432} \cdot i^1 = (i^2)^{1216} \cdot i = (-1)^{1216} \cdot i = 1 \cdot i = i$,

$i^{3015} = i^{3014} \cdot i^1 = (i^2)^{1507} \cdot i = (-1)^{1507} \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Ответ. $-1; -i; 1; i; 1; -1; i; -i.$

Задание 4

Возведите в степень комплексное число: $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Решение.

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Так как $z = x + iy$, $x = -1$ и $y = -\sqrt{3}$, то $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$, $tg\varphi = \dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)}{(-1)} = \sqrt{3}$, $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$ т.е. тригонометрическая форма имеет вид: $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$.

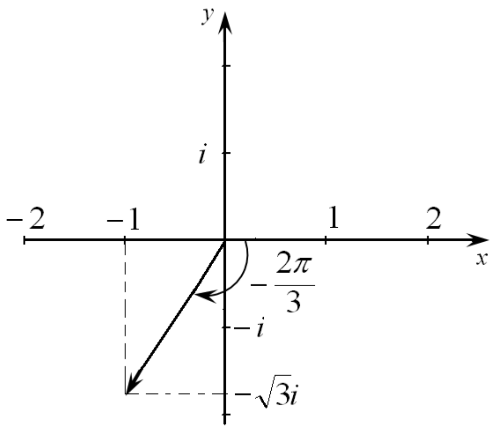


Рисунок 1

По формуле Муавра: $z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ возведем в степень, тогда $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15} = \left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15} =$

$= 2^{15}\cdot\left(\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)\right) = 2^{15}(1+0i) = 2^{15} = 32768$.

Ответ. 32768.

Задание 5

Вычислить z^4 и $\sqrt[4]{z}$, если: $z = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Запишем комплексное число z в тригонометрической форме и, используя формулы:

$z^n = (r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi), n\in Z.$

$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\ldots,n-1$, получим

$$z = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi + i\cdot\sin 4\varphi) = 1\cdot\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{4} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right) = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)\right).$$

Меняя k от 0 до 3, получаем четыре значения w:

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_4 = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

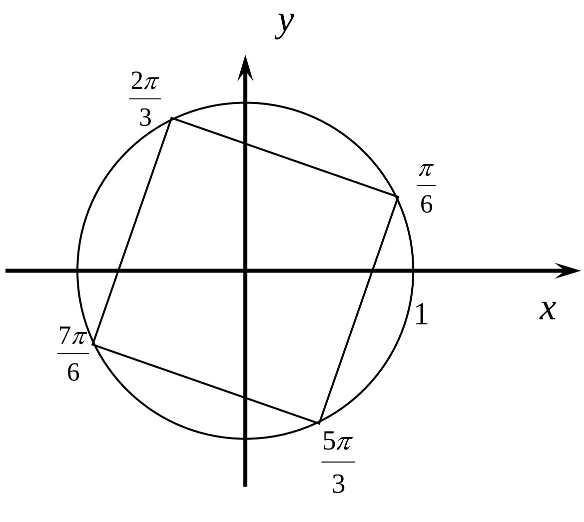


Рисунок 2

Вывод: все точки, соответствующие полученным значениям, располагаются на окружности радиуса R=1, причем аргумент первого равен $\frac{\pi}{6}$, а аргументы остальных получаются из первого последовательным увеличением на $\frac{\pi}{2}$ и образуют правильный четырехугольник.

Ответ.

$$z^4 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}, w_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}, w_4 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание 6

Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 3$; б) $|z + 2 - 3i| < 5$; в) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; г) $-3 \le \operatorname{Im} z < 4$; д) $\begin{cases} 1 \le z \cdot \bar{z} \le 4, \\ -\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0; \end{cases}$

Решение.

а) $|z| = 3$;

Так как $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ и $x^2 + y^2 = 9$. Мы получили уравнение окружности с радиусом $R = 3$ с центром в начале координат (рисунок 3).

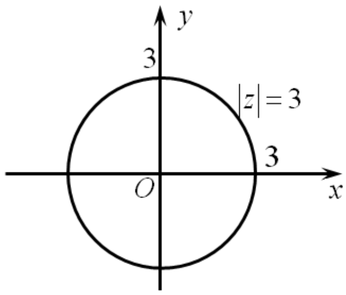


Рисунок 3

б) $|z + 2 - 3i| < 5$;

Так как $|z + 2 - 3i| = |x + iy + 2 - 3i| = |(x+2) + i(y-3)| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$,

то $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} < 5$ и $(x+2)^2 + (y-3)^2 < 25$. Решением данного неравенства являются точки, лежащие внутри окружности с радиусом $R = 5$ с центром в точке

(-2;3) без точек окружности (рисунок 4).

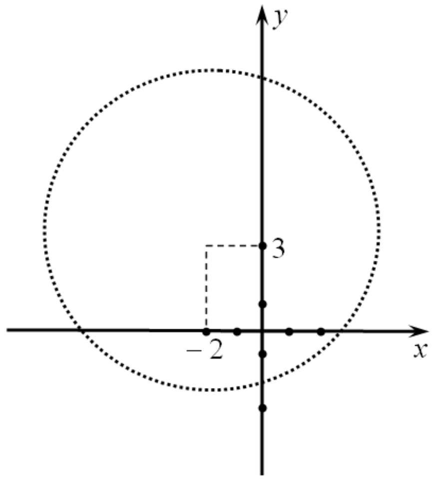


Рисунок 4

в) $\arg z = \frac{\pi}{6}$;

$\arg z = \varphi$ - *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $[0;2\pi)$ или $(-\pi;\pi]$, то есть точки z, лежащие на комплексной плоскости, аргумент которых равен $\frac{\pi}{6}$, лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{6}$ к действительной оси (рисунок 5).

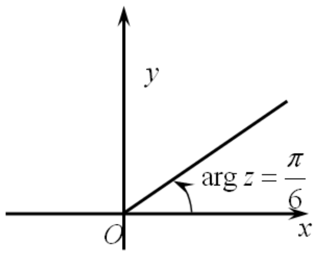


Рисунок 5

г) $-3 \le \operatorname{Im} z < 4$;

Так как $\operatorname{Im} z = y$, то $-3 \le y < 4$. Точки, удовлетворяющие данному неравенству, будут лежать между двумя горизонтальными прямыми $y = -3$, $y = 4$. Причем точки прямой $y = -3$ удовлетворяют неравенству, а точки прямой $y = 4$ не удовлетворяют.

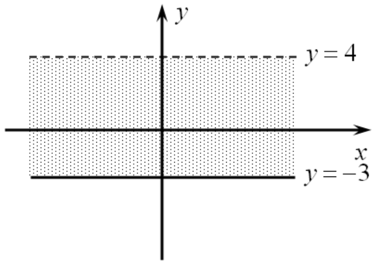


Рисунок 6

д) $\begin{cases} 1 \le z \cdot \bar{z} \le 4, \\ -\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0; \end{cases}$

Так как $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде: $\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \\ -\sqrt{3} \le y \le 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \le y \le 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$, включая прямые $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$. Искомое множество точек заштриховано на рисунке 7

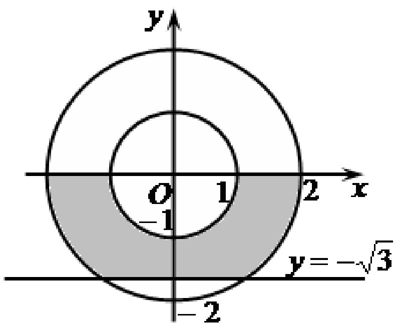


Рисунок 7

1.1 Задания к разделу «Комплексные числа. Действия над комплексными числами»

1.1 Число i^{13} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

1.2 Число i^{35} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

1.3 Число i^{100} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

1.4 Число i^{2010} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

1.5 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2+1=0$ имеет корни:

а) 1; –1; б) $-i$; i; в) $i\pm1$; г) корней нет.

1.6 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2-4z+5=0$ имеет корни:

а) $2\pm i$; б) $i\pm2$; в) $5\pm4i$; г) корней нет.

1.7 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^3+1=0$ имеет корни:

а) –1; б)1; –1; i; в) –1; $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$; г) корней нет.

1.8 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^4-16=0$ имеет корни:

а) 4; –4; б) $2\pm2i$; в) 2; –2; $-2i$; $2i$ г) корней нет.

1.9 Модуль и аргумент комплексного числа $z=\sqrt{3}-i$ равны:

а) $r=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$; б) $r=\sqrt{3},\varphi=\pi$; в) $r=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$; г) $r=1,\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

1.10 Комплексное число $z=2-3i$ расположено в:

а) I четверти; б) II четверти; в) III четверти; г) IV четверти.

1.11 Комплексное число $z=i-7$ расположено в:

а) I четверти; б) II четверти; в) III четверти; г) IV четверти.

1.12 Комплексное число $z=-4i$ расположено:

а) на мнимой оси; б) на действительной оси; в) в I четверти; г) в IV четверти.

1.13 Комплексное число $z=3$ расположено:

а) на мнимой оси; б) на действительной оси; в) в III четверти; г) в I четверти.

1.14 Комплексному числу $z=4i-1$ соответствует точка:

а) $M(4;-1)$; б) $M(-1;-4)$; в) $M(-1;4)$; г) $M(-4;-1)$.

1.15 Расстояние от начала координат до точки *M*, которая соответствует комплексному числу $z=3-4i$ равно:

а) 4; б) 3; в) 1; г) 5.

1.16 Угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси *Ox*, где точке *M* соответствует комплексное число $z=-i-1$, равен:

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{4}$.

1.17 Сопряженное число к числу $z = 2i - 4$ равно:

а) $2i + 4$; б) $-2i - 4$; в) $-2i + 4$; г) $2i - 4$.

1.18 Действительная часть комплексного числа $z = 2i + 3$ равна:

а) 3; б) 2; в) –2; г) 5.

1.19 Мнимая часть комплексного числа $z = 5 - 4i$ равна:

а) 4; б) –4; в) 1; г) –5.

1.20 Число $z \cdot \bar{z}$, если $z = 3i - 1$, равно:

а) 10; б) –10; в) 10 – 6*i*; г) 6*i* – 10.

1.21 Число $z = i - 1$ в тригонометрической форме имеет вид:

а) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $z = \sqrt{2}\left(\sin\frac{5\pi}{4} + i\cos\frac{5\pi}{4}\right)$; г) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

1.22 Комплексное число $z = -2i$ в показательной форме имеет вид:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$; б) $z = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$; в) $z = 2e^{2\pi i}$; г) $z = 2e^{\pi i}$.

1.23 Комплексное число $z = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$ в алгебраической форме имеет вид:

а) $z = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; б) $z = -\frac{1}{2}(i - \sqrt{3})$; в) $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; г) $z = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

1.24 Число $(1 + i)^8$ равно:

а) $-16i$; б) 16; в) –8; г) $8i$.

1.25 Результатом $\sqrt[3]{i}$ являются комплексные числа:

а) $\pm i, 1$; б) $-i, \pm\left(\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $-i, \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; г) $i, i \pm 1$.

1.26 Результатом $\sqrt[4]{-1}$ являются комплексные числа:

а) корней нет; б) $\pm i$; в) $\pm i, \pm 1$; г) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

1.27 Функция $f(z) = 2z^2 - 3z + 5$ при $z = 2 - i$ равна:

а) $5 - 5i$; б) $9 - 5i$; в) $5i - 5$; г) $9 + 5i$.

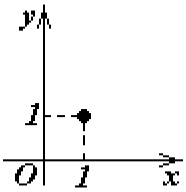
1.28 Результатом $z_1 \cdot \overline{z_2}$, если $z_1 = 3 + 2i, z_2 = i + 4$, является:

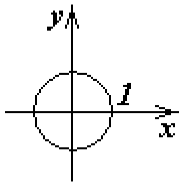
а) $14 + 5i$; б) $10 + 5i$; в) $14 + 11i$; г) $10 + 11i$.

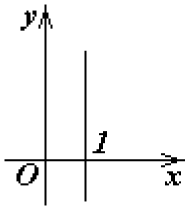
1.29 Результатом $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2}$, если $z_1 = i - 1, z_2 = 2 + i$, является:

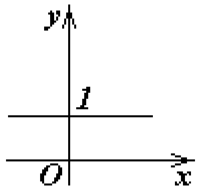
а) $-0{,}1 - 0{,}7i$; б) $-0{,}1 + 0{,}7i$; в) $0{,}1 + 0{,}7i$; г) $0{,}1 - 0{,}7i$.

1.30 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|z| = 1$, является:

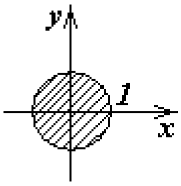
а) 

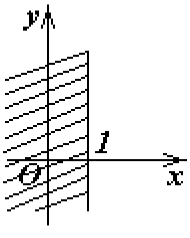
б) 

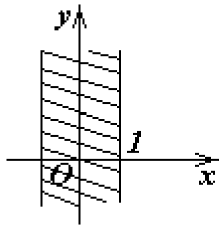
в) 

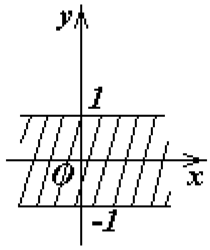
г) 

1.31 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|\operatorname{Re} z| \le 1$, является:

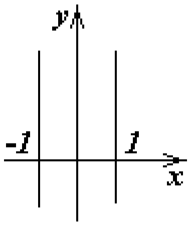
а) 

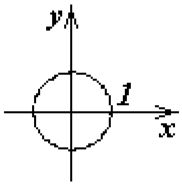
б) 

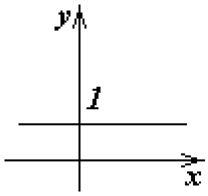
в) 

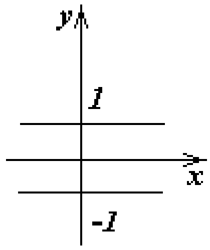
г) 

1.32 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|\operatorname{Im} z| = 1$, является:

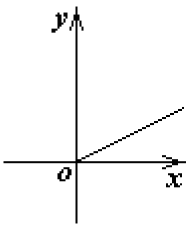
а) 

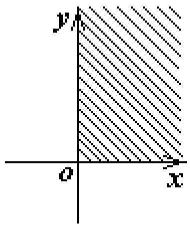
б) 

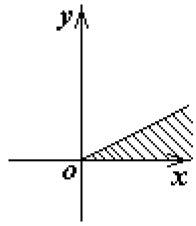
в) 

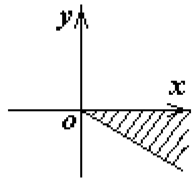
г) 

1.33 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$, является:

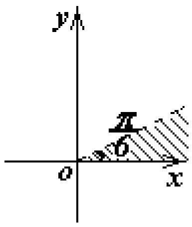
а) 

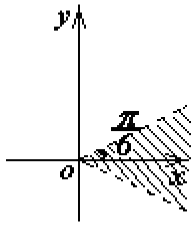
б) 

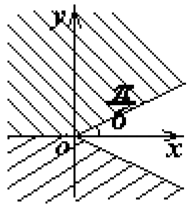
в) 

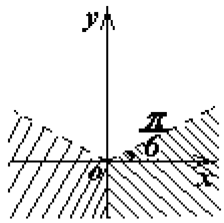
г) 

1.34 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|\arg z| < \dfrac{\pi}{6}$, является:

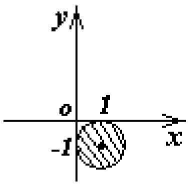
а) 

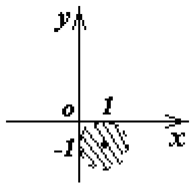
б) 

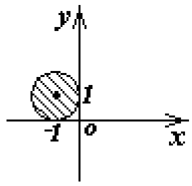
в) 

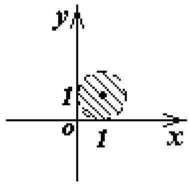
г) 

1.35 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|z - i + 1| \le 1$, является:

а) 

б) 

в) 

г) 

1.36 Сопряженное число к числу $z = 2 - i$ имеет вид:

а) $z = -2 - i$; б) $z = 2 + i$; в) $z = -2 + i$; г) $z = -(2 - i)$.

1.37 В алгебраической форме число $z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ имеет вид:

а) $1 + i$; б) $1 - i$; в) $-1 + i$; г) $-1 - i$.

1.38 Уравнение $z^2 = i$ над полем комплексных чисел имеет корни:

а) $\pm i$; б) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; в) $1 \pm i$; г) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

1.39 Уравнение $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ над полем комплексных чисел имеет корни:

а) $5 \pm 2i$; б) $\pm 2i$; в) $5 - 2i, 2i$; г) $2i \pm 5$.

1.40 Уравнение $|z| + z = 8 + 4i$ над полем комплексных чисел имеет корни:

а) $3 + 4i$; б) $3 - i$; в) $\pm(3 + 4i)$; г) $4 + 8i$.

1.41 Если комплексное число $z = x + yi$ задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то сопряженное ему число $\bar{z} = x - yi$ записывается в форме:

а) $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$; б) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;

в) $\bar{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; г) $\bar{z} = -r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1.42 Укажите неверное утверждение: «Если тригонометрическая запись комплексного числа $z = x + yi$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то…»

а) $r = \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$; в) $x = r\cos\varphi$; г) $y = r\sin\varphi$.

1.43 Комплексное число, противоположное числу $z = a + bi$, имеет вид:

а) $a - bi$; б) $-a + bi$; в) $-a - bi$; г) $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$.

1.44 Укажите верное утверждение:

а) аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов множителей;

б) аргумент частного комплексных чисел равен частному аргументов данных чисел;

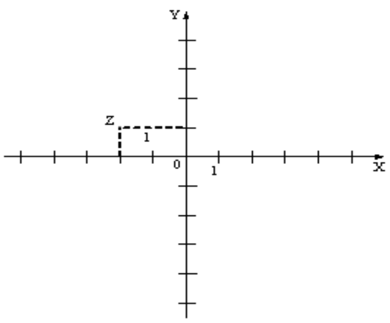
в) аргумент частного комплексных чисел равен произведению аргументов данных чисел;

г) аргумент произведения комплексных чисел равен разности аргументов множителей.

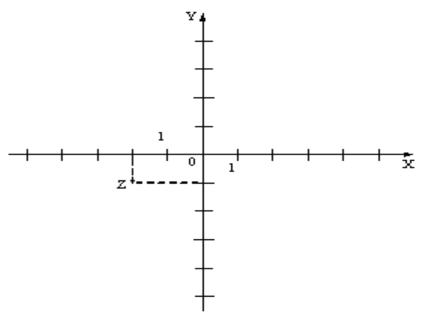
1.45 Изображение комплексного числа $z = 1 - 2i$ на комплексной плоскости Oxy имеет вид:

1.46

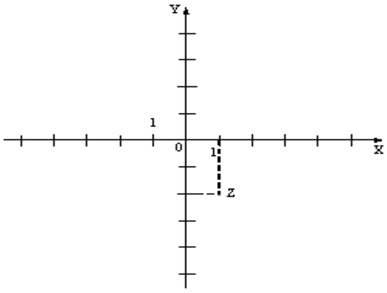
а)

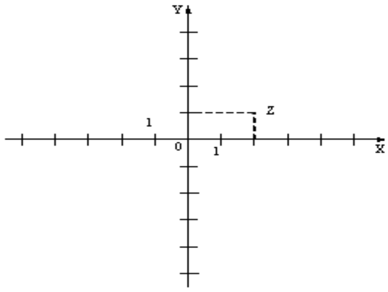


в)

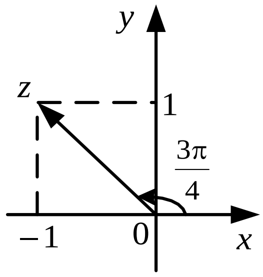


б) г)





1.47 На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z = x + iy$. Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид:



а) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$; в) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$; г) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

1.48 Полярные координаты точки $A(3,4)$ имеют вид:

а) $\left(5, arctg\,\frac{3}{4}\right)$; б) $\left(25, arctg\,\frac{3}{4}\right)$; в) $\left(5, arctg\,\frac{4}{3}\right)$; г) $\left(25, arctg\,\frac{4}{3}\right)$.

1.49 Аргумент комплексного числа $2 + \sqrt{2}i$ равен:

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

1.50 Аргумент комплексного числа $2 - \sqrt{2}i$ равен:

а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

1.51 Найти сумму чисел $z_1 + z_2$, если $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 + i$.

а) $3 + 2i$; б) $2 + 2i$; в) $2i$; г) 3.

1.52 Действительная часть комплексного числа $(1+i)^2$ равна …

а) 0; б) 1; в) –1; г) 2.

1.53 Если $z = 2 + 3i$, то сопряженное ему комплексное число $\bar{z}$ равно а) $2-3i$; б) $3+2i$; в) $-2+3i$; г) $3-2i$.

1.54 Мнимая часть комплексного числа $(1-i)^2$ равна…

а) i; б) $-i$; в) $-2i$; г) 0.

1.55 Модуль комплексного числа $3+4i$ равен…

а) 4; б) 7; в) 5; г) 3.

1.56 Число -1, представленное в тригонометрической форме, имеет вид:

а) $1(\cos 0+i\sin 0)$; в) $1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $1(\cos\pi+i\sin\pi)$; г) $1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

1.57 Значение функции $f(z)=z^2+i$ в точке $z_0=1+i$ равно:

а) $2+3i$; б) $2i$; в) $3i$; г) $3+2i$.

1.58 Даны два комплексных числа $z_1=2i$ и $z_2=1-3i$, число $z=\frac{\overline{z_1}}{z_2}$ равно:

а) $-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$; б) $0{,}6+0{,}2i$; в) $0{,}6-0{,}2i$; г) $-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i$.

1.59 Даны комплексные числа: $z_1=1+i$, $z_2=2-3i$, $z_3=-i$, тогда значение $\overline{z_1}\cdot(z_2+z_3)$ равно:

а) $6-6i$; б) $6-2i$; в) $-2-6i$; г) $2-6i$.

2 Раздел «Матрицы. Действия с матрицами»

Задание 1

Вычислить матрицу $C=A\cdot B-3B\cdot E+2A^2-4B^T$,

если $A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Решение:

$C=A\cdot B-3B\cdot E+2A^2-4B^T$, если $A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2}$;

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-3 & 12-1 \\ 4-6 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $3B \cdot E = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+0 & 0+6 \\ 9+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-1 & -6+2 \\ 6-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $4B^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $2A^2 = 2\begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$C = A \cdot B - 3B \cdot A + 2A^2 - 5B^2 = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -11 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$.

2.1 Задания к разделу «Матрицы. Действия с матрицами»

2.1 Если матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, то сумма $a_{23} + a_{32}$ равна:

а) 4; б) 6; в) 9; г) -14.

2.2 Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $3A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$.

2.3 Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $\frac{1}{2}A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

2.4 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $\frac{1}{2}A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $A + E$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.6 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица AB имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) вычислить невозможно.

2.7 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица BA имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) вычислить невозможно.

2.8 Пусть $A = (1 \quad 3 \quad -1)$, тогда $A \cdot A^T$ есть:

а) $(1 \quad 9 \quad 1)$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) (11); г) произведение невозможно.

2.9 Пусть $A = (1 \quad 3 \quad -1)$, тогда $A^T \cdot A$ есть:

а) $(1 \quad 9 \quad 1)$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) 11; г) произведение невозможно.

2.10 Для того чтобы получить единичную матрицу, к матрице $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ нужно прибавить:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.11 Матрица $B_{n\times h}-A_{g\times m}$ существует, если:

а) $n=m, h=g$; б) $g=m, n=h$; в) $n=h=g=m$; г) $n=g, h=m$.

2.12 Матрица $B_{4\times 3}\cdot A_{3\times 2}$ имеет размер:

а) 3×3; б) 4×2; в) 4×3; г) 3×2.

2.13 Матрица $B_{n\times h}\cdot A_{g\times m}$ существует, если:

а) $n=m$; б) $g=m$; в) $n=h$; г) $h=g$.

2.14 Матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица $B\cdot A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$.

2.15 Матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица $B\cdot A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

2.16 Матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица $A\cdot B$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

2.17 Матрицы $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица $A\cdot B$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 26 & 22 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$.

2.18 Матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 4\\3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\-2 & -6\end{pmatrix}$. Матрица $A\cdot B$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-2 & -6\\-9 & -27\\-13 & -39\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\-1 & -12\\-6 & -30\end{pmatrix}$; в) не существует; г) $\begin{pmatrix}-6 & 0\\-3 & -36\\-13 & -39\end{pmatrix}$.

2.19 Матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-2 & 5\end{pmatrix}$. Матрица $3B-2A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}11 & 3\\10 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-9 & -2\\-10 & 7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}11 & 1\\10 & -1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-9 & -1\\-10 & 1\end{pmatrix}$.

2.20 Матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}6 & -2\end{pmatrix}$. Матрица $5A+\frac{1}{2}B$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}15 & 25\\3 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}18\\24\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}18 & 24\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}42\end{pmatrix}$.

2.21 Матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$. Матрица $3B+4A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}17 & -3\\6 & -2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}17\\10\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-96\\-24\end{pmatrix}$; г) не существует.

2.22 Матрица $B_{1\times3}\cdot A_{3\times1}$ имеет размер:

а) 3×3; б) 1×1; в) 1×3; г) 3×1.

2.23 Матрица $B_{2\times3}\cdot A_{3\times2}$ имеет размер:

а) 3×3; б) 2×2; в) 2×3; г) не существует.

2.24 Матрица $B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}$ имеет размер:

а) 3×3; б) 2×2; в) не существует; г) 3×2.

2.25 Матрица $B_{4\times2}\cdot A_{4\times1}$ имеет размер:

а) 4×4; б) 2×2; в) не существует; г) 2×4.

2.26 Матрица $B_{2\times5}\cdot A_{5\times3}$ имеет размер:

а) 2×5; б) 5×5; в) не существует; г) 2×3.

2.27 Матрица $B_{n\times h}+A_{g\times m}$ существует, если:

а) $n=m, h=g$; б) $g=m, n=h$; в) $n=h=g=m$; г) $n=g, h=m$.

2.28 Действие … с матрицами не существует.

а) сложение; б) умножение; в) деление; г) вычитание.

2.29 Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Матрица $2A-3E$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -6 & 5\end{pmatrix}$.

2.30 Матрица $A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Матрица $E+5\cdot A^T$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-14 & -9\\ -4 & 21\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-14 & -4\\ -9 & 21\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-14 & -5\\ -10 & 21\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-14 & -10\\ -5 & 21\end{pmatrix}$.

2.31 Матрица $A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Матрица $A^2+A\cdot A^T$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}10 & 2\\ 2 & 20\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}11 & -1\\ -2 & 18\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-14 & -5\\ -10 & 21\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}21 & 1\\ 0 & 38\end{pmatrix}$.

3 Раздел «Определитель. Способы вычисления определителей»

Задание 1

Вычислите определитель третьего порядка:

1) по правилу «треугольников» (правило Саррюса),

2) по элементам третьего столбца,

3) по элементам второй строки.

$$A_3=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение.

1) по правилу «треугольников» (правило Саррюса),

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \left(2\cdot 0\cdot 8 + (-1)\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot(-3)\cdot 4\right) - \left(3\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot(-1)\cdot 8 + (-3)\cdot(-2)\cdot 2\right) =$$

$$= \left(0 + 6 - 12\right) - \left(0 - 8 + 12\right) = -6 - 4 = -10.$$

2) по элементам третьего столбца,

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{13} + (-2)\cdot A_{23} + 8\cdot A_{33} =$$

$$= 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} + 8\cdot(-1)^{3+3}\cdot M_{33} =$$

$$= 4\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 8\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3-0) + 2\cdot(-6+3) + 8\cdot(0+1) =$$

$$= -12 + (-6) + 8 = -10.$$

3) по элементам второй строки

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + (-2)\cdot A_{23} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot M_{22} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-8-(-12)) + 0\cdot(16-12) + 2\cdot(-6-(-3)) = -1\cdot 4 + 0\cdot 4 + 2\cdot(-3) = -4 + 0 + (-6) = -10.$$

Ответ. -10.

3.1 Задания к разделу «Определитель. Способы вычисления определителей»

3.1 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ равно:

а) –12; б) 1; в) 0; г) 2.

3.2 Значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ равно:

а) -1; б) 2; в) 17; г) 0.

3.3 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ равно:

а) 0; б) –2; в) 4; г) 6.

3.4 Значение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равно:

а) 5; б) –9; в) –3; г) 0.

3.5 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен:

а) –12; б) –6; в) 6; г) 12.

3.6 Значение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ равно:

а) 5; б) –9; в) –3; г) 0.

3.7 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен:

а) –12; б) –6; в) 6; г) 12.

3.8 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен:

а) –12; б) –6; в) 6; г) 8.

3.9 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен: а) –12; б) –6; в) 6; г) 12.

3.10 Определитель $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен: а) 5; б) –11; в) 3; г) –9.

3.11 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ равен: а) 76; б) –76; в) 20; г) –20.

3.12 Для матрицы $A_3=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение A_{13} равно:

а) 1; б) 0; в) 41; г) –71.

3.13 Для матрицы $A_3=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение A_{32} равно:

а) 4; б) –4; в) 3; г) –3.

3.14 Для матрицы $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ минор M_{21} равен: а) –28; б) 28; в) 5; г) –5.

3.15 Для матрицы $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ минор M_{33} равен: а) 4; б) –4; в) –33; г) 37.

3.16 Определитель матрицы $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ равен:

а) 2; б) 0; в) 5; г) не существует.

3.17 Определитель $\begin{vmatrix} -3i & -1 \\ 2 & i \end{vmatrix}$ равен: а) 5; б) –5; в) 1; г) –1.

3.18 Определитель $\begin{vmatrix} 2i & -3i & 1 \\ -i & i & 5 \\ 0 & 2i & 0 \end{vmatrix}$ равен: а) –18; б) 18; в) 22; г) –22.

3.19 Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения есть:

а) минор; б) определитель; в) матрица; г) 0.

3.20 Определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, есть:

а) алгебраическое дополнение; б) минор;

в) транспонированная матрица; г) ранг.

3.21 Произведение элементов, стоящих на главной диагонали, в диагональной матрице есть:

а) минор; б) алгебраическое дополнение; в) определитель; г) 0.

3.22 Сумма произведений элементов столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца есть:

а) минор; б) определитель; в) матрица; г) 0.

3.23 Определитель не изменит свое значение, если:

а) поменять местами две строки;

б) поменять местами два столбца;

в) поменять местами строки со столбцами;

г) все элементы строки (столбца) умножить на любое число.

3.24 Определитель изменит свое значение на противоположное, если:

а) поменять местами строки со столбцами;

б) поменять местами две строки (столбца);

в) к элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца) умноженные на любое число;

г) все элементы строки (столбца) умножить на любое число.

3.25 Определитель $\begin{vmatrix} a & d & b \\ d & 0 & a \\ b & d & c \end{vmatrix}$ разложен по элементам третьего столбца:

а) $b\begin{vmatrix} d & 0 \\ b & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & d \\ b & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & d \\ d & 0 \end{vmatrix}$; в) $b\begin{vmatrix} d & 0 \\ b & d \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a & d \\ b & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & d \\ d & 0 \end{vmatrix}$;

б) $b\begin{vmatrix} d & 0 \\ b & d \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & d \\ b & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & d \\ d & 0 \end{vmatrix}$; г) $b\begin{vmatrix} d & 0 \\ b & d \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & d \\ b & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & d \\ d & 0 \end{vmatrix}$.

3.26 Определитель $\begin{vmatrix} ad & d & a \\ d^2 & 4d & d \\ db & d & b \end{vmatrix}$ равен:

а) $d^2b + a^2d + 4d^3a - adb$; в) $4d^2ba + ad^3 + 4d^2ba - adb + d^4$;

б) $d^2b - 4b^2d + 4d^3a - adb - 4d^2ab$; г) 0.

3.27 Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ равен: а) 124; б) -62; в) 62; г) 0.

3.28 Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ равен: а) 124; б) -62; в) 62; г) 0.

4 Раздел «Обратная матрица. Ранг матрицы»

Задание 1

Найдите A^{-1} обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

План нахождения обратной матрицы:

1 Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (9 - 50 - 12) - \left(-45 - 15 + 8\right) = -53 + 52 = -1.$$

Матрица *невырожденная*, следовательно, обратная матрица существует.

2 Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}=3+5=8;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-2-3)=-(-5)=5;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot M_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-10-(-9)=-10+9=-1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot M_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -5 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(4+25)=-29$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^4\cdot M_{22}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-3-15=-18;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot M_{23}=-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-1\cdot(-15+12)=-1\cdot(-3)=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot M_{31}=1\cdot\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-4+15=11;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot M_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(3-10)=7;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot M_{33}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-9+8=-1.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ -29 & -18 & 3\\ 11 & 7 & -1\end{pmatrix}.$

3 Транспонируем данную матрицу, т. е. меняем строки и столбцы местами: $A^*=\begin{pmatrix}8 & -29 & 11\\ 5 & -18 & 7\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}.$

4 Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*.$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Проверка $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (по определению обратной матрицы).

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 2

Найдите с помощью элементарных преобразований обратную матрицу A^{-1}, к данной матрице A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Припишем к данной матрице справой стороны единичную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$, где слева получится единичная матрица, тогда справа обратная:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \times(-2) \;\; \times(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \times \frac{1}{-3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \times 6 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \times \frac{1}{9} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)\times(-2) \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)\times(-2)\sim$$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$. Итак, $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Ответ. $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите ранг матрицы методом элементарных преобразований если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11\\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-3) & \times(-1)\\ & + \\ & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\times\left(-\frac{3}{7}\right) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20\\ 0 & 0 & -\frac{12}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{60}{7}\end{pmatrix},$$

$r(A)=3$ т.к. минор третьего порядка отличен от нуля; т.е. $M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -7 & 4\\ 0 & 0 & \frac{-12}{7}\end{vmatrix}=1\cdot(-7)\cdot(\frac{-12}{7})=12\neq 0$

б) $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \times(-2)\times(-1)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-2)\times(1)\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(4)\times(-3)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \times(3)\times(-2)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ r(A)=4.$$

Ответ. а) $r(A)=3$; б) $r(A)=3$; в) $r(A)=4$

4.1 Задания к разделу «Обратная матрица. Ранг матрицы»

4.1 Обратная матрица к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 4 & -8\end{pmatrix}$ имеет вид:

а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -4 & 8\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.2 Обратная матрица к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ имеет вид:

а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -3 & 7\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.3 Обратная матрица к матрице $A=\begin{pmatrix}d & b\\ o & c\end{pmatrix}$ имеет вид:

а) $A^{-1}=\frac{1}{dc}\begin{pmatrix}c & -b\\ 0 & d\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}c & -b\\ 0 & d\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}c & 0\\ -b & d\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.4 Обратная матрица к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-1 & -7 & -2\\ 1 & -4 & 2\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 12\\ -1 & 6 & 5\\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & -4 & -6\\ -8 & 0 & -4\\ -6 & 0 & 11\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.5 A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A, если:

а) $A^{-1}\cdot A=1$; б) $A^{-1}\cdot A=E$; в) $A^{-1}+A=0$; г) $A^{-1}+A=E$.

4.6 Матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ имеет решение:

а) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.7 Матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ имеет решение:

а) $X=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&3\\0&1&3\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&1&4\end{pmatrix}$; г) не существует.

4.8 Ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&-2&3&-2&4\\2&-4&5&1&7\\1&-2&1&8&2\end{pmatrix}$ равен: а) 3; б)2; в)1; г) 4.

4.9 Ранг матрицы $\begin{pmatrix}2&3&5&-3&2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{pmatrix}$ равен: а) 3; б)2; в)1; г) 4.

4.10 Ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&3&1&5&9\\0&-2&3&1&2\\0&1&-1&0&0\\1&2&3&6&10\end{pmatrix}$ равен: а) 3; б)2; в)1; г) 4.

4.11 Матрица $A=\begin{pmatrix}a&2\\b&3\end{pmatrix}$ является вырожденной при a и b, равном:

а) a = 2, b = 3; б) a = –2, b = –3; в) a = 0, b = 0; г) a = 1, b = 1.

4.12 Матрица $A=\begin{pmatrix}b&1&2\\0&6&4\\0&0&6\end{pmatrix}$ является вырожденной при b, равном:

а) b = 36; б) $b=-\dfrac{1}{36}$; в) b = 0; г) b = 6.

4.13 Матрица $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&a&2\\0&0&c\end{pmatrix}$ является невырожденной при a и c, равных:

а) c = 1, a = 1; б) c = 0, a = 1; в) c = –1, a = 0; г) c = 0, a = 0.

4.14 При $\lambda=3$ ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ равен: а) 3; б)2; в)1; г) 0.

4.15 При $\lambda=0$ ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ равен: а) 3; б)2; в)1; г) 0.

4.16 При $\lambda = 3$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ равен:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 4.

4.17 При $\lambda = 2$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ равен:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 4.

4.18 При $\lambda = 1$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ равен:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 4.

4.19 При $\lambda = 0$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ равен:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 4.

4.20 Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ равен: а) 3; б) 2; в)1; г) 4.

4.21 Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы при λ, равном:

а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{3}$; г) 3.

4.22 Матрица $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы при λ, равном:

а) $-\dfrac{8}{3}$; б) $\dfrac{10}{3}$; в) 2; г) $\dfrac{8}{3}$.

5 Раздел «Система линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений»

Задание 1

Решить систему линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B. \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1) Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30; \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 90; \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -60;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 150. \quad x_1 = \frac{90}{30} = 3; \quad x_2 = \frac{-60}{30} = -2; \quad x_3 = \frac{150}{30} = 5.$$

2) Решим систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы: $X = A^{-1} \cdot B$. Найдем обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30$;

2 $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9-(-4) = 13$; $A_{12} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(6-1) = -5$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8-(-3) = 11$; $A_{21} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(3-8) = 5$;

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5$; $A_{23} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(4-(-1)) = -5$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$; $A_{32} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1-4) = 5$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \\ 5 & 5 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Транспонируем данную матрицу $\tilde{A}$: $A^* = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Полученную матрицу подставим в равенство $X = A^{-1}\cdot B$.

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 13\cdot 11 + 5\cdot(-5) + (-7)\cdot 4 \\ -5\cdot 11 + 5\cdot(-5) + 5\cdot 4 \\ 11\cdot 11 + (-5)\cdot(-5) + 1\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 143-25-28 \\ -55-25+20 \\ 121+25+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 90 \\ -60 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{90}{30} \\ -\frac{60}{30} \\ \frac{150}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3; \\ x_2 = -2; \\ x_3 = 5. \end{matrix}$$

3) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \times(-2) \times(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -27 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \end{array}\right) \times(-5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -27 \\ 0 & 0 & 30 & 150 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ от расширенной матрицы перейдем к системе линейных уравнений

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_2 - 5x_3 = -27, \\ 30x_3 = 150, \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_2 - 5x_3 = -27, \\ x_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2\cdot 5 = 11, \\ x_2 - 5\cdot 5 = -27; \\ x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10 = 11, \\ x_2 - 25 = -27, \\ x_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ. $(3; -2; 5)$

5.1 Задания к разделу «Система линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений»

5.1 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax_1 + x_2 = a, \\ x_1 + ax_2 = 1. \end{cases}$ при $a = -1$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.2 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}$ является:

а) $(i; i+1)$; б) $(i; i-1)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.3 Система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6, \\ ax_1 + x_2 = -3. \end{cases}$ при $a = -1{,}5$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.4 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i. \end{cases}$ является:

а) $(2i; i+2)$; б) $(2; -i+1)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.5 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = b \\ x + y + cz + c \end{cases}$ при $a = 1, b = 1, c = 1$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.6 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 2z_1-(2+i)z_2=-i, \\ (4-2i)z_1-5z_2=-1-2i. \end{cases}$ является:

а) $(2i;i+2)$; б) $(2;-i+1)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.7 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+by+z=b \\ x+y+cz+c \end{cases}$ при $a=1, b=1, c=0$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.8 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} (1-i)z_1-3iz_2=-i, \\ 2z_1-(3+3i)z_2=3-i. \end{cases}$ является:

а) $(i;i+1)$; б) $(i;i-1)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.9 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+5x_2+6x_3=0 \end{cases}$ является:

а) $(1;0;-1)$; б) $(1;-2;3)$; в) $\varnothing$; г) $(-2;-6;7)$.

5.10 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2=3, \\ 7x_1+5x_2=16. \end{cases}$ является:

а) $(3;1)$; б) $(3;-1)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.11 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} -x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=1. \end{cases}$ является:

а) $(1;2)$; б) $(3;4)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

5.12 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+by+z=b \\ x+y+cz+c \end{cases}$ при $a=1, b=0, c=1$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.13 Система линейных уравнений $\begin{cases} 15x_1+ax_2=3, \\ 5x_1+10x_2=1. \end{cases}$ имеет множество решений при a, равном: а) 3; б) 10; в) –5; г) 30.

5.14 Система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 20, \\ ax_1 + 14x_2 = 15. \end{cases}$ не имеет решения при a, равном: а) 6; б) –6; в) –5; г) 0.

5.15 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax_1 + x_2 = a, \\ x_1 + ax_2 = 1. \end{cases}$ при $a = 1$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

5.16 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ является:

а) $(1;1;-1)$; б) $(1;-1;1)$; в) $(2;-1;2)$; г) $(\frac{9}{4};-\frac{3}{4};-\frac{3}{4})$.

5.17 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases}$ является:

а) $(1;0;-1)$; б) $(1;-2;3)$; в) $\varnothing$; г) $(-2;-6;7)$.

5.18 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$ является:

а) $(0;5;6)$; б) $(3;2;0)$; в) $\varnothing$; г) $(9;6;0)$.

5.19 Система линейных уравнений, имеющая решение, называется:

а) определенной; б) неопределенной; в) совместной; г) несовместной.

5.20 Система линейных уравнений, не имеющая решение, называется:

а) определенной; б) неопределенной; в) совместной; г) несовместной.

5.21 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 4y = 1, \\ x - 2y = 0 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.22 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.23 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-4y=1, \\ x-y=0 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.24 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-4y=1, \\ 4x-2y=2 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.25 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 4x-2y=0 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.26 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-4y=2, \\ x-2y=1 \end{cases} \cdots$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений;

г) имеет два решения.

5.27 Система линейных уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений при a, равном: а) 4; б) 0; в) 1; г) 2.

5.28 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений при a, равном: а) 1; б) 2; в) –4; г) 4.

5.29 Система линейных уравнений $\begin{cases} kx + 2y = 3, \\ 8x + 4y = 6 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений при k, равном: а) 1; б) 2; в) –4; г) 4.

5.30 Система линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + ky = 0 \end{cases}$ не имеет решения при k, равном: а) 0; б) 2; в) –2; г) –4.

5.31 Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4x - 6y = a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений при a, равном: а) 1; б) 2; в) –4; г)10.

5.32 Система линейных уравнений $\begin{cases} kx + 2y = 3, \\ 10x + 4y = 6 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений при k, равном: а) 1; б) 5; в) –4; г)4.

6 Раздел «Бинарные операции. Группы. Кольца. Поля»

6.1 Задания к разделу «Бинарные операции. Группы. Кольца. Поля»

6.1 Бинарная операция $\frac{a+b}{2}$ определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) C.

6.2 Бинарная операция $a - b$ не определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) C.

6.3 Бинарная операция a^b не определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) Q.

6.4 Бинарная операция $(a + \sqrt{2}b)$ определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) Q.

6.5 Бинарная операция $(a + bi)$ определена на множестве:

а) Z; б) N; в) C; г) Q.

6.6 Бинарная операция … определена на множестве натуральных чисел N.

1) $a \circ b = a - b$; 2) $a \circ b = a : b$; 3) $a \circ b = max\{a, b\}$; 4) $a \circ b = a + b$.

а) 1), 2); б) 2), 4); в) 3), 4); г) 4), 1).

6.7 Операция сложения ассоциативна на множествах ...

а) N; б) R; в) квадратных матриц размера n×n; г) C.

6.8 Операция умножения ассоциативна на множествах ...

а) Z; б) R; в) квадратных матриц размера n×n; г) C.

6.9 Операция сложения коммутативна на множествах ...

а) N; б) R; в) квадратных матриц размера m×n; г) C.

6.10 Операция умножения коммутативна на множествах ...

а) N; б) Q; в) квадратных матриц размера n×n; г) C.

6.11 Группа является аддитивной, если задана следующая операция:

а) $a + b$; б) $a * b$; в) a^b; г) $\ln(a * b)$.

6.12 Группа является мультипликативной, если задана следующая операция:

а) $a + b$; б) $a * b$; в) a^b ; г) $\ln(a * b)$.

6.13 Аддитивная группа не определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) Q.

6.14 Мультипликативная группа не определена на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) Q.

6.15 На множестве Z для аддитивной группы нейтральным элементом является:

а) 1; б) 0; в) –1; г) i.

6.16 На множестве Q для мультипликативной группы нейтральным элементом является:

а) 1; б) 0; в) –1; г) i.

6.17 На множестве Z для аддитивной группы обратимым элементом для элемента 5 является:

а) 5; б) 0; в) –5; г) $5i$.

6.18 На множестве Q для мультипликативной группы обратимым элементом для элемента 7 является:

а) –7; б) 7; в) $\frac{1}{7}$; г) $-\frac{1}{7}$.

6.19 На множестве квадратных матриц для аддитивной группы нейтральным элементом является:

а) единичная матрица; б) нулевая матрица;

в) обратная матрица; г) противоположная матрица.

6.20 На множестве квадратных матриц для аддитивной группы обратимым элементом является:

а) единичная матрица; б) нулевая матрица;

в) обратная матрица; г) противоположная матрица.

6.21 Кольцами являются:

а) (N,+,·); б) (Z,+,·); в) (C,+,·); г) (R,+,·).

6.22 <K, +, *> не является кольцом на множестве:

а) Z; б) N; в) R; г) Q.

6.23 Кольцом многочленов с целыми коэффициентами является:

а) $z = a + bi$; б) $z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$; в) z[x]; г) M(n,R).

6.24 Кольцом матриц n-го порядка над полем R является:

а) $z = a + bi$; б) $z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$; в) z[x]; г) M(n,R).

6.25 Полем являются:

а) (N,+,·); б) (Z,+,·); в) (C,+,·); г) (R,+,·).

7 Раздел «Многочлены. Действия над многочленами»

Задание 1

Используя схему Горнера, разделить многочлен $-x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 32$ на многочлен $x + 2$.

Решение.

Составим схему Горнера:

	-1	0	4	-8	0	32
		+	+	+	+	+
		2	-4	0	16	-32
-2	-1	2	0	-8	16	0

Остаток равен 0, следовательно, число $x = -2$ является корнем многочлена$-x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 32$.

Ответ. $r = 0$

Задание 2

Найдите значение многочлен $2x^5 - 4x^4 - x^2 + 1$ при $x = 7$.

Решение.

Составим схему Горнера:

	2	-4	0	-1	0	1
		+	+	+	+	+
		14	70	490	3423	23961
7	2	10	70	489	3423	23962

Остаток равен 23962.

Ответ. $r = 23962$.

Задание 3

Найти рациональные корни многочлена

$f(x) = 16x^3 - 20x^2 - 48x + 63$.

Решение.

Проиллюстрируем метод деления многочлена на одночлен по схеме Горнера.

	16	-20	-48	63
		+	+	+
		24	6	-63
$\frac{3}{2}$	16	4	-42	0
		+	+	
		24	42	
$\frac{3}{2}$	16	28	0	

		+
		-28
$-\frac{7}{4}$	16	0

Ответ. Двойной корень $x = \frac{3}{2}$, и $x = -\frac{7}{4}$.

Задание 7

Зная, что i является корнем многочлена $f(x) = \mathrm{x}^6 + 3x^5 + x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1$, найти остальные его корни.

Решение.

Всего в поле комплексных чисел этот многочлен имеет шесть корней. Так как все коэффициенты многочлена $f(x) = \mathrm{x}^6 + 3x^5 + x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1$ – это действительные числа, то вместе с числом i корнем этого многочлена является и сопряженное ему число(- i). Два корня найдены $x_1 = i, x_2 = -i$. Проверим по схеме Горнера:

	1	3	1	6	-1	3	-1
		+	+	+	+	+	+
		i	$3i - 1$	-3	$3i$	$-i - 3$	1
i	1	$3+i$	$3i$	3	$3i - 1$	$-i$	0
		+	+	+	+	+	
		i	$3i-2$	$-2i - 6$	$2-3i$	i	
i	1	$3+2i$	$6i - 2$	$-2i - 3$	1	0	
		+	+	+	+		
		$-i$	$1-3i$	$3+i$	-1		
$-i$	1	$3+i$	$3i - 1$	$-i$	0		
		+	+	+			
		$-i$	$-3i$	i			
$-i$	1	3	-1	0			

Следовательно, $x_{1,2} = i, x_{3,4} = -i$.

После деления мы получили многочлен второй степени:

$f(x) = x^2 + 3x - 1$. Следовательно, корнями квадратного уравнения будут : $x_{5,6} = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = i, x_{3,4} = -i, x_{5,6} = \frac{-3\mp\sqrt{13}}{2}$.

7.1 Задания к разделу «Многочлены. Действия над многочленами»

7.1. Какое из предложенных чисел является корнем многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$?

а) 2; б) 3; в) 1; г) –3.

7.2. Какое из предложенных чисел является корнем многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$?

а) 2; б) 3; в) –1; г) –3.

7.3. Какое из предложенных чисел является корнем многочлена $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$?

а) 2; б) –2; в) 3; г) 0.

7.4. Какое из предложенных чисел является корнем многочлена $f(x) = x^4 - x^3 - 4x + 4$?

а) 1; б) –1; в) 3; г) 0.

7.5. Корнем многочлена $y^2 + 2y + 10 = 0$ является число:

а) $-1+3i$; б) 2; в) $1+3i$; г) 4.

7.6. Суммой многочленов $f(x) = x^3 - 2x + 3$ и $g(x) = x^2 - 5x + 1$ является многочлен:

а) $x^5 - 3x^2 + 4$; б) $x^3 + x^2 - 7x + 4$; в) $x + 3$; г) $x^5 + 3x + 4$.

7.7. Дана система векторов-многочленов $f(t) = 1 - t^2$, $g(t) = 1 + t^3$. Тогда линейная комбинация $f + 2g$ имеет вид:

а) $2 - t^2 + t^3$; б) $3 - t^2 + 2t^3$; в) $2t^3 - t^2$; г) $3 - 2t^2 + t^3$.

7.8. Многочлен $x^3 - x - 6$ имеет один действительный корень. Этот корень равен:

а) 2; б) 0; в) –2; г) 1.

7.9. Многочлен разложен на множители: $f(x)=x^2(x^2+3)^3(x+1)^4$. Корень $x=-1$ имеет кратность, равную:

а) 3; б) 2; в) 12; г) 4.

7.10. Сколько действительных решений имеет многочлен $P_3(x)=x^3+x-2$?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

7.11. Сколько действительных корней имеет многочлен $P_4(x)=x^4+5x^2+6$?

а) 1; б) 0; в) 4; г) 3.

7.12. Сумм всех рациональных корней многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2-8x-3\ldots$

а) 3; б) $-\frac{3}{2}$; в) 1,5; г) $-\frac{1}{2}$.

7.13. Сумм всех иррациональных корней многочлена $P_3(x)=x^3-3x^2-3x+1\ldots$

а) $\sqrt{3}$; б) 4; в) $2-\sqrt{3}$; г) $4-2\sqrt{3}$.

7.14. Сумма всех корней многочлена $P_3(x)=x^3-3x-2$ равна:

а) 1; б) –1; в) 0; г) 2.

7.15. Многочлен $P_4(x)=x^4+6x^2+\lambda x+6$ разделится на $x+2$ нацело при λ, равном:

а) –12; б) 32; в) –11; г) –23.

7.16. Многочлен $P_3(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+7$ разделится нацело на двучлен $(x+1)$ при λ, равном:

а) 18; б) –2; в) –21; г) 2.

7.17. Указать на какие из предложенных двучленов делится без остатка многочлен $P_5(x)=x^5+2x^4-3x^3+x^2+2x-3$:

1) $x-2$; 2) $x-1$; 3) $x+3$; 4) $x+2$.

а) 1, 2; б) 2, 3; в) 3, 4; г) 1, 3.

7.18. Остаток от деления многочлена $P_3(x)=x^3+4x^2-3x+5$ на двучлен $(x-2)$ равен:

а) 23; б) 13; в) –23; г) 7.

7.19. Остаток от деления многочлена $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ на двучлен $(x+2)$ равен: а) 7; б) 13; в) 21; г) –21.

7.20. Остаток от деления многочлена $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ на двучлен $2x-1$ равен: а) 2; б) 3; в) -1; г) 1.

7.21. Остаток от деления многочлена $h(x) = 27x^3 + 9x^2 + 3x - 1$ на двучлен $(3x-1)$ равен: а) 2; б) -1; в) $\frac{1}{9}$; г) 0.

7.22. Многочлен $f(x)$ при делении на $x^3 - 7x - 6$ дает в остатке $x^2 + x + 1$. Найдите $f(-1) \cdot f(-2) - f(3)$.

а) 10; б) 16; в) –10; г) –16.

7.23. Многочлен $f(x)$ при делении на $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ дает в остатке $x^2 - x - 1$. Найдите $f(-2) \cdot f(2) - f(-3)$.

а) –16; б) 6; в) 16; г) –6.

8 Раздел «Векторное пространство. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение»

Задача 1

При каком значении α вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимноперпендикулярны и имеют следующие координаты: $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} - \alpha\bar{k}$?

Решение.

$\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} - \alpha\bar{k}$

$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, $\bar{a} = (\alpha;\ -3;\ 2)$, $\bar{b} = (1;\ 3;\ -\alpha)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha - 9 - 2\alpha = -9 - \alpha \Rightarrow -9 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -9$.

Ответ. $\alpha = -9$.

Задача 2

Найдите косинус угла, образованного векторами: $\bar{a} = (2;-4;4)$ и $\bar{b} = (-3;2;6)$.

Решение.

По формуле скалярного произведения двух векторов выразим косинус угла между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|a|\cdot|b|\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|a|\cdot|b|}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и их модули.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=-3\cdot 2+2\cdot(-4)+6\cdot 4=-6-8+24=10$,

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=6$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4+36}=\sqrt{9+4+36}=7$,

т.е. $\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{10}{42}=\dfrac{5}{21}$.

Ответ. $\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{5}{21}$

Задание 3

Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}=3\,\overline{p}+2\,\overline{q}$, $\overline{b}=2\,\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{q}|=4$, $|\overline{p}|=3$, $(\overline{p},\hat{\ }\overline{q})=\dfrac{3\pi}{4}$.

Решение.

Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов, найдем площадь параллелограмма: $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

$\overline{a}\times\overline{b}=\left(3\overline{p}+2\overline{q}\right)\times\left(2\overline{p}+\overline{q}\right)=6\overline{p}\times\overline{p}+3\overline{p}\times\overline{q}+4\overline{q}\times\overline{p}+2\overline{q}\times\overline{q}=$

$=3\overline{p}\times\overline{q}+4\overline{q}\times\overline{p}=-3\overline{q}\times\overline{p}+4\overline{q}\times\overline{p}=\overline{q}\times\overline{p}$.

$\left[\overline{p}\times\overline{p}=0 \text{ и } \overline{q}\times\overline{q}=0\right]$

$\left[\overline{p}\times\overline{q}=-\overline{q}\times\overline{p}\right]$.

$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{q}\times\overline{p}\right|=\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{p}\right|\cdot\sin(\overline{q},\hat{\ }\overline{p})=4\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

Ответ. $S=6\sqrt{2}\ (ед^2)$

Задание 4

Доказать, что 4 точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если точки имеют следующие координаты: $A\,(1;\,2;\,-1)$, $B\,(0;\,1;\,5)$, $C\,(-1;\,2;\,1)$, $D\,(2;\,1;\,3)$.

Решение.

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(-1;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(1;-1;4)$.

Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ - компланарны, а по признаку компланарности трех векторов смешанное произведение трех векторов должно быть равно 0, т.е. $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)=0$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=12-2-2-8=12-12=0.$$

Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Ответ. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задание 5

Найдите объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A, B, C, D и высоту, опущенной из вершины D на грань ABC, если:

$A\,(2;\,-1;\,1)$, $B\,(5;\,5;\,4)$, $C\,(3;\,2;\,-1)$, $D\,(4;\,1;\,3)$.

Решение.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}: V=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$

$V_{Тетраэдра}=\dfrac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$ $, V=\dfrac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|$.

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(3;6;3)$, $\overline{AC}=(1;3;-2)$, $\overline{AD}=(2;2;2)$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\left(3+1-4-3+2-2\right)=-18.$$

$V=\dfrac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|=\dfrac{1}{6}\left|-18\right|=\dfrac{1}{6}\cdot 18=3\ \left(ед^3\right)$. Из школьного курса известно, что объем тетраэдра равен: $V=\dfrac{1}{3}S\cdot H \;\Rightarrow\; H=\dfrac{3V}{S}$.

Найдем площадь основания. В основании лежит ΔABC. Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов, найдем площадь грани ABC: $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Найдем векторное произведение двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-12\bar{i}+9\bar{k}+3\bar{j}-6\bar{k}-9\bar{i}+6\bar{j}=-21\bar{i}+9\bar{j}+3\bar{k},$$

$\overline{AB}\times\overline{AC}=(-21;9;3)$. Найдем длину векторного произведения:

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-21)^2+9^2+3^2}=\sqrt{531},\text{ т.к. } S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,\text{ то } S=\frac{1}{2}\sqrt{531}\left(ед^2\right).$$

$$H=\frac{3\cdot 3}{\frac{1}{2}\sqrt{531}}=\frac{18}{\sqrt{531}}(ед).$$

Ответ. $V=3\ (ед^3)$, $H=\frac{18}{\sqrt{531}}(ед)$

8.1 Задания к разделу «Векторное пространство. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение»

8.1 Точка С, являющаяся серединой отрезка AB, где $A(3;-1)$ и $B(5;-3)$ имеет координаты:

а) $(8;-4)$; б) $(4;-2)$; в) $(2;-2)$; г) $(1;-1)$.

8.2 Даны точки $A(2;-3)$ и $B(4;1)$, где B – середина отрезка AC. Точка C имеет координаты:

а) $(8;-4)$; б) $(4;-2)$; в) $(2;-2)$; г) $(6;5)$.

8.3 Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=(2;1;0)$, $\bar{b}=(1;1;-3)$, равно:

а) –3; б) 1; в) 2; г) 3.

8.4 Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=(-2;-3;1)$, $\bar{b}=(-3;-1;-2)$, равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 0^0.

8.5 Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4, \varphi = 60^0$, равно:

а) 5; б) 6; в) 4; г) 2.

8.6 Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = (12;18;-6)$, $\overline{b} = (-4;-6;2)$, равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 180^0; г) 0^0.

8.7 Векторное произведение двух векторов $\overline{a} = (1;-3;4)$ и $\overline{b} = (3;5;-1)$ равно:

а) (4; 2; 3); б) (3; –15; –4); в) (–17; 13; 14); г) –16.

8.8 Вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если $\overline{p} = (3;-6;\lambda)$, $\overline{q} = (\mu;2;-4)$ коллинеарны при λ, μ, равных:

а) 24; 1; б) 12; 1; в) –12; –1; г) 12; –1.

8.9 Ортогональны вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если $\overline{p} = (-\alpha;-5;-8)$, $\overline{q} = (3;7;-\alpha)$ при α, равном: а) –7; б) 7; в) –3; г) –1.

8.10 Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = (3,-1,-6)$, $\overline{b} = (-4,-6,-1)$, равен:

а) 60^0; б) 90^0; в) 180^0; г) 0^0.

8.11 Смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = (2;-3;-2)$, $\overline{b} = (0;-3;-1)$ и $\overline{c} = (5;-2;1)$, равно: а) 25; б) –8; в) –25; г) $(7;-8;-2)$.

8.12 Вектора $\overline{a} = (-2;\alpha;-1)$, $\overline{b} = (1;-\alpha;0)$, $\overline{c} = (1;3;-1)$ компланарны при α, равном:

а) 1; б) 3; в) $\frac{-3}{2}$; г) –2.

8.13 Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$ и $\overline{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, равна: а) $\sqrt{56}$; б) $\sqrt{108}$; в) 4; г) 2.

8.14 Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = (-2,-3,1)$, $\overline{b} = (1,0,-2)$ и $\overline{c} = (0,-2,1)$, равен: а) 9; б) 13; в) 7; г) 2.

8.15 Площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;-2;1)$, $B(-4;3;-2)$, $C(-3;1;-1)$ равна: а) $\sqrt{30}$; б) $\frac{\sqrt{30}}{2}$; в) 30; г) 5.

8.16 Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = (-2,-3,1)$, $\overline{b} = (-4,-6,2)$, равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 0^0.

8.17 Длина вектора $\bar{a}$, если $\bar{a}=(2,-3;6)$, равна: а) 5; б) 11; в) 7; г) 49.

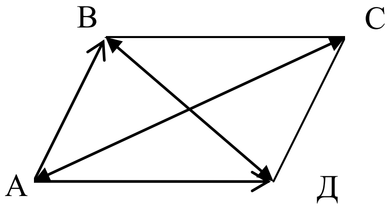
8.18 Норма вектора x, если $x=(-1;0;2;0;2;0)$, равна: а) 5; б) 3; в) 7; г) 9.

8.19 Угол между векторами $x=(0;\sqrt{2};0;-\sqrt{2})$ и $y=(\sqrt{2};1;0;-1)$ равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 45^0.

8.20 Норма вектора $x-y$, если вектора заданы координатами $x=(5;4;-6;1;2;-2)$ и $y=(5;6;-4;-1;4;-2)$, равна: а) 16; б) 8; в) 4; г) 7.

8.21 Суммой векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AД}$, изображенных на рисунке, является вектор:



а) $\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{BД}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{ДB}$.

9 Раздел «Прямая на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимные расположения прямых на плоскости»

Задача 1

Построить и составить уравнение прямой l:

а) проходящей через 2 различные точки $P(3;-1)$ и $Q(7;11)$;

б) проходящей через точку $A(5;-4)$ перпендикулярно прямой l, проходящей через точки B и C, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$;

в) проходящей точка $A(1;-2)$ параллельно прямой l, проходящей через точки B и C, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$;

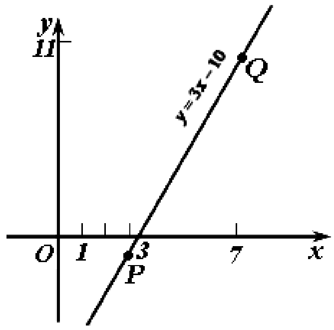
г) проходящей через точку $M(2;3)$ и направляющий вектор $\bar{s}=(1;-4)$;

д) проходящей через точку $M(-1;5)$ с нормальным вектором $\bar{n}=(-3;2)$.

Решение.

а) Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $P(3;-1)$ и $Q(7;11)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$



$$\frac{x-3}{7-3}=\frac{y-(-1)}{11-(-1)}\Rightarrow\frac{x-3}{7-3}=\frac{y+1}{11+1}\Rightarrow\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{12}\Big|\cdot 4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}\Rightarrow 3x-9=y+1\Rightarrow y=3x-10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y-10=0.$$

Рисунок 8

Ответ. $3x-y-10=0$

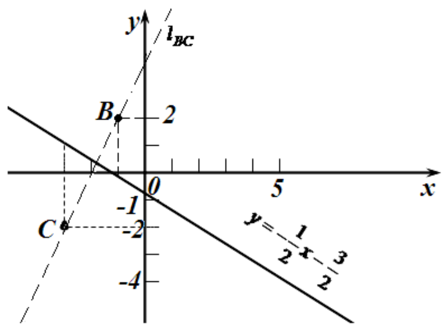
б) Уравнение прямой, проходящей через т. $A(5;-4)$ перпендикулярно прямой l_{BC}, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$ выглядит следующим образом:

Составим уравнение прямой l_{BC}: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$$\frac{x+1}{-3+1}=\frac{y-2}{-2-2}\Rightarrow\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{-4}\Big|\cdot(-2)\Rightarrow\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow 2x+2=y-2\Rightarrow y=2x+4$$

Уравнение l_{BC}: $y=2x+4$. Угловой коэффициент прямой l_{BC}: $k_{BC}=2$. Так как прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты противоположны по знаку и обратны по значению, т.е. $k=-\dfrac{1}{2}$. Воспользуемся формулой $y=y_0+k(x-x_0)\Rightarrow y=-4-\dfrac{1}{2}(x-5)\Rightarrow$

$$\Rightarrow y=-4-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow x+2y+3=0.$$



Ответ. $x+2y+3=0$

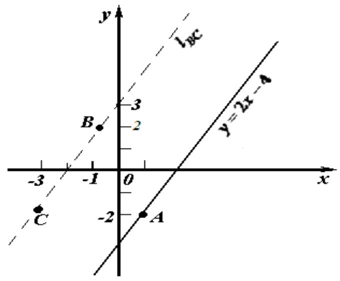
Рисунок 9

в) Уравнение прямой l_{BC} составили в предыдущем примере l_{BC}: $y=2x+4$.

Так как по условию две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т.е. $k_{BC}=2\Rightarrow$ угловой коэффициент для нашей прямой будет тоже равен 2.

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

$$y = -2 + 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow 2x - y - 4 = 0.$$



Ответ. $2x - y - 4 = 0$

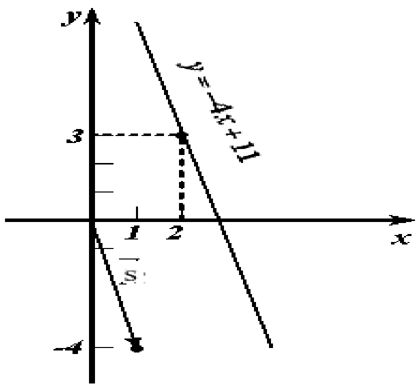
Рисунок 10

г) Уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 3)$ и направляющий вектор $\bar{s} = (1;-4)$ задается

уравнением: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x + 8 = y - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -4x + 11 \Rightarrow 4x + y - 11 = 0$$



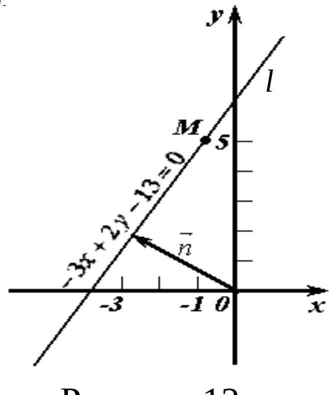
Ответ. $4x + y - 11 = 0$

Рисунок 11

д) Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B)$, задается уравнением: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Уравнение прямой, проходящей через т. $M(-1;5)$ с нормальным вектором $\bar{n} = (-3;2)$, будет следующим:

$$-3(x+1) + 2(y-5) = 0,$$

$$-3x - 3 + 2y - 10 = 0 \Rightarrow -3x + 2y - 13 = 0.$$



Ответ. $3x - 2y + 13 = 0$

Рисунок 12

Задача 2

Определить взаимное расположение прямых:

а) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$.

Решение.

1 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы через угловые коэффициенты. От общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$

перейдем к уравнению прямой через угловой коэффициент $y=kx+b$

$y=5x+7 \Rightarrow k_1=5,\ y=-\frac{3}{2}x \Rightarrow k_2=-\frac{3}{2}$ и воспользуемся формулой

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{3}{2}-5}{1+5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}\right| \Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{13}{2}}{1-\frac{15}{2}}\right| \Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{13}{2}}\right| \Rightarrow tg\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

2 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы в общем виде: $Ax+By+C=0$.

$5x-y+7=0 \Rightarrow \overline{n_1}=(5;-1)$, $3x+2y=0 \Rightarrow \overline{n_2}=(3;2)$. Воспользуемся формулой $cos\varphi=\frac{n_1\cdot n_2}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|} \Rightarrow cos\varphi=\frac{5\cdot 3+(-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} \Rightarrow cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\varphi=\frac{\pi}{4}$

Задача 3

При каких значениях A и C две прямые $Ax-2y-1=0$, $6x-4y-C=0$

а) параллельны; б) совпадают; в) имеют общую точку.

Решение.

Прямые на плоскости могут быть либо параллельными, т.е. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$;

либо совпадать $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; либо пересекаться $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.

а) $l_1: Ax-2y-1=0 \Rightarrow \overline{n_1}=(A;-2)$,

$l_2: 6x-4y-C=0 \Rightarrow \overline{n_2}=(6;-4)$. $l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \| \overline{n_2}$;. $\frac{A}{6}=\frac{-2}{-4} \Rightarrow \frac{A}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow A=3$.

б) прямые совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$,

$$\frac{A}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{-1}{-C}\overset{(A=3)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{C}\Rightarrow C=2.$$

в) При $A\neq 3$ и $b\in R$ прямые имеют общую точку.

Ответ. а) при $A=3$ и $b\neq 2$ прямые параллельны;

б) при $A=3$ и $b=2$ прямые совпадают;

в) при $A\neq 3$ и $b\in R$ прямые имеют общую точку

9.1 Задания к разделу «Прямая на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимные расположения прямых на плоскости»

9.1 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение стороны AC имеет вид:

а) $y=0$; б) $x-2=0$; в) $x-2y-3=0$; г) $2x+y=0$.

9.2 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение медианы BM, опущенной из вершины B на сторону AC, имеет вид:

а) $x+2y=0$; б) $x+y-3=0$; в) $x-3y-15=0$; г) $x+4y+6=0$.

9.3 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение высоты BK имеет вид:

а) $x+y-3=0$; б) $y+3=0$; в) $x-y+2=0$; г) $x+6=0$.

9.4 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Косинус угла между прямыми AB и AC равен:

а) $\cos\angle A=\frac{13}{19}$; б) $\cos\angle A=\frac{1}{4}$; в) $\cos\angle A=\frac{3}{5}$; г) $\cos\angle A=\frac{4}{5}$.

9.5 Уравнение прямой l, проходящей через точку N (1;–2) и направляющий вектор $\bar{s}=(2;1)$, имеет вид:

а) $x+2y-4=0$; б) $2x+y=0$; в) $x-2y-5=0$; г) $3x+y+1=0$.

9.6 Уравнение прямой l, проходящей через точку P(1;3) и нормальный вектор $\bar{n}=(-2;4)$, имеет вид:

а) $x-2y+5=0$; б) $2x+y-5=0$; в) $x-y+2=0$; г) $3x+2y-2=0$.

9.7 Уравнение прямой $3x+4y+5=0$ в нормальном виде имеет вид:

а) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=0$; б) $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$; в) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{5}{12}=0$; г) $-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y-\frac{5}{12}=0$.

9.8 Расстояние от точки А (1; 1) до прямой l : x + y – 1 = 0 равно:

а) $d=\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $d=2{,}5$; в) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $d=1$.

9.9 Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(-2;1)$. Угловой коэффициент прямой равен: а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2.

9.10 Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;1)$ и перпендикулярно вектору $\overline{n}=(1;2)$, имеет вид:

а) $2x-y-1=0$; б) $2x-y+1=0$; в) $x+2y+5=0$; г) $x+2y-3=0$.

9.11 Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;2)$ и $M_2(2;3)$, имеет вид: а) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}$; б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}$; в) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5}$; г) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}$.

9.12 Уравнение прямой l, проходящей через точку M (3;–4) с угловым коэффициентом $k=-\frac{4}{5}$, имеет вид:

а) $-4x+5y-8=0$; б) $3x-4y-25=0$; в) $4x+5y+8=0$; г) $x+y+1=0$.

9.13 Две прямые $l_1: 2x-4y-1=0$, $l_2: x-2y+3=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

9.14 Две прямые $l_1: x+y-1=0$, $l_2: x-y+5=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

9.15 Две прямые $l_1: 3x-2y+2=0$, $l_2: 9x-6y+6=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

9.16 Две прямые $l_1: -x+2y+4=0$, $l_2: 2x+3y-1=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

9.17 Прямая задана общим уравнением $3x+4y-5=0$. Угловой коэффициент прямой равен: а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $-\frac{4}{3}$; г) 4.

9.18 Прямая задана общим уравнением $5x-3y-1=0$. Точка, лежащая на прямой, имеет координаты: а) (5;–3); б) (2;3); в) (–2;–3); г) (0;0).

9.19 Прямая, проходящая через точку $M_0(3,1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}\{1,0\}$, имеет вид: а) $x+y-3=0$; б) $x-3=0$; в) $2x-3=0$; г) $x+3=0$.

9.20 Прямая, проходящая через две точки $M_1(2,3)$, $M_2(1,4)$, имеет вид:

а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}$; б) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}$; в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}$; г) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{1}$.

10 Раздел «Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Взаимные расположения плоскостей в пространстве»

Задача 1

Составить уравнение плоскости, заданное нормальным вектором $\overline{N}=(1;-2;3)$ и проходящей через точку $M(2;1;-1)$.

Решение.

Уравнение плоскости π проходящей через точку $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N}=(A;B;C)$, который перпендикулярен плоскости, находится по формуле: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

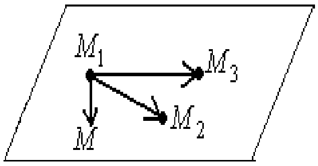
$1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$, $x-2y+3z+3=0$.

Ответ. $x-2y+3z+3=0$

Задача 2

Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки $M_1(2;1;-1)$, $M_2(-2;4;5)$, $M_3(0;2;-3)$.

Решение.



Уравнение плоскости π, проходящей через 3 точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1), M_2(x_2;\, y_2;\, z_2), M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Рисунок 13

Рассмотрим точку $M(x;\, y;\, z)$ лежащую на плоскости. Вектора $\overline{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ - компланарны $\Rightarrow$ их смешанное произведение равно нулю, т.е. ($\overline{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$)=0. Так как точки $M_1(2;1;-1), M_2(-2;4;5)$, $M_3(0;2;-3)$, получим

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -2-2 & 4-1 & 5+1 \\ 0-2 & 2-1 & -3+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$6(x-2)+10(y-1)-(z+1)=0, \quad 6x+10y-z-23=0.$$

Ответ. $6x+10y-z-23=0$

Задача 3

Докажите параллельность плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 2x-3y+5z-7=0$, $\pi_2: 2x-3y+5z+3=0$.

Решение.

Так как две плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны $\pi_1 \,||\, \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \,||\, \overline{N_2}$.

$$\begin{matrix} \pi_1: 2x-3y+5z-7=0 \Rightarrow \overline{N_1}=(2;-3;5) \\ \pi_2: 2x-3y+5z+3=0 \Rightarrow \overline{N_2}=(2;-3;5) \end{matrix}, \quad \overline{N_1} \,||\, \overline{N_2} \Leftrightarrow \frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}=\frac{5}{5} \Rightarrow 1=1=1.$$

Вектора коллинеарны, следовательно, плоскости параллельны.

Задача 4

Докажите перпендикулярность плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 3x-y-2z-5=0$, $\pi_2: x+9y-3z+2=0$.

Решение.

Так как две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно 0.

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0$.

$\pi_1 : 3x - y - 2z - 5 = 0 \Rightarrow \overline{N_1} = (3; -1; -2)$,

$\pi_2 : x + 9y - 3z + 2 = 0 \Rightarrow \overline{N_2} = (1; 9; -3)$.

$\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 9 + (-2) \cdot (-3) = 3 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow$ плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны.

Задача 5

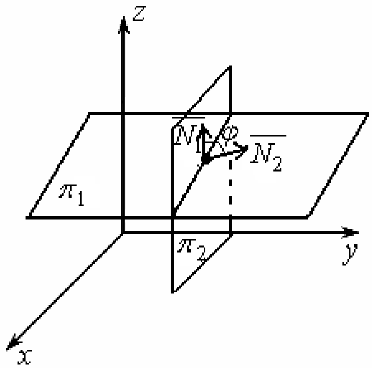
Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1 : x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ и π_2: $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.

Решение. Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, где $\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$. Плоскость $\pi_1 : x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_1} = (1; -\sqrt{2}; 1)$. Плоскость $\pi_2 : x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_2} = (1; \sqrt{2}; -1)$. Наименьший, из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле: $\left(\pi_1 \hat{;} \pi_2\right) = \left(\overline{N_1} \hat{;} \overline{N_2}\right) = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|}$

$$cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{\left|1 \cdot 1 + \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} + 1(-1)\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$



Ответ. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

Рисунок 14

10.1 Задания к разделу «Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Взаимные расположения плоскостей в пространстве»

10.1 Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;\ 3;\ 4)$, с нормальным вектором $\overline{N}=(1;2;-3)$ имеет вид:

а) $x+2y-3z+6=0$; б) $x+2y-3z+4=0$; в) $x+2y-3z-3=0$; г) $x+2y-3z+1=0$.

10.2 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;1;3)$ и два вектора, параллельных плоскости $\overline{s_1}=(1;0;2)$ и $\overline{s_2}=(0;2;-2)$, имеет вид:

а) $2x-y-z=0$; б) $2x-y+z+3=0$; в) $2x-y+z-6=0$; г) $2x-y+z+4=0$.

10.3 Две плоскости $\pi_1: 2x+3y-z+4=0$ и $\pi_2:\ 3x-y+3z+5=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

10.4 Две плоскости $\pi_1: 2x+y+4z-1=0$ и $\pi_2:\ 4x+2y+8z-2=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

10.5 Две плоскости $\pi_1: -x+3y+4z+1=0$ и $\pi_2: -3x+9y+12z-2=0$ расположены: а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha\neq 90^0$).

10.6 Плоскость YOZ относительно оси OX расположена:

а) перпендикулярно; б) параллельно; в) совпадает; г) под углом в 30°.

10.7 Уравнение плоскости, которая содержит оси OY и OZ и проходит через начало координат, имеет вид: а) $z=0$; б) $x=0$; в) $y=0$; г) $x+y=0$.

10.8 Уравнение плоскости π, проходящей через точки: $A(2;1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(1;-1;2)$, имеет вид:

а) $2x+5y-4z+1=0$; б) $2x+5y-4z+8=0$;

в) $2x+5y-4z-9=0$; г) $2x+5y-4z-1=0$.

10.9 Угол между двумя плоскостями: $\pi_1: x-\sqrt{2}y-z=0$ и π_2 : $-\sqrt{2}x-2y-\sqrt{2}z+5=0$ равен: а) 60^0; б) 90^0; в) 30^0; г) 45^0.

10.10 Уравнение плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид:

а) $2x-5y-4z=0$; б) $5y-4z+1=0$; в) $2x-4z+1=0$; г) $2x+5y-z+1=0$;

10.11 Плоскость задана общим уравнением $2x+y+2z-1=0$. Точка, лежащая на данной плоскости, имеет координаты:

а) (5; –3; –3); б) (2; 3; 0); в) (–2; –3; –4); г) (0; 0; 5).

10.12 Уравнение плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид:

а) $z+4=0$; б) $x-1=0$; в) $y-1=0$; г) $x+y+z=0$.

10.13 Расстояния, отсекаемые плоскостью $3x+4y+z-12=0$ от координатных осей OX, OY, OZ, равны: а) 4; 3; 12; б) 6; 3; 12; в) 4; 5; 12; г) 3; 4; 12.

10.14 Расстояние от начала координат до плоскости $\pi: 3x+4y+5z-10\sqrt{2}=0$ равно: а) $p=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; б) $p=2{,}5$; в) $p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; г) $p=2$.

10.15 Расстояние от точки $M(4;\ \sqrt{2};\ -2)$ до плоскости $\pi: x-\sqrt{2}\cdot y-z=0$ равно:

а) $d=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; б) $d=2$; в) $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; г) $d=5$.

10.16 Дано уравнение $-4x+5y+3z-2=0$. Нормальный вектор имеет координаты:

а) (5;–3;–2); б) (4;–5;–3); в) (–4;5;3); г) (1;1;1).

10.17 Общее уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By+Cz+D=0$; б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$;

в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; г) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

10.18 Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By+Cz+D=0$; б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$;

в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; г) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

10.19 Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

а) $Ax+By+Cz+D=0$; б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$;

в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

10.20 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(A;\, B;\, C)$:, имеет вид:

а) $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$; б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$;

в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; г) $\frac{x-x_0}{A}+\frac{y-y_0}{B}+\frac{z-z_0}{C}=1$.

11 Раздел «Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Взаимные расположения прямых в пространстве. Взаимные расположения прямой и плоскости в пространстве»

Задача 1

Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через

а) точку $M_0(2;\ 0;\ 3)$, параллельной вектору $\bar{s}=(4;-3;5)$;

б) точки $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$;

в) точку $M_0(2;3;-5)$, параллельной прямой являющейся пересечением двух плоскостей $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Решение.

а) Канонические уравнения прямой L, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(m;n;p)$, имеют вид $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

По условию задачи, точка лежащая на прямой, задана координатами $M_1(2;0;3)$ и направляющий вектор имеет координаты $\bar{s}=(4;-3;5)$, тогда составим уравнения прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-3}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{5}$$

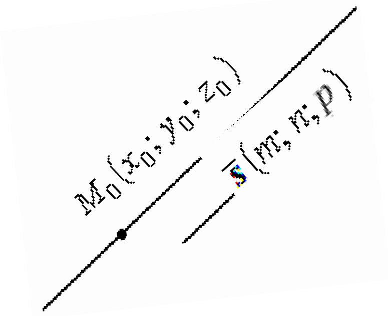
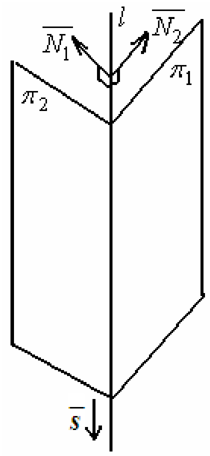


Рисунок 15

б) уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ задано формулой: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Точки лежащие на прямой имеют координаты $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$, подставляя в формулу получим уравнения : $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y+2}{1+2}=\dfrac{z-1}{-1-1}$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

в) уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$, параллельной прямой являющейся пересечением двух плоскостей $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Составим каноническое уравнение прямой по формуле:



$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, которая проходящей через точку $M(2;3;-5)$

По условию задачи прямая задается пересечением двух плоскостей: $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Тогда нормальные вектора двух плоскостей будут перпендикулярны этой прямой L, следовательно, перпендикулярны и направляющему вектору прямой. Найдем координаты вектора $\bar{s}$

Рисунок 16

$$\begin{matrix}\overline{N_1}=(3;-1;2)\\ \overline{N_2}=(1;3;-2)\end{matrix}\Rightarrow \bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-4\bar{i}+8\bar{j}+10\bar{k}\Rightarrow \qquad \bar{s}=(-4;8;10)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$ с направляющим вектором $\bar{s}=(-4;8;10)$: $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z+5}{10}\ |\cdot 2\Rightarrow \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{5}$.

Задача 2

Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_2:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

Решение.

В пространстве угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами.

$$L_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad L_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Выпишем направляющие вектора двух прямых L_1 и L_2: $\overline{s_1}=(1;-1;\sqrt{2})$, $\overline{s_2}=(1;1;\sqrt{2})$. Используя данную формулу найдем угол между двумя прямыми L_1 и L_2: $\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

$$(L_1;\hat{}\,L_2)=(\overline{s_1};\hat{}\,\overline{s_2})=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1-1+2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

11.1 Задания к разделу «Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Взаимные расположения прямых в пространстве. Взаимные расположения прямой и плоскости в пространстве»

11.1 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $A(1;2;2)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+z-1=0$, имеет вид:

а) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$; б) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$;

в) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$; г) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

11.2 Каноническое уравнение прямой, которая является пресечением двух плоскостей $\begin{cases} x-y+2z-3=0, \\ x+3y-z+1=0 \end{cases}$, имеет вид:

а) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$; б) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$;

в) $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{4}$; г) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

11.3 Прямая $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{a}=\dfrac{z-3}{1}$ и плоскость $\pi: x+2y-bz+4=0$ перпендикулярны при a и b, равном:

а) $a=3,\ b=\dfrac{1}{2}$; б) $a=6,\ b=-\dfrac{1}{3}$; в) $a=6,\ b=\dfrac{1}{3}$; г) $a=6,\ b=-3$.

11.4 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(1;\,2;\,0)$ и $B(3;4;-2)$, имеет вид:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$; б) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-2}$;

в) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{0}$; г) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{-2}$.

11.5 Угол между двумя прямыми $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$ и $L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+3}{1}$ в пространстве равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 45^0.

11.6 Прямая $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{a}=\dfrac{z-3}{1}$ и плоскость $\pi: x+2y+z+4=0$ параллельны при a, равном: а) $a=4$; б) $a=2$; в) $a=-2$; г) $a=6$.

11.7 Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1;-3)$, с направляющим вектором $\bar{s}=(-1;\,2;\,3)$ имеет вид:

а) $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=2-t, \\ z=3-3t. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2-t, \\ z=-3-3t. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=-2-t, \\ y=1+2t, \\ z=3+3t. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=2-t, \\ y=-1+2t, \\ z=-3+3t. \end{cases}$

11.8 Прямая $L:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскость $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ перпендикулярны при выполнении условия:

а) $Am+Bn+Cp=0$; б) $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$;

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\, y = y_0 + nt,\, z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

11.9 Прямая $L: \ \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскость $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ параллельны при выполнении условия:

а) $Am + Bn + Cp = 0;$ б) $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p};$

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\, y = y_0 + nt,\, z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

11.10 Условие, при котором прямая $L: \ \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ лежит в плоскости $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$, имеет вид:

а) $Am + Bn + Cp = 0;$ б) $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p};$

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\, y = y_0 + nt,\, z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

11.11 Угол между прямой $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z-3}{1}$ и плоскостью $\pi: x - \sqrt{2} \cdot y - z + 3 = 0$ равен: а) 60^0; б) 30^0; в) 45^0; г) 90^0.

11.12 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно плоскости $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$, имеет вид:

а) $\dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C};$ б) $\dfrac{x-A}{x_0} = \dfrac{y-B}{y_0} = \dfrac{z-C}{z_0};$

в) $\dfrac{x-A}{x-x_0} = \dfrac{y-B}{y-y_0} = \dfrac{z-C}{z-z_0};$ г) $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_2} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_2}.$

11.13 Точка пересечения прямой $L: \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{4}$ и плоскости $\pi: x - 2y + z + 2 = 0$ имеет координаты:

а) $(8; 1; 0)$; б) $(2; -1; 4)$; в) $(6; 2; -4)$; г) $(1; -2; 1)$.

11.14 Прямые в пространстве $L_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$ и $L_2: \frac{x+2}{-6}=\frac{y-2}{12}=\frac{z+3}{-18}$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

11.15 Прямые в пространстве $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{2}$ и $L_2: \frac{x+2}{-6}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{7}$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

11.16 Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\, y_1; z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2; z_2)$, имеет вид:

а) $\frac{x-x_1}{x_2}=\frac{y-y_1}{y_2}=\frac{z-z_1}{z_2}$; б) $\frac{x+x_1}{x_2-x_1}=\frac{y+y_1}{y_2-y_1}=\frac{z+z_1}{z_2-z_1}$;

в) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$; г) $\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}$.

11.17 Прямая $L: \frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+8}{2}$ и плоскость $\pi: -2x+3y-2z+3=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) принадлежит; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

11.18 Прямая $L: \frac{x-4}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{-4}$ и плоскость $\pi: 4x-6y+8z+12=0$ расположены:

а) перпендикулярно; б) параллельно;

в) принадлежит; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

11.19 Прямая $L: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{a}=\frac{z-3}{1}$ принадлежит плоскости $\pi: x+2y-z+b=0$ при a и b, равных:

а) $a=-1,\ b=6$; б) $a=-2,\ b=6$; в) $a=6,\ b=6$; г) $a=-1,\ b=-6$.

11.20 Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(5;\,2;\,1)$, имеет вид:

а) $\begin{cases} x = 5+4t, \\ y = 2+t, \\ z = 1+t. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 1-4t, \\ y = 1-t, \\ z = 1. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 5-4t, \\ y = 2-t, \\ z = 1+t. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 1+4t, \\ y = 1+t, \\ z = 1. \end{cases}$

12 Раздел «Кривые 2-го порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола»

Задача 1

Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую, которая определяется уравнением: $4x^2+4y^2-32x+20y+73=0$.

Решение.

$4x^2+4y^2-32x+20y+73=0$, сгруппируем переменные.

$4x^2-32x+4y^2+20y+73=0$, вынесем за скобки.

$4(x^2-8x)+4(y^2+5y)+73=0$, в скобках дополним до полного квадрата.

$4(x^2-2\cdot 4x+16-16)+4\left(y^2+2\cdot\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+73=0$,

сгруппируем по формуле полного квадрата.

$4(x-4)^2-64+4\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-25+73=0$,

$4(x-4)^2+4\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=16\ \ |:4$, $(x-4)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$

Уравнение окружность с центром в точке $\left(4;\,-\frac{5}{2}\right)$ и $R=2$.

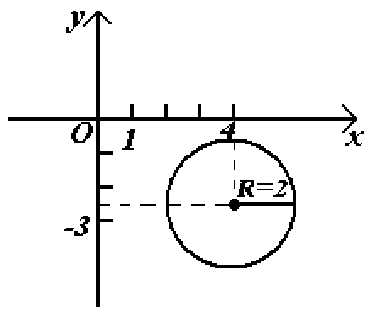


Рисунок 17

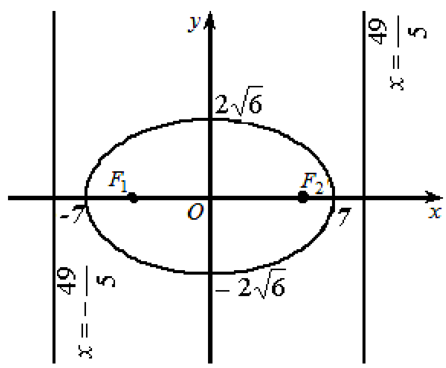
Задача 2

Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$.

Найти:

а) длины его полуосей; б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса; г) уравнения



директрис и расстояние между ними; д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12. Рисунок 18

Решение.

Разделив обе части уравнения на 1176 мы получим уравнение эллипса в каноническом виде $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

а) длины полуосей эллипса $a^2=49$, $b^2=24$, т.е. $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

б) координаты фокусов. Так как $c^2=a^2-b^2$, то $c^2=7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=25$, $c=5$. Следовательно, $F_1(-5;\,0)$ и $F_2(5;\,0)$.

в) эксцентриситет эллипса. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\varepsilon=\frac{5}{7}<1$.

г) уравнения директрис имеют вид $x_1=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x_2=-\frac{a}{\varepsilon}$. Тогда $x_{1,\,2}=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т.е. $x_1=\frac{49}{5}$ и $x_2=-\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d=\frac{49}{5}-\left(-\frac{49}{5}\right)=\frac{98}{5}=19{,}6$.

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12. По формуле $r_1=a+\varepsilon x$ находим абсциссу точки, расстояние от которой до точки F_1 равно 12: $12=7+\frac{5}{7}x$, т.е. $x=7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординату этой точки: $24\cdot 49+49y^2=1176$, $49y^2=0$, $y=0$.

Условию задачи удовлетворяет точка $A(7;\,0)$.

Задача 3

Дано уравнение гиперболы $x^2-4y^2=16$. Найти:

а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнения асимптот и директрис (изобразить кривую).

Решение.

Разделив обе части уравнения на 16, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

а) длины его полуосей $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 4$, $b = 2$;

б) координаты фокусов. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим $c^2 = 4 + 16$, т.е. $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Координаты фокусов: $F_1\left(-2\sqrt{5};\, 0\right)$ и $F_2\left(2\sqrt{5};\, 0\right)$;

в) эксцентриситет гиперболы. По формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ находим $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

г) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам

$y_{1,2} = \pm\dfrac{b}{a}x$ и $x_{1,2} = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$:

$y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}x$ и $x_{1,2} = \pm\dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

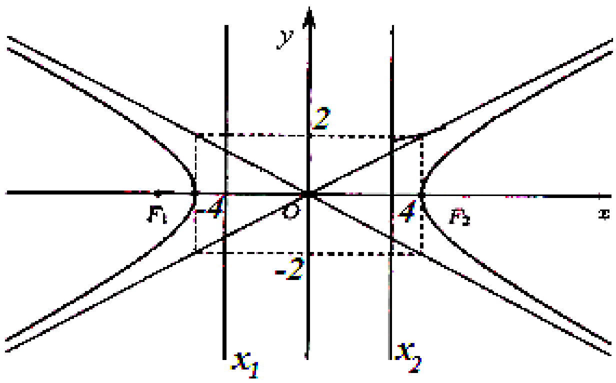


Рисунок 19

Задача 4

Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4;\, 4)$.

Решение.

Парабола задана каноническим уравнением: $x^2 = 4y$. Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$. Используя формулы: $F\left(\dfrac{p}{2};\, 0\right)$; Уравнение директрисы l параболы имеет вид $x = -\dfrac{p}{2}$; фокальный радиус вычисляется по формуле $r = x + \dfrac{p}{2}$. Таким образом фокус имеет координаты $F(0;\, 1)$; уравнение директрисы: $y = -1$; фокальный радиус точки $M(4;\, 4)$ равен $r = 4 + 1 = 5$.

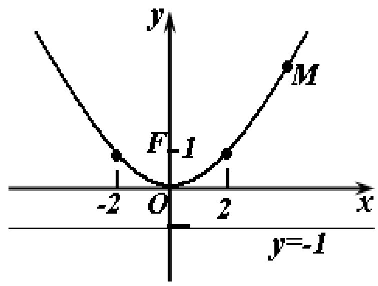


Рисунок 20

Ответ. $F(0;\, 1)$, $y + 1 = 0$

12.1 Задания к разделу «Кривые 2-го порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола»

12.1 Уравнение линии $(x^2+y^2)^2=3y$ в полярных координатах ($x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$) имеет вид:

а) $r^4=3\cos\varphi$; б) $r^3=3\cos\varphi$; в) $r^3=3\sin\varphi$; г) $r^4=3\sin\varphi$.

12.2 Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; г) $y^2=-2px$.

12.3 Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; г) $y^2=-2px$.

12.4 Каноническое уравнение окружности имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; г) $y^2=-2px$.

12.5 Каноническое уравнение параболы имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; г) $y^2=-2px$.

12.6 Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой находятся на оси Oy, имеет вид:

а) $4x^2-y^2-16=0$; б) $x^2-y^2-1=0$; в) $4x^2-y^2-1=0$; г) $x^2-y^2+1=0$.

12.7 Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой находятся на оси Ox, имеет вид:

а) $4x^2-y^2+16=0$; б) $x^2-y^2-1=0$; в) $4x^2-y^2+4=0$; г) $x^2-y^2+1=0$.

12.8 Каноническое уравнение эллипса, который вытянут вдоль оси Ox, имеет вид:

а) $9x^2+4y^2-36=0$; б) $4x^2+y^2-16=0$; в) $4x^2+9y^2-36=0$; г) $x^2+y^2-1=0$.

12.9 Каноническое уравнение эллипса, который вытянут вдоль оси Oy, имеет вид:

а) $9x^2+4y^2-36=0$; б) $4x^2-y^2-16=0$; в) $4x^2+9y^2-36=0$; г) $x^2+y^2-1=0$.

12.10 Каноническое уравнение окружности с центром в точке $(2;\ -3)$ и $R=4$ имеет вид:

а) $x^2-4x+y^2+6y+12=0$; б) $x^2-4x+y^2-6y-3=0$;

в) $x^2-4x+y^2+6y-3=0$; г) $x^2+4x+y^2+6y-3=0$.

12.11 Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(-1;\ 2)$, большая полуось равна $a=2$ и малая полуось равна $b=1$, имеет вид:

а) $x^2+2x+4y^2-16y+13=0$; б) $x^2-2x+4y^2-16y+13=0$;

в) $x^2-2x+4y^2+16y+13=0$; г) $x^2+2x+4y^2+16y+13=0$.

12.12 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(5;3)$, действительная полуось равна $a=2$ и мнимая полуось равна $b=1$, имеет вид:

а) $x^2+10x-4y^2-24y-7=0$; б) $x^2-10x-4y^2+24y-15=0$;

в) $4x^2-40x-y^2+6y+95=0$; г) $4x^2+40x-y^2-6y+95=0$.

12.13 Каноническое уравнение окружности с центром в точке $(-4;2)$ и $R=3$ имеет вид:

а) $(x-4)^2+(y+2)^2=3$; б) $(x+4)^2+(y-2)^2=3$;

в) $(x-4)^2+(y+2)^2=9$; г) $(x+4)^2+(y-2)^2=9$.

12.14 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(6;5)$, действительная полуось равна $a=2$ и мнимая полуось равна $b=3$, имеет вид:

а) $\dfrac{(x+6)^2}{4}-\dfrac{(y+5)^2}{9}=1$; б) $\dfrac{(x-6)^2}{4}-\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{(x+6)^2}{2}-\dfrac{(y+5)^2}{3}=1$; г) $\dfrac{(x-6)^2}{2}-\dfrac{(y-5)^2}{3}=1$.

12.15 Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(3;-1)$, большая полуось равна $a=5$ и малая полуось равна $b=4$, имеет вид:

а) $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1;$ б) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1;$

в) $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1;$ г) $\dfrac{(x+3)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1.$

12.16 Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $(-1;\,4)$ имеет вид:

а) $x^2+2x-y+5=0;$ б) $-x+y^2+2y+5=0;$

в) $x^2-2x-y-3=0;$ г) $-x+y^2-2y-3=0.$

12.17 Каноническое уравнение эллипса, эксцентриситет равен $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и большая полуось равна 3 (эллипс вытянут вдоль оси Oy), имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}=1;$ б) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{9}=1;$ в) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1;$ г) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1.$

12.18 Координаты центра и радиус окружности $3x^2+3y^2-4x+9y+4=0$ равны:

а) $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right), R=\dfrac{49}{36};$ б) $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right), R=\dfrac{7}{6};$ в) $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right), R=\dfrac{7}{6};$ г) $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{3}{2}\right), R=\dfrac{7}{6}.$

12.19 Каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами равно 8, эксцентриситет равен $\dfrac{1}{2}$ (эллипс вытянут вдоль оси Ox), имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1;$ б) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1;$ в) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{48}=1;$ г) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{48}=1.$

12.20 Директриса параболы задана уравнением $x+15=0$. Уравнение данной параболы имеет вид:

а) $x^2=60y;$ б) $y^2=15x;$ в) $y^2=60x;$ г) $x^2=15y.$

13 Раздел «Поверхности 2-го порядка»

Задача 1 Какие поверхности определяются уравнениями:

1) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$;

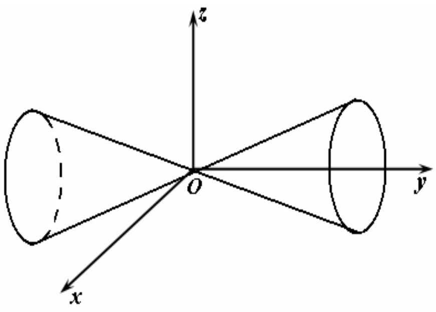


Рисунок 21

2) $x = z^2 + y^2$;

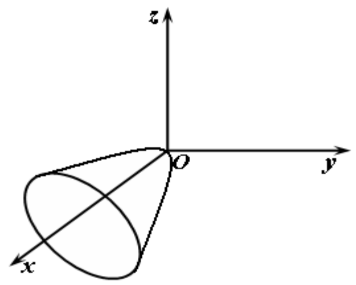


Рисунок 22

3) $y^2 + z^2 - \dfrac{x^2}{4} = 0$;

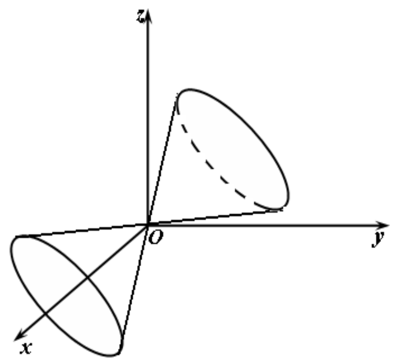


Рисунок 23

4) $\dfrac{x^2 + z^2}{6} - \dfrac{y^2}{4} = -1$;

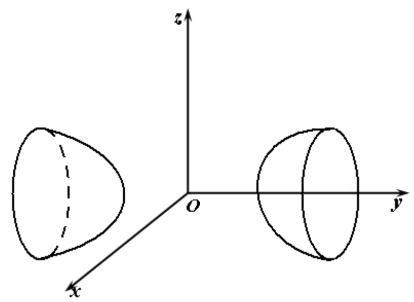


Рисунок 24

5) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{1} - 1 = 0$;

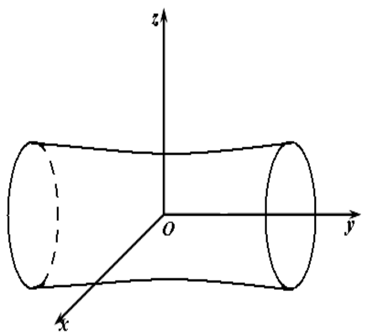


Рисунок 25

6) $-x^2 + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{7} = 1$;

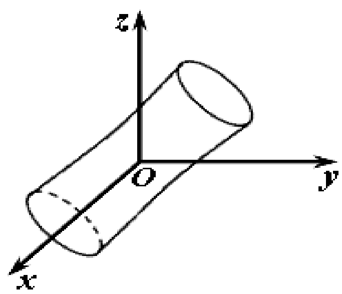


Рисунок 26

7) $z=-\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\right)$;

8) $z=x^2-y^2$.

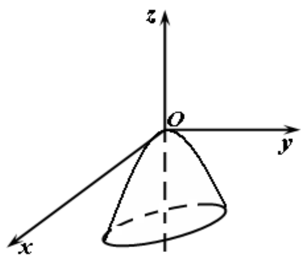


Рисунок 27

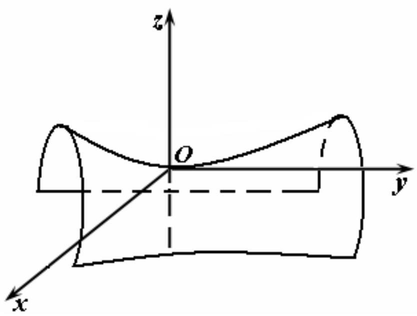


Рисунок 28

Ответ.

1) Круговой конус, осью которого является ось Oy.

2) Круговой параболоид, осью которого является ось Ox.

3) Круговой конус, осью вращения которого совпадает с осью Ox.

4) Двуполостный гиперболоид вращения, ось вращения которого совпадает с осью Oy.

5) Однополостной гиперболоид, ось которого совпадает с осью Oy.

6) Однополостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Ox.

7) Эллиптический параболоид.

8) Гиперболоид вращения.

Задача 2

Какие поверхности определяют уравнения

1) $x^2+z^2=16$;2) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{z^2}{4}=1$; 3) $x=2z^2$; 4) $\dfrac{z^2}{5}-\dfrac{x^2}{7}=1$?

Решение.

Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z, определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу;4) гиперболу. В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2+z^2=16$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

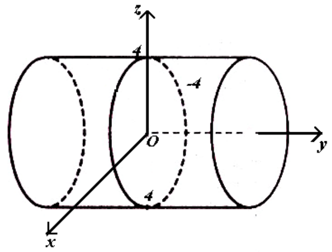


Рисунок 29

2) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{z^2}{4}=1$ - уравнение эллиптического цилиндра;

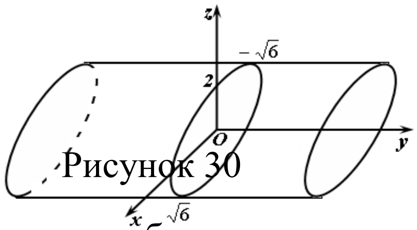


Рисунок 30

3) $x=2z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

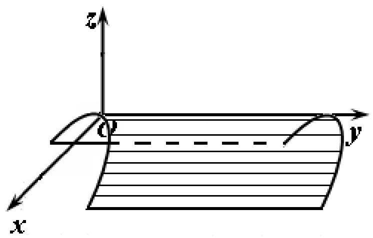


Рисунок 31

4) $\dfrac{z^2}{5}-\dfrac{x^2}{7}=1$ - уравнение гиперболического цилиндра.

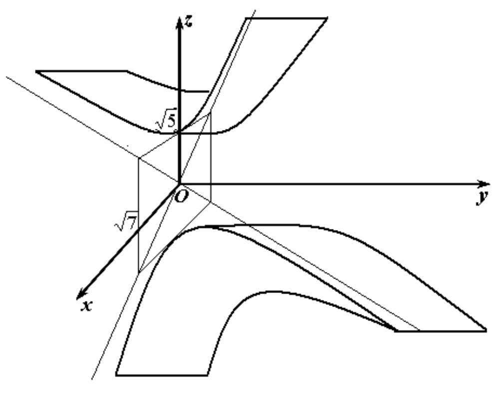


Рисунок 32

Задача 3

Установите, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2=0, \\ y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y+2=0, \\ z-5=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0. \end{cases}$

Решение.

1) Уравнение $x=0$ определяет плоскость zOy, а уравнение $y=0$ определяет плоскость xOz. Пересечением данных двух плоскостей zOy и xOz является ось аппликат;

2) Уравнение $x-2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOy и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $y=0$ определяет плоскость xOz. Пересечением данных двух плоскостей прямая, проходящая через точку $(2;\, 0;0)$ и параллельная оси Oy;

3)Уравнение $y+2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOx и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $z-5=0$ определяет плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние равное 5. Пересечением данных двух плоскостей является прямая, проходящая через точку $(0;\, -2;\, 5)$ и параллельная оси Ox;

4) Уравнение $x^2+y^2+z^2=20$ определяет сферу с центром в точке с координатами $O(0;0;0)$ и радиусом $R=2\sqrt{5}$, а уравнение $z-2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние равное 2. Пересечением данной поверхности с плоскостью является окружность, которая задается уравнением $x^2+y^2=16$.

13.1 Задания к разделу «Поверхности 2-го порядка»

13.1 Уравнение эллиптического цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ б) $y^2=2px;$ в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$

13.2 Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ задает поверхность:

а) конус; б) эллипсоид; в) параболический цилиндр; г) сфера.

13.3 Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ задает поверхность:

а) конус; б) эллипсоид; в) параболический цилиндр; г) сфера.

13.4 Уравнение гиперболического цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 = 2px$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; г) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

13.5 Уравнение $x^2 = 2py$ задает поверхность:

а) параболический цилиндр; б) гиперболический цилиндр;

в) конус; г) эллиптический цилиндр.

13.6 Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ задает поверхность:

а) конус; б) эллипсоид;

в) двуполостный гиперболоид; г) однополостный гиперболоид.

13.7 Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ задает поверхность:

а) конус; б) эллипсоид;

в) двуполостный гиперболоид; г) однополостный гиперболоид.

13.8 Уравнение параболического цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 = 2px$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; г) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

13.9 Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ задает поверхность:

а) конус; б) эллипсоид;

в) двуполостный гиперболоид; г) однополостный гиперболоид.

13.10 Уравнение кругового цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 = 2px$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; г) $x^2 + y^2 = R^2$.

13.11 Уравнение кругового параболоида имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$; б) $x^2+y^2=2pz$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

13.12 Уравнение сферы имеет вид:

а) $(x-3)^2-(y+4)^2+(z+5)^2=25$; б) $(x-3)^3+(y+4)^2+(z+5)^2=25$;

в) $(x-3)^2-(y+4)^2-(z+5)^2=25$; г) $(x-3)^2+(y+4)^2-(z+5)^2=25$.

13.13 Уравнение эллипсоида имеет вид:

а) $4x^2-y^2+16z^2=16$; б) $4x^2+8y^2+16z^2=0$;

в) $4x^2-y^2-16z^2=16$; г) $4x^2+y^2+16z^2=16$.

13.14 Уравнение эллиптического параболоида имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$; б) $x^2+y^2=2pz$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

13.15 Точки пересечения двуполостного гиперболоида $16x^2+4y^2-z^2+64=0$ с осью Oz имеют координаты:

а) $(0;\ 4;0),(0;-4;0)$; б) $(0;\ 0;8),(0;\ 0;–8)$; в) $(2;\ 0;0),\ (-2;\ 0;0)$; г) $(2;\ 4;8),\ (-2;\ -4;–8)$.

13.16 Центр и радиус сферы $(x+4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=9$ равны:

а) $(-4\ 5,\ 2),\ R=9$; б) $(4–5,–2),\ R=9$;

в) $(-4\ 5,\ 2),\ R=3$; г) $(4–5,\ -2),\ R=3$.

13.17 Полуоси однополостного гиперболоида $x^2+25y^2-4z^2-100=0$ равны:

а) 10, 2, 5; б) 100, 4, 25; в) 1, 5, 2; г) 5, 2, 10.

13.18 Уравнение гиперболического параболоида имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$; б) $x^2+y^2=2pz$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

13.19 Координаты вершины эллиптического параболоида $4(x-1)^2+9(y+5)^2-36(z-7)=0$ равны:

а) $(1;\ -5;\ 7)$; б) $(-1;\ 5;\ -7)$; в) $(4;9;-36)$; г) $(2;3;\ -6)$.

13.20 Поверхность, заданная пересечением двух плоскостей, задается уравнением:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$ б) $x^2+y^2=2pz;$ в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$ г) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

14 Раздел «Линейные отображения. Линейные операторы. Квадратичные формы»

Задача 1

Является ли линейным оператор f, переводящий вектор $x(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования найти матрицу преобразования в том же базисе что и x.

а) $y(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1);$ б) $y(x_1;\ x_2+2;\ x_3);$ в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2).$

Решение.

Оператор f называется линейным оператором, если выполняются два условия: 1) $A(\lambda x)=\lambda Ax$, если x - любой вектор пространства, λ - любое число;

2) $A(x+z)=Ax+Az$, где x и z - любые два вектора пространства $Ax=y$.

а) $y(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)$. Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(2\lambda x_1-\lambda x_2;\ \lambda x_3-\lambda x_2;\ \lambda x_1),$

$\lambda Ax=(\lambda(2x_1-x_2);\ \lambda(x_3-x_2);\ \lambda x_1)=(2\lambda x_1-\lambda x_2;\ \lambda x_3-\lambda x_2;\ \lambda x_1)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda Ax,$

следовательно, первое условие выполнено.

2) $A(x+z)=(2(x_1+z_1)-(x_2+z_2);\ (x_3+z_3)-(x_2+z_2);\ x_1+z_1).$

$Ax+Az=(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)+(2z_1-z_2;\ z_3-z_2;\ z_1)=$

$=(2(x_1+z_1)-(x_2+z_2);\ (x_3+z_3)-(x_2+z_2);\ x_1+z_1)\Rightarrow A(x+z)=Ax+Az.$

Второе условие также выполняется. Таким образом, линейный оператор f, переводящий вектор x в вектор y с координатами $y(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)$ является линейным. Следовательно, матрица данного линейного оператора имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

б) $y(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\ \lambda x_2+2\lambda;\ \lambda x_3)$, $\lambda Ax=(\lambda x_1;\ \lambda(x_2+2);\ \lambda x_3)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda A(x)$, следовательно, первое условие выполняется.

2) $A(x+z)=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+2;\ x_3+z_3)$,

$Ax(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$, $Az(z_1;\ z_2+2;\ z_3)$

$Ax+Az=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+4;\ x_3+z_3)\Rightarrow A(x+z)\neq Ax+Az$.

Второе условие не выполняется и данный оператор f не является линейным.

в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=((\lambda x_1)^2;\ (\lambda x_2)^2;\ (\lambda x_3)^2)$,

$\lambda(Ax)=(\lambda x_1^2;\ \lambda x_2^2;\ \lambda x_3^2)\Rightarrow A(\lambda x)\neq\lambda(Ax)$.

Первое условие не выполняется и оператор f не является линейным.

Задача 2

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму X^TAX от трех переменных с матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

Данная квадратичная форма положительно определена, так как

$$\Delta_1=a_{11}=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0,\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=1>0.$$

Задача 3

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму X^TAX от трех переменных с матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

Решение.

Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$

Задача 4

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $2x_1x_2$ от двух переменных.

Решение.

Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -1 \neq 0.$

14.1 Задания к разделу «Линейные отображения. Линейные операторы. Квадратичные формы»

14.1 Собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ равны:

а) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4$; б) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$; в) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$; г) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$.

14.2 Норма вектора $\|\vec{a}\|$, заданного в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, равна:

а) 10; б) 2; в) 6; г) 4.

14.3 Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

имеют вид: а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

14.4 Матрица линейного оператора, задающая растяжение плоскости в два раза вдоль первой оси, имеет вид:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

14.5 Матрица линейного оператора, задающая растяжение плоскости в пять раз вдоль второй оси, имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&0\\5&5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1&0\\5&5\end{pmatrix}$.

14.6 Матрица линейного оператора, задающая тождественное преобразование плоскости, имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

14.7 Матрица линейного оператора, задающая зеркальное отражение плоскости, имеет вид: а) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

14.8 Вектора ортогональны: а) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;в) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

14.9 Вектора нормированы:

а) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{4}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-\frac{5}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}}\\\frac{5}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

14.10 Вектора ортонормированы:

а) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{4}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-\frac{5}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{5}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

14.11 Матрица линейного оператора, задающая сдвиг плоскости относительно первой координатной оси, имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

14.12 Оператор A линейный:

а) $A(x)=(2x_1+3x_2;\ x_3-4x_2;\ x_1)$; б) $A(x)=(2x_1+3x_2;\ x_3-4;\ x_1)$;

в) $A(x)=(2x_1+3x_2;\ x_3-4x_2;\ 0)$; г) $A(x)=\left(2x_1+3x_2;\ x_3-4x_2;\ {x_1}^2\right)$.

14.13 Матрица квадратичной формы от двух переменных $3x_1^2-10x_1x_2+2x_2^2$ имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}3 & -10\\ -10 & 2\end{pmatrix}$.

14.14 Матрица квадратичной формы от трех переменных $x_1^2+7x_2^2-5x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 7 & 4\\ -2 & 4 & -5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 7 & 4\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ 6 & 7 & 8\\ -4 & 8 & -5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 4\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

14.15 Матрица ортогонального преобразования имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

14.16 Собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ равны:

а) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-4, \lambda_3=4$; б) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=7, \lambda_3=4$;

в) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1, \lambda_3=4$; г) $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-4, \lambda_3=4$.

14.17 Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, имеют вид:

а) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

14.18 Квадратичная форма матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ линейного оператора имеет вид:

а) $3x_1^2+8x_1x_2-5x_2^2$;   б) $3x_1^2+2x_1x_2-5x_2^2$;

в) $3x_1^2+4x_1x_2-5x_2^2$;   г) $-5x_1^2+8x_1x_2-5x_2^2$.

14.19 Квадратичная форма матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & -3\\ 0 & -3 & 9\end{pmatrix}$ линейного оператора имеет вид:

а) $x_1^2+x_2^2+4x_1x_2-6x_1x_3+9x_2x_3$;   б) $x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+x_1x_2-3x_2x_3$;

в) $x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+2x_1x_2-6x_2x_3$;   г) $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-3x_1x_2+9x_2x_3$.

14.20 Матрица ортогонального преобразования имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;   в) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$;   г) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч.1. – 416 с: ил. – Библиогр.: с. 455-462. – ISBN 978-5-06-003959-7.

3 Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова; Вып. 4. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, – 2002. – 320 с.

4 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

5 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

6 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

7 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами: 1 курс: учеб. пособие для вузов / К.Н. Лунгу [и др.]. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 576 с. – ISBN 978-5-8112-2326-8.

8 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 1. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 69 с.

9 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по

направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 2. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 89 с.

10Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 3. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 60 с.

11Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.

12Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов / В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.: ил. – ISBN 978-5-06-006145-1.

Приложение А

Примерные задания для рубежного контроля

Вариант 1

1 Число i^{13} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

2 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2+1=0$ имеет корни:

а) 1; –1; б) $-i$; i; в) $i\pm 1$; г) корней нет.

3 Модуль и аргумент комплексного числа $z=\sqrt{3}-i$ равны:

а) $r=2, \varphi=\dfrac{\pi}{6}$; б) $r=\sqrt{3}, \varphi=\pi$; в) $r=2, \varphi=-\dfrac{\pi}{6}$; г) $r=1, \varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

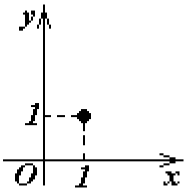
4 Комплексное число $z=2-3i$ расположено в:

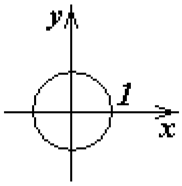
а) I четверти; б) II четверти; в) III четверти; г) IV четверти.

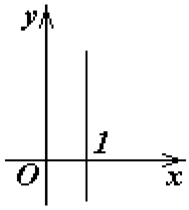
5 Расстояние от начала координат до точки М, которая соответствует комплексному числу $z=3-4i$, равно: а) 4; б) 3; в) 1; г) 5.

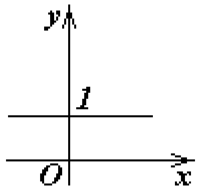
6 Число $(1+i)^8$ равно: а) $-16i$; б) 16; в) –8; г) $8i$.

7 Множеством точек на комплексной плоскости, удовлетворяющим условию $|z|=1$, является:

а) 

б) 

в) 

г) 

8 Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=(-2,-3,1)$, $\bar{b}=(-4,-6,2)$, равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 0^0.

9 Длина вектора $\bar{a}$, если $\bar{a}=(2,-3;6)$, равна: а) 5; б) 11; в) 7; г) 49.

10 Норма вектора x, если $x=(-1;0;2;0;2;0)$, равна:

а) 5; б) 3; в) 7; г) 9.

11 Угол между векторами $x=(0;\sqrt{2};0;-1)$ и $y=(0;-1;1;-\sqrt{2})$ равен:

а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 0^0.

12 Норма вектора $x-y$, если вектора заданы координатами $x=(5;4;-6;1;2;-2)$ и $y=(5;6;-4;-1;4;-2)$, равна:

а) 16; б) 8; в) 4; г) 7.

13 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(5;3)$ и $a=2$ и $b=1$ имеет вид:

а) $x^2+10x-4y^2-24y-7=0$; в) $4x^2-40x-y^2+6y+95=0$;

б) $x^2-10x-4y^2+24y-15=0$; г) $4x^2+40x-y^2-6y+95=0$.

14 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ равен:

а) 76; б) –76; в) 20; г) –20.

15 Для матрицы $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение A_{21} равно:

а) 2; б) –2; в) 4; г) –4.

16 Для матрицы $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение A_{22} равно:

а) 3; б)4; в) –4; г) –3.

17 Для матрицы $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение A_{13} равно:

а) 1; б) 0; в) 41; г) –71.

18 Система линейных уравнений $\begin{cases} ax_1 + x_2 = a, \\ x_1 + ax_2 = 1. \end{cases}$ при $a = 1$ имеет:

а) одно решение; б) ∞; в) $\varnothing$; г) два решения.

19 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ является:

а) $(1;1;-1)$; б) $(1;-1;1)$; в) $(2;-1;2)$; г) $(\frac{9}{4};-\frac{3}{4};-\frac{3}{4})$.

20 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases}$ является:

а) $(1;0;-1)$; б) $(1;-2;3)$; в) $\varnothing$; г) $(-2;-6;7)$.

21 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$ является:

а) $(0;5;6)$; б) $(3;2;0)$; в) $\varnothing$; г) $(9;6;0)$.

22 Система, имеющая решение, называется:

а) определенной; б) неопределенной; в) совместной; г) не совместной.

23 Система, не имеющая решение, называется:

а) определенной; б) неопределенной; в) совместной; г) не совместной

24 Матрица $B_{2\times5} \cdot A_{5\times3}$ имеет размер:

а) 2×5; б) 5×5; в) не существует; г) 2×3.

25 Матрица $B_{n\times h}+A_{g\times m}$ существует, если:

а) $n=m, h=g$; б) $g=m, n=h$; в) $n\neq h; g\neq m$; г) $n=g, h=m$.

26 Действие … с матрицами не существует.

а) сложение; б) умножение; в) деление; г) вычитание.

27 Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Матрица $2A-3E$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -6 & 5\end{pmatrix}$.

28 Матрица $A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Матрица $E+5\cdot A^T$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}-14 & -9\\ -4 & 21\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-14 & -4\\ -9 & 21\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-14 & -5\\ -10 & 21\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-14 & -10\\ -5 & 21\end{pmatrix}$.

29 Матрица квадратичной формы от двух переменных $3x_1^2-10x_1x_2+2x_2^2$ имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}3 & -10\\ -10 & 2\end{pmatrix}$.

30 Какое из предложенных чисел является корнем многочлена $f(x)=x^3+x^2-2x$?

а) 2; б) 3; в) 1; г) – 3.

31 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A(2; 0), B (6;–3), C (2;–4). Найти уравнение стороны AC.

а) $y=0$; б) $x-2=0$; в) $x-2y-3=0$; г) $2x+y=0$.

32 Составить уравнение прямой l, проходящей через точку N(1;–2) и направляющий вектор $\bar{s}=(2,1)$:

а) $x+2y-4=0$; б) $2x+y=0$; в) $x-2y-5=0$; г) $3x+y+1=0$.

33 Прямая, проходящая через точку $M_0(1,1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(1,2)$, имеет вид:

а) $2x-y-1=0$; б) $2x-y+1=0$; в) $x+2y+5=0$; г) $x+2y-3=0$.

34 Прямая l, проходящая через точку $M\ (3;-4)$, с угловым коэффициентом $k=-\dfrac{4}{5}$ имеет вид:

а) $-4x+5y-8=0$; б) $3x-4y-25=0$; в) $4x+5y+8=0$; г) $x+y+1=0$.

35 Определить взаимное расположение двух прямых $l_1: x+y-1=0$, l_2: $x-y+5=0$;

а) перпендикулярны; б) параллельны;

в) совпадают; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

36 Угол между прямой $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z-3}{1}$ и плоскостью $\pi: x - \sqrt{2} \cdot y - z + 3 = 0$ равен: а) 60^0; б) 30^0; в) 45^0; г) 90^0.

37 Уравнение параболического цилиндра имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 = 2px$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.

38 При каком значении a прямая $L: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{z-3}{1}$ и плоскость $\pi: x + 2y + z + 4 = 0$ параллельны?

а) $a = 4$; б) $a = -2$; в) $a = 2$; г) $a = 6$.

39 Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1;-3)$, с направляющим вектором $\bar{s}(-1;2;3)$. имеет вид:

а) $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - t, \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$

40 Дано уравнение $-4x + 5y + 3z - 2 = 0$. Нормальный вектор имеет координаты:

а) (5;–3;–2); б) (4;–5;–3); в) (–4;5;3); г) (1;1;1).

Приложение Б

Примерные задания для рубежного контроля

Вариант 2

1 Число i^{35} равно: а) 1; б) –1; в) i; г) $-i$.

2 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2-4z+5=0$ имеет корни:
а) $2\pm i$; б) $i\pm 2$; в) $5\pm 4i$; г) корней нет.

3 Комплексное число $z=i-7$ расположено в:
а) I четверти; б) II четверти; в) III четверти; г) IV четверти.

4 Сопряженное число к числу $z=2i-4$ равно:
а) $2i+4$; б) $-2i-4$; в) $-2i+4$; г) $2i-4$.

5 Действительная часть комплексного числа $z=2i+3$ равна:
а) 3; б)2; в) –2; г) 5.

6 Полуоси однополостного гиперболоида $x^2+25y^2-4z^2-100=0$ равны:
а) 10, 2, 5; б) 100, 4, 25; в) 1, 5, 2; г) 5, 2, 10.

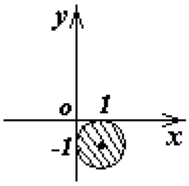
7 Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ имеют вид: а) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

8 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(6;5)$, $a=2$ и $b=3$ имеет вид:

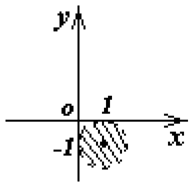
а) $\dfrac{(x+6)^2}{4}-\dfrac{(y+5)^2}{9}=1$; в) $\dfrac{(x+6)^2}{2}-\dfrac{(y+5)^2}{3}=1$;

б) $\dfrac{(x-6)^2}{4}-\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$; г) $\dfrac{(x-6)^2}{2}-\dfrac{(y-5)^2}{3}=1$.

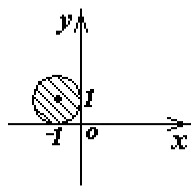
9 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|z-i+1|\le 1$, является:



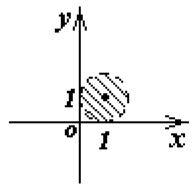
а)



б)



в)



г)

10 Сопряженное число к числу $z=2-i$ имеет вид:
а) $z=-2-i$; б) $z=2+i$; в) $z=-2+i$; г) $z=-(2-i)$.

11 Норма вектора $\|\vec{a}\|$, заданного в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$ равна:
а) 10; б) 2; в) 6; г) 4.

12 A^{-1} – называется обратной матрицей к матрице A, если:
а) $A^{-1}\cdot A=1$; б) $A^{-1}\cdot A=E$; в) $A^{-1}+A=0$; г) $A^{-1}+A=E$.

13 Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}=(2;-3;-2)$, $\bar{b}=(0;-3;-1)$ и $\bar{c}=(5;-2;1)$, равно:

а) 25; б) –8; в) –25; г) $(7;-8;-2)$.

14 Вектора $\bar{a}=(-2;\alpha;-1)$, $\bar{b}=(1;-\alpha;0)$, $\bar{c}=(1;3;-1)$ компланарны при α, равном:

а) 1; б) 3; в) $\frac{-3}{2}$; г) –2.

15 Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, равна: а) $\sqrt{56}$; б) $\sqrt{108}$; в) 4; г) 2.

16 Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}=(-2,-3,1)$, $\bar{b}=(1,0,-2)$ и $\bar{c}=(0,-2,1)$, равен:

а) 9; б) 13; в) 7; г) 2.

17 Площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;-2;1)$, $B(-4;3;-2)$, $C(-3;1;-1)$ равна:

а) $\sqrt{30}$; б) $\frac{\sqrt{30}}{2}$; в) 30; г) 5.

18 Определитель $\begin{vmatrix} 2i & -3i & 1 \\ -i & i & 5 \\ 0 & 2i & 0 \end{vmatrix}$ равен:

а) –18; б) 18; в) 22; г) –22.

19 Сумма произведений элементов строки на их алгебраические дополнения есть:

а) минор; б) определитель; в) матрица; г) 0.

20 Определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, есть:

а) алгебраическое дополнение; в) минор;

б) транспонированная матрица; г) ранг.

21 Произведение элементов, стоящих на главной диагонали, в диагональной матрице есть: а) минор; б) алгебраическое дополнение; в) определитель; г) 0.

22 Сумма произведений элементов столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца есть: а) минор; б) определитель; в) матрица; г) 0.

23 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+5x_2+6x_3=0 \end{cases}$ является:

а) $(1;0;-1)$; б) $(1;-2;3)$; в) $\varnothing$; г) $(-2;-6;7)$.

24 Центр и радиус сферы $(x+4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=9$ равны:

а) $(-4\ 5,\ 2)$, $R=9$; в) $(4-5,-2)$, $R=9$;

б) $(-4\ 5,\ 2)$, $R=3$; г) $(4-5,\ -2)$, $R=3$.

25 Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} -x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=1. \end{cases}$ является:

а) $(1;2)$; б) $(3;4)$; в) $\varnothing$; г) ∞.

26 Система линейных уравнений $\begin{cases} 15x_1 + ax_2 = 3, \\ 5x_1 + 10x_2 = 1. \end{cases}$ имеет множество решений при a, равном: а) 3; б) 10; в) –5; г) 30.

27 Матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Матрица $3B + 4A$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -96 \\ -24 \end{pmatrix}$; г) не существует.

28 Матрица $B_{1\times 3} \cdot A_{3\times 1}$ имеет размер:

а) 3×3; б) 1×1; в) 1×3; г) 3×1.

29 Найти координаты центра и радиус окружности $3x^2 + 3y^2 - 4x + 9y + 4 = 0$.

а) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right), R = \frac{49}{36}$; в) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right), R = \frac{7}{6}$;

б) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right), R = \frac{7}{6}$; г) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right), R = \frac{7}{6}$.

30 Уравнение плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид:

а) $z + 4 = 0$; б) $x - 1 = 0$; в) $y - 1 = 0$; г) $x + y + z = 0$.

31 Найти расстояние от точки $M(4;\ \sqrt{2};\ -2)$ до плоскости $\pi : x - \sqrt{2} \cdot y - z = 0$.

а) $d = \frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $d = 2$; в) $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $d = 5$.

32 Дан треугольник ABC. Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Найти уравнение медианы BM, опущенной из вершины B на сторону AC.

а) $x + 2y = 0$; б) $x + y - 3 = 0$; в) $x - 3y - 15 = 0$; г) $x + 4y + 6 = 0$.

33 Для матрицы $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ минор M_{33} равен:

а) 4; б) –4; в) –33; г) 37.

34 Значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ равно:

а) -1; б) 2; в) 17; г) 0.

35 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица BA имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) вычислить невозможно.

36 Прямая, проходящая через две точки $M_1(2, 3)$, $M_2(1, 4)$, имеет вид:

а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4}$; б) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1}$; в) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2}$; г) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1}$.

37 Даны точки A(2,–3) и B(4,1), где B – середина отрезка AC. Тогда точка C имеет координаты: а) C(6,-2); б) C(3,-1); в) C(1,2); г) C(6,5).

38 Прямая проходит через точки $O(0,0)$ и $B(-2,1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2.

39 Условие параллельности прямой $L:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид:

а) $Am+Bn+Cp=0$;

б) $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$;

в) $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z+z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

40 Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;\,3;\,4)$, с нормальным вектором $\overline{N}=(1,\ 2,\ -3)$ имеет вид:

а) $x+2y-3z+6=0$;

б) $x+2y-3z+4=0$;

в) $x+2y-3z-3=0$;

г) $x+2y-3z+1=0$.

Приложение В

тест 1		тест 2	
Номер вопроса	Правильный ответ	Номер вопроса	Правильный ответ
1	В	1	Г
2	Б	2	А
3	В	3	Б
4	Г	4	Б
5	Г	5	А
6	Б	6	А
7	Б	7	А
8	Г	8	Б
9	В	9	В
10	А	10	Б
11	В	11	В
12	В	12	Б
13	Б	13	В
14	Г	14	В
15	Б	15	А
16	Г	16	А
17	В	17	Б
18	Б	18	В
19	Г	19	Б
20	В	20	Б
21	Б	21	В
22	В	22	Г
23	Г	23	Г
24	Г	24	В
25	Г	25	В
26	В	26	Г
27	Б	27	Г
28	Г	28	Б
29	В	29	Г
30	В	30	А
31	Б	31	Б
32	В	32	Г
33	Г	33	В
34	В	34	Г
35	А	35	В
36	Б	36	Г
37	Б	37	Б
38	В	38	В
39	Г	39	Б
40	В	40	Б