Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7
У 76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.
У 76 Расчетно-графические задания по линейной алгебре: методические указания / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 50 с.

Методические указания содержат расчетно-графические задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Данная разработка поможет в организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины, окажет существенную помощь в подготовке к зачету и экзамену.

Они предназначены для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7

Содержание

Введение

Методические указания содержат расчетно-графические задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Они предназначены для организации самостоятельной работы студентов, для проведения промежуточного контроля знаний студентов. Их содержание ориентировано на обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

Расчетно-графические задания является частью фонда оценочных средств указанной дисциплины, могут использоваться преподавателями для контроля знаний студентов по пройденным темам, и могут выполняться в аудиторное, так и внеаудиторное время.

В методических указаниях представлены следующие темы: «Комплексные числа. Действия над комплексными числами»; «Матрицы. Действия с матрицами»; «Определитель. Способы вычисления определителей»; «Система линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений»; «Многочлены. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Схема Горнера»; «Векторное пространство. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов». По завершению темы курса проводится промежуточная аттестация, студенту предлагается выполнить расчетно-графические задания соответствующего содержания и формулируются критерии оценки: задача считается решенной и оценивается в 5 баллов, если выполнены 90%-100% условий и требований, сформулированных в ней; оценивается в 4 балла, если выполнены 70%-89% условий и требований; оценивается в 3 балла, если выполнены 50%-69%.

1 Тема «Комплексные числа. Действия над комплексными числами»

Задание 1

Выполнить действия над комплексными числами:

$z_1 \pm z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \dfrac{z_2}{z_1},\ \dfrac{2z_2 - 3z_1}{(z_1 + 4z_2)^2}.$

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$z_1 = i + 6;\ z_2 = 6 - i$	16	$z_1 = 4 - 3i;\quad z_2 = 4 - 7i$
2	$z_1 = 4i - 3;\ z_2 = 5 - 2i$	17	$z_1 = 4 - 3i;\quad z_2 = 4 - 7i$
3	$z_1 = i + 1;\ z_2 = -3 - i$	18	$z_1 = 4 - i;\quad z_2 = 4 + i$
4	$z_1 = 2i + 3;\ z_2 = 6 + i$	19	$z_1 = -1 - 3i;\ z_2 = 4 + 7i$
5	$z_1 = -i + 5;\ z_2 = 2 + i$	20	$z_1 = -4 - 2i;\ z_2 = 4 + 5i$
6	$z_1 = -i + 8; z_2 = 1 + 2i$	21	$z_1 = 9 - i;\quad z_2 = 5 - 8i$
7	$z_1 = -i + 9; z_2 = 7 - i$	22	$z_1 = 4 - 3i;\quad z_2 = 2i - 1$
8	$z_1 = i - 3; z_2 = -6 - i$	23	$z_1 = i - 4;\quad z_2 = 3 + 2i$
9	$z_1 = i + 3; z_2 = 6 - 2i$	24	$z_1 = 4 + 5i;\quad z_2 = i + 2$
10	$z_1 = i - 4; z_2 = 6 + 5i$	25	$z_1 = i + 2;\quad z_2 = 3 - 2i$
11	$z_1 = 3i + 4; z_2 = -1 - 2i$	26	$z_1 = 2 + i; z_2 = i - 5$
12	$z_1 = -i + 2; z_2 = 5 - 4i$	27	$z_1 = 4 + 5i; z_2 = 2i - 3$
13	$z_1 = i + 6; z_2 = -4 + 5i$	28	$z_1 = 2i - 3; z_2 = 4 + 3i$
14	$z_1 = 3i - 2; z_2 = -9 - i$	29	$z_1 = 3 - 2i; z_2 = 4 - 7i$
15	$z_1 = -i + 7; z_2 = -9 - 2i$	30	$z_1 = i + 3; z_2 = 6 - 2i.$

Задание 2

Возвести в степень *n* комплексное число z.

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$z = 1 - \sqrt{3}i, n = 120$	11	$z = 1 - i\sqrt{3}, n = 180$	21	$z = 2\sqrt{3} - 2i, n = 42$
2	$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, n = 240$	12	$z = \sqrt{3} - i, n = 170$	22	$z = 2i - 2, n = 100$

3	$z=\sqrt{3}+i, n=80$	13	$z=6+6i, n=100$	23	$z=-4-4i, n=20$
4	$z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, n=100$	14	$z=4\sqrt{3}+4i, n=90$	24	$z=2\sqrt{3}-2i, n=100$
5	$z=-3-3i, n=150$	15	$z=-2+2\sqrt{3}i, n=99$	25	$z=-\sqrt{3}-i, n=64$
6	$z=5i-5, n=200$	16	$z=5\sqrt{3}+5i, n=66$	26	$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, n=50$
7	$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, n=160$	17	$z=-3-3\sqrt{3}i, n=320$	27	$z=i-\sqrt{3}, n=42$
8	$z=-4+4i, n=280$	18	$z=2+2i, n=1000$	28	$z=\frac{1}{4}-\frac{i}{4}, n=44$
9	$z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i, n=300$	19	$z=4-4i, n=240$	29	$z=-i+1, n=36$
10	$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}, n=140$	20	$z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, n=340$	30	$z=\sqrt{3}i-1, n=16$

Задание 3

Найдите значения $\sqrt[m]{z}$ и изобразите на комплексной плоскости числа (комплексное число z из задания 2).

Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант	
1	*m=6*	7	*m=5*	13	*m=6*	19	*m=6*	25	*m=6*
2	*m=4*	8	*m=6*	14	*m=3*	20	*m=3*	26	*m=3*
3	*m=3*	9	*m=4*	15	*m=6*	21	*m=6*	27	*m=6*
4	*m=5*	10	*m=6*	16	*m=4*	22	*m=4*	28	*m=5*
5	*m=6*	11	*m=4*	17	*m=6*	23	*m=6*	29	*m=5*
6	. *m=4*	12	*m=5*	18	*m=5*	24	*m=4*	30	*m=6*

Задание 4

Изобразите на плоскости *XOY* множество точек $z=x+yi$, удовлетворяющих условию (по вариантам):

№	Задание	№	Задание	№	Задание
1	$\lvert z-2i+4\rvert \le 3$;	11	$\lvert z-1\rvert = \lvert z+2\rvert = \lvert z-i\rvert$;	21	$\lvert z\rvert \ge \operatorname{Re} z$;
2	$\lvert 2z-3+i\rvert \le 1$;	12	$\lvert z\rvert > 2+\operatorname{Im} z$;	22	$\begin{cases} 2<\lvert z+2i-3\rvert \le 6 \\ \dfrac{\pi}{4}<\arg(z-1)\le\dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$
3	$4\le\lvert z+2i-1\rvert \le 6$;	13	$-\operatorname{Re} z+\lvert z\rvert \le 0$;	23	$\lvert z-2i\rvert = \lvert z+3\rvert$;
4	$1+z=\lvert z+1\rvert$;	14	$\dfrac{\pi}{4}\le\arg(z+1-i)\le\dfrac{3\pi}{4}$	24	$\operatorname{Im} z-\lvert z\rvert<0$;
5	$\lvert z+2i-3\rvert = \lvert z\rvert$;	15	$2\le\lvert 2z+1\rvert\le 4$;	25	$1\le\lvert z+i-3\rvert\le 2$;
6	$\lvert z+2\rvert > \lvert z\rvert$;	16	$1\le\lvert z+2+i\rvert\le 2$;	26	$\lvert z-3+i\rvert \le \lvert z\rvert$;
7	$\lvert z-1\rvert = \lvert z+1\rvert = \lvert z+1-2i\rvert$	17	$\dfrac{\pi}{3}<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{2}$;	27	$\begin{cases} 1\le\lvert z\rvert\le 2, \\ \dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$
8	$2\le\lvert 2z+1\rvert\le 4$;	18	$\lvert z-1\rvert \le \lvert z-i\rvert$;	28	$\begin{cases} 1<\lvert z\rvert<3, \\ -1\le\operatorname{Re} z<2; \end{cases}$
9	$\lvert z-2-3i\rvert>1$;	19	$\lvert z-i\rvert+\lvert z+i\rvert=4$;	29	$\begin{cases} \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\pi}{6}<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$
10	$\begin{cases} \lvert z\rvert\ge 2 \\ \dfrac{\pi}{6}<\arg z\le\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$	20	$1\le\operatorname{Re}(2z-3)\le 2$;	30	$2-z=\lvert z-2\rvert$.

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Выполните действия z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ над комплексными числами в алгебраической форме: а) $z_1=-3+5i$, $z_2=i-4$.

Решение.

$z_1=-3+5i$, $z_2=i-4$;

$z_1+z_2=(-3+5i)+(i-4)=-7+6i$; $z_1-z_2=(-3+5i)-(i-4)=-3+5i-i+4=1+4i$;

$z_1\cdot z_2=(-3+5i)\cdot(i-4)=-3i+12+5i^2-20i=12-23i+5\cdot(-1)=7-23i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(-3+5i)}{(i-4)}=\frac{(-3+5i)(-i-4)}{(i-4)(-i-4)}=\frac{3i+12-5i^2-20i}{-i^2+16}=$$
$$=\frac{12-17i-5\cdot(-1)}{-(-1)+16}=\frac{17-17i}{17}=1-i\,.$$

Ответ: $z_1+z_2=-7+6i$, $z_1-z_2=1+4i$, $z_1\cdot z_2=7-23i$, $\frac{z_1}{z_2}=1-i.$

Задание 2

Возведите в степень комплексное число $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Решение.

$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$. Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Из алгебраической формы $z=x+iy$, $x=-1$ и $y=-\sqrt{3}$, по формулам $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и $tg\varphi=\frac{y}{x}$, находим: $|z|=r=\sqrt{1+3}=2$, $tg\varphi=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)}{(-1)}=\sqrt{3}$, $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$ (рисунок 1)

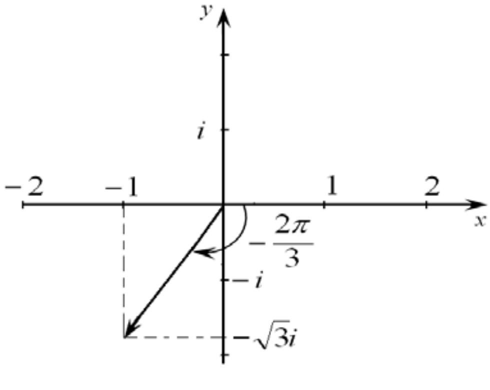

Рисунок 1

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь следующий вид: $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$. По формуле Муавра: $z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ данное число возведем в степень:

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15}=$$
$$=2^{15}\cdot\left(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)\right)=2^{15}\left(1+0i\right)=2^{15}=32768\,.$$

Ответ: 32768.

Задание 3

Вычислить $\sqrt[4]{z}$, если $z=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$z=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишем формулу $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k=0,1,\ldots,n-1$

Комплексное число z сначала запишем в тригонометрической форме, а затем полученные данные подставим в первоначальную формулу.

$$z=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)=1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$w=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{4}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right)=1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)\right).$$

Меняя k от 0 до 3, получим четыре значения для w и отметим полученные значения точками на комплексной плоскости:

$$w_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_2=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_4=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

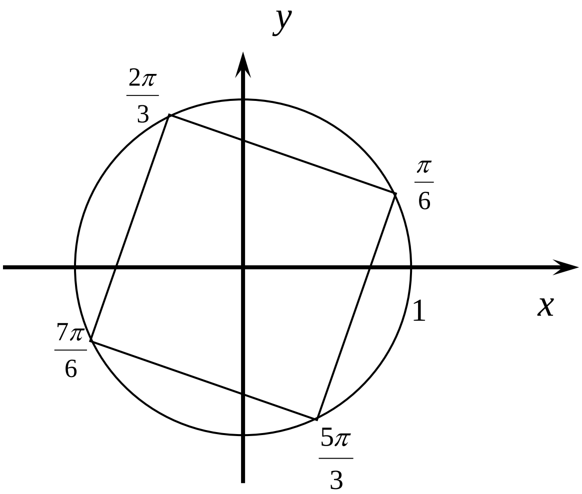

Рисунок 2

Все точки, соответствующие полученным значениям, располагаются на окружности радиуса R=1, причем аргумент первого комплексного числа равен $\frac{\pi}{6}$, а аргументы остальных получаются из первого последовательным увеличением на $\dfrac{\pi}{2}$ и образуют правильный четырехугольник (квадрат).

Ответ: $w_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}, w_2 = -\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \dfrac{1}{2}, w_4 = \dfrac{1}{2} - i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Задание 4

Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям: $\begin{cases} 1 \le z \cdot \overline{z} \le 4, \\ -\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0; \end{cases}$

Решение.

Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде: $\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \\ -\sqrt{3} \le y \le 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R = 1$ и $R = 2$ с центром в начале координат.

Неравенства $-\sqrt{3} \le y \le 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми: $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$.

Искомое множество точек заштриховано на рисунке 3.

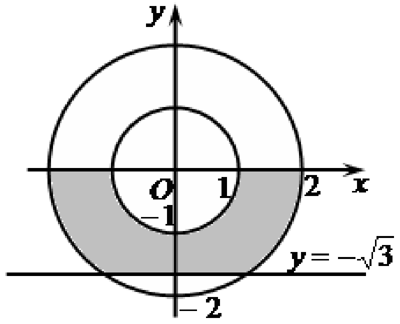

Рисунок 3

2 Тема «Матрицы. Действия с матрицами»

Задание 1

Вычислить матрицу B, если дана матрица A:

$B = A^2 - 3A \cdot A^T + 4A \cdot E$. Матрицы заданы в таблице по вариантам.

№	Задание	№	Задание	№	Задание
1	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$	11	$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix}$	21	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 7\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & -1 & 6\end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 5\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$	13	$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$	23	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 4\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 6 & 1 & -1\end{pmatrix}$	15	$A=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & 4 & 6\end{pmatrix}$	25	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 8 & -2 & 1\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -5 & 7\end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 5 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$	17	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & 8\end{pmatrix}$	27	$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 9\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$	19	$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 6 & 7 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$	29	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & 3 & 4\\ -6 & 1 & 0\end{pmatrix}$

10	$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Найдите матрицу $C = A\cdot B - 3B\cdot E + 2A^2 - 4B^T$, если $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Решение.

$C = A\cdot B - 3B\cdot E + 2A^2 - 4B^T$, если $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

1) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24-3 & 12-1 \\ 4-6 & 2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

2) $3B\cdot E=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12+0 & 0+6 \\ 9+0 & 0+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$

3) $A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36-1 & -6+2 \\ 6-2 & -1+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

4) $4B^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$

5) $2A^2 = 2\begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$

$$C = A\cdot B - 3B\cdot A + 2A^2 - 4B^Ò = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 79 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C=\begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}.$

3 Тема «Определитель. Способы вычисления определителей»

Задание 1

Вычислить определитель:

а) разложив его по элементам любого столбца(строки);

б) привести к диагональному виду.

№	Задание	№	Задание	№	Задание
1	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	22	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	25	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

8	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	28	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

а) разложив его по элементам любого столбца(строки);

б) привести к диагональному виду.

Решение.

а) разложив его по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -11 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix} = 48..$$

б) привести к диагональному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -9 & 7 & -14 \\ 0 & -13 & 8 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{43}{5} \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{56}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{43}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{35} \end{vmatrix} = 48.$$

4 Тема «Система линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений»

Задание 1

Решить систему линейных уравнений тремя способами:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы;

в) методом Гаусса.

(задания по вариантам)

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3, \end{cases} \Leftrightarrow \; A \cdot X = B.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ -8 \end{pmatrix}$;
2	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$;	17	$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$;
3	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -28 \\ 13 \end{pmatrix}$;	18	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$;
4	$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -22 \\ -24 \\ -25 \end{pmatrix}$;	19	$A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$;

5	$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6\\ 2 & 3 & -1\\ -5 & -2 & 7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-5\\ 10\\ -24\end{pmatrix};$	20	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & -5\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -6\end{pmatrix};$
6	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-5\\ 30\\ 22\end{pmatrix};$	21	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 0 & 4 & -1\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-19\\ 0\\ 12\end{pmatrix};$
7	$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-5\\ -14\\ -4\end{pmatrix};$	22	$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-2\\ -15\\ 2\end{pmatrix};$
8	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 6\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -9\end{pmatrix};$	23	$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}10\\ 15\\ -5\end{pmatrix};$
9	$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-9\\ 3\\ 17\end{pmatrix};$	24	$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 13\end{pmatrix};$
10	$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-8\\ 9\\ -18\end{pmatrix};$	25	$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & 2 & -3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}20\\ -6\\ -6\end{pmatrix};$
11	$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-4\\ -21\\ -16\end{pmatrix};$	26	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 3\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0\\ 14\\ -8\end{pmatrix};$
12	$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}19\\ 7\\ 16\end{pmatrix};$	27	$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 13\end{pmatrix};$
13	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ -3 & -4 & 2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}6\\ 17\\ 8\end{pmatrix};$	28	$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1\\ -12\\ -12\end{pmatrix};$
14	$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -5\\ -1 & -4 & 1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}12\\ 12\\ -9\end{pmatrix};$	29	$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ -6\end{pmatrix};$
15	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -3 & 5 & 0\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1\\ -13\\ 8\end{pmatrix};$	30	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & -2 & 3\\ -7 & 8 & 2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 5\end{pmatrix}.$

Задание 2

Исследовать систему линейных уравнений. Указать фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений и частное решение неоднородной системы линейных уравнений:

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5. \end{cases}$
2	а) $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4. \end{cases}$
3	а) $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3. \end{cases}$
4	а) $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7, \\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$
5	а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2. \end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 5x_1-2x_2+9x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2+2x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+11x_3-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1. \end{cases}$
7	а) $\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1. \end{cases}$
8	а) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-3_4+2x_5=1. \end{cases}$

9	а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0, \\ x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$
10	а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$
11	а) $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7, \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3. \end{cases}$
12	а) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1. \end{cases}$
13	а) $\begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5, \\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3. \end{cases}$
14	а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-6x_3-4x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_5=1, \\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3, \\ 3x_1-5x_2-x_3+x_4-4x_5=2. \end{cases}$
15	а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 4x_1-3x_2+8x_3+9x_4=1. \end{cases}$
16	а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2. \end{cases}$
17	а) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3+10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=4. \end{cases}$
18	а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_5=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-4x_4+3x_5=5. \end{cases}$

19	а) $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2-2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7, \\ x_1-4x_2-x_3-3x_4=3. \end{cases}$
20	а) $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3+x_4+3x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_5=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3+x_5=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3. \end{cases}$
21	а) $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-x_5=0, \\ 2x_1+7x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+4x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 3x_1=4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$
22	а) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+5x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-3x_4+2x_5=2. \end{cases}$
23	а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-x_4=1. \end{cases}$
24	а) $\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1. \end{cases}$
25	а) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+5x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-9x_4=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3-x_4=3. \end{cases}$
26	а) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+5x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+4x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_5=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+4x_4-3x_5=1. \end{cases}$
27	а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3-2x_4=1. \end{cases}$
28	а) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_5=7, \\ x_1-2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=3. \end{cases}$

29	а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$
30	а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Решить систему линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1) Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30; \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 90;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -60; \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 150.$$

$$x_1 = \frac{90}{30} = 3; \quad x_2 = \frac{-60}{30} = -2; \quad x_3 = \frac{150}{30} = 5.$$

2) Решим систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30;$

2 $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-4) = 13;$ $A_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 1) = -5;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11;$ $A_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 - 8) = 5;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5;$ $A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 - (-1)) = -5;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7;$ $A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 4) = 5;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \\ 5 & 5 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Транспонируем матрицу $\tilde{A}$: $A^* = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Полученную матрицу подставим в равенство $X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 13 \cdot 11 + 5 \cdot (-5) + (-7) \cdot 4 \\ -5 \cdot 11 + 5 \cdot (-5) + 5 \cdot 4 \\ 11 \cdot 11 + (-5) \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 143 - 25 - 28 \\ -55 - 25 + 20 \\ 121 + 25 + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ -60 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{90}{30} \\ -\frac{60}{30} \\ \frac{150}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3; \\ x_2 = -2; \\ x_3 = 5. \end{matrix}$$

3) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) \times(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -27 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-5) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -27 \\ 0 & 0 & 30 & 150 \end{array}\right)$$

От расширенной матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_2 - 5x_3 = -27, \\ 30x_3 = 150, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_2 - 5x_3 = -27, \\ x_3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2 \cdot 5 = 11, \\ x_2 - 5 \cdot 5 = -27; \\ x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10 = 11, \\ x_2 - 25 = -27, \\ x_3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(3; -2; 5)$.

Задание 2

Исследовать систему линейных уравнений. Указать фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений и частное решение неоднородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ – основная матрица.

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – расширенная матрица.

Решим систему линейных однородных уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли. Так как система линейных уравнений является однородной, следовательно $r(A') = r(A)$, однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Найдем ранг основной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A') = 2$, т.к. количество строк равно 2. x_1, x_4 – основные неизвестные. Так как всего неизвестных–5, количество основных неизвестных – 2, то 5–2=3, т.е. будет 3 параметра, обозначаем их через $x_2 = \alpha, x_3 = \beta, x_5 = \delta$. Теперь от матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 5\alpha - 7\beta - 3\delta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + x_4 + 2\delta = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 5\alpha + 7\beta + 3\delta \\ x_4 = -3\alpha - 4\beta - 2\delta \end{cases};$$

Общее решение однородной системы линейных уравнений:

$(5\alpha + 7\beta + 3\delta; \quad \alpha; \quad \beta; \quad -3\alpha - 4\beta - 2\delta; \quad \delta).$

Найдем фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений:

1) $\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0, \ X^1 = (5; 1; 0; -3; 0),$

2) $\alpha = 0 \quad \beta = 1, \quad \delta = 0, \ X^2 = (7; 0; 1; -4; 0),$

3) $\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = 1, \; X^3 = (3; 0; 0; -2; 1),$

$$X = c_1 X^1 + c_2 X^2 + c_3 X^3, \; X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где c_1, c_2, c_3 – действительные числа.

б) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ – основная матрица.}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \text{ – расширенная матрица.}$$

Найдем ранг расширенной и основной матриц:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \times(-3) \times(-2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \times 1 \times (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$M_3(A') = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ ранг расширенной матрицы равен 3, т.е. $r(A') = 3$.

$$M_3(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \text{ ранг основной матрицы равен 3, т.е. } r(A)=3.$$

Так как $r(A')=r(A)=3$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решение.

$M_3(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$ – базисный минор третьего порядка $\Rightarrow$ x_1, x_3, x_4 – основные неизвестные, т.к. всего количество неизвестных – 5, основных переменных – 3, следовательно 5 – 3 =2 (параметра), 2 параметра – это x_2 и x_5. Обозначим параметры $x_2=\beta$, $x_5=\gamma$.

Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ -x_3-2x_4-4x_5=-3,\\ -x_4=3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+x_3+2x_4=2+\beta-3\gamma,\\ -x_3-2x_4=-3+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+x_3-6=2+\beta-3\gamma,\\ -x_3+6=-3+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_3=8+\beta-3\gamma,\\ -x_3=-9+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+9-4\gamma=8+\beta-3\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1=-1+\beta+\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3.\end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma;\ \beta;\ 9-4\gamma;\ -3;\ \gamma\right)$.

Найдем фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений:

1) $\beta=1, \gamma=0$ $X^1=\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\right)$;

2) $\beta=0, \gamma=1$ $X^2=\left(\frac{1}{2};\ 0;\ -4;\ 0;\ 1\right)$.

Решение неоднородной системы линейных уравнений:

3) $\beta = 0,\ \gamma = 0\quad X^0 = \left(-\frac{1}{2};\ 0;\ 9;\ -3;\ 0\right)$;

Таким образом: $X = X^0 + c_1 X^1 + c_2 X^2$,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$ где c_1 и c_2 – действительные числа.

Ответ: а) $X = c_1 X^1 + c_2 X^2 + c_3 X^3,\ X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

где c_1, c_2, c_3 – действительные числа;

б) $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 – действительные числа.

5 Тема «Векторное пространство. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов»

Задание 1

1) Убедитесь, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис.

2) Найдите разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Сделайте проверку.

3) Найдите $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

4) Найдите $\vec{a}\,\vec{b}$.

5) Найдите угол $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

6) Найдите $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

7) Найдите $\vec{a}\times\vec{b}$.

8) Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

9) Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

10) Определите ориентацию тройки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

11) Найдите вектор $\vec{e}$ такой, что $|\vec{e}|=1, \vec{e}\perp\vec{a}, \vec{e}\perp\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка.

12) Найдите вектор $\vec{g}$: $\vec{g}\uparrow\downarrow\vec{a}$, $|\vec{g}|=|\vec{b}|$.

Вариант	Задание
1	$\vec{a}$ = (–3, 4 , 7), $\vec{b}$ = (0, –8, 11), $\vec{c}$ = (13, 1, 5), $\vec{d}$ = (–19, –1, 20).
2	$\vec{a}$ = (4, 0 , 9), $\vec{b}$ = (10, –7, 2), $\vec{c}$ = (–1, 1, 14), $\vec{d}$ = (–25, 20, –11).
3	$\vec{a}$ = (–8, 13 , –7), $\vec{b}$ = (–3, 1, –7), $\vec{c}$ = (4, –3, 3), $\vec{d}$ = (11, 0, 19).
4	$\vec{a}$ = (–4, 17 , 3), $\vec{b}$ = (–2, 0, 2), $\vec{c}$ = (12, 6, 5), $\vec{d}$ = (–20, 11, 2).
5	$\vec{a}$ = (2, –3 , 14), $\vec{b}$ = (7, 0, –8), $\vec{c}$ = (11, 13, 0), $\vec{d}$ = (–6, 7, 52).
6	$\vec{a}$ = (15, –1 , 0), $\vec{b}$ = (4, 7, –11), $\vec{c}$ = (–1, –2, 3), $\vec{d}$ = (–9, 12, –17).
7	$\vec{a}$ = (–4, 11 , 9), $\vec{b}$ = (1, –2, 0), $\vec{c}$ = (–3, 2, –1), $\vec{d}$ = (–12, 19, 7).
8	$\vec{a}$ = (–1, 16 , 7), $\vec{b}$ = (0, 3, –7), $\vec{c}$ = (3, 4, –5), $\vec{d}$ = (–2, –23, 5).
9	$\vec{a}$ = (0, –13 , 2), $\vec{b}$ = (8, 5, –7), $\vec{c}$ = (–1, –1, 4), $\vec{d}$ = (7, 30, –7).
10	$\vec{a}$ = (–3, –7 ,4), $\vec{b}$ = (12, –1, 0), $\vec{c}$ = (–2, 2, 11), $\vec{d}$ = (3, –2, 37).
11	$\vec{a}$ = (–11, 7 ,0), $\vec{b}$ = (2, 2, 5), $\vec{c}$ = (–3, –6, 1), $\vec{d}$ = (4, –17, –9).
12	$\vec{a}$ = (2, 14 ,–1), $\vec{b}$ = (7, 0, 3), $\vec{c}$ = (9, 1, 1), $\vec{d}$ = (–12, 27, –6).
13	$\vec{a}$ = (3, –9 ,3), $\vec{b}$ = (0, 4, 11), $\vec{c}$ = (17, 1, –1), $\vec{d}$ = (20, 0, 24).
14	$\vec{a}$ = (–7, 11 ,0), $\vec{b}$ = (1, –5, 7), $\vec{c}$ = (3, 3, –5), $\vec{d}$ = (–25, 35, –2).
15	$\vec{a}$ = (0, 18 ,3), $\vec{b}$ = (–7, 1, –2), $\vec{c}$ = (1, 9, 5), $\vec{d}$ = (–4, –8, 7).
16	$\vec{a}$ = (11, –5 ,3), $\vec{b}$ = (4, –6, 0), $\vec{c}$ = (–7, 7, 2), $\vec{d}$ = (17, –7, –1).
17	$\vec{a}$ = (5, –13 ,2), $\vec{b}$ = (7, 0, 4), $\vec{c}$ = (–3, –1, 6), $\vec{d}$ = (–16, 14, –16).
18	$\vec{a}$ = (–3, 4 , 0), $\vec{b}$ = (17, 2, –11), $\vec{c}$ = (7, 5, –7), $\vec{d}$ = (4, 5, –4).
19	$\vec{a}$ = (0, 4 , –18), $\vec{b}$ = (5, –3, 6), $\vec{c}$ = (1, –11, –5), $\vec{d}$ = (–3, –11, –32).

20	$\vec{a} = (–7, 9 , 2)$, $\vec{b} = (10, 0, –6)$, $\vec{c} = (3, –1, 8)$, $\vec{d} = (30, –10, –6)$.
21	$\vec{a} = (12, –1 , 0)$, $\vec{b} = (3, 7, –2)$, $\vec{c} = (–1, 5, 15)$, $\vec{d} = (14, 11, 13)$.
22	$\vec{a} = (2, 17 , –5)$, $\vec{b} = (4, 8, 0)$, $\vec{c} = (1, 10, –1)$, $\vec{d} = (–3, 5, 2)$.
23	$\vec{a} = (3, –8 , 0)$, $\vec{b} = (12, –7, –4)$, $\vec{c} = (2, 1, –2)$, $\vec{d} = (–5, –18, 8)$.
24	$\vec{a} = (7, –8 , 3)$, $\vec{b} = (10, 0, –15)$, $\vec{c} = (4, –5, 8)$, $\vec{d} = (–27, –3, 40)$.
25	$\vec{a} = (–3, –1 , 6)$, $\vec{b} = (7, 0, 4)$, $\vec{c} = (5, –13, 2)$, $\vec{d} = (0, 27, –6)$.
26	$\vec{a} = (–7, 7 , 2)$, $\vec{b} = (4, –6, 0)$, $\vec{c} = (11, –5, 3)$, $\vec{d} = (14, –22, –9)$.
27	$\vec{a} = (1, 9 , 5)$, $\vec{b} = (–7, 1, –2)$, $\vec{c} = (0, 18, 3)$, $\vec{d} = (–9, –35, –15)$.
28	$\vec{a} = (3, 3 , –5)$, $\vec{b} = (1, –5, 7)$, $\vec{c} = (–7, 11, 0)$, $\vec{d} = (18, –24, 2)$.
29	$\vec{a} = (17, 1 , –1)$, $\vec{b} = (0, 4, 11)$, $\vec{c} = (3, –9, 3)$, $\vec{d} = (–23, 21, 6)$.
30	$\vec{a} = (9, 1 , 1)$, $\vec{b} = (7, 0, 3)$, $\vec{c} = (2, 14, –1)$, $\vec{d} = (30, –25, 8)$.

Задание 2

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ (сделать рисунок). Найдите:

1) длину ребра AB;
2) угол между ребрами AB и AC;
3) площадь грани ABC;
4) объем пирамиды;
5) длину высоты, опущенную на грань ABC.

Номер варианта	Задание			
1	$A\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$	$B(-1; 2; 2)$	$C\left(\frac{1}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$	$D\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$
2	$A\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$	$B(-2; 4; 4)$	$C\left(\frac{2}{3}; \frac{20}{3}; \frac{8}{3}\right)$	$D\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}; \frac{22}{3}\right)$
3	$A(2; 2; -1)$	$B(-3; 6; 6)$	$C(1; 10; 4)$	$D(5; 5; 11)$
4	$A\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$	$B(-4; 8; 8)$	$C\left(\frac{4}{3}; \frac{40}{3}; \frac{16}{3}\right)$	$D\left(\frac{20}{3}; \frac{20}{3}; \frac{44}{3}\right)$
5	$A\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{5}{3}\right)$	$B(-5; 10; 10)$	$C\left(\frac{5}{3}; \frac{50}{3}; \frac{20}{3}\right)$	$D\left(\frac{25}{3}; \frac{25}{3}; \frac{55}{3}\right)$

6	$A(4;\ 4;\ -2)$	$B(-6;\ 12;\ 12)$	$C(2;\ 20;\ 8)$	$D(10;\ 10;\ 22)$
7	$A\left(\frac{14}{3};\ \frac{14}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$	$B(-7;\ 14;\ 14)$	$C\left(\frac{7}{3};\ \frac{70}{3};\ \frac{28}{3}\right)$	$D\left(\frac{35}{3};\ \frac{35}{3};\ \frac{77}{3}\right)$
8	$A\left(\frac{16}{3};\ \frac{16}{3};\ -\frac{8}{3}\right)$	$B(-8;\ 16;\ 16)$	$C\left(\frac{8}{3};\ \frac{80}{3};\ \frac{32}{3}\right)$	$D\left(\frac{40}{3};\ \frac{40}{3};\ \frac{88}{3}\right)$
9	$A(6;\ 6;\ -3)$	$B(-9;\ 18;\ 18)$	$C(3;\ 30;\ 12)$	$D(15;\ 15;\ 33)$
10	$A\left(\frac{20}{3};\ \frac{20}{3};\ -\frac{10}{3}\right)$	$B(-10;\ 20;\ 20)$	$C\left(\frac{10}{3};\ \frac{100}{3};\ \frac{40}{3}\right)$	$D\left(\frac{50}{3};\ \frac{50}{3};\ \frac{110}{3}\right)$
11	$A(2;\ 2;\ -1)$	$B\left(\frac{1}{3};\ \frac{10}{3};\ \frac{4}{3}\right)$	$C\left(\frac{5}{3};\ \frac{14}{3};\ \frac{2}{3}\right)$	$D(3;\ 3;\ 3)$
12	$A(4;\ 4;\ -2)$	$B\left(\frac{2}{3};\ \frac{20}{3};\ \frac{8}{3}\right)$	$C\left(\frac{10}{3};\ \frac{28}{3};\ \frac{4}{3}\right)$	$D(6;\ 6;\ 6)$
13	$A(6;\ 6;\ -3)$	$B(1;\ 10;\ 4)$	$C(5;\ 14;\ 2)$	$D(9;\ 9;\ 9)$
14	$A(8;\ 8;\ -4)$	$B\left(\frac{4}{3};\ \frac{40}{3};\ \frac{16}{3}\right)$	$C\left(\frac{20}{3};\ \frac{56}{3};\ \frac{8}{3}\right)$	$D(12;\ 12;\ 12)$
15	$A(10;\ 10;\ -5)$	$B\left(\frac{5}{3};\ \frac{50}{3};\ \frac{20}{3}\right)$	$C\left(\frac{25}{3};\ \frac{70}{3};\ \frac{10}{3}\right)$	$D(15;\ 15;\ 15)$
16	$A(12;\ 12;\ -6)$	$B(2;\ 20;\ 8)$	$C(10;\ 28;\ 4)$	$D(18;\ 18;\ 18)$
17	$A(14;\ 14;\ -7)$	$B\left(\frac{7}{3};\ \frac{70}{3};\ \frac{28}{3}\right)$	$C\left(\frac{35}{3};\ \frac{98}{3};\ \frac{14}{3}\right)$	$D(21;\ 21;\ 21)$
18	$A(16;\ 16;\ -8)$	$B\left(\frac{8}{3};\ \frac{80}{3};\ \frac{32}{3}\right)$	$C\left(\frac{40}{3};\ \frac{112}{3};\ \frac{16}{3}\right)$	$D(24;\ 24;\ 24)$
19	$A(18;\ 18;\ -9)$	$B(3;\ 30;\ 12)$	$C(15;\ 42;\ 6)$	$D(27;\ 27;\ 27)$
20	$A(20;\ 20;\ -10)$	$B\left(\frac{10}{3};\ \frac{100}{3};\ \frac{40}{3}\right)$	$C\left(\frac{50}{3};\ \frac{140}{3};\ \frac{20}{3}\right)$	$D(30;\ 30;\ 30)$
21	$A\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$	$B(2;\ 2;\ -1)$	$C\left(\frac{10}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$	$D\left(\frac{5}{3};\ \frac{11}{3};\ \frac{5}{3}\right)$
22	$A\left(\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$	$B(4;\ 4;\ -2)$	$C\left(\frac{20}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{2}{3}\right)$	$D\left(\frac{10}{3};\ \frac{22}{3};\ \frac{10}{3}\right)$
23	$A(2;\ -1;\ 2)$	$B(6;\ 6;\ -3)$	$C(10;\ 4;\ 1)$	$D(5;\ 11;\ 5)$
24	$A\left(\frac{8}{3};\ -\frac{4}{3};\ \frac{8}{3}\right)$	$B(8;\ 8;\ -4)$	$C\left(\frac{40}{3};\ \frac{16}{3};\ \frac{4}{3}\right)$	$D\left(\frac{20}{3};\ \frac{44}{3};\ \frac{20}{3}\right)$
25	$A\left(\frac{10}{3};\ -\frac{5}{3};\ \frac{10}{3}\right)$	$B(10;\ 10;\ -5)$	$C\left(\frac{50}{3};\ \frac{20}{3};\ \frac{5}{3}\right)$	$D\left(\frac{25}{3};\ \frac{55}{3};\ \frac{25}{3}\right)$
26	$A(6;\ -3;\ 6)$	$B(18;\ 18;\ -9)$	$C(30;\ 12;\ 3)$	$D(15;\ 33;\ 15)$

27	$A\left(\frac{14}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{14}{3}\right)$	$B(14; 14; -7)$	$C\left(\frac{70}{3}; \frac{28}{3}; \frac{7}{3}\right)$	$D\left(\frac{35}{3}; \frac{77}{3}; \frac{35}{3}\right)$
28	$A(8; -4; 8)$	$B(24; 24; 12)$	$C(40; 16; 4)$	$D(20; 44; 20)$
29	$A(12; -6; 12)$	$B(36; 36; -18)$	$C(60; 24; 6)$	$D(30; 66; 30)$
30	$A\left(\frac{20}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right)$	$B(20; 20; -10)$	$C\left(\frac{100}{3}; \frac{40}{3}; \frac{10}{3}\right)$	$D\left(\frac{50}{3}; \frac{110}{3}; \frac{50}{3}\right)$

Задание 3

Вектор $\overline{a}$ ортогонален векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$ $(\overline{a} \perp \overline{b}, \overline{a} \perp \overline{c})$. Кроме того, известна длина $|\overline{a}|$. Найти координаты вектора $\overline{a}$, если:

Вариант	Задание
1	$\overline{b}(-1; 1; -3)$, $\overline{c}(1; 1; -1)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{6}$, $np_{OX}\,\overline{a} < 0$.
2	$\overline{b}\left(1; 1; -\frac{3}{2}\right)$, $\overline{c}\left(-1; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $np_{OY}\,\overline{a} < 0$.
3	$\overline{b}(-1; 1; -1)$, $\overline{c}\left(1; 1; -\frac{1}{3}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{14}$, $np_{OY}\,\overline{a} < 0$.
4	$\overline{b}\left(1; 1; -\frac{3}{4}\right)$, $\overline{c}\left(-1; 1; -\frac{1}{4}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{19}$, $np_{OZ}\,\overline{a} < 0$.
5	$\overline{b}\left(-1; 1; -\frac{3}{5}\right)$, $\overline{c}(1; 1; -0{,}2)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{30}$, $np_{OX}\,\overline{a} < 0$.
6	$\overline{b}\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{c}\left(-1; 1; -\frac{1}{6}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{41}$, $np_{OY}\,\overline{a} > 0$.
7	$\overline{b}\left(-1; 1; -\frac{3}{7}\right)$, $\overline{c}\left(1; 1; -\frac{1}{7}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{5{,}4}$, $np_{OX}\,\overline{a} < 0$.
8	$\overline{b}\left(1; 1; -\frac{3}{8}\right)$, $\overline{c}\left(-1; 1; -\frac{1}{8}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{69}$, $np_{OZ}\,\overline{a} < 0$.
9	$\overline{b}\left(-1; 1; -\frac{1}{3}\right)$, $\overline{c}\left(1; 1; -\frac{1}{9}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{86}$, $np_{OX}\,\overline{a} < 0$.
10	$\overline{b}(1; 1; -0{,}3)$, $\overline{c}(-1; 1; -0{,}1)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{105}$, $np_{OY}\,\overline{a} < 0$.
11	$\overline{b}\left(-1; 1; -\frac{3}{11}\right)$, $\overline{c}\left(1; 1; -\frac{1}{11}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{126}$, $np_{OX}\,\overline{a} < 0$.
12	$\overline{b}\left(1; 1; -\frac{1}{4}\right)$, $\overline{c}\left(-1; 1; -\frac{1}{12}\right)$, $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{149}$, $np_{OZ}\,\overline{a} > 0$.

13	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{13}\right)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{13}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{174}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
14	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{3}{14}\right)$, $\bar{c}\left(-1;1;-\frac{1}{14}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{201}$, $np_{OY}\,\bar{a}<0$.
15	$\bar{b}(-1;1;-0{,}2)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{15}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{230}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
16	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{3}{16}\right)$, $\bar{c}\left(-1;1;-\frac{1}{16}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{261}$, $np_{OZ}\,\bar{a}>0$.
17	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{17}\right)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{17}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{294}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
18	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{1}{6}\right)$, $\bar{c}\left(-1;1;-\frac{1}{18}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{329}$, $np_{OY}\,\bar{a}<0$.
19	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{19}\right)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{19}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{366}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
20	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{3}{20}\right)$, $\bar{c}(-1;1;-0{,}05)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{405}$, $np_{OY}\,\bar{a}<0$.
21	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{7}\right)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{21}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{446}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
22	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{3}{22}\right)$, $\bar{c}\left(-1;1;-\frac{1}{22}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{489}$, $np_{OZ}\,\bar{a}>0$.
23	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{23}\right)$, $\bar{c}\left(1;1;-\frac{1}{23}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{534}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
24	$\bar{b}\left(1;1;-\frac{3}{8}\right)$, $\bar{c}\left(-1;1;-\frac{1}{24}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{581}$, $np_{OY}\,\bar{a}>0$.
25	$\bar{b}\left(-1;1;-\frac{3}{25}\right)$, $\bar{c}(1;1;-0{,}04)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{630}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
26	$\bar{b}\left(-1;-1;-\frac{3}{2}\right)$, $\bar{c}\left(1;-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=3$, $np_{OZ}\,\bar{a}<0$.
27	$\bar{b}(1;-1;1)$, $\bar{c}\left(-1;-1;\frac{1}{3}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{1{,}4}$, $np_{OZ}\,\bar{a}<0$.
28	$\bar{b}\left(-1;-1;\frac{3}{4}\right)$, $\bar{c}\left(1;-1;\frac{1}{4}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{19}$, $np_{OY}\,\bar{a}>0$.
29	$\bar{b}\left(1;-1;\frac{3}{5}\right)$, $\bar{c}(-1;-1;0{,}2)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{30}$, $np_{OX}\,\bar{a}<0$.
30	$\bar{b}(-1;-1;0{,}5)$, $\bar{c}\left(1;-1;\frac{1}{6}\right)$, $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{41}$, $np_{OY}\,\bar{a}<0$.

Задание 4

Найти координаты вектора $\overline{a}$, если известно, что $\overline{a} \parallel \overline{AB}$, даны длина $|\overline{a}|$ и дополнительные условия:

Вариант	Задание
1	$A(9;-1;6)$, $B(11;-3;7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $np_{OY}\overline{a} > 0$.
2	$A(8;1;4)$, $B(-2;4;6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $np_{OX}\overline{a} < 0$.
3	$A(7;-1;6)$, $B(9;-3;7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $np_{OZ}\overline{a} < 0$.
4	$A(6;1;4)$, $B(0;4;6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $np_{OX}\overline{a} > 0$.
5	$A(5;-1;6)$, $B(7;-3;7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $np_{OZ}\overline{a} < 0$.
6	$A(4;1;4)$, $B(-2;4;6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $np_{OY}\overline{a} < 0$.
7	$A(3;-1;6)$, $B(5;-3;7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $np_{OY}\overline{a} > 0$.
8	$A(2;1;4)$, $B(-4;4;6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $np_{OZ}\overline{a} > 0$.
9	$A(1;-1;6)$, $B(3;-3;7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $np_{OY}\overline{a} < 0$.
10	$A(0;1;4)$, $B(-6;4;6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $np_{OZ}\overline{a} > 0$.
11	$A(-1;-1;6)$, $B(2;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $np_{OX}\overline{a} < 0$.
12	$A(-2;1;4)$, $B(-6;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $np_{OZ}\overline{a} < 0$.
13	$A(-3;-1;6)$, $B(0;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $np_{OY}\overline{a} < 0$.
14	$A(-4;1;4)$, $B(-8;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $np_{OY}\overline{a} < 0$.
15	$A(-5;-1;6)$, $B(-2;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $np_{OX}\overline{a} > 0$.
16	$A(-6;1;4)$, $B(-10;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $np_{OY}\overline{a} > 0$.
17	$A(-7;-1;6)$, $B(-4;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $np_{OZ}\overline{a} > 0$.
18	$A(-8;1;4)$, $B(-12;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $np_{OZ}\overline{a} > 0$.

19	$A(-9;-1;6)$, $B(-6;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $пр_{OZ}\,\overline{a} > 0$.
20	$A(-10;1;4)$, $B(-14;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $пр_{OZ}\,\overline{a} < 0$.
21	$A(-11;-1;6)$, $B(-8;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 7/2$, $пр_{OX}\,\overline{a} > 0$.
22	$A(-12;1;4)$, $B(-16;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $пр_{OX}\,\overline{a} < 0$.
23	$A(-13;-1;6)$, $B(-17;5;4)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 10$, $пр_{OY}\,\overline{a} > 0$.
24	$A(-14;1;4)$, $B(-18;3;8)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $пр_{OY}\,\overline{a} < 0$.
25	$A(-15;-1;6)$, $B(-19;-1;9)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 10$, $пр_{OZ}\,\overline{a} > 0$.
26	$A(-9;1;-6)$, $B(-11;3;-7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $пр_{OZ}\,\overline{a} < 0$.
27	$A(-8;-1;-4)$, $B(2;-4;-6)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 14$, $пр_{OY}\,\overline{a} < 0$.
28	$A(-7;1;6)$, $B(-9;3;-7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $пр_{OX}\,\overline{a} < 0$.
29	$A(-5;1;-6)$, $B(-7;3;-7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $пр_{OZ}\,\overline{a} < 0$.
30	$A(-3;1;-6)$, $B(-5;3;-7)$, $\lvert\overline{a}\rvert = 6$, $пр_{OY}\,\overline{a} < 0$.

Задание 5

Компланарны ли вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, если известны координаты точек?

Вариант	Задание
1	$A(7;4;6)$, $B(5;3;5)$, $C(-12;-7;-11)$, $D(-17;-10;-16)$.
2	$A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(1;2;0)$.
3	$A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(2;6;12)$.
4	$A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-2;-1;6)$.
5	$A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(0;3;-6)$.
6	$A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$, $D(1;6;2)$.
7	$A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $D(-1;-6;3)$.
8	$A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-1;1;1)$.

9	$A(-2;\,0;\,-4)$, $B(-1;\,7;\,1)$, $C(4;\,-8;\,-4)$, $D(2;\,0;\,4)$.
10	$A(14;\,4;\,5)$, $B(5;\,3;\,-2)$, $C(2;\,6;\,3)$, $D(2;\,-2;\,1)$.
11	$A(1;\,1;\,2)$, $B(-1;\,1;\,3)$, $C(2;\,-2;\,3)$, $D(1;\,0;\,-1)$.
12	$A(1;\,3;\,4)$, $B(0;\,2;\,3)$, $C(-1;\,-2;\,3)$, $D(3;\,4;\,-5)$.
13	$A(1;\,0;\,3)$, $B(4;\,2;\,1)$, $C(0;\,3;\,-2)$, $D(-5;\,-1;\,2)$.
14	$A(2;\,-1;\,-5)$, $B(-2;\,3;\,0)$, $C(1;\,2;\,4)$, $D(3;\,0;\,1)$.
15	$A(-1;\,0;\,-3)$, $B(-4;\,-2;\,-1)$, $C(0;\,3;\,-2)$, $D(-5;\,-1;\,2)$.
16	$A(-2;\,1;\,5)$, $B(2;\,-3;\,0)$, $C(1;\,2;\,4)$, $D(3;\,0;\,1)$.
17	$A(-1;\,0;\,-3)$, $B(4;\,2;\,1)$, $C(0;\,-3;\,2)$, $D(-5;\,-1;\,2)$.
18	$A(2;\,-1;\,-5)$, $B(2;\,-3;\,0)$, $C(1;\,2;\,4)$, $D(-3;\,0;\,-1)$.
19	$A(-1;\,0;\,-3)$, $B(4;\,2;\,1)$, $C(0;\,3;\,-2)$, $D(5;\,1;\,-2)$.
20	$A(-2;\,1;\,5)$, $B(-2;\,3;\,0)$, $C(1;\,2;\,4)$, $D(-3;\,0;\,-1)$.
21	$A(1;\,0;\,3)$, $B(2;\,-1;\,4)$, $C(-1;\,-3;\,5)$, $D(-15;\,1;\,-1)$.
22	$A(2;\,-1;\,4)$, $B(-1;\,-3;\,5)$, $C(-15;\,1;\,-1)$, $D(1;\,0;\,3)$.
23	$A(1;\,-1;\,15)$, $B(-5;\,3;\,1)$, $C(-4;\,1;\,-2)$, $D(-3;\,0;\,-1)$.
24	$A(3;\,0;\,1)$, $B(4;\,-1;\,2)$, $C(5;\,-3;\,-1)$, $D(-1;\,1;\,-15)$.
25	$A(1;\,-1;\,3)$, $B(5;\,4;\,-2)$, $C(2;\,1;\,-1)$, $D(15;\,0;\,4)$.
26	$A(2;\,-4;\,-5)$, $B(0;\,1;\,-1)$, $C(1;\,-1;\,-2)$, $D(-4;\,0;\,-15)$.
27	$A(4;\,0;\,15)$, $B(-1;\,1;\,2)$, $C(-2;\,4;\,5)$, $D(0;\,-1;\,1)$.
28	$A(15;\,0;\,4)$, $B(2;\,1;\,-1)$, $C(5;\,4;\,-2)$, $D(1;\,-1;\,0)$.
29	$A(1;\,-1;\,0)$, $B(-5;\,4;\,-2)$, $C(-2;\,-1;\,1)$, $D(15;\,0;\,-4)$.
30	$A(2;\,1;\,-1)$, $B(15;\,0;\,4)$, $C(5;\,4;\,-2)$, $D(1;\,-1;\,0)$.

Задание 6

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известны длины векторов, разложение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по векторам $\overline{p}, \overline{q}$. и $\angle \overline{p}, \overline{q}$ – угол между векторами $\overline{p}, \overline{q}$.

Вариант	Задание				
1	$\overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q}$,	$\overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{pq} = \pi/6$.
2	$\overline{a} = 2\overline{p} + \overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} - 3\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/4$
3	$\overline{a} = \overline{p} - 2\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/2$.
4	$\overline{a} = 3\overline{p} - 5\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{pq} = 5\pi/6$.
5	$\overline{a} = \overline{p} - \overline{q}$,	$\overline{b} = 2\overline{p} + 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 6$,	$\angle\overline{pq} = 3\pi/4$.
6	$\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$,	$\overline{b} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/3$.
7	$\overline{a} = 2\overline{p} - 2\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 3$,	$\angle\overline{pq} = \pi/2$.
8	$\overline{a} = \overline{p} + \overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} - 4\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 7$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{pq} = \pi/4$.
9	$\overline{a} = 4\overline{p} - 4\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{pq} = \pi/6$,
10	$\overline{a} = \overline{p} + \overline{q}$,	$\overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 3$,	$\angle\overline{pq} = \pi/3$.
11	$\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$,	$\overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/6$.
12	$\overline{a} = 3\overline{p} + \overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 4$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{p}, \overline{p} = \pi/4$
13	$\overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 1/5$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1$,	$\angle\overline{pq} = \pi/2$.
14	$\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 5\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 4$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 1/2$,	$\angle\overline{pq} = 5\pi/6$.
15	$\overline{a} = \overline{p} - 2\overline{q}$,	$\overline{b} = 2\overline{p} + \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 3$,	$\angle\overline{pq} = 3\pi/4$.
16	$\overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 3$,	$\angle\overline{pq} = \pi/3$.
17	$\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/2$.
18	$\overline{a} = 4\overline{p} + \overline{q}$,	$\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 7$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/4$.
19	$\overline{a} = \overline{p} - 4\overline{q}$,	$\overline{b} = 3\overline{p} + \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/6$.
20	$\overline{a} = \overline{p} + 4\overline{q}$,	$\overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q}$,	$\lvert\overline{p}\rvert = 7$,	$\lvert\overline{q}\rvert = 2$,	$\angle\overline{pq} = \pi/3$.

21	$a = 3p + 2q,$	$\overline{b} = p - q,$	$\lvert p\rvert = 10,$	$\lvert q\rvert = 1,$	$\angle pq = \pi/2.$
22	$\overline{a} = 4\overline{p} - \overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 5,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 4,$	$\angle\overline{pq} = \pi/4$
23	$\overline{a} = 2\overline{p} + 3\overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 6,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 7,$	$\angle\overline{pq} = \pi/3.$
24	$\overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 3,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 4,$	$\angle\overline{pq} = \pi/3.$
25	$a- = 2\overline{p} + 3\overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 2,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 3,$	$\angle\overline{pq} = \pi/4.$
26	$\overline{a} = 2\overline{p} - 3\overline{q},$	$\overline{b} = 3\overline{p} + \overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 4,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 1,$	$\angle\overline{pq} = \pi/6.$
27	$\overline{a} = 5\overline{p} + \overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} - 3\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 1,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 2,$	$\angle\overline{pq} = \pi/3.$
28	$\overline{a} = 7\overline{p} - 2\overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 1/2,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 2,$	$\angle\overline{pq} = \pi/2.$
29	$\overline{a} = 6\overline{p} - \overline{q},$	$\overline{b} = \overline{p} + \overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 3,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 4,$	$\angle\overline{pq} = \pi/4.$
30	$\overline{a} = 10\overline{p} + \overline{q},$	$\overline{b} = 3\overline{p} - 2\overline{q},$	$\lvert\overline{p}\rvert = 4,$	$\lvert\overline{q}\rvert = 1,$	$\angle\overline{pq} = \pi/6.$

Задание 7

Доказать, что вектора $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе.

Вариант	Задание
1	$\overline{x} = \{-2, 0, 9\}$, $\overline{p} = \{0, -1, 2\}$, $\overline{q} = \{1, 0, -1\}$, $\overline{r} = \{-1, 2, 4\}$.
2	$\overline{x} = \{5, -12, 1\}$, $\overline{p} = \{1, -3, 0\}$, $\overline{q} = \{1, -1, 1\}$, $\overline{r} = \{0, -1, 2\}$.
3	$\overline{x} = \{0, 2, 4\}$, $\overline{p} = \{3, 1, -1\}$, $\overline{q} = \{0, -3, 1\}$, $\overline{r} = \{1, 1, 1\}$.
4	$\overline{x} = \{-1, 5, 5\}$, $\overline{p} = \{2, 1, 1\}$, $\overline{q} = \{-2, 0, -3\}$, $\overline{r} = \{-1, 2, 1\}$.
5	$\overline{x} = \{-1, -2, 3\}$, $\overline{p} = \{2, 0, 1\}$, $\overline{q} = \{1, 2, -1\}$, $\overline{r} = \{0, 4, -1\}$.
6	$\overline{x} = \{-5, 2, -1\}$, $\overline{p} = \{-1, 1, 0\}$, $\overline{q} = \{2, -1, 3\}$, $\overline{r} = \{1, 0, 1\}$.
7	$\overline{x} = \{1, -5, 7\}$, $\overline{p} = \{0, -1, 1\}$, $\overline{q} = \{2, 0, 1\}$, $\overline{r} = \{3, -1, 0\}$.
8	$\overline{x} = \{5, 1, 4\}$, $\overline{p} = \{2, 0, 2\}$, $\overline{q} = \{0, -1, 1\}$, $\overline{r} = \{3, -1, 4\}$.
9	$\overline{x} = \{1, 1, -1\}$, $\overline{p} = \{1, 1, 0\}$, $\overline{q} = \{-1, 0, 1\}$, $\overline{r} = \{-1, 0, 2\}$.
10	$\overline{x} = \{-3, 7, 4\}$, $\overline{p} = \{-2, 2, 1\}$, $\overline{q} = \{2, 0, 1\}$, $\overline{r} = \{1, 1, 1\}$.
11	$\overline{x} = \{-9, 5, 5\}$, $\overline{p} = \{4, 1, 1\}$, $\overline{q} = \{2, 0, -3\}$, $\overline{r} = \{-1, 2, 1\}$.

12	$\bar{x}=\{-5,-5,5\}$, $\bar{p}=\{-2,0,1\}$, $\bar{q}=\{1,3,-1\}$, $\bar{r}=\{0,4,1\}$.
13	$\bar{x}=\{3,-3,4\}$, $\bar{p}=\{1,0,2\}$, $\bar{q}=\{0,1,0\}$, $\bar{r}=\{2,-1,4\}$.
14	$\bar{x}=\{3,3,-1\}$, $\bar{p}=\{3,1,0\}$, $\bar{q}=\{-1,2,1\}$, $\bar{r}=\{-1,0,2\}$.
15	$\bar{x}=\{-1,7,-4\}$, $\bar{p}=\{-1,2,1\}$, $\bar{q}=\{2,0,3\}$, $\bar{r}=\{1,1,-1\}$.
16	$\bar{x}=\{6,5,-14\}$, $\bar{p}=\{1,1,4\}$, $\bar{q}=\{0,-3,2\}$, $\bar{r}=\{2,1,-1\}$.
17	$\bar{x}=\{6,-1,7\}$, $\bar{p}=\{1,-2,0\}$, $\bar{q}=\{-1,1,3\}$, $\bar{r}=\{1,0,4\}$.
18	$\bar{x}=\{5,15,0\}$, $\bar{p}=\{1,0,5\}$, $\bar{q}=\{-1,3,2\}$, $\bar{r}=\{0,-1,1\}$.
19	$\bar{x}=\{2,-1,11\}$, $\bar{p}=\{1,1,0\}$, $\bar{q}=\{0,1,-2\}$, $\bar{r}=\{1,0,3\}$.
20	$\bar{x}=\{11,5,-3\}$, $\bar{p}=\{1,0,2\}$, $\bar{q}=\{-1,0,1\}$, $\bar{r}=\{2,5,-3\}$.
21	$\bar{x}=\{8,0,5\}$, $\bar{p}=\{2,0,1\}$, $\bar{q}=\{1,1,0\}$, $\bar{r}=\{4,1,2\}$.
22	$\bar{x}=\{3,1,8\}$, $\bar{p}=\{0,1,3\}$, $\bar{q}=\{1,2,-1\}$, $\bar{r}=\{2,0,-1\}$.
23	$\bar{x}=\{8,1,12\}$, $\bar{p}=\{1,2,-1\}$, $\bar{q}=\{3,0,2\}$, $\bar{r}=\{-1,1,1\}$.
24	$\bar{x}=\{-9,-8,-3\}$, $\bar{p}=\{1,4,1\}$, $\bar{q}=\{-3,2,0\}$, $\bar{r}=\{1,-1,2\}$.
25	$\bar{x}=\{-5,9,-13\}$, $\bar{p}=\{0,1,-2\}$, $\bar{q}=\{3,-1,1\}$, $\bar{r}=\{4,1,0\}$.
26	$\bar{x}=\{-15,5,6\}$, $\bar{p}=\{0,5,1\}$, $\bar{q}=\{3,2,-1\}$, $\bar{r}=\{-1,1,0\}$.
27	$\bar{x}=\{8,9,4\}$, $\bar{p}=\{1,0,1\}$, $\bar{q}=\{0,-2,1\}$, $\bar{r}=\{1,3,0\}$.
28	$\bar{x}=\{3,1,3\}$, $\bar{p}=\{2,1,0\}$, $\bar{q}=\{1,0,1\}$, $\bar{r}=\{4,2,1\}$.
29	$\bar{x}=\{-1,7,0\}$, $\bar{p}=\{0,3,1\}$, $\bar{q}=\{1,-1,2\}$, $\bar{r}=\{2,-1,0\}$.
30	$\bar{x}=\{0,-8,9\}$, $\bar{p}=\{0,-2,1\}$, $\bar{q}=\{3,1,-1\}$, $\bar{r}=\{4,0,1\}$.

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Убедитесь, что вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ образуют базис.

Найдите разложение вектора $\bar{a}_4$ по базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, если

$\bar{a}_1=(-2;1;0)$, $\bar{a}_2=(3;-1;1)$, $\bar{a}_3=(2;0;-1)$, $\bar{a}_4=(1;1;1)$

Решение.

$\bar{a}_1=(-2;1;0)$, $\bar{a}_2=(3;-1;1)$, $\bar{a}_3=(2;0;-1)$, $\bar{a}_4=(1;1;1)$

Составим линейную комбинацию векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \bar{a}_3$ и найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3=0,\quad \alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ \alpha_1-\alpha_2=0,\\ \alpha_2-\alpha_3=0.\end{cases}$$ По формулам Крамера решим данную систему.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2&3&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=-2+2+3=3,\quad \Delta_{\alpha_1}=0,\ \Delta_{\alpha_2}=0,\ \Delta_{\alpha_3}=0.$$

$\alpha_1=\dfrac{0}{3}=0,\quad \alpha_2=\dfrac{0}{3}=0,\quad \alpha_3=\dfrac{0}{3}=0.$ Все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны 0, следовательно, вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно независимые и образуют базис. Найдем координаты вектора $\bar{a}_4$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Разложим вектор $\bar{a}_4$ по векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$: $\bar{a}_4=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3$, тогда $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$$\begin{cases}-2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=1,\\ \alpha_1-\alpha_2=1,\\ \alpha_2-\alpha_3=1.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2&3&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=3,\quad \Delta_{\alpha_1}=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&-1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=8,\quad \Delta_{\alpha_2}=\begin{vmatrix}-2&1&2\\1&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=5\quad \Delta_{\alpha_3}=\begin{vmatrix}-2&3&1\\1&-1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=2$$

$$\alpha_1=\frac{8}{3},\quad \alpha_2=\frac{5}{3},\quad \alpha_3=\frac{2}{3},$$

Таким образом, $\bar{a}_4=\dfrac{8}{3}\bar{a}_1+\dfrac{5}{3}\bar{a}_2+\dfrac{2}{3}\bar{a}_3=\dfrac{1}{3}\left(8\bar{a}_1+5\bar{a}_2+2\bar{a}_3\right)$.

Ответ. Да. $\bar{a}_4=\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Задание 2

Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}$, а также угол $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)$ образованный векторами: $\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(-3;2;6)$.

Решение.

$\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(-3;2;6)$

По формуле скалярного произведения двух векторов выразим косинус угла между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|a|\cdot|b|\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|a|\cdot|b|}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и их модули.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=-3\cdot2+2\cdot(-4)+6\cdot4=-6-8+24=10$,

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=6$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4+36}=\sqrt{9+4+36}=7$,

т.е. $\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{10}{42}=\dfrac{5}{21}$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\arccos\left(\frac{5}{21}\right)$.

Ответ. $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\arccos\left(\frac{5}{21}\right)$.

Задание 3

Найти векторное произведение векторов $\overline{a}=(2;\ 1;\ 3)$, $\overline{b}=(1;\ -3;\ 2)$.

Решение.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=2\bar{i}+3\bar{j}-6\overline{k}-(\overline{k}-9\bar{i}+4\bar{j})=11\bar{i}-\bar{j}-7\overline{k},$$

Ответ: $a\times b=(11,-1,-7)$.

Задание 4

Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\bar{i}-\bar{j}+2\overline{k}$.

Решение.

$\overline{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\bar{i}-\bar{j}+2\overline{k}$

Найдем площадь треугольника, используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}=(3;2;1)$, $\overline{b}=(1;-1;2)$.

$S=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$. Найдем векторное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}\times\overline{b}=\left(\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)$, $\overline{a}\times\overline{b}=(5;\,-5;\,-5)$.

$S=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+25+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

$S_\Delta=\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(ед^2\right)$.

Ответ. $S_{треуг}=\frac{5}{2}\sqrt{3}(ед^2)$.

Задание 5

Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если: $\overline{a}=(4;-2;0),\overline{b}=(-3;6;3)$, $\overline{c}=(1;4;-5)$.

Решение.

$\overline{a}=(4;-2;0),\overline{b}=(-3;6;3)$, $\overline{c}=(1;4;-5)$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$: $V=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$$\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 6 & 3\\ 1 & 4 & -5\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -5\end{vmatrix}=6(-20-1-8+5)=6(-24)=-144$$

$V=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|=144\left(ед^3\right)$.

Ответ. $V=144\ (ед^3)$

Задание 6

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ $A\,(2;\,-1;\,1)$, $B\,(5;\,5;\,4)$, $C\,(3;\,2;\,-1)$, $D\,(4;\,1;\,3)$. Найдите:

а) длину ребра AB; б) угол между ребрами AB и AC; в) площадь грани ABC;

г) объем пирамиды; д) длину высоты, опущенную на грань ABC.

Решение.

$A\ (2;\ -1;\ 1)$, $B\ (5;\ 5;\ 4)$, $C\ (3;\ 2;\ -1)$, $D\ (4;\ 1;\ 3)$;

а) Длина ребра $|\mathrm{AB}| = 8$;

б) Угол между ребрами AB и AC : $\cos(AB, AC) = \frac{15}{8\sqrt{14}}$;

$(AB, AC) = \arccos(\frac{15}{8\sqrt{14}})$.

в) Найдем площадь грани ABC: $S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.

Найдем векторное произведение двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 9\bar{k} + 3\bar{j} - 6\bar{k} - 9\bar{i} + 6\bar{j} = -21\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k},$$

$\overline{AB} \times \overline{AC} = (-21;9;3)$. Найдем длину векторного произведения:

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{531}, \text{ т.к. } S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|, \text{ то } S = \frac{1}{2}\sqrt{531}\left(ед^2\right).$$

г) Найдем объем пирамиды. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$ Тогда объем треугольной пирамиды(тетраэдра) равен:

$V_{Тетраэдра} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$ $, V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|$. Найдем координаты векторов: $\overline{AB} = (3;6;3)$, $\overline{AC} = (1;3;-2)$, $\overline{AD} = (2;2;2)$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(3 + 1 - 4 - 3 + 2 - 2) = -18.$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|-18\right| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3\ \left(ед^3\right).$$

д) Найдем длину высоты, опущенную на грань ABC. Из школьного курса известно, что объем тетраэдра равен: $V=\frac{1}{3}S\cdot H\;\Rightarrow\;H=\frac{3V}{S}$. В основании лежит ΔABC. $H=\dfrac{3\cdot 3}{\frac{1}{2}\sqrt{531}}=\dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$.

Ответ. а)8, б)$(AB,AC)=\arccos(\frac{15}{8\sqrt{14}})$,в) $S=\frac{1}{2}\sqrt{531}\left(ед^2\right)$,

г)$V=3\ (ед^3)$, д) $H=\dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$.

Задание 7

Найдите координаты вектора $\bar{c}$, зная, что вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}=(2;3;-1)$ и $\bar{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\bar{c}\cdot\left(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}\right)=-6$.

Решение.

$\bar{c}=(x;y;z)$, $\bar{a}=(2;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-2;3)$.

$\bar{c}\perp\bar{a}\Rightarrow 2x+3y-z=0$, $\bar{c}\perp\bar{b}\Rightarrow x-2y+3z=0$ и $2x-y+z=-6$.

$$\begin{cases} x-2y+3z=0,\\ 2x+3y-z=0,\\ 2x-y+z=-6.\end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-14,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}0&-2&3\\0&3&-1\\-6&-1&1\end{vmatrix}=42,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&0&-1\\2&-6&1\end{vmatrix}=-42,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}1&-2&0\\2&3&0\\2&-1&-6\end{vmatrix}=-42,\ x=-3,\ y=3,\ z=3.$$

Ответ. $\bar{c}=(-3;\,3;\,3)$.

Задание 8

Найти координаты вектора $\bar{c}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, образующий острый угол с заданной осью, $|\bar{c}|=50$, если $\bar{a}=(6;-8;-7{,}5)$, с осью OZ.

Решение.

$\overline{c}=(x;\ y;\ z)$, $\overline{a}=(6;-8;-7{,}5)$.

$$\overline{c}\parallel\overline{a}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-7{,}5}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-7{,}5}=t\Rightarrow\begin{cases}x=6t,\\ y=-8t,\\ z=-7{,}5t.\end{cases}$$

$$\left|\overline{c}\right|=50\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=50,\ \sqrt{(6t)^2+(-8t)^2+(-7{,}5t)^2}=50,$$

$$\sqrt{36t^2+64t^2+\frac{225}{4}t^2}=50\Rightarrow\sqrt{\frac{144t^2+256t^2+225t^2}{4}}=50,$$

$$\sqrt{\frac{625t^2}{4}}=50\Rightarrow\frac{25}{2}|t|=50\Rightarrow|t|=4.$$

$$\left[\begin{array}{l}t_1=4,\\ t_2=-4,\end{array}\right.\Rightarrow\overline{c_1}=(24;-32;-30),\ \overline{c_2}=(-24;32;30),$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{c_1},\overline{k}}\right)=-\frac{30}{50}=-\frac{3}{5}<0\Rightarrow\left(\widehat{\overline{c_1},\overline{k}}\right)>90^\circ,$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{c_2},\overline{k}}\right)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}>0\Rightarrow\left(\widehat{\overline{c_2},\overline{k}}\right)<90^\circ\Rightarrow\overline{c}=(-24;\ 32;\ 30).$$

Ответ: $\overline{c}=(-24;\ 32;\ 30)$.

Задание 9

Компланарны ли вектора $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$, если известны координаты точек $A\,(1;\ 2;\ -1)$, $B\,(0;1;\ 5)$, $C\,(-1;\ 2;1)$, $D\,(2;1;\ 3)$?

Решение.

$A\,(1;\ 2;\ -1)$, $B\,(0;1;\ 5)$, $C\,(-1;\ 2;1)$, $D\,(2;1;\ 3)$

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(-1;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(1;-1;4)$. Точки A,B,C,D лежат в одной плоскости, если три вектора $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ - компланарны, а по признаку компланарности трех векторов смешанное произведение трех векторов должно быть равно 0, т.е. $\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)=0$.

$$\left(\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=12-2-2-8=12-12=0\,.$$

Вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Ответ. Вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны.

Задание 10

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известны длины векторов, разложение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по векторам $\overline{p}, \overline{q}.$ и $\angle\, \overline{p}, \overline{q}$ – угол между векторами $\overline{p}, \overline{q}.$:

$$\overline{a}=3\,\overline{p}+2\,\overline{q}\,,\ \overline{b}=2\,\overline{p}+\overline{q}\,, \left|\overline{q}\right|=4,\ \left|\overline{p}\right|=3,\ (\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\frac{3\pi}{4}.$$

Решение.

$$\overline{a}=3\,\overline{p}+2\,\overline{q}\,,\ \overline{b}=2\,\overline{p}+\overline{q}\,, \left|\overline{q}\right|=4,\ \left|\overline{p}\right|=3,\ (\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\frac{3\pi}{4};$$

Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов найдем площадь параллелограмма: $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(3\overline{p}+2\overline{q}\right)\times\left(2\overline{p}+\overline{q}\right)=6\overline{p}\times\overline{p}+3\overline{p}\times\overline{q}+4\overline{q}\times\overline{p}+2\overline{q}\times\overline{q}=$$

$$=3\overline{p}\times\overline{q}+4\overline{q}\times\overline{p}=-3\overline{q}\times\overline{p}+4\overline{q}\times\overline{p}=\overline{q}\times\overline{p}\,.$$

$\left[\overline{p}\times\overline{p}=0 \text{ и } \overline{q}\times\overline{q}=0\right]$

$\left[\overline{p}\times\overline{q}=-\overline{q}\times\overline{p}\right].$

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{q}\times\overline{p}\right|=\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{p}\right|\cdot\sin(\overline{q},\hat{\ }\,\overline{p})=4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

Ответ. $S=6\sqrt{2}\ (ed^2)$.

6 Тема «Многочлены. Набольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Схема Горнера»

Задание 1

Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Задание 2

Для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ подобрать многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, чтобы $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, где $d(x)=(f(x),g(x))$.

№	$f(x)$	$g(x)$
1	$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$	$x^3 - x^2 - 9x + 9$
2	$2x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 4x + 6$	$x^3 + 3x^2 - x - 2$
3	$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$	$x^3 - 6x^2 + 3x + 4$
4	$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x + 1$	$x^3 - 3x^2 - 4x + 1$
5	$2x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 4x + 6$	$x^3 - 6x^2 + 3x + 4$
6	$x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x$	$x^3 + x^2 - 10x + 8$
7	$4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 1$	$2x^3 - 2x^2 + x - 1$
8	$4x^4 - x^3 - 71x^2 - 101x + 30$	$4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$
9	$5x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 2$	$x^3 - x^2 + 2x - 1$
10	$4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 1$	$4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$
11	$x^4 + 11x^3 + x^2 + 11x - 3$	$x^3 - 2x^2 + x - 2$
12	$4x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 10x + 19$	$2x^3 + 4x^2 - x - 7$
13	$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$	$x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$
14	$2x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 18x - 1$	$x^3 - 2x^2 + 5x - 3$
15	$4x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 10x + 19$	$x^3 - 2x^2 + 5x - 3$
16	$x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$	$x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$
17	$3x^4 - x^3 - 4x^2 - 7x + 24$	$x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
18	$x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6$	$x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$
19	$2x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x - 4$	$2x^3 + x^2 - 7x - 3$
20	$x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$	$x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
21	$x^5 - x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 10x - 8$	$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$
22	$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x + 1$	$x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

23	$x^5+3x^4-x^3-7x^2-16x-12$	$x^5-x^4-5x^3-3x^2-4x+12$
24	$x^4+3x^3+2x^2+3x+4$	x^3+2x^2-x+5
25	$x^4+3x^3-5x^2-x+1$	$x^5-x^4-5x^3-3x^2-4x+12$
26	$x^4-x^3-4x^2+2x+3$	x^3-x^2-x+2
27	$2x^4+5x^3+3x^2+4x-4$	x^3+2x^2-5x-2
28	$3x^4-2x^3-3x^2+8x-4$	x^3-2x^2+5x+1
29	$3x^4+4x^3-x^2-2x+1$	x^3-2x^2-3x+1
30	$2x^4+7x^3+2x^2+4x+6$	x^3-2x^2+3x+3

Задание 3

Дан многочлен $f(x)$ и число a. При помощи схемы Горнера:

1) Разложить многочлен по степеням $x-a$;

2) Найти значение многочлена и всех его производных при $x=a$;

3) $\frac{f(x)}{(x-a)^5}$ разложить на простейшие дроби;

4) Из разложения $f(x)$ по степеням $x=a$ получить разложение по степеням x.

№	$f(x)$	a
1	$7x^5-x^4+6x^3+3x^2-7$	3
2	$2x^5+3x^4-x^2+x-1$	2
3	$2x^5-6x^4+3x^2-x+1$	-2
4	$5x^5-2x^4+x^3-x^2+3x$	-1
5	$6x^5+x^4-x^3+x^2-3$	-2
6	$3x^5+4x^4-x^3-x^2-x$	1
7	$4x^5-6x^4+3x^3-x+5$	-3
8	$2x^5-3x^3+x^2-x-3$	2
9	$3x^5-2x^4+x^3-x+2$	-2
10	$5x^5+3x^3-x^2+x-1$	3
11	$7x^5-x^4+6x^3+3x^2-7$	2
12	$2x^5+3x^4-x^2+x-1$	3
13	$x^4-x^3-7x^2+x+6$	3
14	$2x^4+7x^3+2x^2+4x+6$	2

15	$x^4-2x^3-13x^2+38x-24$	-2
16	$x^4+3x^3-5x^2-x+1$	-1
17	$2x^4+7x^3+2x^2+4x+6$	-2
18	$x^4-2x^3+5x^2+6x$	1
19	$4x^4-6x^3+5x^2-4x+1$	-3
20	$4x^4-x^3-71x^2-101x+30$	2
21	$5x^4-6x^3+12x^2-8x+2$	-2
22	$4x^4-6x^3+5x^2-4x+1$	3
23	$x^4+11x^3+x^2+11x-3$	2
24	$4x^4+2x^3-13x^2-10x+19$	3
25	$x^4-2x^3-5x^2+4x+6$	3
26	$2x^4-7x^3+15x^2-18x-1$	2
27	$4x^4+2x^3-13x^2-10x+19$	-2
28	$x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$	-1
29	$3x^4-x^3-4x^2-7x+24$	-2
30	$x^4-x^3-7x^2+x+6$	1

Продемонстрируем решение некоторых заданий

Задание 1

Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$,

$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2 & 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 + x^3 - x^2 - x} & x + 1 \\
2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 & \\
\underline{2x^3 + x^2 - x - 1} & \\
-3x^2 - 3x + 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - x - 1 & -3x^2 - 3x + 3 \\
\cline{2-2}
\underline{2x^3 + 2x^2 - 2x} & -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\
-x^2 + x - 1 & \\
\underline{-x^2 - x + 1} & \\
2x - 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^2 - 3x + 3 & 2x - 2 \\
\cline{2-2}
\underline{-3x^2 + 3x} & -\frac{3}{2}x - 3 \\
\quad -6x + 3 & \\
\underline{\quad -6x + 6} & \\
\qquad -3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x - 2 & -3 \\
\cline{2-2}
\underline{2x} & -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\
\quad -2 & \\
\underline{\quad -2} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

Представим разложение в общем виде: $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, (1)

Где $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$, $q_1(x) = x + 1$, $r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3$.

Далее $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, (2)

где $q_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $r_2(x) = 2x - 2$.

Далее $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$, (3)

где $q_3(x) = -\frac{3}{2}x - 3$, $r_3(x) = -3$.

Далее $r_2(x) = r_3(x)q_4(x) + r_4(x)$, (4)

где $q_4(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, $r_4(x) = 0$.

Так как $r_4(x) = 0,$ то НОД($f(x), g(x)$)= $r_3(x) = -3.$

Из (3) формулы выразим $r_3(x)$, $r_3(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x),$ (5)

Из (2) формулы выразим $r_2(x)$, $r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x),$ (6)

Из (1) формулы выразим $r_1(x)$ $r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$ (7)

В (5) формулу подставим (6) и (7) формулы раскроем скобки, представим в следующем виде:

$r_3(x) = f(x)\big(1 + q_2(x)q_3(x)\big) + g(x)(-q_1(x) - q_3(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x)),$ где $u(x)$=$1 + q_2(x)q_3(x), v(x) = -q_1(x) - q_3(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x).$ (8)

Подставляя в полученную формулу (8) найденные ранее многочлены получим:

$$u(x) = x^2 + \frac{3x}{2}, v(x) = -x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3.$$

Ответ: $-3 = \left(x^2 + \frac{3x}{2}\right) f(x) + \left(-x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3\right) g(x).$

Задание 2

Найти значение многочлен $\mathrm{f}(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ и всех его производных при $x = -2$. Разложите $\mathrm{f}(x)$ по степеням $(x + 2)$.

Решение.

Схема Горнера:

	1	3	-4	6	-5
-2	1	1	-6	18	**-41**
-2	1	-1	-4	**26**	
-2	1	-3	**2**		
-2	1	**-5**			
-2	**1**				

Мы получили значение многочлен $\mathrm{f}(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ и всех его производных при $x = -2$. Тогда разложение $\mathrm{f}(x)$ по степеням $(x + 2)$ имеет вид $\frac{-41}{(x+2)^5} + \frac{26}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)}.$

Ответ. $\frac{-41}{(x+2)^5} + \frac{26}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)}.$

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

3 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

4 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

5 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 1. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 69 с.

6 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 2. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 89 с.

7 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 3. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 60 с.

8 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.