

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Ю.Г. Полкунов

МОДЕЛИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Оренбургский государственный университет» для обучающихся по
образовательной программе высшего образования - программе
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01
Информатика и вычислительная техника

Оренбург
2021

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73
П 51

Рецензент – профессор, доктор технических наук Н.З. Султанов

Полкунов, Ю.Г.
П 51 Модели и интегральные уравнения математической физики :
учебное пособие / Ю.Г.Полкунов ; Оренбургский гос. ун-т. –
Оренбург ОГУ, 2021. – 198 с.
ISBN 978-5-7410-2574-1

Рассмотрены основные модели, интегральные уравнения математической физики и методы граничных элементов, позволяющие осуществить реализацию этих уравнений.

Учебное пособие по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» предназначено для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-7410-2574-1

© Полкунов Ю.Г., 2021
© ОГУ, 2021

Содержание

Введение.....	7
1 Математические модели подземной гидромеханики.....	8
1.1 Показатели пористой среды.....	8
1.2 Закон Дарси.....	9
1.3 Нелинейные законы фильтрации.....	14
1.4 Закон Дарси для анизотропных пористых сред.....	16
1.5 Закон сохранения массы. Интегральная и дифференциальная формулировка.....	19
1.6 Математические модели фильтрации флюидов.....	24
2 Одномерные установившиеся потоки несжимаемой жидкости в недеформируемом однородном изотропном пласте.....	30
2.1 Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток-приток жидкости к галерее.....	30
2.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток – приток жидкости к центральной скважине в круговом пласте.....	37
3 Одномерные установившиеся потоки сжимаемых флюидов в недеформируемом однородном изотропном пласте.....	47
3.1 Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида.....	47
3.2 Уравнения состояния упругой жидкости, совершенного и реального газов.....	48
3.3 Расчет фильтрационных характеристик одномерных потоков при течении сжимаемого флюида.....	54
4 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа при нелинейных законах фильтрации.....	68
4.1 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двучленному закону фильтрации.....	68

4.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по степенному закону фильтрации.....	75
5 Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости и газа в неоднородных пластах по закону Дарси.....	81
5.1 Классификация типов неоднородности пластов.....	81
5.2 Прямолинейно-параллельный поток в неоднородных пластах	83
6 Основные модельные задачи уравнений математической физики	102
6.1 Гиперболические уравнения в частных производных	102
6.2 Параболические уравнения в частных производных	103
6.3 Эллиптические уравнения в частных производных	104
6.4 Нелинейные уравнения.....	105
6.5 Физическая классификация уравнений.....	106
7 Формулы Грина. Потенциалы.....	107
7.1 Формулы Грина. Интегральное представление решения	107
7.2 Функция источника (Грина) для уравнения $\Delta u = 0$ и её основные свойства	111
7.3 Поверхностные потенциалы	115
7.4 Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.....	117
8 Эллиптические дифференциальные уравнения	119
8.1 Плоские модели.....	119
8.1.1 Основные уравнения.....	119
8.1.2 Сингулярные решения	120
8.1.3 Непрямой метод граничных элементов для однородной области	122
8.1.4 Дискретизация поверхностных и объемных интегралов	125
8.1.5 Формирование матриц системы	126
8.1.6 Вычисление значений потенциала и скорости во внутренних точках	129
8.2 Трехмерные задачи о потенциальных течениях	129
8.2.1 Сингулярное решение и соотношения непрямого метода граничных элементов	130
8.2.2 Дискретизация поверхностных интегралов.....	131

8.2.3 Метод граничных элементов в краевых задачах с аппроксимацией границ постоянными элементами.....	ее 133
9 Параболические дифференциальные уравнения	137
9.1 Плоские модели. Основные уравнения.....	138
9.2 Фундаментальное сингулярное решение.....	140
9.3 Метод временных шагов	141
9.4 Основные интегральные представления метода граничных элементов для методов пошагового изменения времени	144
10 Установившиеся колебания	146
10.1 Функции влияния точечных источников.....	147
10.2 Интегральное представление решения волнового уравнения.....	150
10.3 Потенциалы.....	154
10.4 Задачи для бесконечной области	157
11 Метод граничных интегральных уравнений, основанный на преобразовании Лапласа	161
11.1 Предварительные замечания.....	161
11.2 Решение интегральных уравнений при помощи преобразования Лапласа	165
12 Лабораторные работы. Эллиптические уравнения.....	169
12.1 Постановка и краевые условия	169
12.2 Основные соотношения прямого метода граничных элементов	171
12.2.1 Вычисление значения потенциала внутри моделируемой области.....	171
12.2.2 Вычисление значения потенциала на границе	172
12.2.3 Вычисление скорости потока внутри моделируемой области	172
12.2.4 Граничные интегральные уравнения общие для трех краевых задач	173
12.3 Метод граничных элементов в краевых задачах	174
12.3.1 Задача Дирихле.....	174
12.3.2 Задача Неймана.....	175
12.3.3 Смешанная краевая задача	175

12.3.4	Определение потенциала во внутренних точках моделируемой области для трех краевых задач	176
12.4	Алгоритмы решения задач прямым методом граничных элементов	177
12.4.1	Алгоритм решения задачи Дирихле	180
12.4.2	Алгоритм решения задачи Неймана.....	181
12.4.3	Алгоритм смешанной краевой задачи.....	182
13	Лабораторная работа. Моделирование плоского течения несжимаемой невязкой жидкости между зазорами	184
13.1	Уравнения движения несжимаемой невязкой жидкости	185
13.2	Прямой метод граничных интегральных уравнений (ПМГУ)	187
13.2.1	Суть метода ПМГУ	187
13.2.2	Дискретизация граничных интегральных уравнений	189
13.3.	Алгоритм расчета	192
13.3.1	Ввод входных данных.....	192
13.3.2	Ввод граничных значений функций.....	192
13.3.3	Формирование элементов матриц уравнений (13.15) и вектор-столбцов	192
13.3.4	Решение системы линейных уравнений	193
13.3.5	Вычисление функции тока в исследуемой области.....	194
13.4.	Постановка краевых задач для несжимаемой невязкой жидкости	194
13.5	Пример выполнения задания	195
	Список использованных источников	197

Введение

Пособие предназначено для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно – педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника и ориентировано на рабочие планы и программы направления «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Пособие содержит 13 разделов. Реализация одномерных моделей математической физики приведена в разделах 1-5 на примерах моделей подземной гидромеханики. Они посвящены построению, аналитическому решению и анализу основных фильтрационных характеристик. Реализация двумерных и трехмерных моделей осуществляется интегральными уравнениями математической физики. Модели математической физики подразделяются на эллиптические, параболические и гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Рассматриваются методы и алгоритмы граничных элементов для этих дифференциальных уравнений с частными производными. Для закрепления изучаемого материала для обучающихся в разделах 12, 13 приведены лабораторные работы.

Надеемся, что предлагаемое пособие станет подспорьем в изучении курса для сдачи кандидатского экзамена.

1 Математические модели подземной гидромеханики

Подземной гидромеханикой называется наука, которая изучает законы равновесия и движения воды, нефти, газа, газожидкостных смесей (флюидов) в пористых и трещиноватых средах – подземных пластах, которые являются коллекторами флюидов.

Движение флюидов в пористой среде называется фильтрацией.

Будем рассматривать течения, вызываемые действием градиента давления и силы тяжести.

Движение флюидов в пласте происходит с очень малыми скоростями, порядка микрометров в секунду. Поэтому процесс фильтрации с высокой точностью можно считать изотермическим.

1.1 Показатели пористой среды

Пористостью « m » однородного пустотного пространства понимают отношение объема пустот образца к объему образца V

$$m = \frac{V_{\Pi}}{V}. \quad (1.1)$$

В случае неоднородной пористой среды соотношение (1.1) определяет среднее значение пористости в образце.

Для неоднородной пористой среды значение пористости определяется выражением вида

$$m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{\Pi}}{\Delta V} = \frac{dV_{\Pi}}{dV}, \quad (1.2)$$

и, следовательно, в общем случае пористость является скалярной функцией.

Просветностью « s » плоского сечения (рисунок 1.1) однородной пористой среды понимают отношение площади просветов S_{Π} в сечении к площади S всего сечения

$$S(\bar{n}) = \frac{S_{\Pi}}{S}, \quad (1.3)$$

где \bar{n} - вектор нормали к плоскости сечения.

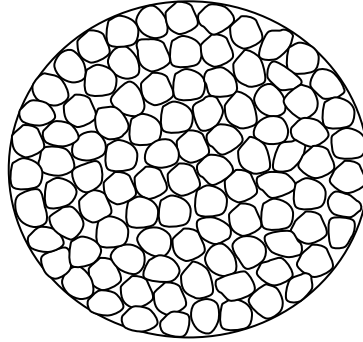


Рисунок 1.1 - Сечение зернистого слоя

В случае неоднородной пористой среды (1.3) определяет среднее значение просветности в сечении, а истинное значение просветности задается формулой

$$S(\bar{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S_{\Pi}}{\Delta S} = \frac{dS_{\Pi}}{dS}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что просветность пористой среды зависит не только от точки пространства, но и от ориентации сечения и является функцией векторного аргумента.

Соотношения (1.2) и (1.4) показывают, что пористость и просветность являются различными математическими объектами.

1.2 Закон Дарси

Опыт Дарси

В результате проведенных экспериментов, которые были проведены в девятнадцатом столетии французским инженером Анри Дарси, было установлено, что расход жидкости Q через колонку определяется зависимостью

$$Q = k_{\phi} \frac{H_1 - H_2}{L} S, \quad (1.5)$$

где H_1, H_2 - гидравлические напоры в начальном и конечном сечениях колонки;

L - расстояние между сечениями;

S - площадь сечения колонки;

k_{ϕ} - коэффициент пропорциональности или коэффициент фильтрации.

Поскольку скорости фильтрации очень малы, скоростными напорами при определении величин H в (1.5) пренебрегают

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \approx \frac{p}{\rho g} + z,$$

где p - давление;

g - ускорение силы тяжести;

z - вертикальная координата;

V - скорость движения жидкости;

α - коэффициент Кориолиса.

Проницаемость

Коэффициент фильтрации имеет размерность скорости и зависит как от свойств фильтрующейся жидкости (коэффициента динамической вязкости μ , который определяет величину вязкого трения), так и от свойств пористой среды.

Поэтому, для того чтобы разделить влияние этих факторов на суммарный результат, равенство (1.5) представляют и в ином виде

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{P_1^* - P_2^*}{L} S. \quad (1.6)$$

Величина $p^* = p + \rho g z$ называется приведенным давлением, а k - коэффициентом проницаемости пористой среды.

Коэффициент проницаемости зависит только от геометрии пустотного пространства и характеризует способность пористой среды пропускать через себя фильтрующийся флюид.

Размерность коэффициента проницаемости формально определяется соотношением (1.6)

$$k = \frac{Q \mu L}{p^* S} = \frac{\text{м}^3 \text{с}^{-1} \text{Па} \text{с} \text{м}}{\text{Па} \text{м}^2} = \text{м}^2$$

и равна размерности площади.

Проницаемость реальных пористых сред очень мала и для нефтяных и газовых коллекторов лежит в пределах от 10^{-12} до 10^{-15} м² или от 1 до 10^{-3} мкм².

В качестве единицы проницаемости используется величина 1Д (Дарси) = $1,02 \cdot 10^{-12}$ м².

Из равенств (1.5) и (1.6) следует, что коэффициенты фильтрации и проницаемости связаны между собой следующим равенством

$$k_{\phi} = \frac{\rho g}{\mu} k.$$

Скорость фильтрации

Разделим обе части равенства (1.6) на площадь сечения S

$$w = \frac{Q}{S} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (1.7)$$

Величина $w = Q/S$ имеет размерность скорости и определяет модуль вектора скорости перемещения флюида в пористой среде – скорость фильтрации.

Вектор скорости фильтрации направлен перпендикулярно плоскости сечения, через которую фильтруется жидкость, поэтому

$$\bar{w} = w\bar{n} ,$$

где \bar{n} - орт, перпендикулярный плоскости сечения.

В отличие от истинной физической скорости движения флюида скорость фильтрации является фиктивной величиной, так как формально она определена в любой точке сечения – и в порах, и в твердом скелете, хотя истинная средняя скорость V отлична от нуля только в порах.

Выражая расход через скорость фильтрации и истинную среднюю скорость, получаем связь между w и v

$$wS = VS_{\text{пор}} = Q$$

из которой следует, что

$$\bar{w} = w\bar{n} = S\bar{v} = S\bar{v}\bar{n} ,$$

где \bar{w} и \bar{v} - векторы скорости фильтрации и истинной средней скорости соответственно;

\bar{n} - орт, перпендикулярный плоскости сечения, которая в свою очередь, перпендикулярна градиенту давления;

S - просветность.

Поэтому модуль вектора скорости фильтрации равен модулю вектора истинной средней скорости, умноженной на просветность

$$w = sv .$$

Очевидно, что вектор скорости фильтрации равен вектору скорости, умноженному на просветность

$$\bar{w} = s\bar{v} .$$

Последнее равенство можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Таким образом, просветность связывает между собой векторные величины, а не скалярные. В общем случае просветность задается матрицей (тензором), а не членом как пористость.

Соотношения (1.6), (1.7), (1.8) получены в предположении, что пористая среда изотропная и однородная как по проницаемости, так и по просветности.

Закон Дарси

Если умножим равенство (1.8) на орт \bar{n} , задающий направление вектора скорости фильтрации, получим

$$\bar{w} = w\bar{n} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^*}{L} \bar{n}. \quad (1.9)$$

Скалярный множитель $\Delta p^* / L$ при векторе \bar{n} задает линейное распределение давления, но в общем случае этот множитель соответствует градиенту фильтрационного давления.

Следовательно

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p^*. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) представляет собой закон Дарси для изотропной пористой среды.

Знак минус в правой части равенства указывает на то, что скорость фильтрации направлена в сторону уменьшения давления (напомним, градиент направлен в сторону роста давления, а течение, следовательно, в обратную сторону – от большего к меньшему).

Закон Дарси связывает между собой векторные величины – вектор скорости фильтрации и градиент фильтрационного давления.

В декартовой системе координат (1.10) приобретает вид

$$w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} + \rho g \bar{k} \right),$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты декартовой системы координат, при этом ось z направлена вертикально вверх.

Последнее равенство может быть спроектировано на оси координат

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$w_z = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right).$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

1.3 Нелинейные законы фильтрации

Закон Дарси в виде линейной зависимости (1.10) имеет место не для всех скоростей. Для верхней границы (рисунок 1.2) было предположено, что

при некоторых скоростях фильтрации происходит переход от ламинарного режима фильтрации к турбулентному. И, следовательно, именно турбулизация потока вызывает отклонения от линейной зависимости.

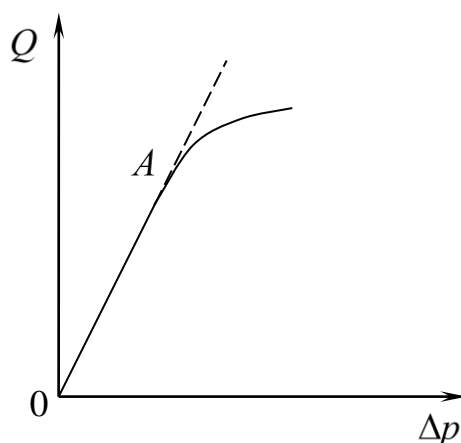


Рисунок 1.2 - Графики зависимости расхода от перепада давления. Прямая линия соответствует закону Дарси. Точка A, с которой происходит отклонение от прямой линии, определяет границу применимости закона Дарси

В подземной гидромеханике наибольшее применение нашли формулы, которые были получены Н.Н. Павловским, В.Н. Щелкачевым, М.Д. Миллиончиковым, Ф.Н. Котяховым и Г.Н. Требиным, А.И. Абдулвагабовым.

В рамках построения феноменологических моделей первое обобщение закона Дарси при $Re \gg Re_{кр}$ было предложено Дюпюи и Ф.Форхгеймером, независимо предложившего позднее.

Двучленный закон, разрешенный относительно градиента давления, записывается в виде

$$grad p = -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |w| \bar{w}, \quad (1.11)$$

где $|w|$ - модуль вектора скорости фильтрации,

β - материальная константа пористой среды, которая определяется экспериментально и, как правило, имеет величину порядка единицы ($\beta \approx 0,5$).

Другой распространенный вариант записи нелинейного закона фильтрации, разрешенного относительно скорости фильтрации, имеет вид

$$\bar{w} = c |\text{grad} p|^{\frac{1-n}{n}} \text{grad} p, \quad (1.12)$$

где c и n - материальные константы пористой среды, определяемые в результате обработки экспериментальных данных.

Обычно константа n лежит в пределах от единицы до двух. При $n = 2$ формула (1.12) называется формулой Краснопольского, предположившего, что зависимость между градиентом давления и скоростью фильтрации при отклонении от закона Дарси квадратичная.

Соотношение (1.11) можно использовать при любых скоростях фильтрации. Степенной закон фильтрации можно использовать только при нарушении закона Дарси ($Re \gg Re_{кр}$).

1.4 Закон Дарси для анизотропных пористых сред

Среда называется изотропной, если свойство (в нашем случае проницаемость) не зависит от направления, и анизотропной, если свойство зависит от направления.

Если

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{Q_x}{s} = \frac{k_x}{\mu} \frac{\Delta p}{L}; \\ w_y &= \frac{Q_y}{s} = \frac{k_y}{\mu} \frac{\Delta p}{L}; \\ w_z &= \frac{Q_z}{s} = \frac{k_z}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

то следует, что в анизотропной пористой среде необходимо вводить разные значения проницаемости для разных направлений.

Систем полученных соотношений, как и в случае изотропной среды, можно переписать в векторном виде

$$\begin{aligned}w_x &= -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \\w_y &= -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \\w_z &= -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

и представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix}w_x \\w_y \\w_z\end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix}k_x & 0 & 0 \\0 & k_y & 0 \\0 & 0 & k_z\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z}\end{pmatrix}.\tag{1.15}$$

Аналогичное утверждение справедливо и в отношении просветности поскольку в анизотропной среде связь между скоростью фильтрации и средней истинной скоростью фильтрации в каждом из указанных направлений (в главных осях) будет своя

$$w_x S = V_x S_{\text{хпор}},$$

$$w_y S = V_y S_{\text{хпор}},$$

$$w_z S = V_z S_{\text{хпор}}$$

ИЛИ

$$w_x = S_x V_x, \quad w_y = S_y V_y, \quad w_z = S_z V_z,$$

то для нее удобно использовать матричную запись

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Общий вид закона Дарси для произвольной анизотропной среды, записанной в произвольной декартовой системе координат представляется в виде системы уравнений, в которых каждая компонента вектора скорости фильтрации зависит от всех компонент вектора градиента фильтрационного давления:

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1} + k_{12} \frac{\partial p}{\partial x_2} + k_{13} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right), \\ w_2 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{21} \frac{\partial p}{\partial x_1} + k_{22} \frac{\partial p}{\partial x_2} + k_{23} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right), \\ w_3 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{31} \frac{\partial p}{\partial x_1} + k_{32} \frac{\partial p}{\partial x_2} + k_{33} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

которые в матричной виде переписываются так

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix}.$$

Соотношению (1.17) можно придать более компактную форму

$$w_i = -\frac{1}{\mu} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \text{где } i, j = 1, 2, 3.$$

Матрица k_{ij} называется матрицей (тензором) коэффициентов проницаемости. Она задает фильтрационные свойства любой пористой среды – как изотропной, так и анизотропной с произвольным типом анизотропии. Матрица коэффициентов проницаемости считается симметричной $k_{ij} = k_{ji}$.

Фильтрационные свойства изотропной среды задаются матрицей вида

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Все возможные варианты анизотропии описываются матрицами вида

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, k_{ij} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, k_{ij} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}.$$

Первые два типа анизотропии имеют специальные названия – первый тип относится к трансверсально-изотропной анизотропии, второй – к ортотропной анизотропии.

Подстановка любой из матриц (1.18) в равенство (1.17) дает явный закон Дарси для соответствующего типа анизотропии.

1.5 Закон сохранения массы. Интегральная и дифференциальная формулировка

Для получения закона сохранения в интегральной формулировке можно использовать материальный объем, под которым подразумевается объем, состоящий во все моменты времени из одних и тех же материальных частиц.

Можно воспользоваться и контрольным объемом. Область пространства, через границы которой могут проходить вещество, энергия, количество движения (импульс), на которую могут действовать внешние силы, называется контрольным объемом, а поверхность, ограничивающая эту область – контрольной поверхностью.

При написании закона сохранения массы в интегральной формулировке для пористых сред воспользуемся контрольным объемом (рисунок 1.3).

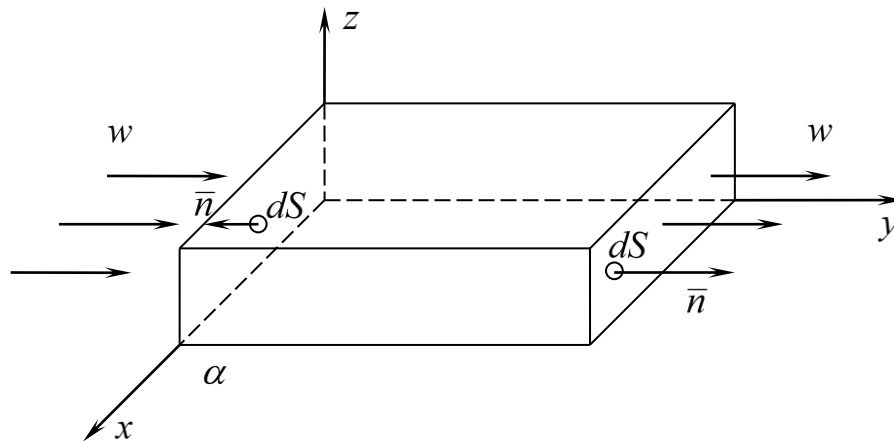


Рисунок 1.3 - Контрольный объем пористой среды

Считается, что объем неподвижен, а контрольная поверхность не деформируется.

Вычислим массу флюида в неподвижном и недеформируемом контрольном объеме пористой среды при условии, что он полностью заполняет поровое пространство.

Масса жидкости, содержащаяся в бесконечно малом (физическом) объеме пористой среды, равна

$$dM = m\rho dV .$$

Объем пор в объеме пористой среды равен

$$dV_{\Pi} = m dV$$

и, умножая его на плотность флюида, получаем искомую массу.

Проинтегрировав выписанное соотношение по всему контрольному объему V , получим массу флюида в контрольном объеме

$$M = \int_V m \rho dV.$$

Через контрольную поверхность флюид может втекать и вытекать, то рассматриваемая масса может изменяться во времени

$$\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int_V m \rho dV.$$

Изменение массы равно притоку массы через контрольную поверхность.

Результирующий приток массы через контрольную поверхность определяется интегралом

$$\oint_S \rho w_i n_i dS,$$

где n_i - внешняя нормаль к контрольной поверхности.

Замечание

При вычислении массы в качестве усредняющего множителя была использована пористость, а при определении притока – просветность.

В результате можно составить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V m \rho dV = - \oint_S \rho w_i n_i dS, \quad (1.19)$$

которое читается следующим образом: скорость изменения массы в контрольном объеме равна результирующему притоку флюида через контрольную поверхность.

Замечание

Появление знака «минус» в правой части уравнения обусловлено ориентацией вектора нормали к контрольной поверхности. Так как по определению принимается, что нормаль к контрольной поверхности внешняя (рисунок 1.3), то при втекании флюида в контрольный объем скалярное произведение $w_i n_i$ под интегралом в правой части равенства оказывается отрицательным.

С учетом знака «-» перед интегралом это соответствует увеличению массы в объеме и, соответственно, положительному значению производной в левой части равенства (1.19).

При втекании через поверхность скалярное произведение $w_i n_i$ положительно, масса в объеме убывает и производная от нее отрицательна.

Уравнение (1.19) представляет собой интегральную форму закона сохранения массы флюида в пористой среде.

При установившемся движении производная по времени равна нулю, и из (1.19) следует

$$\oint_S \rho w_i n_i dS = 0.$$

Последнее равенство означает, что при установившейся фильтрации поток массы через любую замкнутую поверхность, ограничивающую контрольный объем, равен нулю.

Поэтому, если в качестве контрольного объема взять трубку тока для скорости фильтрации, получим

$$\int_{S_1} \rho_1 w_{1n} dS + \int_{S_2} \rho_2 w_{2n} dS + \int_{S_3} \rho_3 w_{3n} dS = 0,$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$ (рисунок 1.4),

w_{in} - нормальная составляющая вектора скорости фильтрации на i -ой поверхности.

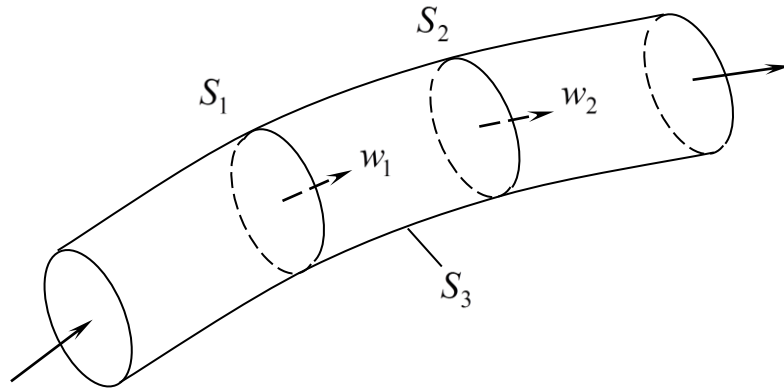


Рисунок 1.4 - К выводу уравнения неразрывности для трубки тока

Так как на боковой поверхности S_3 для нормальной составляющей вектора скорости фильтрации имеем $w_{3n} = 0$, то равенство упрощается

$$\int_{S_1} \rho_1 w_{1n} dS = \int_{S_2} \rho_2 w_{2n} dS = Q_m. \quad (1.20)$$

При выводе (1.20) было использовано то, что скалярное произведение вектора скорости фильтрации на вектор нормали есть

$$w_i n_i = w_n$$

и в сечении S_2 оно положительно, а в S_1 отрицательно.

Если значение величин, стоящих под знаками интегралов, мало, то из (1.20) следует

$$\rho_1 w_{1n} S_1 = \rho_2 w_{2n} S_2.$$

Таким образом, для сжимаемых жидкостей через любое сечение, перпендикулярное трубке тока, протекает одна и та же масса флюида в единицу времени.

Для несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, поэтому

$$\int_{S_1} w_{1n} dS = \int_{S_2} w_{2n} dS = Q.$$

Если скорость в сечении постоянна, то

$$w_{1n}S_1 = w_{2n}S_2.$$

Следовательно, для несжимаемых жидкостей вдоль трубки сохраняется объемный расход.

От интегральной формы записи закона сохранения массы (1.19) можно перейти к дифференциальной.

Для этого, во-первых, учтем независимость пространственных и временных переменных и внесем производную по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ под знак интеграла по объему, и, во-вторых, по теореме Гаусса-Остроградского преобразуем поверхностный интеграл в объемный. В результате получим

$$\int_V \left(\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho w \right) dV = 0. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho w = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) задает закон сохранения массы в пористой среде в дифференциальной форме и называется уравнением неразрывности.

1.6 Математические модели фильтрации флюидов

В общем случае для анизотропной пористой среды имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho \bar{w} = 0, \\ w_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \right), \end{cases} \quad (1.23)$$

где \vec{f} - вектор плотности массовых сил с компонентами f_i .

Для изотропной среды соотношения упрощаются

$$\begin{cases} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \text{div}\rho\vec{w} = 0, \\ \vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p + \rho\vec{f}; \end{cases} \quad (1.24)$$

Системы (1.23) и (1.24) незамкнуты.

Для изотермических фильтрационных течений изотропной среды имеем в общем случае

$$\begin{cases} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \text{div}\rho w = 0, \\ w = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p + \rho\vec{f}; \\ \rho = \rho(p), m = m(p), k = k(p), \mu = \mu(p). \end{cases} \quad (1.25)$$

Модель фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемом изотропном пласте: $\rho = \text{const}$, $m = \text{const}$, $k = \text{const}$, $\mu = \text{const}$.

$$\begin{cases} \text{div}\vec{w} = 0, \\ \vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p + \rho\vec{f}; \end{cases} \quad (1.26)$$

Система (1.26) содержит четыре уравнения и четыре неизвестных функции – три компоненты вектора скорости и давление.

При отсутствии массовых сил подстановка закона Дарси в уравнение неразрывности дает

$$\text{div}\left(-\frac{k}{\mu} \text{grad}p\right) = -\frac{k}{\mu} \text{div}(\text{grad}p) = -\frac{k}{\mu} \Delta p = 0$$

или

$$\Delta p = 0,$$

где Δ - оператор Лапласа.

Систему (1.26) можно переписать в виде

$$\Delta p = 0,$$

(1.27)

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p.$$

Проектируя уравнения (1.26) и (1.27) на декартовую систему координат, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0, \\ w_1 = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho f_1 \right), \\ w_2 = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho f_2 \right), \\ w_3 = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho f_3 \right), \end{cases} \quad (1.28)$$

а уравнения системы (1.27) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} &= 0, \\ w_1 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ w_2 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ w_3 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Математическая модель фильтрации сжимаемой жидкости (газа) в недеформируемой изотропной пористой среде системой уравнений (без учета силы тяжести)

$$\begin{cases} m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{w}) = 0, \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho = \rho(p), \end{cases} \quad (1.29)$$

и в виде

$$\begin{cases} m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{w}) = 0, \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p^*, \\ p^* = p + \rho g z, \\ \rho = \rho(p). \end{cases} \quad (1.29)$$

с учетом силы тяжести.

Выписанные системы можно преобразовать к более удобному виду. Подставим закон Дарси в уравнение неразрывности

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\rho \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} p) = 0. \quad (1.30)$$

Дальнейшее преобразование (1.30) связано с введением функции P , позволяющей провести линеаризацию выражения под оператором дивергенции

$$\nabla P = \rho \nabla p. \quad (1.31)$$

Функция P называется функцией Лейбензона в честь академика Л.С. Лейбензона, который впервые ввел ее в рассмотрение при решении задач подземной гидромеханики.

Умножим скалярно (1.31) на орт \bar{S} и получим

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \rho \frac{\partial p}{\partial S}.$$

Умножив полученное равенство на dS и проинтегрировав, будем иметь

$$P = \int \rho(p) dp. \quad (1.32)$$

Равенство (1.32) позволяет получить явно вид функции Лейбензона при заданном уравнении состояния.

Математическая модель неустановившейся фильтрации газа (1.29) принимает вид

$$\begin{cases} m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \Delta P = 0, \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p, \\ \rho = \rho(p). \end{cases} \quad (1.33)$$

Функцию Лейбензона (1.32) можно обобщить. Подставим закон Дарси в уравнение неразрывности

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left(-\rho \frac{k}{\mu} \text{grad} p \right) = m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div} \left(\rho \frac{k}{\mu} \text{grad} p \right) = 0 \quad (1.34)$$

и получим под знаком дивергенции три функции от давления. В этом случае линеаризация выражения будет иметь вид

$$\text{grad}P = \rho(p) \frac{k(p)}{\mu(p)} \text{grad}p. \quad (1.35)$$

Аналогично, как и (1.31), соотношение (1.35) разрешается относительно P

$$P = \int \rho(p) \frac{k(p)}{\mu(p)} dp. \quad (1.36)$$

Система (1.25) с обобщенной функцией Лейбензона (1.36) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial m\rho}{\partial t} - \Delta P = 0, \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p + \rho f, \\ \rho = \rho(p), m = m(p), k = k(p), \mu = \mu(p). \end{cases} \quad (1.37)$$

Для установившейся фильтрации система уравнений (1.33) записывается в виде:

$$\begin{cases} \Delta P = 0, \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}p, \\ \rho = \rho(p). \end{cases} \quad (1.38)$$

Система уравнений (1.38) задает математическую модель установившейся фильтрации газа.

2 Одномерные установившиеся потоки несжимаемой жидкости в недеформируемом однородном изотропном пласте

Определение одномерных фильтрационных потоков

Одномерными задачами называют такие, в которых скорость фильтрации, давление и другие характеристики будут функциями только одной координаты.

Обычно фильтрационные траектории переноса (линии тока) представляются прямыми линиями или лучами и в зависимости от вида симметрии потока различают прямолинейно-параллельное, плоскорадиальное (аксиально-симметричное) и радиально-сферическое (сферически-симметричное) течение.

2.1 Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток-приток жидкости к галерее

В прямолинейно-параллельном потоке фильтрационные линии тока представляют собой прямые линии, которые параллельны друг другу (рисунки 2.1, 2.2).

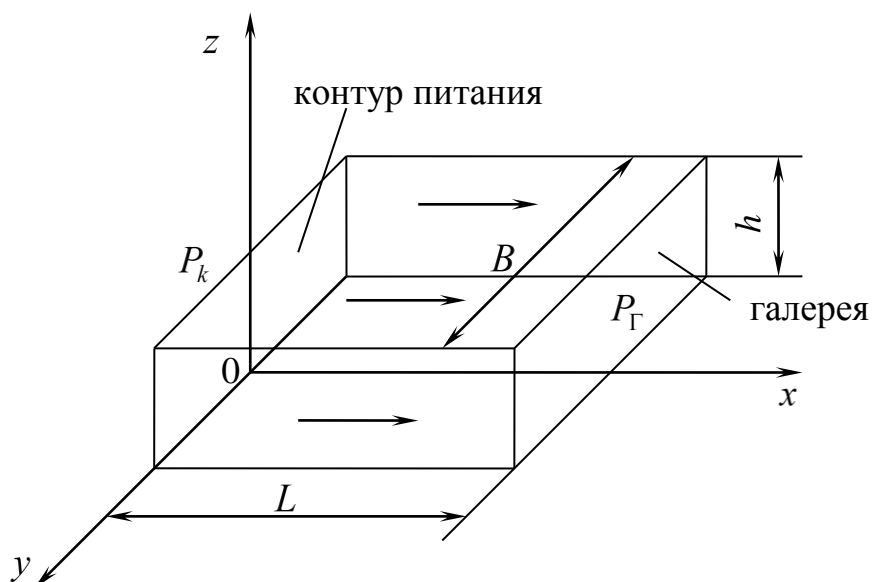


Рисунок 2.1 - Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток

Рассмотрим задачу о прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой однородной ньютоновской жидкости в изотропном однородном недеформируемом пласте.

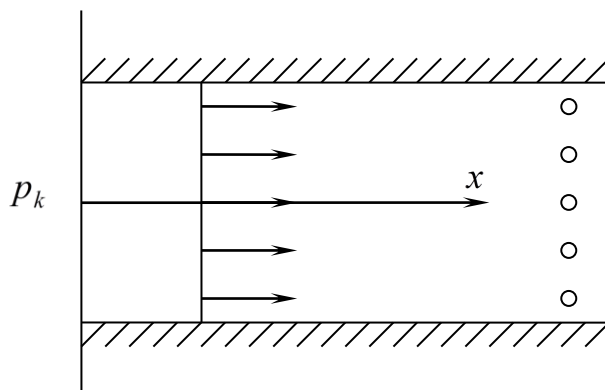


Рисунок 2.2 - Прямолинейно-параллельный поток к батарее скважин

Математическая модель в данном случае задается системой уравнений

$$\Delta p = 0, \tag{2.1}$$

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} dr adp,$$

которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \tag{2.2}$$

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Введем обозначения:

h - толщина пласта;

B - ширина пласта;

p_k - давление на контуре питания при $x = 0$;

p_2 - давление на галерее $x = L$.

Через плоскость $x=0$ происходит приток в пласт жидкости, которая далее фильтруется к галерее $x=L$.

Ось Ox направлена параллельно вектору скорости фильтрации. Тогда уравнения (2.2) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = w_z = 0. \quad (2.3)$$

Граничные условия

$$p = p_k \text{ при } x=0,$$

$$p = p_c \text{ при } x=L.$$

Решаем уравнение (2.3)

$$\frac{dp}{dx} = C_1, \quad dp = C_1 dx, \quad \int dp = \int C_1 dx + C_2, \quad \Rightarrow p = C_1 x + C_2.$$

При $x=0$, $p = p_k$

$$p_k = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = p_k.$$

При $x=L$, $p = p_2$

$$p_2 = C_1 \cdot L + p_k \Rightarrow C_1 = \frac{p_2 - p_k}{L}.$$

Следовательно

$$p = \frac{p_2 - p_k}{L} x + p_k.$$

Или

$$p = p_k - \frac{p_k - p_2}{L} x \quad (2.4)$$

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \left(-\frac{p_k - p_2}{L} \right) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{p_k - p_2}{L} \right).$$

Умножим скорость фильтрации на площадь галереи $S = Bh$, получим

$$w_x S = Q = \frac{k}{\mu} \left(\frac{p_k - p_2}{L} \right) S. \quad (2.5)$$

Тогда распределение давления в пласте

$$p(x) = p_k - \frac{Q\mu}{kS} x. \quad (2.6)$$

В прикладных исследованиях часто используют упругую зависимость расхода от разности давлений на контуре питания и галереи

$$Q = \frac{kS}{\mu L} (p_k - p_2) = \frac{kS}{\mu L} \Delta p,$$

где $\Delta p = p_k - p_2$.

Откуда имеем

$$\frac{p_k - p_2}{L} = \frac{Q\mu}{kS}.$$

Разность Δp называется депрессией на пласт.

Таким образом, индикаторная линия – это график зависимости вида

$$Q = f(\Delta p),$$

а отношение $\frac{Q}{\Delta p}$ - называется коэффициентом продуктивности.

Очевидно, в данном случае коэффициент продуктивности равен постоянной величине

$$\frac{Q}{\Delta p} = \frac{kS}{\mu L}.$$

Следовательно, при выполнении закона Дарси и прямолинейно-параллельной фильтрации индикаторная линия представляется в виде прямой (рисунок 2.3).

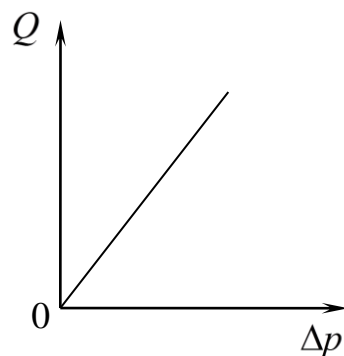


Рисунок 2.3 - Индикаторная линия для потока несжимаемой жидкости по закону Дарси

Другая задача связана с определением времени движения в пласте «меченых частиц».

С целью определения фильтрационных и емкостных параметров нефтегазового нефтегазового пласта в фильтрационный поток можно закачать изотопы некоторых атомов или другие частицы, которые можно идентифицировать в потоке с помощью специальных методов. Время движения «меченых частиц» определяется из закона движения с помощью истинной средней скорости.

Пусть пористость равна просветности. Выражение для истинной средней скорости имеет вид

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{m},$$

$$dt = \frac{m}{w} dx.$$

Подставим (2.4) в последнее равенство

$$dt = \frac{m dx}{\frac{k}{\mu} \left(\frac{p_k - p_2}{L} \right)} = \frac{m L \mu dx}{k (p_k - p_2)}$$

Проинтегрируем и найдем «время», за которое «меченая частица» перемещается от контура питания ($x=0$, $t=0$) до произвольной точке в пласте ($x=x_1$, $t=t_1$):

$$\int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{m \mu}{k} \cdot \frac{L dx}{p_k - p_2}$$

$$t_1 = \frac{m \mu}{k} \cdot \frac{L x_1}{p_k - p_2} \quad (2.7)$$

При $x_1 = L$ получаем время прохождения «меченой частицы» всего пласта, от контура питания до галереи

$$T = \frac{m \mu}{k} \cdot \frac{L^2}{p_k - p_2} \quad (2.8)$$

Важной характеристикой является средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление \bar{p} , которое определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{1}{V_{\Pi}} \int p dV_{\Pi}, \quad (2.9)$$

где V_{Π} - общий объем парового пространства пласта.

Подобное определение не совсем корректно. Согласно определению пористости (1.2) объем пор представляется функцией

$$V_{\Pi} = \int_V m dV .$$

Поэтому корректное определение выглядит следующим образом

$$\bar{p} = \frac{1}{V_{\Pi}} \int_V p dV_{\Pi} , \quad (2.10)$$

то есть необходимо изменить область, по которой ведется интегрирование.

Иногда используют другую характеристику – среднее по пласту давление

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{V} \int_V p dV . \quad (2.11)$$

Для однородного пласта $dV_{\Pi} = m dV$, и $m = const$, и

$$\bar{p} = \frac{1}{mV} \int_V p m dV = \frac{1}{V} \int_V p dV = \bar{p}_2 .$$

Следовательно, для однородного пласта среднее по пласту давление равно средневзвешенному по объему пор.

Если пласт не является однородным, то среднее по пласту давление может не совпадать со средневзвешенным по объему пор

$$\bar{p} = \frac{\int_V p m dV}{\int_V m dV} \neq \frac{\int_V p dV}{\int_V dV} = \bar{p}_e . \quad (2.12)$$

Подставим теперь (2.4) в (2.11) и вычислим средневзвешенное по объему пор давление, которое в данном случае будет равно среднему по пласту давлению

$$\bar{p} = \frac{1}{BhL} \int_0^L Bh \left(p_k - \frac{p_k - p_2}{L} x \right) dx = \frac{p_k + p_2}{2}. \quad (2.13)$$

2.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток – приток жидкости к центральной скважине в круговом пласте

В случае плоскорадиального течения линии тока представляют собой лучи, лежащие в плоскости и исходящие из общего центра (полюса).

Примером подобной схемы фильтрационного течения является приток флюида к центральной скважине в круговом пласте (рисунки 2.4 и 2.5).

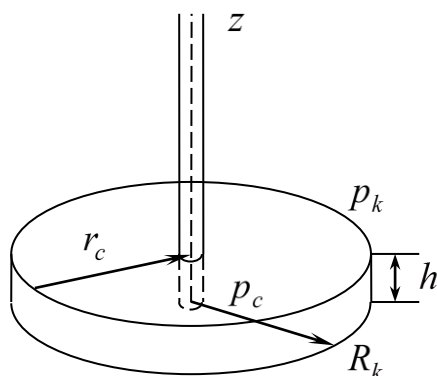


Рисунок 2.4 - Плоскорадиальный поток в круговом пласте

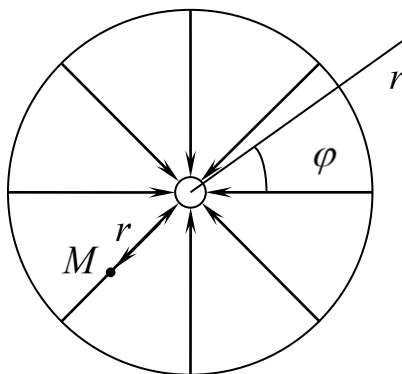


Рисунок 2.5 - Линии тока при плоскорадиальном потоке

Определим распределение давления и скорости фильтрации в пласте при плоскорадиальной симметрии задачи.

Пусть в круговом пласте толщиной h и радиуса R_k (рисунок 2.4) имеется круговая центральная скважина радиуса r_c , на забое которой поддерживается постоянное давление p_c .

На боковой поверхности $r = R_k$ поддерживается постоянное давление p_k и через нее происходит приток флюида, равный дебиту скважины. Поэтому течение установившееся и боковая поверхность называется контуром питания.

Система уравнений в безындексной форме представляется уравнениями (2.1), а при проектировании на цилиндрическую систему координат получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$w_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad w_\varphi = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi}; \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Согласно принятой схеме течения, искомые функции не зависят ни от φ (течение осесимметричное), ни от z (течение плоское), поэтому в рассматриваемой задаче

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

и $p = p(r)$, $w_\varphi = w_z = 0$, $w_r = w(r)$.

Система (2.14) после сделанных упрощений принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad w = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (2.15)$$

Замечание

При притоке к скважине флюид движется в отрицательном направлении, поэтому при переходе от векторных величин к их проекциям (при проектировании на координатную ось r) знак минус во втором уравнении исчезает.

Проинтегрируем первое уравнение

$$r \frac{dp}{dr} = C,$$

$$dp = \frac{Cdr}{r}, \quad \int_p^{p_k} dp = C \int_r^{R_k} \frac{dr}{r}.$$

$$p_k - p = C \ln \frac{R_k}{r}. \quad (2.16)$$

При проектировании было использовано граничное условие $p(R_k) = p_k$.

Проводя интегрирование с другим граничным условием $p(r_c) = p_c$

$$p - p_c = C \ln \frac{r}{r_c}, \quad (2.17)$$

получаем эквивалентное выражение (2.16).

Для определения C умножим формулу для скорости фильтрации (2.15) на площадь боковой поверхности цилиндра произвольного радиуса r ($r_c \leq r \leq R_k$)

$$2\pi r h w = 2\pi r h \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad \text{или} \quad Q = 2\pi h \frac{k}{\mu} C.$$

Откуда находим

$$C = \frac{Q\mu}{2\pi kh}.$$

Можно поступить иначе: в формуле (2.17) положить $r = R_k$

$$p_k - p_c = C \ln \frac{R_k}{r_c},$$

откуда

$$C = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Подставляя первое найденное значение постоянной интегрирования в (2.16) и (2.17), получим формулы для распределения давления в пласте

$$p = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r}; \quad p = p_c + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (2.18)$$

Из (2.8) при $r = r_c$ для первого равенства и при $r = R_k$ для второго, можно получить выражение для дебита (объемного расхода) скважины

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) называется формулой Дюпюи по имени ее автора – французского инженера-гидравлика XIX века.

С помощью формулы Дюпюи равенства (2.18) для распределения давления в пласте можно преобразовать к виду

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}; \quad p = p_c + \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (2.20)$$

Формулы (2.18) и (2.20) эквивалентны. Из них следует, что давление в пласте распределено по логарифмическому закону. Поэтому при значениях радиуса, близких к радиусу контура питания, давление меняется слабо, но при приближении к скважине давление резко меняется (рисунок 2.6).

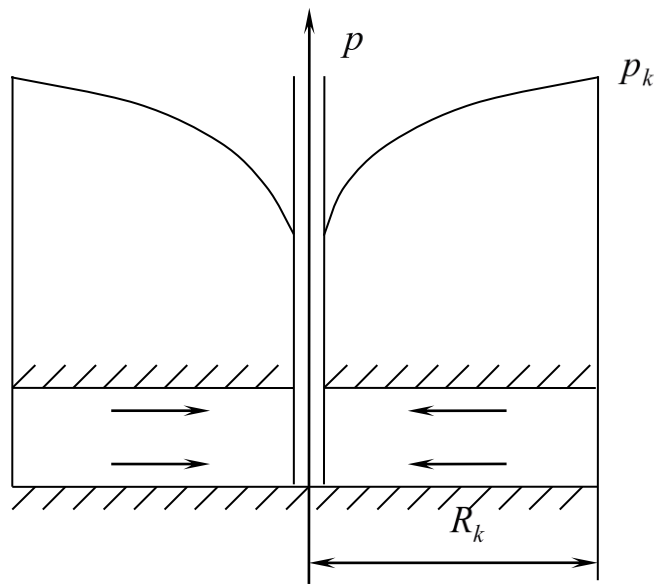


Рисунок 2.6 - Распределение давления в плоскорадиальном потоке

Поверхность, которая соответствует формулам (2.18) и (2.20), носит название воронки депрессии.

Скорость от радиуса носит нелинейный характер

$$w = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r}.$$

Уравнение индикаторной линии при плоскорадиальном потоке, также как и в случае фильтрации в галерее, задается уравнением прямой (рисунок 2.3)

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} (p_k - p_c) \approx C \Delta p \quad (2.22)$$

с коэффициентом продуктивности

$$C = \frac{2\pi kh}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Определим время движения «меченой частицы» в плоскорадиальном потоке.

Положим, что пористость равна проницаемости.

Для определения времени движения меченой частицы от контура питания до произвольной точки пласта имеем следующее уравнение

$$\frac{dr}{dt} = v = \frac{w}{m} = \frac{Q}{2\pi rhm}.$$

Тогда

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{2\pi hm}{Q} \int_{R_k}^{r_1} r dr,$$

$$t_1 = \frac{\pi hm (R_k^2 - r_1^2)}{Q},$$

где t_1 - произвольное время,

r_1 - произвольный радиус.

Используя формулу Дюпюи (2.20) найдем

$$t_1 = \frac{\mu m \ln \frac{R_k}{r_c} (R_k^2 - r_1^2)}{2k (p_k - p_c)}. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что «меченая частица» пройдет расстояние от контура питания до скважины за время T :

$$T = \frac{\mu m \ln \frac{R_k}{r_c} (R_k^2 - r_c^2)}{2k (\rho_k - p_c)}. \quad (2.24)$$

Определим средневзвешенное по поровому пространству давление при плоскорадиальной фильтрации. Для этого подставим в равенство (2.10) формулу для распределения давления (2.20)

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi h m (R_k^2 - r_c^2)} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_c}^{R_k} \left[p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} \right] m r dr.$$

После интегрирования по z и φ получим

$$\bar{p} = \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \left[\int_{r_c}^{R_k} \left(p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln R_k \right) r dr + \int_{r_c}^{R_k} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} r \ln r dr \right].$$

Первый интеграл в квадратных скобках легко вычисляется, а второй интегрируется по частям. В результате имеем

$$\bar{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln R_k + \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \left[\frac{R_k^2}{2} \ln R_k - \frac{r_c^2}{2} \ln r_c - \frac{1}{4} (R_k^2 - r_c^2) \right].$$

Преобразуем полученное выражение, добавляя и вычитая в квадратных скобках выражение $R_k^2 \ln \frac{r_c}{2}$. В результате преобразований получим

$$\bar{p} = p_k + \frac{r_c^2 (p_k - p_c)}{R_k^2 - r_c^2} - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Поскольку $\frac{R_k}{r_c} \gg 1$ (или $\frac{r_c}{R_k} \ll 1$) вторым слагаемым можно пренебречь

и переписать для среднего по поровому пространству давления в виде

$$\bar{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (2.25)$$

2.3 Радиально-сферический фильтрационный поток – приток жидкости к полусфере, вскрывшей кровлю пласта

При радиально-сферической фильтрации траектории частиц направлены к центру (от центра) полусферы.

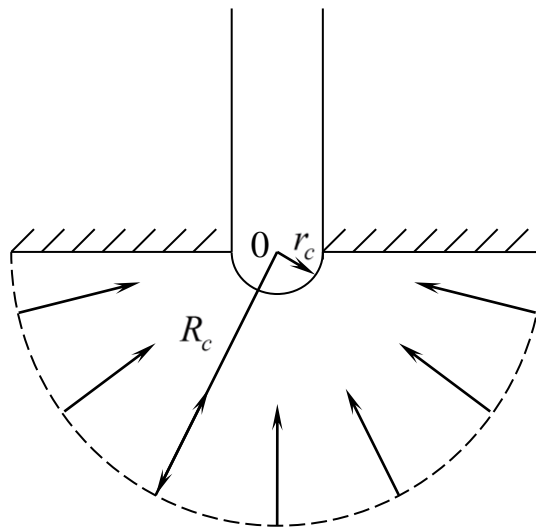


Рисунок 2.7 - Радиально-сферический фильтрационный поток

Пусть имеется скважина радиуса r_c , вскрывшая кровлю пласта, на забое которой поддерживается постоянное давление p_c . Можно положить, что толщина пласта h достаточно большая и можно выделить полусферу радиуса R_k (рисунок 2.7), на поверхности которой поддерживается постоянное давление p_k и через нее происходит приток флюида, равный дебиту скважины. Течение установившееся, и поверхность полусферы представляет собой контур питания.

Тогда можно положить, что вскрытие кровли пласта имеет форму полусферы и вектор скорости фильтрации в любой точке пласта между контуром питания и забоем скважины направлен к центру сферы.

В этом случае задача имеет сферическую симметрию (рисунок 2.7) и ее решают в сферической системе координат. Система уравнений для решения задачи остается прежней и в безындексной форме представляется уравнениями (2.1). Проектирование (2.1) на сферическую систему координат дает

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0, \quad (2.26)$$

$$w_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad w_\varphi = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}; \quad w_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

При сделанном предположении о сферической симметрии процесса все искомые функции зависят только от r . В этом случае система уравнений (2.26) упроститься и примет вид

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad (2.27)$$

$$w_r = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Замечание

В случае плоскорадиального течения, при притоке к скважине флюид движется в отрицательном направлении. Поэтому при проектировании знак «минус» в уравнении для скорости фильтрации меняется на «плюс».

Интегрируя первое уравнение (2.27), имеем

$$r^2 \frac{dp}{dr} = C, \quad dp = C \frac{dr}{r^2},$$

$$\int_p^{p_k} dp = C \int_r^{R_k} \frac{dr}{r^2},$$

$$p_k - p = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right).$$

При $r = r_c$, $p = p_c$

$$p_k - p_c = \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k} \right); C = \frac{p_k - p_c}{\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k} \right)}.$$

Так как $R_k \gg r_c$, то

$$C = r_c (p_k - p_c).$$

Следовательно

$$p = p_k - r_c (p_k - p_c) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (2.28)$$

Используя второе равенство (2.27) и (2.28) получаем формулу для расчета дебита

$$Q = 2\pi r^2 w_r = 2\pi r^2 \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{2\pi k}{\mu} r_c (p_k - p_c).$$

Остальные параметры радиально-сферического фильтрационного течения могут быть получены аналогично тому, как это сделано в двух первых случаях рассмотрения одномерных течений.

3 Одномерные установившиеся потоки сжимаемых флюидов в недеформируемом однородном изотропном пласте

3.1 Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида

Рассмотрим математические модели установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида.

Под сжимаемыми флюидами в подземной гидромеханике обычно понимают модели упругой жидкости, совершенного и реального газов.

Системы уравнений для моделей несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида имеют, соответственно, вид

$$\begin{array}{ll} \Delta p = 0 & \Delta P = 0 \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} d\text{rad}p & \bar{w} = -\frac{k}{\mu} d\text{rad}p \\ \rho = \text{const} & \rho = \rho(p) \end{array}$$

Умножим закон Дарси в модели для сжимаемого флюида на плотность, а $\rho \text{grad}p$ заменим на $\text{grad}P$

$$\begin{array}{ll} \Delta p = 0 & \Delta P = 0 \\ \bar{w} = -\frac{k}{\mu} d\text{rad}p & \rho \bar{w} = -\frac{k}{\mu} d\text{rad}P \quad (3.1) \\ \rho = \text{const} & \rho = \rho(p) \end{array}$$

Уравнение состояния в модели для сжимаемого флюида подразумевается заданным.

Распределение давления и скорости фильтрации в пласте, полученные для прямолинейно-параллельного течения несжимаемой жидкости (2.4), для сжимаемого флюида преобразуются следующим образом

Для несжимаемой жидкости

Для сжимаемого флюида

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p_k - \frac{P_k - P_2}{L} x & P &= P_k - \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_2}{L} x \\
 w &= \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_2}{L} & \rho w &= \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_2}{L}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

3.2 Уравнения состояния упругой жидкости, совершенного и реального газов

При фильтрационных течениях упругой жидкости и газа часто можно считать, что плотность давления $\rho = f(p)$ (процессы, в которых $\rho = f(p)$ называются баротропными).

Примерами баротропных процессов могут служить изотермические фильтрационные течения. Явный вид уравнения состояния определяется в зависимости от постановки задачи и конкретных условий.

Для учета сжимаемости нефти (например, при решении задач о неустановившейся фильтрации) обычно пользуются уравнениями состояния упругой жидкости.

По определению, коэффициент объемного сжатия жидкости $\beta_{\text{ж}}$ равен отношению относительного изменения объема фиксированной массы жидкости ($dV_{\text{ж}}/V_{\text{ж}}$) к изменению давления (dp)

$$\beta_{\text{ж}} = -\frac{1}{V_{\text{ж}}} \frac{dV_{\text{ж}}}{dp} .
 \tag{3.3}$$

Знак минус в равенстве (3.3) поставлен для того, чтобы коэффициент объемного сжатия был положительной величиной.

При увеличении давления ($dp > 0$) объем жидкости уменьшается ($dV_{\text{ж}} < 0$) и наоборот, то есть дифференциалы в числителе и знаменателе равенства (3.3) имеют разные знаки.

Для того чтобы из (3.3) получить уравнение состояния в явном виде, перейдем от рассмотрения выделенного объема к рассмотрению плотности жидкости.

Для однородной жидкости

$$M = \rho V_{\text{ж}}, \quad V_{\text{ж}} = \frac{M}{\rho},$$

где M - масса жидкости, $M = \text{const}$.

Возьмем производную от последнего равенства

$$\frac{dV_{\text{ж}}}{d\rho} = M(-1) \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow dV_{\text{ж}} = -\frac{M}{\rho^2} d\rho.$$

Подставим последнее равенство в (3.3), будем иметь

$$\beta_{\text{ж}} = \frac{d\rho}{\rho dp}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_{\text{ж}} dp.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \beta_{\text{ж}} \int_{p_0}^p dp,$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \beta_{\text{ж}} (p - p_0),$$

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p - p_0)} \quad (3.4)$$

По данным В.Н. Щелкачева для нефти отечественных месторождений

$$7 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1} \leq \beta_{\text{ж}} \leq 3 \cdot 10^{-9} \text{Па}^{-1},$$

а для пластовых вод

$$2,7 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1} \leq \beta_{\text{ж}} \leq 5 \cdot 10^{-9} \text{Па}^{-1}.$$

Поэтому показатель степени $\beta_{\text{ж}}(p - p_0)$ мал, и экспоненту можно разложить в ряд. Ограничимся только линейным членом разложения

$$e^{\beta_{\text{ж}}(p - p_0)} \approx 1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0).$$

В результате преобразований получилось уравнение состояния упругой сжимаемой при небольших перепадах давления

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0)] \quad (3.5)$$

Для больших значений $(p - p_0)$ необходимо использовать уравнение состояния (3.4).

Наряду с коэффициентом объемного сжатия часто используют обратную величину $K_{\text{ж}} = \frac{1}{\beta_{\text{ж}}}$, которая называется модулем упругости жидкости.

Для природных газов в качестве уравнения состояния часто используют уравнение состояния совершенного газа (уравнение состояния Менделеева - Клайперона)

$$p = \rho RT, \quad (3.6)$$

где R - газовая постоянная;

T - температура.

Уравнение состояния (3.6) для изотермических процессов принимает вид

$$\frac{p}{\rho} = RT = const.$$

Обычно в уравнении состояния определяют задание плотности газа и давления при атмосферных условиях, принимая при этом, что температура T равна температуре в пласте.

Тогда уравнение состояния совершенного газа запишется в виде

$$\rho = \frac{\rho_a}{p_a} p, \quad (3.7)$$

где ρ_a - плотность газа при атмосферном давлении p_a .

Для газовых месторождений с большим пластовым давлением (до 40÷60 МПа) используется уравнение состояния, которое называется уравнением состояния реального газа и имеет вид

$$p = z\rho RT, \quad (3.8)$$

где z - коэффициент сверхсжимаемости газа, равный отношению плотности реального.

Коэффициент z учитывает отклонения состояния реального газа от предписываемого ему уравнением для совершенного газа.

Коэффициент z зависит от приведенных значений давления p_r и температуры T_r

$$p_r = \frac{p}{\langle p^* \rangle}, \quad T_r = \frac{T}{\langle T^* \rangle} \quad (3.9)$$

и может быть определен аналитически.

В равенствах (3.9) $\langle p^* \rangle$ и $\langle T^* \rangle$ - среднекритическое давление и температура.

Природный газ состоит из различных компонентов (метан, этан, пропан и др.), и среднекритические давление и температура определяются по формулам

$$\langle p^* \rangle = \frac{\sum n_j p_j^*}{\sum n_j}, \quad \langle T^* \rangle = \frac{\sum n_j T_j^*}{\sum n_j},$$

где n_j - содержание j -го компонента в газе, в %;

p_j^* и T_j^* - критические давление и температура j -го компонента соответственно.

Для изотермических фильтрационных течений в уравнении состояния реального газа константа RT может быть определена при атмосферных условиях

$$\frac{p_a}{\rho_a} = z(p_a)RT.$$

Уравнение состояния реального газа в этом случае примет вид

$$\rho = \frac{\rho_a z(p_a) p}{p_a z(p)}. \quad (3.10)$$

Исследования показали, что зависимость $z(p)$ при постоянной температуре (при изотермической фильтрации) является линейной при малых изменениях давления

$$z = z_0 \left[1 - a_z (p_0 - p) \right], \quad (3.11)$$

где z_0 - коэффициент сверхсжимаемости при $p = p_0$,
и экспоненциальной при больших изменениях давления

$$z = z_0 e^{-a_z(p_0 - p)}. \quad (3.12)$$

Используя уравнения состояния (3.4), (3.5), (3.7) и (3.10), можно вычислить функцию Лейбенсона для каждого из указанных случаев.

I. Для упругой жидкости с уравнениями состояния (3.4) функция Лейбенсона имеет вид

$$P = \int \rho_0 e^{\beta_{ж}(p-p_0)} dp = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} \int e^{\beta_{ж}(p-p_0)} d\beta_{ж}(p-p_0) = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} e^{\beta_{ж}(p-p_0)} + C = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} + C$$

.

При малых значениях $\beta_{ж}(p-p_0)$ равенство можно преобразовать, разложив экспоненту в ряд

$$P = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} \left[1 + \beta_{ж}(p-p_0) \right] + C = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} + \rho_0 p - \rho_0 p_0 + C = \rho_0 p + C^*, \quad (3.13)$$

где $C^* = C + \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} - \rho_0 p_0$.

II. Для упругой жидкости с уравнениями состояния (3.5) имеем

$$P = \int \rho_0 \left[1 + \beta_{ж}(p-p_0) \right] dp = \rho_0 p + \rho_0 \beta_{ж} \left(\frac{p^2}{2} - p_0 p \right) + C,$$

или, учитывая, что жидкость слабосжимаема и коэффициент $\beta_{ж}$ мал

$$P = \rho_0 p + C. \quad (3.14)$$

Таким образом, функция Лейбензона для уравнения состояния (3.5) при малых изменениях давления в слабосжимаемой жидкости совпадает с функцией Лейбензона для несжимаемой жидкости.

Действительно, для несжимаемой жидкости $\rho = \rho_0 = const$ и функция Лейбензона определяется равенством

$$P = \int \rho_0 dp = \rho_0 p + C. \quad (3.15)$$

III. Для совершенного газа с уравнением состояния (3.7) функция Лейбензона имеет вид

$$P = \int \frac{\rho_a P}{p_a} dp = \frac{\rho_a P^2}{2p_a} + C. \quad (3.16)$$

IV. Для реального газа в случае изотермической фильтрации функция Лейбензона определяется равенством

$$P = \frac{\rho_a z(p_a)}{p_a} \int \frac{p}{z(p)} dp + C. \quad (3.17)$$

3.3 Расчет фильтрационных характеристик одномерных потоков при течении сжимаемого флюида

Замечание

При установившихся фильтрационных течениях упругую жидкость можно считать несжимаемой.

3.3.1 Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток совершенного газа

Подстановка функции Лейбензона (3.16) в (3.2) дает следующие распределения давления и скорости фильтрации соответственно

$$\frac{\rho_a p^2}{2p_a} + C = \frac{\rho_a p_k^2}{2p_a} + C - \frac{\frac{\rho_a p_k^2}{2p_a} - \frac{\rho_a p_2^2}{2p_a}}{L} x,$$

$$\rho_w = \frac{k}{\mu} \frac{\frac{\rho_a p_k^2}{2p_a} - \frac{\rho_a p_2^2}{2p_a}}{L}.$$

После преобразований и умножения скорости фильтрации на площадь галереи, получим

$$p(x) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_2^2}{L} x}, \quad (3.18)$$

$$\rho_w = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_a (p_k^2 - p_2^2)}{2p_a L}, \quad (3.19)$$

$$\rho_w B h = Q_m = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_a (p_k^2 - p_2^2)}{2p_a L} B h. \quad (3.20)$$

Формулы (3.18)-(3.20) позволяют рассчитать основные фильтрационные характеристики при прямолинейно-параллельной фильтрации совершенного газа.

Анализ этих соотношений показал, что они получаются из соответствующих формул для случая несжимаемой жидкости путем замены давления на функцию Лейбензона и объемного расхода на массовый.

Полная аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа устанавливается с помощью следующей замены переменных:

для несжимаемой жидкости	для газа
$p(x)$	$P(x)$
w	ρ_w
Q	Q_m

При изучении фильтрации газа кроме массового дебита используется понятие объемного расхода Q_a , приведенного к атмосферным условиям, который определяется равенством

$$Q_a = \frac{Q_m}{\rho_a}.$$

Формула для расчета приведенного к атмосферным условиям объемного дебита газа имеет вид

$$Q_a = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{2p_a L} B h. \quad (3.21)$$

Для определения времени движения меченых частиц в газовом пласте подставим в (2.7) выражение скорости фильтрации газа из (3.19)

$$\begin{aligned} t = m \int_0^x \frac{dx}{w} &= \frac{2m\mu L}{k(p_k^2 - p_\Gamma^2)} \int_0^x p(x) dx = \frac{2m\mu L}{k(p_k^2 - p_\Gamma^2)} \int_0^x \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{L} x} dx = \\ &= \frac{2m\mu L p_k}{k(p_k^2 - p_\Gamma^2)} \int_0^x \sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{p_k^2 L} x} dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $p(x)$ определяется выражением (3.18).

Чтобы проинтегрировать полученное выражение, сделаем замену переменных

$$y = \sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{p_k^2 L} x}.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$dy = \frac{1}{2} \frac{\frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{p_k^2 L}}{\sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{p_k^2 L} x}} dx.$$

Формула (3.22) после замены переменных и пределов интегрирования примет вид

$$t = \frac{4m\mu L^2 p_k^3}{k(p_k^2 - p_\Gamma^2)} \int_y^1 y^2 dy.$$

Выполнив интегрирование, будем иметь

$$t = \frac{4m\mu L^2 p_k^3}{3k(p_k^2 - p_\Gamma^2)} \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{p_k^2 L} x\right)^3} \right].$$

Внеся p_k^3 в квадратные скобки, получим

$$t = \frac{4m\mu L^2 (p_k^3 - p^3(x))}{3k(p_k^2 - p_\Gamma^2)}. \quad (3.23)$$

Формула (3.23) позволяет определить время движения частицы от контура питания до любой точки пласта.

В частности, при $x = L$, из (3.19) следует

$$T = \frac{4m\mu L^2 (p_k^3 - p_\Gamma^3)}{3k(p_k^2 - p_\Gamma^2)}. \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) можно упростить, используя формулу для средневзвешенного пластового давления

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_V p m dV = \frac{1}{BhL} \int_0^L \int_0^h \int_0^B p(x) dx dy dz = \frac{1}{L} \int_0^L p(x) dx = \frac{p_k}{L} \int_0^L \sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{L p_k^2}} x dx,$$

в которой необходимо вычислить тот же интеграл, что и в (3.22).

Используя полученный ранее результат, будем иметь

$$\bar{p} = \frac{2}{3} \frac{p_k^3 - p_\Gamma^3}{p_k^2 - p_\Gamma^2}. \quad (3.25)$$

Таким образом, формулу (3.24) можно переписать в виде

$$T = \frac{2m\mu L^2 \bar{p}}{k(p_k^2 - p_\Gamma^2)}. \quad (3.26)$$

Как отмечалось, функции Лейбензона для упругой и несжимаемой жидкостей при малых изменениях давления совпадают. Поэтому при малых изменениях давления решения для упругой и для несжимаемой жидкости имеют один и тот же вид.

Представляет интерес сравнение решений, полученных для прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой жидкости и совершенного газа.

Из (3.18) следует, что давление в газовом пласте изменяется по линейному закону, как это было при фильтрации несжимаемой жидкости, а пропорционально квадратному корню из координаты (рисунок 3.1). при этом градиент давления (угол наклона к координатной оси OX касательной к кривой 2 на рисунок 3.1), а, следовательно, и скорость фильтрации, возрастает по мере продвижения газа по пласту и принимают максимальные значения по галерее.

Сравнение скоростей для прямолинейно-параллельной фильтрации при движении несжимаемой жидкости (2.4) и совершенного газа (3.19) приведена на рисунке 3.2. Так как скорость фильтрации совершенного газа при приближении к галерее возрастает, нелинейной становится и формула для времени движения меченой частицы (3.23).

Сравнение формул для времени движения меченых частиц при фильтрации несжимаемой жидкости (2.7) и совершенного газа (3.23) приведено на рисунке 3.3.

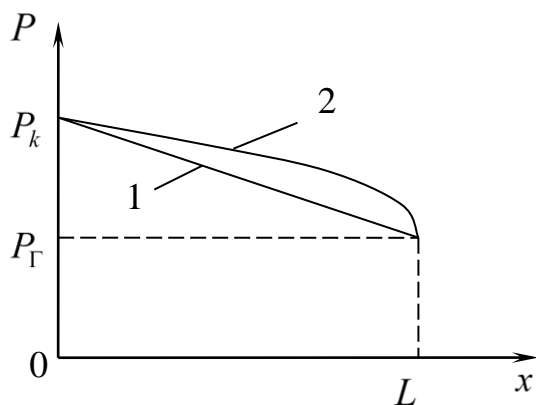


Рисунок 3.1 - Кривые распределения давления для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость; 2 – газ.

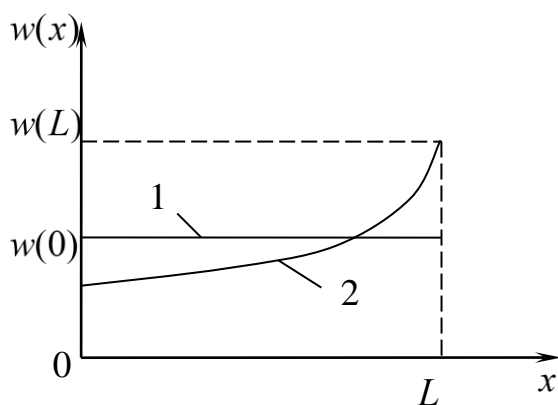


Рисунок 3.2 - Зависимости распределения скорости для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость; 2 – газ.

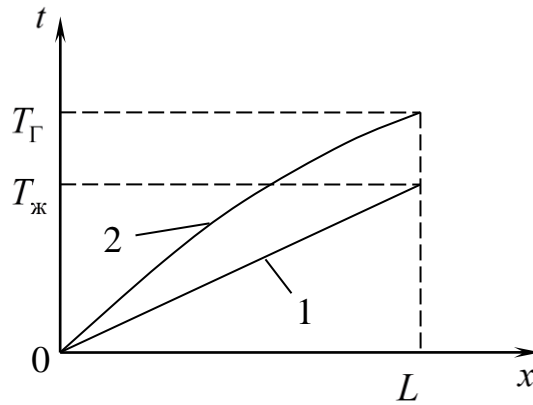


Рисунок 3.3 - Зависимости распределения времени меченой частицы для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость; 2 – газ.

3.3.2. Плоскопараллельный фильтрационный поток совершенного газа

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, преобразуем найденные выше решения (3.19), (3.20) и (3.21), заменив давление на функцию Лейбензона, скорость фильтрации на массовую скорость фильтрации и объемный дебит на массовый.

В результате получим

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln R_k / r_c} \ln \frac{R_k}{r} \Rightarrow P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln R_k / r_c} \ln \frac{R_k}{r},$$

$$w = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r} \Rightarrow \rho w = \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r}, \quad (3.27)$$

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln R_k / r_c} \Rightarrow Q_m = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln R_k / r_c}.$$

Используя выражение для функции Лейбензона в случае изотермической фильтрации совершенного газа (3.16)

$$P = \frac{\rho_a}{2p_a} p^2 + C \quad (3.28)$$

найдем основные характеристики при плоскорадиальной фильтрации совершенного газа.

После выполнения очевидных преобразований в формуле для распределения функции Лейбензона получаем

$$p^2 = p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}.$$

Следовательно, для распределения давления в пласте имеем формулу

$$p = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}}. \quad (3.29)$$

Сравнение кривых распределения давления в коллекторе в случаях установившейся фильтрации совершенного газа и несжимаемой жидкости при одинаковых параметрах пласта и граничных условиях приведено на рисунке 3.4.

Из рисунка видно, что в газовом пласте давление медленнее изменяется вблизи контура питания и более резко падает вблизи скважины по сравнению с нефтяным, для расчетов которого принимается модель несжимаемой жидкости. Указанное поведение давления в пласте приводит к нарушению закона Дарси в при скважинной зоне при эксплуатации газовой скважины.

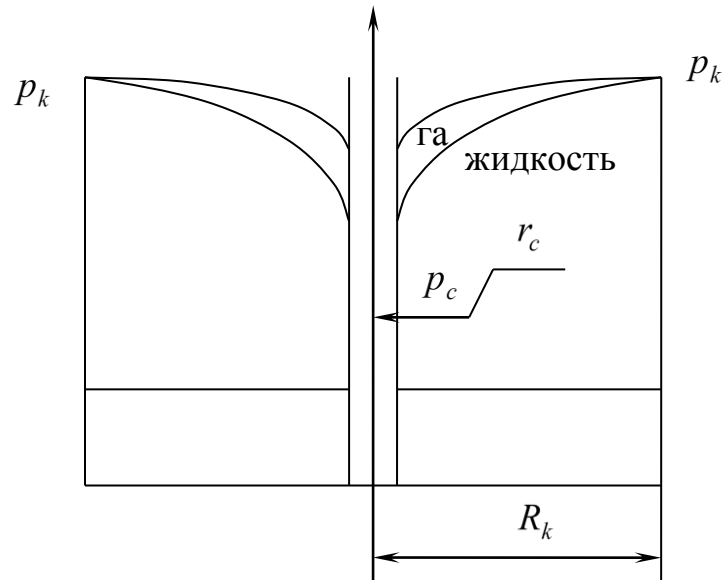


Рисунок 3.4 - Кривые распределения давления совершенного газа и несжимаемой жидкости

Аналогично находится и формула для массового дебита газовой скважины в предположении, что газ является совершенным. После подстановки (3.16) в (3.27) имеем

$$Q_m = \frac{\pi k h \rho_a}{\mu \rho_a} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln R_k / r_c}. \quad (3.30)$$

Разделив (3.30) на ρ_a , получим формулу для объемного дебита, приведенного к атмосферным условиям

$$Q_a = \frac{Q_m}{\rho_a} = \frac{\pi k h}{\mu \rho_a} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln R_k / r_c}. \quad (3.31)$$

Индикаторная линия для газовых скважин строится как график зависимости объемного дебита от $(p_k^2 - p_c^2)$. Из (3.31) видно, что индикаторная линия представляется в виде графика линейной функции (рисунок 3.5) с коэффициентом продуктивности (пропорциональности) равным

$$\frac{\pi k h}{\mu p_a} \frac{1}{\ln \frac{R_k}{r_c}}$$

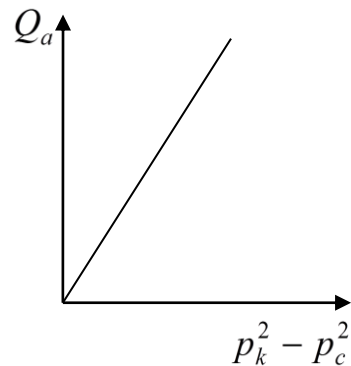


Рисунок 3.5 - Индикаторная линия для газовых скважин

Массовая скорость при плоскорадиальном потоке газа после подстановки во вторую формулу (3.27) выражения для массового дебита (3.30) представится в виде

$$\rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_a}{p_a} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.32)$$

Определим средневзвешенное по первому пространству давление при плоскорадиальной фильтрации газа.

Из (2.11) и (3.29) имеем

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{V_{\Pi V}} \int p m dV = \frac{1}{\pi h (R_k^2 - r_c^2)} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}} r r dr = \\ &= \frac{2 p_k}{R_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{1 - \frac{p_c^2 / p_k^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}} r dr. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Для приближенного вычисления введем обозначение

$$y = \frac{1 - \left(\frac{r_c}{p_k}\right)^2 \ln \frac{R_k}{r}}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Очевидно, что при $r_c < r < R_k$ для новой переменной выполняется неравенство $0 < y < 1$. В области малых y , разложим радикал в ряд

$$\sqrt{1-y} = 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} - \dots$$

Ограничиваясь членом разложения, получим

$$\sqrt{1-y} \approx 1 - \frac{1 - \left(\frac{r_c}{p_k}\right)^2 \ln \frac{R_k}{r}}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Полученный интеграл берется по частям и, в пренебрежении слагаемыми, содержащими сомножитель r_c^2 , равен

$$f \approx p_k \left[\frac{1 - \left(\frac{r_c}{p_k}\right)^2}{4 \ln \frac{R_k}{r_c}} \right].$$

Определим время движения меченых частиц в газовом пласте к скважине. Преобразуем формулу для массовой скорости (3.32).

Из уравнения состояния совершенного газа при изотермической фильтрации получаем

$$p(r) = p_a \frac{\rho}{\rho_a}.$$

Формулу (3.32) можно переписать в виде

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^2 - p_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{rp(r)}. \quad (3.34)$$

Подставим в формулу для определения времени движения меченых частиц

$$t = m \int_{r_c}^r \frac{dr}{w(r)}$$

выражение для скорости фильтрации (3.34) и получим

$$t = m \int_{r_c}^r \frac{2\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{k(p_k^2 - p_c^2)} p(r) r dr.$$

Преобразуем полученное соотношение, используя формулу для распределения давления в газовом пласте (3.29)

$$t = \frac{2m\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{k(p_k^2 - p_c^2)} p_k \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{1 - \frac{1 - p_c/p_k}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}} r dr.$$

Учитывая соотношение (3.33), формулу для расчета времени движения меченой частицы в газовом пласте представим

$$t \approx \frac{m\mu \ln \frac{R_k}{r_c} (R_k^2 - r_c^2)}{k(p_k^2 - p_c^2)} p_k. \quad (3.35)$$

3.3.3 Замечания о расчете фильтрационных характеристик одномерных потоков реального газа в пористой среде

Для расчета дебита нужно воспользоваться аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида и записать формулу для массового дебита через функцию Лейбензона

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Подставив в выписанное выражение функцию Лейбензона в виде (3.17), получим

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\rho_a z(p_a)}{p_a \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{p_c}^{p_k} \frac{p}{z(p)} dp.$$

Для вычисления интеграла определяются значения $z(p_k) = z_k$ и $z(p_c) = z_c$, и переменная под знаком интеграла $z(p)$ заменяется постоянным значением, равным среднему арифметическому

$$\tilde{z} = \frac{z_k + z_c}{2}.$$

Тогда выражение для массового дебита принимает следующий вид

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\rho_a z(p_a)}{p_a \tilde{z} \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{p_c}^{p_k} p dp.$$

Интеграл легко вычисляется, и для массового дебита реального газа получаем формулу

$$Q_m = \frac{\pi kh}{\mu} \frac{\rho_a z(p_a)}{p_a \tilde{z} \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{2}$$

Данное соотношение при $z(p_a) = \tilde{z} = 1$ перейдет в формулу для дебита совершенного газа.

Функция Лейбензона общего вида

$$P = \int \rho(p) \frac{k(p)}{\mu(p)} dp + C$$

учитывает возможность зависимости от давления плотности, проницаемости и вязкости.

Пусть постоянна только проницаемость. Тогда функция Лейбензона примет вид

$$P = \frac{k\rho_a z(p_a)}{p_a} \int \frac{p dp}{\mu(p) z(p)} + C. \quad (3.36)$$

Эксперименты показывают, что вязкость нефтей и природных газов возрастает при повышении давления. При больших изменениях давления (до 100 МПа) зависимость вязкости флюидов от давления аппроксимируется экспоненциальной зависимостью

$$\mu = \mu_0 e^{-a_\mu(p_0 - p)}. \quad (3.37)$$

Соответственно, при малых изменениях давления зависимость вязкости от давления линейна

$$\mu = \mu_0 [1 - a_\mu(p_0 - p)]. \quad (3.38)$$

Рассмотрим решение задачи по определению дебита газовой скважины при плоскорадиальной фильтрации с учетом зависимости вязкости от давления.

Для расчета дебита нужно воспользоваться аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида и записать формулу для массового дебита через функцию Лейбензона

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Подставив в выписанное выражение функцию Лейбензона в виде (3.36), получим

$$Q_m = \frac{2\pi kh \rho_a z(p_a)}{p_a \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{p_c}^{p_k} \frac{p}{\mu(p)z(p)} dp.$$

Интеграл может быть вычислен численными методами.

4 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа при нелинейных законах фильтрации

4.1 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двучленному закону фильтрации

Рассмотрим способы определения основных характеристик фильтрационных потоков при плоскопараллельном движении жидкости и газа с большими скоростями, когда причиной отклонения от закона Дарси являются значительные инерционные составляющие общего фильтрационного сопротивления.

Математические модели теории фильтрации несжимаемой жидкости и газа в этом случае имеют, соответственно, следующий вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= 0 & \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0 \\ \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\bar{w}| \bar{w} & \operatorname{grad} P &= -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\bar{w}| \bar{w} \\ \rho &= \text{const} & \rho &= \rho(p) \end{aligned}$$

С помощью стандартного преобразования обе модели допускают установление аналогии между фильтрацией жидкости и газа и при нелинейном за-

коне фильтрации. Умножим на плотность закон фильтрации в модели для газа и введем функцию Лейбензона. В результате для первых двух уравнений будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= 0 & \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0 \\ \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\bar{w}| \bar{w} & \operatorname{grad} P &= -\frac{\mu}{k} \rho \bar{w} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} |\rho \bar{w}| \rho \bar{w} \end{aligned}$$

Таким образом, обе модели допускают такую же аналогию, как и при линейном законе фильтрации.

Для общности рассуждений получим решение задачи об установившейся плоскорадиальной фильтрации по двучленному закону для газа, а решение для несжимаемой жидкости выпишем, как частный случай функции Лейбензона для уравнения состояния $\rho = \text{const}$.

Так как течение одномерное, плоскорадиальное, то все искомые функции зависят только от r .

Следовательно, двучленный закон фильтрации можно представить как

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{k} \rho w_r + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \rho w_r. \quad (4.1)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho w_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho w_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0$$

также упрощается и принимает вид

$$\frac{d \rho w_r r}{dr} = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к равенству

$$\rho w_r r = C,$$

где $C = const.$

Умножим результат на $2\pi h$, где h - толщина пласта, и получим

$$2\pi\rho w_r r h = Q_m = const.$$

Выразим массовую скорость фильтрации

$$\rho w_r = \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r}$$

и подставим ее в (4.1)

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r^2}.$$

Тогда

$$dP = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \frac{dr}{r^2},$$

$$\int_{P_k}^P dP = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \int_{R_k}^r \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \int_{R_k}^r \frac{dr}{r^2},$$

$$P = P_k - \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (4.2)$$

Принимая, что интегрирование проведено от контура питания до скважины (т.е. $r = r_c$), последнее соотношение перепишем в виде

$$P_k - P_c = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) задают распределение функции Лейбензона в пласте и связь между «депрессией функции Лейбензона» на пласт и дебитом, соответственно.

Переходя от функции Лейбензона к давлению по формулам

$$P = \frac{\rho_{am} P^2}{2\rho_{am}} + C \text{ - для совершенного газа,}$$

$$P = \rho_0 p + C \text{ - для несжимаемой жидкости,}$$

найдем из (4.2) и (4.3) соотношения, задающие распределение давления и связь между расходом и депрессией на пласт при плоскорадиальной фильтрации по двучленному закону.

Для несжимаемой жидкости распределение давления в пласте задается формулой

$$p = p_k - \frac{\mu Q}{k 2\pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta \rho_0}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{R_k} \right), \quad (4.4)$$

а связь между депрессией на пласт и расходом –

$$p_k - p_c = \frac{\mu Q}{k 2\pi h} \ln \frac{R_k}{r} + \frac{\beta \rho_0}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_c}{R_k} \right). \quad (4.5)$$

Для совершенного газа распределение давления в пласте задается формулой

$$p = \sqrt{p_k - \frac{\mu Q_{am} P_{am}}{k \pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta \rho_{am} P_{am}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{R_k} \right)}, \quad (4.6)$$

а связь между депрессией на пласт и расходом –

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\mu Q_{am} P_{am}}{k \pi h} \ln \frac{R_k}{r} + \frac{\beta \rho_{am} P_{am}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_{am}}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_c}{R_k} \right). \quad (4.7)$$

Из формул (4.6) и (4.7) видно, что индикаторная линия, построенная в координатах $Q - \Delta p$ для жидкости и $Q_{am} - (p_k^2 - p_c^2)$ для газа, является горизонтальной параболой (рисунки 4.1 и 4.2).

Запишем уравнения притока к скважине в виде

$$p_k - p_c = AQ + BQ^2, \quad (4.8)$$

для несжимаемой жидкости

$$p_k^2 - p_c^2 = A_1 Q_{am} + B_1 Q_{am}^2, \quad (4.9)$$

для газа, где

$$A = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r}, \quad B = \frac{\beta \rho_0}{\sqrt{k} \pi h} \frac{1}{r_c},$$

$$A_1 = \frac{\mu p_{am}}{\pi kh} \ln \frac{R_k}{r}, \quad B_1 = \frac{\beta \rho_{am} p_{am}}{2\sqrt{k} \pi^2 h^2} \frac{1}{r_c}.$$

Здесь A , B , A_1 , B_1 - коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для каждой скважины. Они определяются опытным путем по данным исследования скважин при установившихся режимах. Скважины исследуются на пяти – шести режимах, на каждом режиме измеряется дебит и определяется забойное давление. Затем скважину закрывают, и давление на забое остановленной скважины принимают за контурное давление p_k .

Для интерпретации результатов исследования скважин уравнения (4.8) и (4.9) делением на Q и Q_{am} соответственно приводят к уравнению прямой

$$\frac{p_k - p_c}{Q} = A + BQ, \quad (4.10)$$

$$\frac{p_k^2 - p_c^2}{Q_{am}} = A_1 + B_1 Q_{am}. \quad (4.11)$$

Графики в координатах $(p_k - p_c) \sim Q - Q$ и $(p_k^2 - p_c^2) \sim Q_{am} - Q_{am}$ соответственно представляют собой прямые линии, для которых $A(A_1)$ - отрезок, отсекаемый на оси ординат, $B(B_1)$ - тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс (рисунок 4.3).

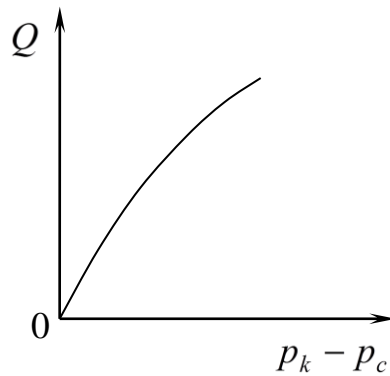


Рисунок 4.1. Индикаторная линия при фильтрации жидкости по двучленному закону

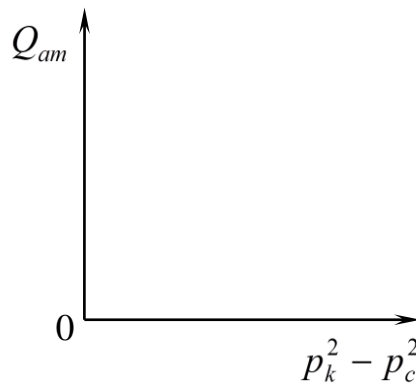


Рисунок 4.2. Индикаторная линия при фильтрации газа по двучленному закону

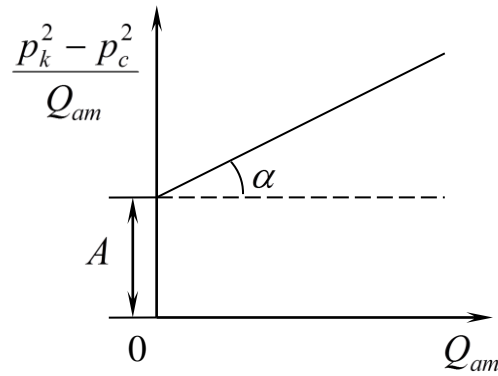


Рисунок 4.3. График зависимости $\frac{p_k^2 - p_c^2}{Q_{am}}$ от Q_{am} при фильтрации по двучленному закону

Уравнения притока (4.8) и (4.9) с экспериментально определяемыми коэффициентами широко используются в расчетах при проектировании разработки месторождений. Кроме того, по значению $A(A_1)$, найденному в результате исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта, например, коэффициент гидропроводности:

- для нефтяной скважины

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{1}{2\pi A} \ln \frac{R_k}{r_c};$$

- для газовой скважины

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{p_{am}}{\pi A_1} \ln \frac{R_k}{r_c}.$$

Уравнение притока реального газа к скважине по двучленному закону фильтрации имеет вид

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\tilde{\mu} \tilde{z}}{k} \frac{Q_{am} p_{am}}{\pi h} \ln \frac{R_k}{r} + \frac{\beta \tilde{z} \rho_{am} p_{am}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_{am}}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}, \quad (4.12)$$

где $\tilde{\mu} = \frac{\mu_k + \mu_c}{2}$;

$$\tilde{z} = \frac{z_k + z_c}{2}.$$

Замечание

В реальных условиях нельзя считать, что во всем пласте – от стенки до скважины до контура питания – справедлив единый нелинейный закон фильтрации. При значительных дебитах закон Дарси нарушается в некоторой области вблизи забоя скважины, в то время как в остальной области пласта по-прежнему соблюдается линейный закон.

С ростом дебита скважины область, в которой нарушается закон Дарси, увеличивается.

4.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по степенному закону фильтрации

Степенной закон фильтрации

$$\bar{w} = c |\text{grad} p|^{\frac{1-n}{n}} \text{grad} p$$

в цилиндрической системе координат для плоскорадиального фильтрационного потока записывается следующим образом

$$w_r = c \left(\frac{dp}{dr} \right)^{1/n}, \quad w_\varphi = w_z = 0.$$

Выражение для массового расхода имеет вид

$$Q_m = 2\pi\rho w_r r h = 2\pi r h c \rho \left(\frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{n}} = \text{const}.$$

Для того чтобы проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, возведем его в степень n

$$Q_m^n = 2\pi h c r^n \rho^n \left(\frac{dp}{dr} \right)$$

и преобразуем его к следующему виду

$$A = r^n \rho^n \left(\frac{dp}{dr} \right), \text{ где } A = \left(\frac{Q_m}{2\pi h c} \right)^n = \text{const}.$$

Разделим переменные

$$A \frac{dr}{r^n} = \rho^n dp \quad (4.13)$$

и введем функцию давления

$$P = \int \rho^n dp, \quad (4.14)$$

которая при $n = 1$ совпадает с функцией Лейбензона, так что

$$dP = d \int \rho^n dp = \rho^n p.$$

Таким образом, уравнение (4.13) можно переписать в виде

$$A \frac{dr}{r^n} = dP. \quad (4.15)$$

После интегрирования от забоя до контура питания, т.е. граничные условия

$$r = r_c, P = P_c \text{ и } r = R_k, P = P_k,$$

получим

$$\int_{P_c}^{P_k} dP = P_k - P_c = \int_{r_c}^{R_k} A \frac{dr}{r^n} = \frac{A}{n-1} \left(\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \approx \frac{A}{(n-1)r_c^{n-1}}, \quad (4.16)$$

или, подставив вместо A его представляющие через параметры пласта и фильтрационного потока, будем иметь

$$P_k - P_c = \frac{Q_m^n}{2\pi h c \mu (n-1)r_c^{n-1}}.$$

Из последнего равенства получаем формулу для дебита

$$Q_m = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1) \mu (P_k - P_c) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.17)$$

Если в (4.16) в качестве нижнего предела интегрирования принять произвольную точку (r, P) , то получим формулу для распределения в пласте функции давления

$$P_k - P = \frac{A}{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \quad (4.18)$$

или, исключив с помощью равенства (4.16) из формулы (4.18), будем иметь

$$P(r) = P_k - \mu (P_k - P_c) \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k \quad (4.19)$$

Функция давления, определенная по формуле (4.14), имеет следующий вид:

- для несжимаемой жидкости

$$P = \rho_0^n p + c, \quad (4.20)$$

- для совершенного газа

$$P = \int \left(\frac{\rho_{am} P}{p_{am}} \right)^n dp = \left(\frac{\rho_{am}}{p_{am}} \right)^n \frac{P^{n+1}}{n+1} + c. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.20) и (4.21) в (4.17) и (4.19), получим формулы для дебита и распределения давления для жидкости и совершенного газа соответственно, из формулы для дебита легко получается формула для скорости фильтрации.

Выпишем вначале все расчетные формулы для плоскорадиальной фильтрации по степенному закону для несжимаемой жидкости:

- для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1) \left(p_k - p_c \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (4.22)$$

- для объемного дебита

$$Q = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1) \left(p_k - p_c \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (4.23)$$

- для распределения давления в пласте

$$p(r) = p_k - \left(p_k - p_c \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k \quad (4.24)$$

- для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{r} \left[(n-1) \left(p_k - p_c \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (4.25)$$

Если в формулах (4.22)-(4.25) положить $n=2$, то получим расчетные формулы для закона фильтрации Краснопольского:

- для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c \sqrt{r_c} \left(p_k - p_c \right), \quad (4.26)$$

- для распределения давления в пласте

$$p(r) = p_k - \left(p_k - p_c \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k \quad (4.27)$$

- для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{c r_c^{\frac{1}{2}}}{r} \left(p_k - p_c \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.28)$$

Приведем все расчетные формулы для плоскорадиальной фильтрации по степенному закону для совершенного газа:

- для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c r_c^{\frac{n-1}{n}} \frac{\rho_{am}}{p_{am}} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} \left(p_k^{n+1} - p_c^{n+1} \right) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (4.29)$$

- для объемного дебита, приведенного к атмосферным условиям

$$Q_{am} = \frac{2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{p_{am}} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} \left(p_k^{n+1} - p_c^{n+1} \right) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (4.30)$$

- для распределения давления в пласте

$$p(r) = \left[p_k^{n+1} - \left(p_k^{n+1} - p_c^{n+1} \right) \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad r_c \leq r \leq R_k \quad (4.31)$$

- для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi rh} = \frac{cr_c^{\frac{n-1}{n}}}{rp(r)} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} \left(p_k^{n+1} - p_c^{n+1} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.32)$$

Если в (4.29)-(4.32) $n=2$, то получим расчетные формулы для закона фильтрации Краснопольского.

Из (4.24) следует, что кривая распределения давления для несжимаемой жидкости имеет форму гиперболы степени $n-1$, т.е. воронка депрессии представляет собой гиперболу вращения.

Расчеты показывают, что для любых значений p_c , p_k , r_c , R_k на расстоянии порядка одного метра от стенки скважины теряется до 80 % от общей депрессии ($p_k - p_c$).

Массовый расход для жидкости (см. 4.22) пропорционален депрессии в степени $\frac{1}{n}$, поэтому индикаторная линия $Q = f(\Delta p)$ при $1 < n < 2$ имеет вид выпуклой к оси дебита степенной кривой с дробным показателем меньше 2. В случае фильтрации по закону Краснопольского (см. 4.26), индикаторная линия является параболой.

На рисунке 4.4 приведены индикаторные линии для течения несжимаемой жидкости при линейном законе фильтрации ($n=1$) и при нелинейных законах фильтрации: $1 < n < 2$ и $n=2$.

Все сказанное выше относится также к индикаторным линиям для газа, если их строить в координатах Q_m (или Q_{am}) и $p_k^{n-1} - p_c^{n-1}$.

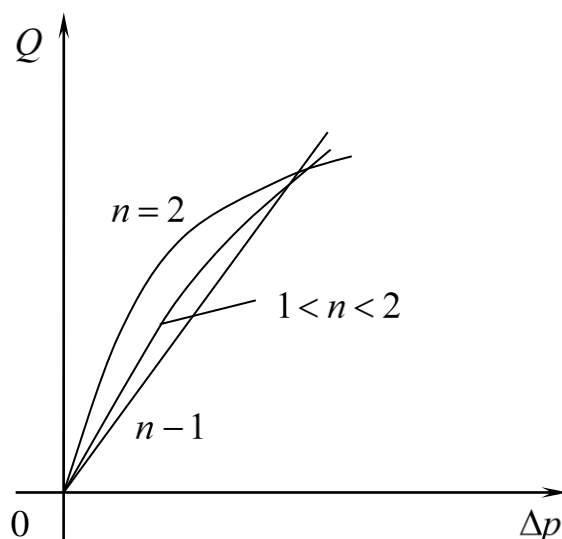


Рисунок 4.4. Индикаторные линии, соответствующие различным законам фильтрации жидкости

Скорость фильтрации вдоль линии тока изменяется при нелинейном законе фильтрации также, как и линейном: для жидкости w обратно пропорциональна радиусу, а для газа – обратно пропорциональна $rp(r)$.

5 Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости и газа в неоднородных пластах по закону Дарси

5.1 Классификация типов неоднородности пластов

Если проницаемость, пористость, просветность, удельная поверхность и т.д. изменяются в пласте, то такие пласты называются неоднородными.

В пластах-коллекторах углеводородного сырья выделяют следующие основные типы макронеоднородности.

1. Слоистая неоднородность.

При слоистой неоднородности пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых фильтрационные характеристики считают однородными, но отличными от фильтрационных характеристик соседних слоев. Такие пласты называют также неоднородными по толщине.

Границы раздела слоев с различными проницаемостями считают плоскими.

Таким образом, в модели в модели пласта со слоистой неоднородностью предполагается, что проницаемость, пористость и т.д. изменяются только по толщине пласта и являются кусочно-постоянными функциями вертикальной координаты. При этом можно считать, что пропластки разделены непроницаемыми границами (случай гидравлически изолированных слоев), либо учитывать перетоки между слоями (случай гидродинамически сообщающихся пропластков).

В первом случае возможен расчет характеристик фильтрационных потоков по одномерным схемам течения.

Во втором случае точный расчет требует решения двумерных задач фильтрации.

2. Зональная неоднородность.

В зональной неоднородности пласта фильтрационные свойства меняются в плоскости залегания, т.е. пласт состоит из нескольких зон (область пласта). В пределах каждой из зон фильтрационные свойства в среднем считаются одинаковыми, на границе двух зон фильтрационно-емкостные свойства меняются скачкообразно.

3. Пласты с непрерывной или случайной неоднородностью.

На практике встречаются пласты, в которых фильтрационно-емкостные свойства изменяются непрерывным или случайным образом при переходе от одной точки пласта к другой.

При решении прямых задач подземной гидромеханики фильтрационно-емкостные свойства считаются заданными, то для пластов с непрерывной или случайной неоднородностью фильтрационно-емкостные свойства являются известной непрерывной и случайной функцией координат точек области фильтрации.

Таким образом, в результате схематизации фильтрационных потоков можно выделить:

- 1) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в слоисто-неоднородном пласте;
- 2) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в зонально-неоднородном пласте;
- 3) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в пластах, где проницаемость является непрерывной или случайной функцией точек области фильтрации.

5.2 Прямолинейно-параллельный поток в неоднородных пластах

А. Слоисто-неоднородный пласт.

Пусть горизонтальный пласт толщины h и ширины B состоит из n пропластков толщиной h_i с проницаемостью k_i и пористостью m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$ (рисунок 5.1). Пласт насыщен жидкостью или газом. На контуре питания поддерживается постоянное давление p_k , на другой его границе – галерее, отстоящей от контура питания на расстоянии L , поддерживается постоянное давление p_Γ (при этом $p_k > p_\Gamma$).

Тогда при отсутствии перетоком между пропластками, в каждом из них имеет прямолинейно-параллельный фильтрационный поток с расчетными формулами для:

- давления

$$p(x) = p_k - \frac{p_k - p_\Gamma}{L} x,$$

- скорости фильтрации

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_\Gamma}{L},$$

- дебита

$$w_x S = Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_{\Gamma}}{L} S,$$

при фильтрации несжимаемой жидкости, но с той лишь разницей, что формула для распределения давления будет одинаковой для всех пропластков, а скорость фильтрации и дебит будут в каждом пропластке свои

$$p(x) = p_k - \frac{p_k - p_c}{L} x, \quad (5.1)$$

$$w^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{\mu} \frac{p_k - p_c}{L}, \quad (5.2)$$

$$Q^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{\mu} \frac{p_k - p_c}{L} h^{(i)} B, \quad (5.3)$$

Замечания

1. Различие в формулах обусловлено тем, что депрессия на пласт во всех пропластках одинакова, а фильтрационные свойства и размеры пропластков различны.

2. Где выше проницаемость, там будет больше скорость фильтрации, а дебит будет больше там, где больше размеры сечения пропласта и выше проницаемость.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, получим формулы, выраженные через функцию Лейбензона, описывающие фильтрацию газа:

$$P(x) = P_k - \frac{P_k - P_c}{L} x; \quad (5.4)$$

$$\rho w^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{\mu} \frac{p_k - p_c}{L}; \quad (5.5)$$

$$Q_m^{(i)} = \frac{k_{(i)}}{\mu} \frac{p_k - p_c}{L} h_{(i)} B. \quad (5.6)$$

В (5.1)-(5.6) индекс i - обозначает номер пропластка и изменяется от 1 до n .

Следовательно, при фильтрации совершенного газа в слоисто-неоднородном пласте будем иметь:

$$p(x) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{L} x}; \quad (5.7)$$

$$\rho_w^{(i)} = \frac{k_{(i)} \rho_{am}}{2\mu \rho_{am}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{L} = \frac{k_{(i)} \rho(x)}{2\mu \rho(x)} \frac{p_k^2 - p_c^2}{L}; \quad (5.8)$$

$$Q_m^{(i)} = \frac{k_{(i)} \rho_{am}}{2\mu \rho_{am}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{L} h_{(i)} B. \quad (5.9)$$

Воспользуемся аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа и проведем выкладки в общем виде, и для жидкости и для газа.

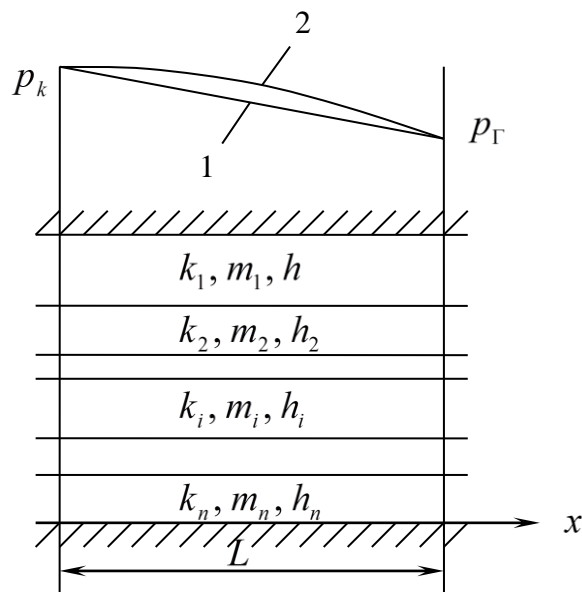


Рисунок 5.1 - Прямолинейно-неоднородный поток в слоисто-неоднородном пласте: 1- $p(x)$ для жидкости; 2 - $p(x)$ для газа.

Массовый расход всего пласта можно вычислить как сумму расходов во всех отдельных пропластах

$$Q_m = \sum_{i=1}^n Q_m^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k^{(i)}}{\mu} \frac{p_k - p_c}{L} h_{(i)} B = \frac{B(p_k - p_c)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k^{(i)} h_{(i)}. \quad (5.10)$$

Для гидродинамических расчетов удобно заменить формулу для потока флюида в неоднородном пласте на формулу в однородном пласте тех же размеров, но со средней проницаемостью k_{cp} , величину которой можно определить из условия равенства дебитов, т.е.

$$Q_m = \frac{k_{cp}}{\mu L} (p_k - p_c) B h = \frac{B(p_k - p_c)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k^{(i)} h_{(i)}. \quad (5.11)$$

Тогда

$$k_{cp} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n k^{(i)} h_{(i)}, \quad (5.12)$$

где $h = \sum_{i=1}^n h_{(i)}$.

Следовательно, формула для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте не зависит от флюида и одинакова для несжимаемой жидкости и для газа.

Формулы для дебита всего слоисто-неоднородного пласта имеют вид:

- для несжимаемой жидкости

$$Q_m = \frac{B \rho_0 (p_k - p_c)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k^{(i)} h_{(i)}; \quad (5.13)$$

- для газа

$$Q_m = \frac{B\rho_{am} \sqrt{p_k^2 - p_\Gamma^2}}{2\mu\rho_{am}L} \sum_{i=1}^n k_{(i)} h_{(i)}. \quad (5.14)$$

Время движения частиц флюида в i -ом припластке для несжимаемой жидкости будет определяться по формулам

$$t_i = \frac{m_i \mu}{k_{(i)}} \frac{Lx}{p_k - p_\Gamma} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{m_i \mu}{k_{(i)}} \frac{L^2}{p_k - p_\Gamma}.$$

Аналогично для газа

$$t_i = \frac{4m_i \mu L^2 \sqrt{p_k^3 - p_\Gamma^3(x)}}{3k_{(i)} \sqrt{p_k^2 - p_\Gamma^2}} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{4m_i \mu L^2 \sqrt{p_k^3 - p_\Gamma^3}}{3k_{(i)} \sqrt{p_k^2 - p_\Gamma^2}}.$$

В. Зонально-неоднородный пласт

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщины h и постоянной ширины B состоит из n зон различной проницаемости k_i , пористости m_i , длины l_i , где $i = 1, 2, \dots, n$.

На границах пласта поддерживаются постоянные давления p_k и p_Γ ($p_k > p_\Gamma$), рисунок 5.2. Границы каждой зоны пласта перпендикулярны фильтрационному потоку, направленному вдоль оси X .

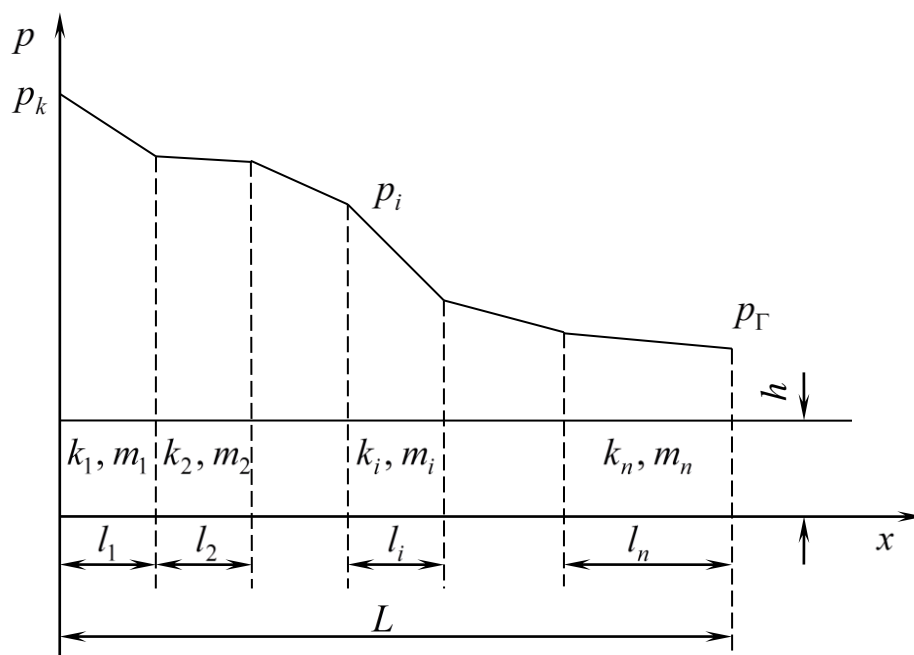


Рисунок 5.2. Прямолинейно-параллельный поток в зонально-неоднородном пласте. Показана кривая $p(x)$ для жидкости.

В пласте происходит одномерное установившееся фильтрационное течение однородного флюида. Поэтому в каждой из зон зонально-неоднородного пласта имеем прямолинейно-параллельный фильтрационный поток все с теми же расчетными формулами для давления, скорости фильтрации и дебита.

По сравнению со слоисто-неоднородным пластом, в котором формула для распределения была одинаковой для всех пропластков, но в каждом пропластке были разные скорости фильтрации и дебит, в данном случае в каждой зоне будут одинаковы скорость фильтрации и дебит, а формула для распределения давления для каждой зоны будет своя.

В самом деле, сколько втекает в пласт через контур питания, столько и вытекает из пласта через галерею. Такой вывод следует из закона сохранения массы при установившемся течении для трубки тока.

Следовательно, объемный дебит в каждой зоне один и тот же, но сечение пласта имеет постоянную площадь, поэтому и скорость фильтрации в каждой зоне тоже постоянна.

Таким образом, формулы для распределения давления, скорости фильтрации и дебита при зонально-неоднородной прямолинейно-параллельной фильтрации в каждой зоне неоднородного пласта ($1 \leq i \leq n$) имеют вид

$$p(x) = p_i - \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i} x, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (5.15)$$

$$w = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i}, \quad (5.16)$$

$$Q = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i} hB. \quad (5.17)$$

Для постановки задачи достаточно давать давление только на контуре питания и галерее, т.е. известны только

$$p_1 = p_k \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } p_{n+1} = p_\Gamma \text{ при } x_{n+1} = L = \sum_{i=1}^n l_i.$$

Поэтому, для того чтобы воспользоваться для расчета формулами (5.15)-(5.17), необходимо вычислить давления на границе всех зон.

Для решения этой задачи найдем формулу для дебита, выраженную через заданные в задаче параметры.

Разрешим относительно депрессии формулы (5.17) для всех зон

$$\begin{aligned} p_k - p_2 &= \frac{Q\mu l_1}{k_1 B h}, \\ p_2 - p_3 &= \frac{Q\mu l_2}{k_2 B h}, \\ p_3 - p_4 &= \frac{Q\mu l_3}{k_3 B h}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\dots$$

$$p_n - p_\Gamma = \frac{Q\mu l_n}{k_n B h}.$$

После сложения (5.18) получим

$$p_k - p_\Gamma = \frac{Q\mu}{Bh} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}.$$

Из последнего соотношения следует формула для дебита в зонально-неоднородном пласте при прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой жидкости

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_k - p_\Gamma}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}. \quad (5.19)$$

По формулам (5.17) и (5.19) можно определить давления на границе зон.

Для нахождения p_2 приравняем формулу (5.17), расписанную для дебита в первой зоне, и (5.19). Получим равенство

$$k_2 \frac{p_k - p_2}{l_2} = \frac{p_k - p_\Gamma}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}},$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон (все остальные величины заданы в постановке задачи). Аналогично можно определить и остальные значения давления на границах зон неоднородности.

Используя (5.19) определим среднюю проницаемость неоднородного пласта

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_k - p_\Gamma}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}} = \frac{k_{\text{ср}}}{\mu} \frac{p_k - p_\Gamma}{L} Bh, \quad (5.20)$$

$$k_{\text{ср}} = \frac{p_k - p_\Gamma}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}.$$

Таким образом, среднее значение проницаемости в зонально-неоднородном пласте определяется по иному закону, отличному от закона (5.12) для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте.

Используя аналогично между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из (5.15)-(5.17) и (5.19) получим формулы, выраженные через функцию Лейбензона, для установившейся прямолинейно-параллельной фильтрации газа в зонально-неоднородном пласте

$$P(x) = p_i - \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i} x, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (5.21)$$

$$\rho w = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i}, \quad (5.22)$$

$$Q_m = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i} hB, \quad (5.23)$$

$$Q_m = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_k - p_\Gamma}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}. \quad (5.24)$$

Подставив в (5.21)-(5.24) функцию Лейбензона для совершенного газа, получим формулы для распределения давления, массовой скорости и массового расхода при установившейся прямолинейно-параллельной фильтрации совершенного газа в зонально-неоднородном пласте.

$$p(x) = \sqrt{p_i^2 - \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i} x}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (5.25)$$

$$\rho_w = \frac{k_i \rho_{am}}{2\mu \varphi_{am}} \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i}, \quad (5.26)$$

$$Q_m = \frac{k_{(i)} \rho_{am}}{2\mu \varphi_{am}} \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i} hB, \quad (5.27)$$

$$Q = \frac{Bh\rho_{am}}{2\mu\varphi_{am}} \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}. \quad (5.28)$$

С помощью (5.28) можно определить среднее значение проницаемости в зонально-неоднородном пласте при фильтрации газа.

Нетрудно видеть, что получим тоже соотношение (5.20), что и при фильтрации несжимаемой жидкости.

С помощью (5.27) и (5.28) можно определить давление на границах зон при фильтрации газа.

Для нахождения p_2 приравняем формулы (5.27) и (5.28), расписанную для дебита в первой зоне, и получим

$$k_i \frac{p_k^2 - p_2^2}{l_2} = \frac{p_k^2 - p_\Gamma^2}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}},$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон.

Аналогично можно определить и остальные значения давления на границах зон неоднородности.

Время движения частиц флюида для модели несжимаемой жидкости в i -ой зоне будет определяться по формулам

$$t_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{x l_i}{\rho_i - p_{i+1}} \text{ и } T_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{l_i^2}{\rho_i - p_{i+1}}. \quad (5.29)$$

Аналогично для модели газа

$$t_i = \frac{4m_i \mu l_i^2 (\rho_i^3 - p^3(x))}{3k_i (\rho_i^2 - p_{i+1}^2)} \text{ и } T_i = \frac{4m_i \mu l_i^2 (\rho_i^3 - p_{i+1}^3)}{3k_i (\rho_i^2 - p_{i+1}^2)}. \quad (5.30)$$

Во всех формулах по определению t_i значения x изменяются в пределах $x_i < x < x_{i+1}$.

Общее время движения частиц T в зонально-неоднородном пласте равно

$$T = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Пласты с непрерывной неоднородностью.

Если установившееся прямолинейное движение флюида происходит в пласте, проницаемость которого изменяется непрерывно, т.е. $k = k(x)$, то для расчета дебита такого пласта при фильтрации несжимаемой жидкости и газа имеем, соответственно, следующие формулы

$$Q = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{dp}{dx} B h \text{ и } Q_m = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{dP}{dx} B h.$$

Разделив в дифференциальных уравнениях переменные

$$dp = -\frac{Q \mu}{B h} \frac{dx}{k(x)} \text{ и } dP = -\frac{Q_m \mu}{B h} \frac{dx}{k(x)}$$

и проинтегрировав их

$$\int_{p_k}^{p_\Gamma} dp = -\frac{Q\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)} \quad \text{и} \quad \int_{P_k}^{P_\Gamma} dP = -\frac{Q_m\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)}$$

получим формулы для распределения по пласту давления и функции Лейбенсона, соответственно

$$p_k - p_\Gamma = -\frac{Q\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)} \quad \text{и} \quad P_\Gamma - P_k = -\frac{Q_m\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)}. \quad (5.31)$$

Таким образом, и в этом случае можно определить все характеристики течения флюидов, если задана функция $k(x)$.

А. Слоисто-неоднородный пласт.

Пусть круглый горизонтальный пласт толщины h состоит из n пропластков толщиной h_i с проницаемостью k_i и пористостью m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$ (рисунок 5.3). Пласт насыщен жидкостью или газом, и в нем происходит установившийся плоскорадиальный приток к центральной скважине. Контур питания удален от скважины на расстояние R_k и на нем поддерживается постоянное давление p_k , на скважине радиуса r_c поддерживается постоянное давление p_c (при этом $p_k > p_c$).

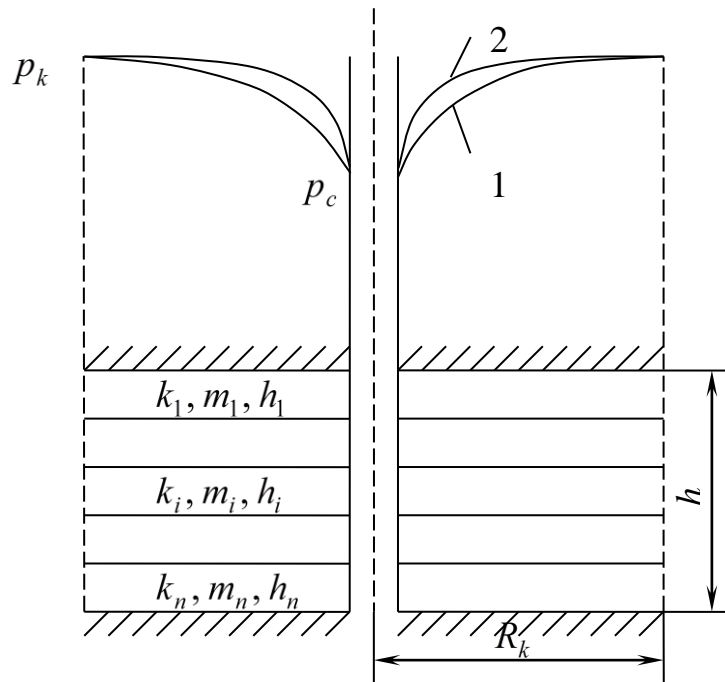


Рисунок 5.3. Кривые распределения давления для жидкости (1) и для газа (2) при плоскорадиальном потоке в слоисто-неоднородном пласте

Тогда, при отсутствии перегородок между пропластками, в каждом из них имеем плоскорадиальный фильтрационный поток, описываемый расчетными формулами (2.20)-(2.22):

$$p(r) = p_k - \frac{p_k - p_\Gamma}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r};$$

$$w_r = -\frac{k dp}{\mu dr} = \frac{k(p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r};$$

$$w_r S = Q = \frac{2\pi k h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}};$$

для давления, скорости фильтрации и дебита при фильтрации несжимаемой жидкости, но с той лишь разницей, что формула для распределения давления

будет одинаковой для всех пропластков, а скорость фильтрации и дебит будут в каждом пропластке свои

$$p(r) = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r};$$

$$w_r^i = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}; \quad (5.32)$$

$$w_r^i S_i = Q^i = \frac{2\pi k_i h_i (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Дебит для всего пласта определяется как сумма дебитов всех пропластков

$$\sum_{i=1}^n w_r^i S_i = \sum_{i=1}^n Q^i = \frac{2\pi (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i. \quad (5.33)$$

Среднее значение проницаемости пласта k_{cp} определяется из условия равенства дебитов в слоисто-неоднородном и однородном пластах

$$\frac{2\pi k_{cp} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{2\pi (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i$$

и равно

$$k_{cp} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n k_i h_i,$$

где $h = \sum_{i=1}^n h_i$ - толщина всего пласта.

Формулы для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте оказываются одинаковыми и при радиальной фильтрации и прямолинейно-параллельной.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из соотношений (5.32) можно получить формулы для расчета параметров фильтрации в слоисто-неоднородном пласте совершенного газа

$$p(r) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}},$$

$$w_r^i \rho = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i \rho_{am} (p_k^2 - p_c^2)}{2\mu \rho_{am} \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}, \quad (5.34)$$

$$w_r^i \rho S_i = Q_m^i = \frac{\pi k_i h_i \rho_{am} (p_k^2 - p_c^2)}{\mu \rho_{am} \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

В. Зонально-неоднородный пласт.

Пусть имеется горизонтальный пласт толщиной h , состоящий из n кольцеобразных зон с различной проницаемостью k_i и пористостью m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), при этом граница каждой зоны имеет форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине. На внешней границе n -ой зоны, являющейся контуром питания пласта R_k ($r_{n+1} = R_k$), поддерживается постоянное давление p_k ($p_n = p_k$), на внутренней границе пласта, т.е. на забое скважины r_c ($r_1 = r_c$), поддерживается постоянное давление p_c ($p_c = p_1$), рисунок 5.4.

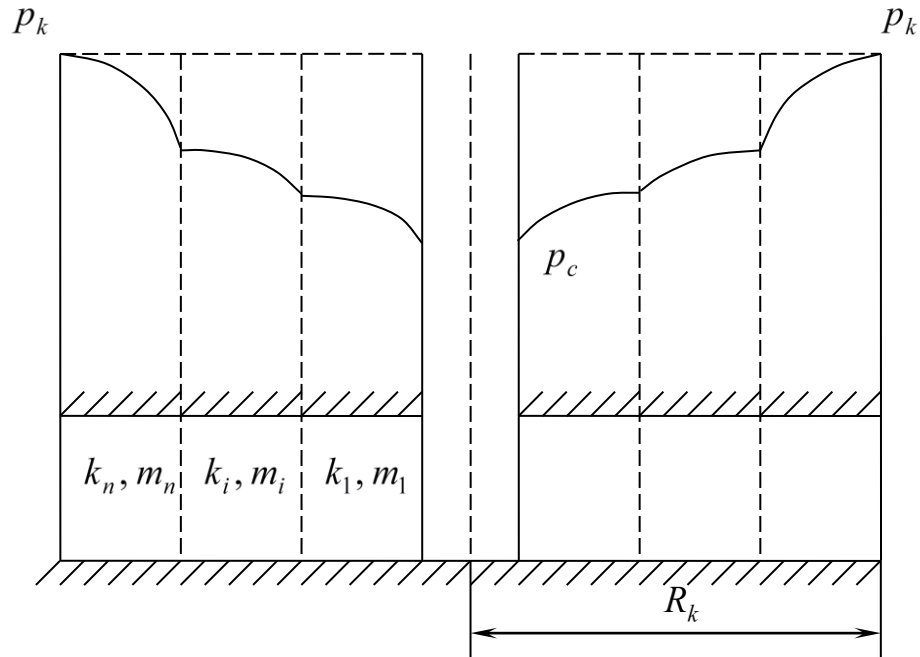


Рисунок 5.4. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте

Из постановки задачи следует, что в пласте происходит одномерное установившееся фильтрационное течение однородного флюида. Поэтому в каждой из зон зонально-неоднородного пласта имеем плоскорадиальный поток с теми же расчетными формулами для давления, скорости фильтрации и дебита, что и случае однородного пласта.

Например, при фильтрации несжимаемой жидкости

$$p_i(r) = p_{i+1} - \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r};$$

$$w_r^i = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i(p_{i+1} - p_i)}{\mu \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \frac{1}{r}; \quad (5.35)$$

$$w_r^i S = Q = \frac{2\pi k_i h (p_{i+1} - p_i)}{\mu \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}.$$

где в качестве давления на контуре питания и скважине принимаются давления в начале и конце зоны, соответственно, и вместо радиусов контура питания и скважины принимаются радиусы начала и конца зоны.

По сравнению со слоисто-неоднородным пластом, в котором формула для распределения давления была одинаковой для всех пропластков, но в каждой пропластке были разные скорости фильтрации и дебит, в данном случае в каждой зоне будет одинаков только дебит, а формула для распределения давления и скорости для каждой зоны будет своя.

В самом деле, сколько втекает в пласт через контур питания, столько и вытекает из пласта через скважину. Такой вывод следует из закона сохранения массы при установившемся течении. Следовательно, объемный дебит в каждой зоне один и тот же, но сечение пласта имеет различную площадь, поэтому скорость фильтрации в каждой зоне будет изменяться и даже внутри зоны она не будет постоянна.

Таким образом, формулы для распределения давления, скорости фильтрации и дебита при зонально-неоднородной плоскорадиальной фильтрации в каждой зоне неоднородного пласта ($0 \leq i \leq n$) имеют вид (5.35).

Определим формулу для дебита. Для этого разрешим формулы для дебита в каждой точке относительно разности давлений

$$p_k - p_n = \frac{Q\mu}{2\pi k_i h} \ln \frac{R_k}{r_n},$$

$$p_n - p_{n-1} = \frac{Q\mu}{2\pi k_{i-1} h} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

...

$$p_1 - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi k_i h} \ln \frac{r_1}{r_c}.$$

Сложив все равенства, получим уравнение

$$p_k - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi h} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i},$$

из которого следует

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}. \quad (5.36)$$

Используя равенство (5.36) выведем формулу для средней проницаемости

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} = \frac{2\pi k_{cp} p(p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Откуда

$$k_{cp} = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}. \quad (5.37)$$

С помощью (5.35) и (5.36) можно определить давления на границах зон. Для нахождения p_2 приравняем формулу (5.35), расписанную для дебита в первой зоне, и (5.19). получим равенство

$$k_2 \frac{p_2 - p_c}{\ln \frac{r_2}{r_c}} = \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}, \quad (5.38)$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон (все остальные величины заданы в постановке задачи).

Аналогично можно определить и остальные значения давления на границах зон неоднородности.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из (5.35) можно получить формулы для расчета фильтрационного течения совершенного газа в зонально-неоднородном пласте:

$$p_i(r) = \sqrt{p_{i+1}^2 - \frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \ln \frac{r_{i+1}}{r}}, \quad r_{i+1} \leq r \leq r_i,$$

$$w_r^i \rho = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i \rho_{am} (p_{i+1}^2 - p_i^2)}{2\mu \rho_{am} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \frac{1}{r}, \quad (5.39)$$

$$w_r^i \rho S_i = Q_m = \frac{\pi k_i h \rho_{am} (p_{i+1}^2 - p_i^2)}{\mu \rho_{am} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}.$$

для нахождения давлений на границах зон можно воспользоваться рассуждениями, аналогичными тем, которые были приведены для несжимаемой жидкости: получить формулу для дебита, выраженную через давления p_k и p_c , далее получить выражения типа (5.38).

Время движения частиц в каждой зоне вычисляется по формулам (2.23) и (2.24) для несжимаемой жидкости и (3.25) для газа, с той лишь разницей, что в качестве контура питания и скважины выступают границы зоны неоднородности.

6 Основные модельные задачи уравнений математической физики

6.1 Гиперболические уравнения в частных производных

1. Уравнение распространения акустических волн малой амплитуды в невязком газе:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

где $u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $u_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ - скорость частицы;

$P = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}$ - давление; ρ_0 - плотность газа в состоянии покоя;

ψ - потенциал; c^2 - некоторая постоянная; t - время.

2. Волновое уравнение

Данное уравнение описывает распространение звуковых волн в однородной среде со скоростью c .

$$c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

3. В теории электромагнитного поля уравнения Максвелла для линейной однородной изотропной среды с электрической проводимостью ε и магнитной проницаемостью μ имеют вид

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (\text{а})$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (\text{б})$$

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0, \quad (\text{в})$$

где E и H - векторы напряженности электрического и магнитных полей в момент времени t .

Вычисляя ротор от правой и левой части (а) и используя (б), имеем

$$\nabla \times \nabla \times H = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

При помощи тождества $\nabla \times \nabla \times H = \nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H$ и (в) можно привести к виду

$$\nabla^2 H - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

6.2 Параболические уравнения в частных производных

1. Уравнение теплопроводности

Оно описывает процесс распространения тепла, или диффузию в однородной изотропной среде

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

где u - температура; t - время; $k = K \rho c$; K - коэффициент теплопроводности; ρ - плотность; c - теплоемкость.

2. Уравнение фильтрации

Оно описывает течение жидкости в пористой среде

$$\left(\frac{kK}{\gamma} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial t},$$

где k - изотропная проницаемость; γ - удельный вес жидкости; K - объемный модуль среды; P - давление в жидкости.

3. Уравнение диффузии в однородной неподвижной среде

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial c}{\partial t},$$

где c - объемная концентрация.

6.3 Эллиптические уравнения в частных производных

1. Двумерное течение несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

где ψ - функция тока; $u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$; u_1, u_2 - скорости частиц жидкости в направлении осей x и y .

2. Двумерное течение сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

где $u_1 = -\rho_0 / \rho \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $u_2 = \rho_0 / \rho \frac{\partial \psi}{\partial x}$; ρ_0 и ρ - произвольная «отсчетная» плотность и текущая плотность.

3. Поле внутри сердечника трансформатора

Ток плотностью J , текущий по спирали, является источником магнитного потенциала p , удовлетворяющего уравнению Пуассона всюду в спирали

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\mu_0 J,$$

где μ_0 - магнитная проницаемость.

4. Трехмерное течение несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

где ψ - потенциал; $u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$; $u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $u_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z}$; u_1, u_2, u_3 - скорости частиц жидкости в направлении x, y, z .

6.4 Нелинейные уравнения

Колебания в гавани произвольной формы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k^2 h u = 0,$$

где u - высота волны относительно уровня спокойной воды, плоскость которого совпадает с координатной плоскостью xu ;

h - глубина;

k - волновое число.

$$u = u_1 + u_R + u_S,$$

где u_1 - поле падающей волны;

u_R - поле волны, отраженной от береговой линии;

u_S - поле рассеянной волны в гавани.

Уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Это уравнение описывает движение нестационарной гармонической волны с волновым числом k .

6.5 Физическая классификация уравнений

Задача называется стационарной, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границе этой области.

Физическая стационарная задача описывает установившийся процесс, а математически сводится к решению задачи с граничными краевыми условиями для уравнения в частных производных.

Пример

Стационарное поле температуры в проводящей среде с постоянным коэффициентом теплопроводности удовлетворяет уравнению Лапласа. Задача сводится к решению уравнения

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

с граничными условиями

$$T(0,y) = 0, \quad T(1,y) = 0,$$

$$T(x,0) = T_0, \quad T(x,1) = 0.$$

Корректно поставленные задачи

Задача для уравнения в частных производных называется корректно поставленной, если она имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных и граничных условий.

Задача Дирихле (1-я краевая задача) – требуется найти решение уравнения Лапласа в замкнутой области D , если на ее границе Γ задано значение искомой функции: $\nabla^2 u = 0$ в D , $u = f(x)$ на Γ .

Задача Неймана (2-я краевая задача) – требуется решить уравнение Лапласа в замкнутой области D , если на ее границе задана производная искомой функции по нормали к Γ , а не сама искомая функция:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ в } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ на } \Gamma.$$

Смешанная краевая задача:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ в области } D,$$

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} + a_2(x, y, z) u(x, y, z) = h(x, y, z) \text{ на границе } \Gamma.$$

7 Формулы Грина. Потенциалы

7.1 Формулы Грина. Интегральное представление решения

Формула Остроградского имеет вид:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (7.1)$$

где $dV = dx dy dz$ – элемент объема;

$\alpha = (n, x)$, $\beta = (n, y)$, $\gamma = (n, z)$ – углы внешней нормали \vec{n} к поверхности S с координатными осями;

P, Q, R – произвольные дифференцируемые функции.

Если P, Q, R – компоненты некоторого вектора $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то формулу Остроградского (7.1) можно записать следующим образом:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \iint_S A_n dS, \quad (7.2)$$

где $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; $A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ – составляющие вектора \vec{A} вдоль внешней нормали.

Перейдем к выводу формул Грина. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ –

функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $V+S$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри V . Обозначим

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

и, используя формулу Остроградского (7.2), получаем первую формулу Грина:

$$\iiint_V \mu \Delta v dV = \iint_S \mu \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV, \quad (7.3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа,

$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ - производная по направлению

внешней нормали.

Так как $\text{grad } u \text{ grad } v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$, то формулу Грина

можно представить в виде

$$\iiint_V \mu \Delta v dV = - \iiint_V \nabla u \nabla v dV + \iint_S \mu \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (7.4)$$

Меняя местами функции u и v , имеем:

$$\iiint_V \mu \Delta u dV = - \iiint_V \nabla v \nabla u dV + \iint_S \mu \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad (7.5)$$

Вычитая из равенства (7.4) равенство (7.5), получаем вторую формулу Грина

$$\iiint_V \mu (u \Delta v - v \Delta u) dV = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (7.6)$$

Плоский случай

Для функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ двух переменных вторая формула

Грина в области S с границей C имеет вид

$$\iint_S (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dC, \quad (7.7)$$

где $dS = dx dy$, dC - элемент дуги вдоль C , $\Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} - \text{производная по направлению внешней к}$$

контур C нормали \vec{n} .

Пусть $u(M)$ - гармоническая функция, непрерывная вместе с первыми производными в области $V+S$ и имеющая вторые производные в V . Рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{R_{MM_0}},$$

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$ при $M \neq M_0$;

M_0 - некоторая внутренняя точка области V .

Данная функция имеет внутри S разрыв непрерывности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим шар K_ε с радиусом ε с центром в точке M_0 и поверхностью S_ε .

Применяя вторую формулу Грина (7.6) к функциям u и $v = \frac{1}{R}$ в области $V - K_\varepsilon$ получаем:

$$\iiint_{V-K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) dV = \iint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS - \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad (7.8)$$

Вычисляя производную по внешней нормали к области $V - K_\varepsilon$ на S_ε получаем,

что $\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{S_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Следовательно,

$$\iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (7.9)$$

где u^* - среднее значение функции $u(M)$ на поверхности S_ε .

Преобразуем третий интеграл

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (7.10)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$ - среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере S_ε .

Подставляя выражения (7.9) и (7.10) в формулу (7.8) и учитывая, что $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$ в $V - K_\varepsilon$, будем иметь:

$$\iiint_{V-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \right) \Delta u dV = \iint_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*. \quad (7.11)$$

Устремим радиус ε к нулю. Тогда получаем:

$$1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0),$$

так как $u(M)$ – непрерывная функция, а u^* - ее среднее значение по сфере с радиусом ε с центром в точке M_0 ;

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0, \text{ так как из непрерывности первых производных}$$

функций $u(M)$ внутри V сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \text{ в окрестности точки } M_0;$$

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{V-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) dV = \iiint_V \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) dV.$$

В результате предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к основной интегральной формуле Грина:

$$4\pi u(M_0) = - \int \int_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS_P - \int \int \int_V \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} dV, \quad (7.12)$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ – точка с координатами ξ, η, ζ лежащая на поверхности S .

Замечание

Если точка M_0 находится вне области V , то $V = 1/R_{MP}$ непрерывна и гармонична во всех точках области V . Поэтому слева в формуле (7.12) получим нуль.

7.2 Функция источника (Грина) для уравнения $\Delta u = 0$ и её основные свойства

Пусть функция u , непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области V , ограниченной достаточно гладкой поверхностью S и имеющей вторые производные внутри V , то имеет место интегральное представление

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] dS_P - \frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} dV_M. \quad (7.13)$$

Если функция $u(M)$ гармоническая, то объёмный интеграл равен нулю. Если же $u(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона, то объёмный интеграл является известной функцией.

Пусть $v(M)$ – некоторая гармоническая функция, непрерывная в $V+S$ вместе с первыми производными, не имеющая нигде особенностей. Вторая формула Грина

$$\int \int \int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

даёт:

$$0 = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS - \iiint_V \Delta u \, dV. \quad (7.14)$$

Складывая (7.14) и (7.13), получаем:

$$u(M_0) = \iint_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \iiint_V \Delta u \cdot G \, dV, \quad (7.15)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \quad (7.15')$$

– функция двух точек: $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$. Точка M_0 фиксирована, и поэтому x, y, z играют роль параметров.

Формула (7.15) содержит $u|_S$ и $\frac{\partial u}{\partial n}|_S$. При решении первой краевой задачи задается лишь $u|_S$, а при решении второй краевой задачи – значение $\frac{\partial u}{\partial n}|_S$.
 Функция v выбирается таким образом, чтобы $G|_S = 0$ для первой краевой задачи $\left(\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0 \right.$ для второй краевой задачи).

Определим функцию $G(M, P)$ при помощи условий:

1. $G(M, P)$ как функция точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ при фиксированной точке $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

во всех точках P области V , кроме точки $P = M$.

2. $G(M, P)$ при совпадении аргументов ($M = P$) обращается в бесконечность и представима в виде (7.15'), где $v = v(M, P)$ – гармоническая всюду в V функция.

3. $G(M, P)$ на границе обращается в нуль:

$$G(M, P) = 0, \text{ если } P \in S.$$

Этому условию можно удовлетворить, потребовав, чтобы

$$v|_S = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Определение

Функцию G , определенную таким образом, будем называть функцией Грина или точечного источника первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$. Функция источника позволяет дать явное представление для решения первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$. Формула (7.15) дает:

$$u(M_0) = -\iint_S u \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\iint_S f \frac{\partial G}{\partial n} dS, (f = u|_S). \quad (7.16)$$

Следует, иметь в виду, что формула (7.16) получена с помощью формулы Грина, предполагающей выполнение определенных условий в отношении функций u и G и поверхности S .

В формулу (7.16) входит выражение $\frac{\partial G}{\partial n}$, существование которого на поверхности S не следует непосредственно из определения функции G .

При получении формулы (7.16) мы исходим из того, что существует гармоническая функция u , принимающая на поверхности S значения f . Тем самым даже для тех областей, для которых существует функция источника, удовлетворяющая условиям применимости формулы Грина, формула (7.16) даёт явное представление лишь тех решений первой краевой задачи, которые удовлетворяют условиям применимости формулы Грина.

Функция G определяется при помощи функции v , являющейся решением первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta v = 0$$

с граничными значениями

$$v|_S = -\frac{1}{4\pi R}$$

Свойства функции источника (Грина)

1. Функция источника всюду положительна внутри V .
2. Функция источника симметрична относительно своих аргументов $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказанная симметрия функции источника является математическим выражением принципа взаимности в физике: источник, помещённый в точку M_0 , производит в точке M такое же действие, какое производит в точке M_0 источник, помещённый в точку M . Принцип взаимности носит, весьма, общий характер и относится к различным физическим полям (электромагнитным, упругим и т.д.).

Функция источника или Грина $G(M, M_0)$ для случая двух измерений, очевидно, будет определяться условиями:

1. $\Delta G = 0$ всюду в рассматриваемой области S , кроме точки $M = M_0$.
2. В точке $M = M_0$ функция G имеет особенность вида

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

3. $G|_C = 0$, где C – граница области S . Функция источника в этом случае имеет вид $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0)$, где v – всюду непрерывная функция, удовлетворяющая на границе условию

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

Решение первой краевой задачи для $\Delta u = 0$ при этом дается формулой

$$u(M_0) = - \int_C f \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (f = u|_C).$$

7.3 Поверхностные потенциалы

Как показывает основная формула Грина (7.12)

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] dS_P,$$

любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами.

Определение

Поверхностный интеграл

$$v(M) = \iint_S \frac{\mu(P)}{R_{MP}} dS_P, \quad (7.17)$$

где $\mu(P)$ – плотность в точке P поверхности S , называется потенциалом простого слоя.

Определение

Поверхностный интеграл

$$w(M) = - \iint_S \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) dS_P \quad (7.18)$$

называется потенциалом двойного слоя.

Потенциалы простого и двойного слоев в случае двух независимых переменных имеют вид

$$v = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} dl, \quad (7.19)$$

$$w = - \int_C v(P) \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) dl, \quad (7.20)$$

где C – некоторая кривая, μ - линейная плотность простого слоя, ν - плотность момента линейного двойного слоя.

Свойства потенциалов:

1. Если точка наблюдения $M(x, y, z)$ находится вне поверхности, то подынтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка в формулах

$$v(M) = \iint_S \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} dS_P, \quad w(M) = - \iint_S \nu(P) \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) dS_P$$

непрерывны по переменным x, y, z . Поэтому в точках, лежащих вне поверхности S , производные поверхностных потенциалов можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Следовательно, поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа.

2. Поверхностные потенциалы в точках поверхности S представляются несобственными интегралами.

3. Если поверхность имеет непрерывную кривизну, то потенциал двойного слоя в точках этой поверхности существует.

4. Потенциал двойного слоя в случае трех независимых переменных также существует в точках поверхности, имеющей конечную кривизну.

Разрыв потенциала двойного слоя

Потенциал двойного слоя в некоторой точке P_0 , лежащей на поверхности S , является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} w_B(P_0) &= w(P_0) + 2\pi\nu(P_0) \\ w_H(P_0) &= w(P_0) - 2\pi\nu(P_0) \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

где $w_B(P_0)$ - предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P_0 с внутренней стороны, а $w_H(P_0)$ - предельное значение с наружной стороны поверхности.

В случае двух независимых переменных соответствующие формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} w_B(P_0) &= w(P_0) + \pi v(P_0) \\ w_H(P_0) &= w(P_0) - \pi v(P_0) \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

7.4 Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач

Сведение краевых задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) при помощи поверхностных потенциалов к интегральным уравнениям дает возможность эффективного численного решения краевых задач для областей сложной формы.

Рассмотрим внутренние краевые задачи для некоторого контура S .

Найти функцию u , гармоническую в области S , ограниченной контуром S , и удовлетворяющую на S граничным условиям

$$u|_C = f \text{ - первая краевая задача,}$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f \text{ - вторая краевая задача.}$$

Будем искать решение внутренней первой краевой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$w(M) = - \int_C \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) dl_P .$$

При любом выборе $v(P)$ функция $w(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри S . Функция $w(M)$ разрывна на контуре S . Для выполнения граничного условия надо, чтобы $w_B(P_0) = f(P_0)$. Принимая во внимание формулы (7.22), получаем уравнение для определения функции $v(P)$

$$\pi v(P_0) + \int_C \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{P_0 P}} \right) v(P) dl_P = f(P_0). \quad (7.23)$$

Если обозначить через l_0 и l дуги контура C , соответствующие точкам P_0 и P , то уравнение (7.23) можно переписать в виде

$$\pi v(l_0) + \int_0^L K(l_0, l) v(l) dl = f(l_0), \quad (7.24)$$

где L – длина контура C ;

$$K(l, l_0) = - \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{P_0 P}} \right) \quad (7.25)$$

- ядро этого интегрального уравнения. Выражение (7.24) называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Замечания

Интегральные уравнения, содержащие интегралы с постоянными пределами, называются уравнениями Фредгольма:

$$\int_a^b K(x, l) \varphi(l) dl = f(x) \text{ – первого рода,}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, l) \varphi(l) dl = f(x) \text{ – второго рода.}$$

Для внешней задачи получается аналогичное уравнение

$$- \pi v(l_0) + \int_0^L K(l_0, l) v(l) dl = f(l_0). \quad (7.26)$$

Для второй задачи получаются уравнения

$$- \pi \mu(l_0) + \int_0^L K_1(l_0, l) \mu(l) dl = f(l_0) \text{ (внутренняя задача),}$$

$$\pi\mu(l_0) + \int_0^L K_1(l_0, l) \mu(l) dl = f(l_0) \text{ (внешняя задача),}$$

где

$$K_1(l_0, l) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \left(\ln \frac{1}{R_{P_0 P}} \right). \quad (7.27)$$

Замечание

Нетрудно видеть, что $K(l_0, l) = K_1(l, l_0)$. Такие ядра называются сопряжёнными, а соответствующие им уравнения называются сопряжёнными интегральными уравнениями.

8 Эллиптические дифференциальные уравнения

8.1 Плоские модели

8.1.1 Основные уравнения

Основная постановка задачи, которую нам необходимо решить заключается в следующем. Задана двумерная однородная область D^* , ограниченная замкнутым контуром L^* . На одной части L_p^* приведены граничные значения потенциала P^* , а на другой значения нормальной компоненты скорости (потока) u^* . Внутри области D^* могут находиться источники и стоки определенной интенсивности ψ в расчете на единицу площади. Требуется найти скорость течения и потенциал во всех внутренних точках области D^* и на ее границе L^* .

В прямоугольной декартовой системе координат $(x_1, x_2$ или $x_i, i=1,2)$ уравнение неразрывности потока является уравнением Лапласа относительно потенциала $P(x)$

$$\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (8.1)$$

Соответствующие компоненты вектора «скорости» течения $v_i(x)$ выражаются в виде

$$v_i(x) = -k \frac{\partial P(x)}{\partial x_i}, \quad (8.2)$$

отвечающим законам Дарси, Ома, Фурье, Фика.

Различают три случая граничных условий:

1. На всей границе L^* задан потенциал

$$P^*(x_0) = q(x_0), \quad x_0 \in L^* \text{ (задача Дирихле)}. \quad (8.3)$$

2. На всей границе задана нормальная компонента скорости

$$u^*(x_0) = h(x_0), \quad x_0 \in L^* \text{ (задача Неймана)}, \quad (8.4)$$

где $u^*(x_0) = v_1(x_0)n_1(x_0) + v_2(x_0)n_2(x_0) = v_i(x_0)n_i(x_0)$,

$n_i(x_0)$ - компоненты единичного вектора нормали в точке x_0 .

3. Смешанная задача – на каждой части границы L^* задаются либо P^* , либо u^* .

8.1.2 Сингулярные решения

Фундаментальные решения уравнения (8.1) представляют собой значения потенциала $P(x)$ в произвольной точке наблюдения x_i , образующихся единичным источником интенсивности $e(\xi)$, помещенным в точку приложения нагрузки (источника) ξ_i .

Классическое сингулярное решение имеет вид

$$P(x) = G(x, \xi)e(\xi), \quad (8.5)$$

где $G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi k} \ln \left| \frac{r}{r_0} \right|$,

$$G(x, \xi) \Big|_{r=r_0} = 0,$$

k - const,

$$r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 = (x - \xi)_i (x - \xi)_i = y_i y_i,$$

$$y_i = (x - \xi)_i.$$

Замечания

1. Координаты ξ_i и x_i совпадают.
2. Функция Грина $G(x, \xi)$ - является «двухточечной» функцией, зависящей от координат двух точек x и ξ .

Дифференцируя (8.5) по x_i получаем

$$v_i(x) = -k \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_i}{r^2} \right) e(\xi), \quad (8.6)$$

где $v_i(x)$ - вектор потока (скорости); k - const (проницаемость).

Пусть $n_i(x)$ - компоненты единичного вектора внешней нормали к линейному элементу, проходящему через точку x_i , то скорость $u(x)$ вдоль \bar{n} равна

$$u(x) = v_i n_i = \left[\frac{y_i n_i}{2\pi r^2} \right] e(\xi) = \frac{(n_1 y_1 + n_2 y_2)}{2\pi r^2} e(\xi), \quad (8.7.a)$$

или

$$u = F(x, \xi) e(\xi),$$

$$\text{где } F(x, \xi) = \frac{(x - \xi)_i n_i(x)}{2\pi r^2} = \frac{y_i n_i(x)}{2\pi r^2}. \quad (8.7.b)$$

Замечания

1. Функция $F(x, \xi)$ является антисимметричной и меняет знак при замене x на ξ .
2. Функция $G(x, \xi)$ симметрична по своим аргументам x и ξ .
3. Выражения (8.5) и (8.7) для P и u соответственно неограниченно возрастают при $x_i \rightarrow \xi_i$ (когда точки наблюдения и приложения нагрузки совпадают). Выражение $G(x, \xi)$, содержащее $\ln r$, является «слабо сингулярным» (с устранимой сингулярностью). Выражение $F(x, \xi)$, содержащее особенность

порядка $1/r$, является «сильно сингулярным» (сингулярностью первого порядка).

8.1.3 Непрямой метод граничных элементов для однородной области

Рассмотрим рисунок 8.1, в котором рассматриваемая конкретная область D с границей L вложена в бесконечную плоскость, имеющей известное фундаментальное решение.

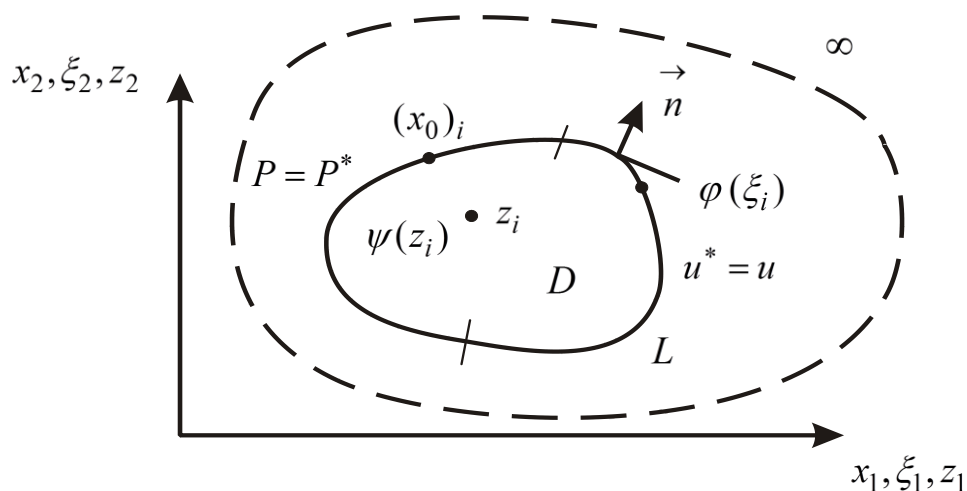


Рисунок 8.1

Пусть $(x_0)_i$ - точки наблюдения на границе L . Потребуем, чтобы граничные значения потенциала P и скорости V на L в точности совпадали с заданными на L^* , т.е.

$$P^*(x_0) \equiv P(x_0) \text{ и } u^*(x_0) \equiv u(x_0).$$

Пусть $\psi(z)$ – источники, распределённые на единицу площади в области D . Три системы координат $0\xi_1\xi_2$, $0x_1x_2$, $0z_1z_2$ совпадают с началом координат. Введём фиктивные источники неизвестной заранее интенсивности $\varphi(\xi)$ в расчёте на единицу длины L , используя координаты ξ_i для точек приложения нагрузки (источников) на границе L .

Реакции системы в некоторой точке наблюдения x_i на оба распределения источников φ и ψ (т.е. значения в ней потенциала P и потока u по любому

направлению) находятся интегрированием единичных решений по L и D соответственно.

Для получения $P(x)$ надо подставить $\varphi(\xi)$ вместо $e(\xi)$ в уравнение (8.5), проинтегрировать по L и добавить результат интегрирования по области D уравнение (8.5), в котором $e(\xi)$ заменена $\psi(z)$.

В итоге получаем

$$P(x) = \int_L G(x, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D G(x, z) \psi(z) dD(z) + C, \quad (8.8)$$

где постоянная C связана со вторым членом $G(x, \xi)$ в (8.5). Значение постоянной C выбирают таким образом, чтобы сумма всех источников на бесконечности равнялась нулю (т.к. логарифмическая функция на бесконечности (8.5) в нуль не обращается). Это будет гарантией единственности нашего решения, что и приводит к условию

$$\int_L \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D \psi(z) dD(z) = 0. \quad (8.9)$$

Выполняя аналогичные операции с $F(x, \xi)$, получаем нормальную составляющую скорости вдоль L в виде

$$u(x) = \int_L F(x, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D F(x, z) \psi(z) dD(z). \quad (8.10)$$

Последний шаг для получения решения задачи состоит в помещении точки x_i на границу L (т.е. $x \rightarrow x_0$).

Тогда уравнения (8.8) и (8.10) принимают вид:

$$P(x_0) = \int_L G(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D G(x_0, z) \psi(z) dD(z) + C, \quad (8.11)$$

$$u(x_0) = \int_L^* F(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D F(x_0, z) \psi(z) dD(z), \quad (8.12)$$

где \int_L^* - несобственный интеграл, обусловленный особенностью в F при $\xi \rightarrow x_0$.

В корректно поставленной задаче одна из функций $P(x_0)$ или $u(x_0)$ должна быть известна в каждой точке границы, поэтому уравнения (8.11) и (8.12) образуют систему двух интегральных уравнений, которая может быть разрешена относительно единственной неизвестной функции $\varphi(\xi)$. По найденным значениям $\varphi(\xi)$ величины $P(x)$ или $u(x)$ в произвольной внутренней точке x_i находятся подстановкой $\varphi(\xi)$ в соотношение (8.8), или (8.10).

Для вычисления компоненты скорости $v_i(x)$ уравнение (8.6) запишем в виде

$$v_i(x) = \left[\frac{y_i}{2\pi r^2} \right] e(\xi) = H_i(x, \xi) e(\xi).$$

Интегрируя по L и D , имеем

$$v_i(x) = \int_L H_i(x, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D H_i(x, z) \psi(z) dD(z), \quad (x \in L). \quad (8.13)$$

По найденным $\varphi(\xi)$ значения $v_i(x)$ будут вычислены в любой точке $x \in D$ путем интегрирования по формуле (8.13).

Замечания

1. Все интегралы в уравнениях (8.11) и (8.12) вычисляются в обычном смысле.

2. Интеграл в (8.12) при $\xi = x_0$ имеет особенность типа $1/r$ и вычисляется в смысле главного значения интеграла по Коши с дополнительным свободным членом.

3. Значение свободного члена будет обсуждаться и выводиться ниже.

Уравнение (8.12) с дополнительным членом будет иметь вид

$$u(x_0) = -\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int_L F(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D F(x_0, z) \psi(z) dD(z). \quad (8.14)$$

Для выполнения интегрирования и получения численного решения задачи, сводящееся к определению $\varphi(\xi)$ из уравнения (8.11) и (8.14), мы должны дискретизировать границу L области, а при наличии внутренних источников ψ и его внутреннюю площадь D .

8.1.4 Дискретизация поверхностных и объемных интегралов

Решение $\varphi(\xi)$ при интегрировании (8.11) (8.14) является точным и не-точности, возникающие в процессе применения МГЭ, обусловлены исключительно процедурами численной дискретизации и интегрирования. Поэтому совершенствование методов аппроксимации теоретически позволяет достигнуть любой степени точности. На практике используют некий компромисс между затратами времени и сил на вычисление точности решения.

Рассмотрим самый простейший из всех алгоритмов.

Граница L моделируемой области D разбивается на конечные элементы. Каждый элемент характеризуется координатами их средних точек ξ . Вдоль каждого произвольного элемента q интенсивности фиктивных источников $\varphi(\xi^q)$ постоянна.

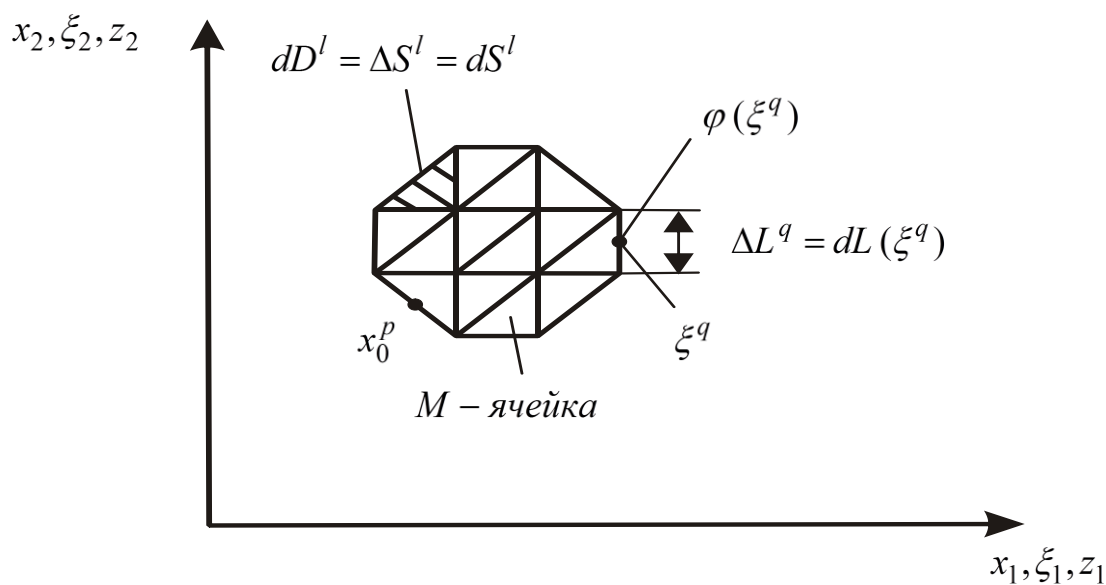


Рисунок 8.2

Внутреннюю область D разбиваем на треугольные (или четырехугольные) ячейки. Будем считать, что источники ψ также распределены равномерно по треугольным (или четырехугольным) ячейкам. Интенсивность источника в ячейке с номером l обозначим через $\Psi(z^l)$.

Рисунок 8.2 - Дискретизация области D : $dD^l = dS^l$ - площадь ячейки; $\Delta L^q = dL(\xi^q)$ - длина участка границы.

После аппроксимации L и D N граничными отрезками и M треугольными (или четырехугольными) внутренними ячейками (рисунок 8.2) мы можем записать дискретные аналоги выражений (8.11) и (8.14) для $P(x_0^p)$ и $u(x^p)$ -

потенциал и нормальной составляющей скорости на p -ом граничном элементе в виде

$$P(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta L} G(x_0^p, \xi^q) dL(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi(z^l) \int_{\Delta S} G(x_0^p, z^l) dS(z^l) + C, \quad (8.15)$$

$$u(x_0^p) = -\frac{1}{2} \varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta L} F(x_0^p, \xi^q) dL(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi(z^l) \int_{\Delta S} F(x_0^p, z^l) dS(z^l), \quad (8.16)$$

$(x_0^p, \xi^q \in L), (z^l \in D),$

где x_0^p - координаты средней точки p -го граничного элемента;

ξ^q - координаты средней точки q -го граничного элемента;

z^l - координаты центра тяжести l -ой ячейки области D ;

ΔL - длина q -го граничного элемента;

ΔS - площадь l -ой внутренней ячейки.

8.1.5 Формирование матриц системы

Представим соотношения (8.15) и (8.16) в матричном виде

$$P^p = \left(\int_{\Delta L} G^{pq} dL \right) \varphi^q + \left(\int_{\Delta S} G^{pl} dS \right) \psi^l + C, \quad (8.17)$$

$$u^p = -\frac{1}{2}\varphi + \left(\int_{\Delta L} F^{pq} dL \right) \varphi^q + \left(\int_{\Delta S} F^{pl} dS \right) \psi^l, \quad (8.18)$$

где φ^q - вектор-столбец размерности N ;

ψ^l - вектор-столбец размерности M ;

$\left(\int \right)$ - вектор-строки соответствующих размерностей.

Каждый элемент этих вектор-строк получается в результате интегрирования.

Например, первый элемент вектор-строки из (8.17) будет

$$G^{p1} = \int_{\Delta L_1} G(x_0^p, \xi^1) dL(\xi^1).$$

Окончательная форма соотношений (8.17) и (8.18) эквивалентна следующей

$$P^p = (G^{pq}) \varphi^q + (G^{pl}) \psi^l + C, \quad (8.19)$$

$$u^p = (F^{pq}) \varphi^q + (F^{pl}) \psi^l, \quad (8.20)$$

где член $\left(-\frac{1}{2} \right) \varphi^p$, входящий в (8.18), включен в F^{pq} (при $p = q$).

Если проделать аналогичные операции для всех граничных элементов ($p = 1, 2, \dots, N$), то полученную в результате полную систему уравнений для p и u можно будет представить в простом виде:

$$P = G^L \varphi + G^S \psi + IC, \quad (8.21)$$

$$u = F^L \varphi + F^S \psi, \quad (8.22)$$

где P , u , φ - N -мерные векторы граничных значений,

ψ - M -мерный вектор интенсивности источников внутри области D ,

G^L , F^L - матрицы размером $N \times N$,

G^S , F^S - матрицы размером $N \times M$;

I - единичный N -мерный вектор-столбец.

Расчет постоянной C . Постоянная C выбирается таким образом, чтобы алгебраическая сумма интенсивностей всех источников φ и ψ внутри области D и на ее границе L была равна нулю. Это позволяет избавиться от логарифмического поведения ядра G при $r \rightarrow \infty$.

Это приводит к следующему выражению

$$\sum_{q=1}^N \int_{\Delta L} \varphi(\xi^q) dL(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \int_{\Delta S} \psi(z^l) dS(z^l) = \sum_{q=1}^N (\varphi^q \Delta L) + \sum_{l=1}^M (\psi^l \Delta S) = 0. \quad (8.23)$$

Ввиду однородности распределений φ и ψ по каждому из граничных элементов и внутренним ячейкам имеем

$$b_n \varphi + b_m \psi = 0, \quad (8.24)$$

где b_n и b_m - вектор-строки размерности соответственно N и M , компонентами которых являются просто длины элементов в b_n и площади ячеек в b_m .

Пусть задана смешанная задачи, когда на одной части границы заданы P^L , а на другой u^L . В этом случае суммарное число компонент P^L и u^L всегда должно быть равно N . Тогда мы должны выбирать из (8.21) и (8.22) только N уравнений, отвечающих заданным граничным условиям, и объединить их с (8.24) в общую систему

$$\begin{Bmatrix} \alpha P^L \\ u^L \\ 0 \end{Bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} I_0 & \alpha G^{LL} \\ 0 & F^{LL} \\ 0 & b_n \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \begin{Bmatrix} \alpha C \\ \varphi \end{Bmatrix}_{N+1} + \begin{bmatrix} \alpha G^{LS} \\ F^{LS} \\ b_m \end{bmatrix}_{(N+1) \times M} \psi_{M+1}, \quad (8.25)$$

где G^{LL}, G^{LS} - блоки соответствуют P^L и выбраны из полных матриц G^L и G^S ;

F^{LL}, F^{LS} - блоки выбраны из полных матриц F^L и F^S , и соответствуют u^L ;

$I_0, 0$ - единичный и нулевой вектор-столбцы с числом компонент, равным соответственно размерности P^L и u^L ;

α - масштабный множитель, необходимый для того, чтобы все элементы матрицы были величинами одного порядка.

8.1.6 Вычисление значений потенциала и скорости во внутренних точках

После отыскания фиктивных источников φ значения $P(x_i)$ и $u(x_i)$ во внутренних точках области D определяют по формулам (8.8) и (8.10).

В соответствии с приведенной дискретизацией уравнения (8.8) и (8.10) для произвольной внутренней точки x_i^p принимают вид

$$P(x_i^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta L} G(x_i^p, \xi^q) dL(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi(z^l) \int_{\Delta S} G(x_i^p, z^l) dS(z^l),$$

$$u(x_i^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta L} F(x_i^p, \xi^q) dL(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi(z^l) \int_{\Delta S} F(x_i^p, z^l) dS(z^l),$$

где x_i^p - внутренняя i -ая точка области D .

8.2 Трехмерные задачи о потенциальных течениях

Дифференциальное уравнение Лапласа или Пуассона в системе координат x_i с осями, направленными вдоль главных осей тензора проводимости, в случае однородной среды принимает вид

$$k_1 \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_3^2} = -\psi, \quad (8.26, a)$$

или в общем случае анизотропного тела

$$k_{ij} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_i \partial x_j} = -\psi. \quad (8.26, б)$$

При отсутствии источников и стоков уравнение (8.26, а) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_3^2} = 0, \quad (8.26, в)$$

где $k_{ij} = k$.

8.2.1 Сингулярное решение и соотношения непрямого метода граничных элементов

Фундаментальное сингулярное решение для потенциала $P(x)$ «эквивалентного изотропного тела с проводимостью k » в точке x_i , обусловленного действием единичного источника интенсивности $e(\xi)$ в точке ξ , можно записать в виде

$$P(x) = G(x, \xi) e(\xi), \quad (8.27)$$

где $G(x, \xi) = \left(\frac{1}{4\pi k} \right) \frac{1}{r}$,

$$r^2 = (x - \xi)_i (x - \xi)_i.$$

Отвечающий потенциалу $P(x)$ вектор потока (скорости) дается выражением

$$v_i(x) = -k \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} e(\xi) = \frac{y_i}{4\pi r^3} e(\xi), \quad (8.28)$$

где $y_i = x_i - \xi_i$.

При этом соответствующая нормальная составляющая скорости на границе равна

$$u(x) = v_i(x) n_i(x) = \left(\frac{y_i n_i}{4\pi r^3} \right) e(\xi),$$

или

$$u(x) = F(x, \xi) e(\xi), \quad (8.29)$$

где $F(x, \xi) = \frac{y_i n_i}{4\pi r^3}$.

Вывод соотношений МГЭ в объемной постановке при помощи этих сингулярных решений осуществляется по аналогии с соотношениями (8.8)–(8.14).

Значение потенциала во внутренней точке области D

$$P(x) = \int_S G(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + \int_D G(x, z) \psi(z) dD(z). \quad (8.30)$$

Нормальная составляющая скорости вдоль S

$$u(x) = \int_S F(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + \int_D F(x, z) \psi(z) dD(z). \quad (8.31)$$

При перемещении точки x_i на границу S (т.е. $x \rightarrow x_0$) получаем граничные интегральные уравнения

$$P(x_0) = \int_S G(x_0, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + \int_D G(x_0, z) \psi(z) dD(z), \quad (8.32)$$

$$u(x_0) = \left(\mp \frac{1}{2} \right) \varphi(x_0) + \int_S F(x_0, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + \int_D F(x_0, z) \psi(z) dD(z), \quad (8.33)$$

где знак « \mp » соответствует для конечной области D , а « $+$ » - для бесконечной.

8.2.2 Дискретизация поверхностных интегралов

Предположим, что граница разбита постоянными граничными элементами (рисунок 8.3).

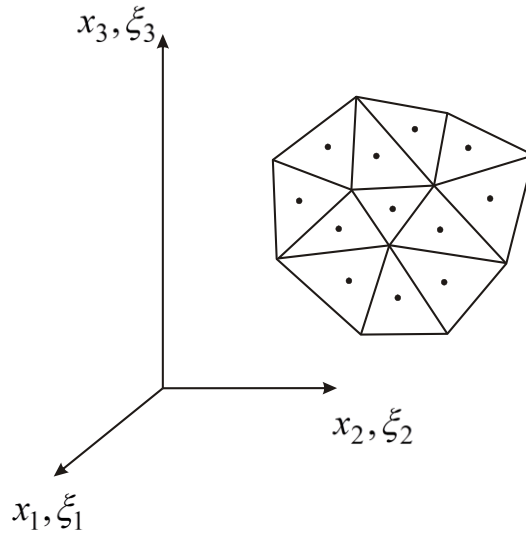


Рисунок 8.3 Трехмерное тело

Предполагаем, что неизвестные фиктивные источники $\varphi(\xi^q)$ относятся к центру элемента и имеют постоянные значения на элементе. Дискретные аналоги выражений (8.32) и (8.33) для $P(x_0^p)$ и $u(x_0^p)$ - потенциала и нормальной составляющей скорости на P -ом граничном элементе представляются в следующем виде

$$P(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} G(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q), \quad (8.34)$$

$$u(x_0^p) = -\frac{1}{2} \varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} F(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q), \quad (8.35)$$

где $(x_0^p)_i$ - координат средней точки P -го граничного элемента;

ΔS^q - площадь q -го граничного элемента.

Вычисление сингулярного интеграла по граничным элементам

1. Вычисление интеграла $\int_{\Delta S} G(x_0, \xi) dS(\xi)$.

В силу симметричности функции G по аргументам x и ξ результаты ин-

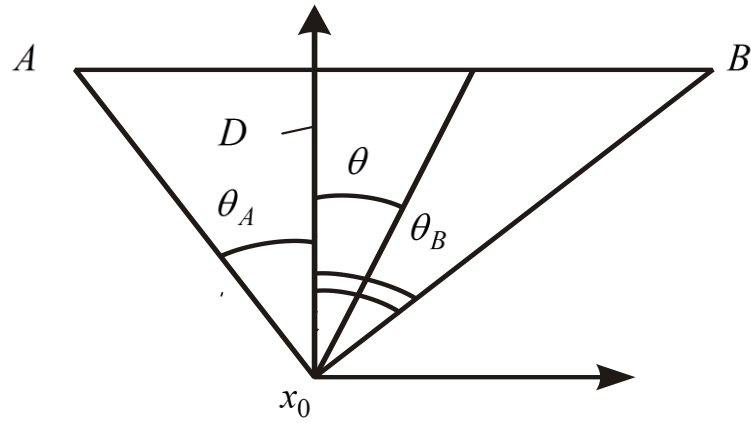


Рисунок 8.4

тегрирования по любому из них будут совпадать, и, следовательно, достаточно рассмотреть лишь один из интегралов.

Вводя локальную полярную систему координат, связанную с q -ом элементом, как показано на рисунке 8.4, мы можем представить интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} G(x_0, \xi) dS &= \frac{1}{4\pi k} \int_{-\theta_A}^{\theta_B} \int_0^{r(\theta)} \frac{1}{r} r dr d\theta = \frac{1}{4\pi k} \int_{-\theta_A}^{\theta_B} r(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi k} \int_{-\theta_A}^{\theta_B} D \sec\theta d\theta = \left(\frac{D}{4\pi k} \right) \left[\ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right\} \right]_{-\theta_A}^{\theta_B}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

8.2.3 Метод граничных элементов в краевых задачах с аппроксимацией ее границ постоянными элементами

1. Первая основная задача Дирихле

Граничное интегральное уравнение

$$\sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} G(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) = P(x_0^p), \quad (x_0^p, \xi^q \in S) \quad (8.37)$$

после дискретизации поверхности постоянными граничными элементами принимает следующий вид

$$c_i \varphi_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \varphi_j \frac{\Delta S_j}{r_{ij}} = P_i, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (8.38)$$

где φ_i - неизвестный фиктивный источник на i -ом граничном элементе;

$$r_{ij} = (r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2)^{1/2};$$

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j; \quad r_{y_{ij}} = y_i - y_j; \quad r_{z_{ij}} = z_i - z_j;$$

(x_i, y_i, z_i) - координата i -го граничного элемента;

(x_j, y_j, z_j) - координата j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

ΔS_j - площадь j -го граничного элемента;

P_i - потенциал, заданный на i -го граничном элементе;

$$c_i = \int_{\Delta S_i} G(x_i, x_i) dS - \text{диагональные элементы.}$$

2. Вторая основная задача Неймана

Граничное интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2} \varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} F(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) \quad (8.39)$$

после дискретизации поверхности постоянными граничными элементами принимает следующий вид

$$-\frac{1}{2} \varphi_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \varphi_j \left(\frac{r_{x_{ij}} n_{x_i} + r_{y_{ij}} n_{y_i} + r_{z_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}^3} \right) \Delta S_j = u_i, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (8.40)$$

где φ_j - неизвестный фиктивный источник на j -ом граничном элементе;

$$r_{ij} = (r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2)^{1/2};$$

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j; \quad r_{y_{ij}} = y_i - y_j; \quad r_{z_{ij}} = z_i - z_j;$$

(x_i, y_i, z_i) - координата i -го граничного элемента;

(x_j, y_j, z_j) - координата j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

ΔS_j - площадь j -го граничного элемента;

$n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i}$ - проекции вектора нормали \bar{n} на i -ом граничном элементе на оси декартовой системы координат OX, OY, OZ соответственно;

u_i - нормальная составляющая скорости потока, заданная на i -ом граничном элементе.

3. Смешанная задача

Граничные интегральные уравнения

$$\sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} G(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) = P(x_0^p), \quad (8.41)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} F(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) = u(x_0^p) \quad (8.42)$$

после дискретизации поверхности постоянными граничными элементами имеют вид

$$c_i \varphi_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \varphi_j \frac{\Delta S_j}{r_{ij}} = P_i, \quad (i = \overline{1, M})$$

$$-\frac{1}{2} \varphi_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \varphi_j \left(\frac{r_{x_{ij}} n_{x_i} + r_{y_{ij}} n_{y_i} + r_{z_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}^3} \right) \Delta S_j = u_i, \quad (i = \overline{M+1, N})$$

где P_i - потенциал, заданный на i -ом граничном элементе, который принадлежит поверхности S_p ;

u_i - нормальная составляющая скорости потока, заданная на i -ом граничном элементе, принадлежащем участку границы S_u ;

S_p - участок поверхности, на котором задан потенциал;

S_u - участок поверхности, на котором задана нормальная составляющая скорости потока.

Для трех приведенных краевых задач значения потенциала и нормальной составляющей скорости потока во внутренних точках моделируемой области определяются по следующим выражениям:

$$P(x^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} G(x^p, \xi^q) dS(\xi^q),$$

$$u(x^p) = \sum_{q=1}^N \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S^q} F(x^p, \xi^q) dS(\xi^q).$$

Потенциал и нормальная составляющая скорости потока после дискретизации поверхности постоянными граничными элементами определяются по следующим выражениям:

$$P_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \frac{\Delta S_j}{r_{ij}}, \quad (i = \overline{1, k})$$

$$u_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \left(\frac{r_{x_{ij}} n_{x_i} + r_{y_{ij}} n_{y_i} + r_{z_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}^3} \right) \Delta S_j,$$

где φ_j - фиктивный источник на j -ом граничном элементе;

P_i - значение потенциала во внутренней i -ой точке области D ;

u_i - значение нормальной составляющей скорости потока во внутренней i -ой точке области D ;

$$r_{ij} = (r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2)^{1/2};$$

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j; \quad r_{y_{ij}} = y_i - y_j; \quad r_{z_{ij}} = z_i - z_j;$$

(x_i, y_i, z_i) - координата i -ой внутренней точки области D ;

(x_j, y_j, z_j) - координата j -го граничного элемента;

k – количество внутренних точек.

9 Параболические дифференциальные уравнения

Основное классическое уравнение теплопередачи (диффузии) можно представить в следующем виде:

- в объемной постановке

$$k_{11} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_1^2} + k_{22} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_2^2} + k_{33} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_3^2} = \frac{\partial H(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - Q(y, \bar{t}) \quad (9.1)$$

- в плоской постановке

$$k_{11} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_1^2} + k_{22} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_2^2} = \frac{\partial H(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - Q(y, \bar{t}) \quad (9.2)$$

или

$$k_{ij} \frac{\partial^2 H(y, \bar{t})}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial H(y, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - Q(y, \bar{t}), \quad (9.3)$$

где, например, для задачи теплопроводности скалярное поле $H(y, \bar{t})$ определяет температуру в произвольной точке y_i в области D^* в момент времени \bar{t} ;

k_{ij} - тензор коэффициентов температуропроводности;

$Q(y, \bar{t})$ - заданная интенсивность, зависящая от времени источников и стоков, распределенных по всей области D^* .

Уравнение (9.3) может быть сведено к эквивалентному изотропному виду (с коэффициентом диффузии k) путем выбора направления осей y_i вдоль главных осей тензора k_{ij} и подходящего геометрического масштабирования задачи.

Пусть

$$P = H / H_0, \quad x_i = y_i / L, \quad t = k\bar{t} / L^2,$$

где H_0 – произвольное значение H ;

L – некоторый характерный размер;

t – безразмерное время;

x_i – безразмерные координаты.

Уравнение (9.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\psi(x,t) \quad (9.4)$$

или

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial t} - \psi.$$

Компоненты вектора скорости v_i в произвольной точке

$$v_i(x,t) = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x_i}. \quad (9.5)$$

Поток, проходящий через некоторую границу, заданную положением своей внешней нормали $n_i(x)$, равен

$$u(x,t) = v_i n_i = -\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) n_i. \quad (9.6)$$

9.1 Плоские модели. Основные уравнения

Постановка задачи, которую нам необходимо решить, заключается в следующем. Задана двумерная однородная область D^* , ограниченная замкнутым контуром L^* . На одной части L_1^* приведены граничные значения потенциала p_i^* , а на другой - L_2^* значения нормальной компоненты скорости потока u_i^* . Кроме того, заданы некоторые начальные значения в области D^* в момент времени $t = 0$, т.е. $p^*(x,0) = p_0$. Требуется определить скорость течения и потенциал во всех внутренних точках области D^* и на ее границе L^* .

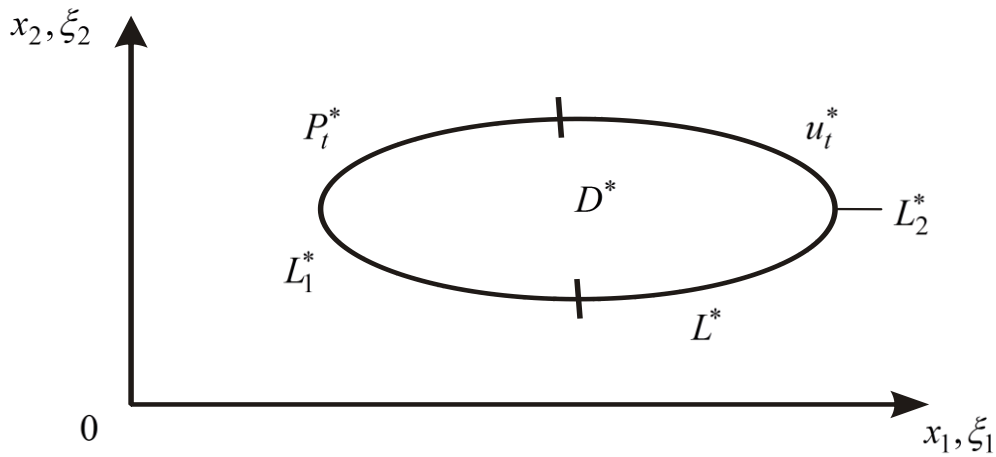


Рисунок 9.1

В произвольной декартовой системе координат (x_1, x_2) уравнение теплопроводности (диффузии) относительно потенциала $p(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \quad (9.7)$$

или

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \quad (i=1, 2).$$

Различают три случая граничных условий для двух групп условий.

1. Граничные условия в начальный момент времени $t=0$ не зависят от времени.

а) На всей границе L^* задан потенциал

$$p^*(x_0, 0) = q(x_0), \quad x_0 \in L^*. \quad (9.8)$$

б) На всей границе задана нормальная компонента скорости

$$u^*(x_0, 0) = h(x_0), \quad x_0 \in L^*. \quad (9.9)$$

где $u^*(x_0, 0) = v_1(x_0, 0) n_1(x_0) + v_2(x_0, 0) n_2(x_0) = v_i(x_0, 0) n_i(x_0)$,

$n_i(x_0)$ - компоненты единичного вектора нормали в точке x_0 ;

$v_i(x_0, 0)$ - компоненты вектора скорости течения.

в) Смешанная задача – на каждой части границы L^* задаются либо $p^*(x_0, 0)$, либо $u^*(x_0, 0)$:

$$p^*(x_0, 0) = q(x_0), \quad x_0 \in L_1^*; \quad (9.10)$$

$$u^*(x_0, 0) = h(x_0), \quad x_0 \in L_2^*.$$

2. Граничные условия в начальный момент времени $t=0$ зависят от времени.

а) На всей границе L^* задан потенциал

$$p^*(x_0, t) = q(x_0, t), \quad x_0 \in L^*. \quad (9.11)$$

б) На всей границе L^* задана нормальная компонента скорости

$$u^*(x_0, t) = h(x_0, t), \quad x_0 \in L^*, \quad (9.12)$$

где $u^*(x_0, t) = v_1(x_0, t) n_1(x_0) + v_2(x_0, t) n_2(x_0) = v_i(x_0, t) n_i(x_0)$.

в) Смешанная задача

$$p^*(x_0, t) = q(x_0, t), \quad x_0 \in L_1^*; \quad (9.13)$$

$$u^*(x_0, t) = h(x_0, t), \quad x_0 \in L_2^*.$$

9.2 Фундаментальное сингулярное решение

Фундаментальное решение описывает реакцию в точке x_i в момент времени t на действие единичного сосредоточенного источника, помещенного в точке ξ_i неограниченной области в момент времени τ . «Мгновенный» единичный точечный источник описывается при помощи импульсной функции Дирака $\delta(x, t; \xi, \tau)$.

Функция Грина $G(x, t; \xi, \tau)$ для неограниченного пространства, в соответствии с (9.4), является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(x, t; \xi, \tau), \quad (9.14)$$

или

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial t} - \delta.$$

Решение уравнения (9.14) известно и имеет вид

$$G(x, t; \xi, \tau) = \exp\left\{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{1}{4\pi(t-\tau)^m}, \quad (9.15)$$

где $r^2 = z_i z_i$, $z_i = x_i - \xi_i$;

$2m$ – число пространственных измерений задачи.

Для плоских задач $i = 1, 2$, $m = 1$.

Направленный поток F , обусловленный G , дается выражением

$$F(x, t; \xi, \tau) = -\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) n_i = \frac{G}{2} \left[\frac{z_i n_i}{t-\tau} \right]. \quad (9.16)$$

9.3 Метод временный шагов

Представим правую часть уравнения (9.7)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

в виде следующей конечно-разностной аппроксимации

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = \frac{p_{\Delta t} - p_0}{\Delta t} \quad (9.17)$$

или

$$\frac{\partial^2 p_{\Delta t}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_{\Delta t}}{\partial x_2^2} - \frac{p_{\Delta t}}{\Delta t} = -\frac{p_0}{\Delta t}. \quad (9.18)$$

Левая часть уравнения (9.18) представляет собой уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \lambda^2 u = 0, \quad (9.19)$$

для которого известно фундаментальное решение

$$u = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\lambda r), \quad (9.20)$$

где $H_0^{(2)}$ - функция Ханкеля второго рода нулевого порядка.

Существует следующая зависимость

$$K_n(-iw) = -\frac{1}{2} i \pi (i)^n H_n^{(2)}(w),$$

где K_n - модифицированные функции Бесселя.

При $n = 0$, $\lambda^2 = -1/\Delta t$, $\lambda = i/\sqrt{\Delta t}$ и $w = \lambda r$ имеем

$$u = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right), \quad (9.21)$$

где K_0 - модифицированные функции Бесселя третьего рода нулевого порядка.

Таким образом, фундаментальное решение однородного уравнения (9.18)

$$\frac{\partial^2 p_{\Delta t}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_{\Delta t}}{\partial x_2^2} - \frac{p_{\Delta t}}{\Delta t} = 0 \quad (9.22)$$

будет иметь следующий вид

$$p_{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right),$$

где $r^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)$.

Граничные интегральные уравнения имеют аналогичный вид, что и для статических задач.

Потенциал и нормальная составляющая скорости вдоль L предстанут в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(x) &= \int_L G_{\Delta t}(x, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D G_{\Delta t}(x, z) \psi(z) dD(z), \\ u_{\Delta t}(x) &= \int_L F_{\Delta t}(x, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D F_{\Delta t}(x, z) \psi(z) dD(z), \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $G_{\Delta t}(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)$;

$$F_{\Delta t}(x, \xi) = -\left(\frac{\partial G_{\Delta t}(x, \xi)}{\partial x_i}\right) n_i;$$

$$\psi(z) = -\frac{p_0}{\Delta t}, \quad p_0 = q(x_0).$$

При стремлении точки x к граничной x_0 , получаем граничные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(x_0) &= \int_L G_{\Delta t}(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D G_{\Delta t}(x_0, z) \psi(z) dD(z), \\ u_{\Delta t}(x_0) &= -\frac{1}{2} \varphi(x_0) + \int_L F_{\Delta t}(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) + \int_D F_{\Delta t}(x_0, z) \psi(z) dD(z). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Например, для определения потенциала (температуры) (9.24), алгоритм метода последовательных приближений можно представить в следующем виде:

- для $t = \Delta t$

$$p_{\Delta t}(x_0) = \int_L G_{\Delta t}(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) - \frac{1}{\Delta t} \int_D G_{\Delta t}(x_0, z) p_0 dD(z),$$

- ...

- для $t = N\Delta t$

$$p_{N\Delta t}(x_0) = \int_L G_{N\Delta t}(x_0, \xi) \varphi(\xi) dL(\xi) - \frac{1}{\Delta t} \int_D G_{N\Delta t}(x_0, z) p_{(N-1)\Delta t}(x_0) dD(z). \quad (4.25)$$

Замечания

1. Дискретизация области осуществляется аналогично статическим задачам.
2. Основное требование по данному методу решения заключается в достаточно мелкой разбивки внутренней области на треугольные или прямоугольные элементы, в центре тяжести которых выбираются значения потенциала p_0 .
3. При решении системы алгебраических уравнений рекомендуется использовать итерационные методы.
4. За начальное приближение используют значение потенциала p_0 во внутренних точках моделируемой области.
5. Недостатком метода является выбор достаточно малых значений интервалов времени Δt , мелкая разбивка внутренней области на конечные элементы и достаточно большое количество итераций.

9.4 Основные интегральные представления метода граничных элементов для методов пошагового изменения времени

Потенциал в произвольной внутренней точке определяются на основе следующего выражения

$$p(x, t) = \int_L \left[\int_0^t G(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\tau \right] dL(\xi) + \int_D \left\{ \int_0^t G(x, t; \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\tau + f(\xi, \tau) G(x, t; \xi, 0) \right\} dD(z). \quad (9.26)$$

Дифференцируя приведенное выше выражение по x , и учитывая, что

$$u(x, t) = v_i n_i = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) n_i,$$

компоненты потока в направлении \vec{n} в точке x имеют вид

$$u(x, t) = \int_L \left[\int_0^t F(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\tau \right] dL(\xi) + \int_D \left\{ \int_0^t F(x, t; \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\tau + f(\xi, \tau) F(x, t; \xi, 0) \right\} dD(z). \quad (9.27)$$

При стремлении $x \rightarrow x_0 \in L$ изнутри области D получаем граничные интегральные уравнения:

$$p(x_0, t) = \int_L \left[\int_0^t G(x_0, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\tau \right] dL(\xi) + \int_D \left\{ \int_0^t G(x_0, t; \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\tau + f(\xi, \tau) G(x_0, t; \xi, 0) \right\} dD(z), \quad (9.28)$$

$$u(x_0, t) = -\frac{1}{2} \varphi(x_0, t) + \int_L \left[\int_0^t F(x_0, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\tau \right] dL(\xi) + \int_D \left\{ \int_0^t F(x_0, t; \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\tau + f(\xi, \tau) F(x_0, t; \xi, 0) \right\} dD(z). \quad (9.29)$$

Здесь $p(x, 0) = f(x)$ - заданные внутри области начальные значения потенциала. Для переменных значений потенциала от времени внутри области D служит обозначение - $f(\xi, \tau)$.

Будем считать, что:

- значения p и u будут постоянными на любом временном шаге $\Delta\tau$;
- величины $Q(x, \tau)$ являются средними значениями на каждом шаге.

Интегральные уравнения в дискретном виде тогда можно представить так.

Для p -го граничного элемента:

$$\begin{aligned}
p(x^p, t) &= \sum_{q=1}^N A^{pq} \varphi^q + \sum_{l=1}^M (C^{pl} Q^l + D^{pl} f^l), \\
u(x^p, t) &= \sum_{q=1}^N B^{pq} \varphi^q + \sum_{l=1}^M (E^{pl} Q^l + F^{pl} f^l) - \frac{1}{2} \varphi(x^p, t),
\end{aligned} \tag{9.30}$$

где $A^{pq} = \int_0^{\Delta\tau} d\tau \int_{\Delta L_q} G(x^p, t; \xi^q, \tau) dL_q$;

$$B^{pq} = \int_0^{\Delta\tau} d\tau \int_{\Delta L_q} F(x^p, t; \xi^q, \tau) dL_q;$$

$$C^{pl} = \int_0^{\Delta\tau} d\tau \int_{\Delta S_l} G(x^p, t; \xi^l, \tau) dS_l;$$

$$E^{pl} = \int_0^{\Delta\tau} d\tau \int_{\Delta S_l} F(x^p, t; \xi^l, \tau) dS_l;$$

$$D^{pl} = \int_{\Delta S_l} G(x^p, t; \xi^l, 0) dS_l;$$

$$F^{pl} = \int_{\Delta S_l} F(x^p, t; \xi^l, 0) dS_l.$$

10 Установившиеся колебания

Класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и т.д.) приводят к так называемому волновому уравнению

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad (k^2 = c > 0). \tag{10.1}$$

Из курса математической физики известно, что всякое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\Delta v + cv = 0. \tag{10.2}$$

Свойства решения уравнения (10.2) существенно зависят от знака коэффициента c .

Единственность решения первой краевой задачи для уравнения (10.2).

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta v + cv = 0$ ($c \leq 0$), определенное и непрерывное в замкнутой области $V+S$, принимающее на границе S заданное значение $v|_S = f$.

Если $c = 0$, то мы получаем первую краевую задачу для уравнения Лапласа, единственность решения которой была доказана.

Если $c > 0$, то единственность может не иметь места. Вопрос о множественности или единственности решения первой краевой задачи эквивалентен вопросу о том, совпадает ли c с одним из собственных значений λ_n рассматриваемой области V :

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_S = 0.$$

10.1 Функции влияния точечных источников

Для построения функции влияния точечного источника рассмотрим решение v_0 , зависящее только от r . Оператор Лапласа для функции $v_0(r)$ в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv_0}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2} + cw = 0, \quad (w = v_0 r).$$

Вводя обозначение $c = k^2$ для $c > 0$ и $c = -\kappa^2$ для $c < 0$, получаем:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + k^2 w = 0, \quad (c > 0), \tag{10.3}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \kappa^2 w = 0, \quad (c < 0). \tag{10.3'}$$

Из уравнения (10.3) находим:

$$w = c_1 e^{ikr} + c_2 e^{-ikr} \quad (10.4)$$

и, соответственно,

$$v_0 = c_1 \frac{e^{ikr}}{r} + c_2 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (10.5)$$

В случае вещественного k получаем два линейно-независимых решения e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r , которым соответствуют вещественные линейно-независимые решения

$$\frac{\cos kr}{r} \text{ и } \frac{\sin kr}{r}.$$

При $c < 0$ ($c = -\kappa^2$), пользуясь уравнением (5.3'), получаем два действительных линейно-независимых решения

$$\frac{e^{-\kappa r}}{r} \text{ и } \frac{e^{\kappa r}}{r} \quad (k > 0) \quad (10.6)$$

Функции

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r}, (c > 0) \text{ и } \frac{e^{\pm \kappa r}}{r}, (c < 0)$$

при $r = 0$ терпят разрыв непрерывности, обращаясь в бесконечность как $1/r$. Такой же характер особенности имела функция источника для уравнения Лапласа ($c = 0$), пропорциональная $1/r$.

Рассмотрим поведение этих функций на бесконечности.

Случай $c < 0$ соответствует процессу, сопровождающемуся поглощением. Одно из решений $e^{-\kappa r}/r$ экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, что в терминах задачи диффузии означает убывание концентрации, называемое поглощением. Это убывание происходит тем сильнее, чем больше коэффициент $|c| = \kappa^2$, характеризующий интенсивность поглощения. Второе

решение экспоненциально возрастает на бесконечности и физического смысла для задачи в неограниченной области не имеет.

Случай $c = k^2 > 0$ соответствует установившимся волновым процессам. Функция v представляет амплитуду функции

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

удовлетворяющей уравнению колебаний.

Одно из главных решений уравнения (10.3)

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r},$$

который имеет характер сферической волны, расходящейся от источника в точке $r = 0$.

Второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r},$$

имеющему характер сферической волны, приходящей из бесконечности в точку $r = 0$ (сходящиеся волны).

Замечания

1. Это решение при изучении процессов, возбуждаемых точечным источником в неограниченном пространстве, прямого физического смысла не имеет.

2. Функцию $v(M)$ можно рассматривать как амплитуду колебаний типа $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$.

Во втором случае расходящаяся волна имеет вид

$$u_0(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r},$$

т.е. ей соответствует второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Первое же решение

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

при этом физического смысла не имеет.

10.2 Интегральное представление решения волнового уравнения

Для уравнения (5.2): $\Delta v + cv = 0$ при $c \neq 0$ можно написать формулы, аналогичные формулам Грина, которые были установлены для уравнения Лапласа.

Вводя обозначение $L(u) = \Delta u + cu$, сразу же получаем формулу

$$\int_V (L(v) - vL(u)) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \quad (10.8)$$

являющуюся аналогом и прямым следствием второй формулы Грина (см. подраздел 7.1). Подставляя сюда вместо v одну из «функций точечного источника», например e^{-kr}/r , и повторяя дословно все рассуждения подраздела 7.1, приходим к аналогу основной формулы Грина

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-kr}}{r} \right) - \frac{e^{-kr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_V f(M) \frac{e^{-kr}}{r} dV, \quad (r = r_{MM_0}), \quad (10.9)$$

где $u(M)$ - решение неоднородного уравнения $L(u) = -f(M)$.

Для случая $c = k^2$ имеет место аналогичная формула

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_V f(M) \frac{e^{-ikr}}{r} dV \quad (10.9')$$

Введем понятие функции источника уравнения $L(u) = 0$ для заданной области V с границей S . Пусть $v(M)$ - решение уравнения $L(v) = 0$, регулярное всюду в V . Формула (10.8) дает

$$0 = - \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_V f v dV. \quad (10.10)$$

Складывая (10.10) с равенством (10.9), получим:

$$u(M_0) = - \int_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} + v \right) - \left(\frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} + v \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \int_V \left(\frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} + v \right) f(M) dV, \quad (10.11)$$

$(r = r_{MM_0})$

Эта формула справедлива для произвольного решения $v(M)$ уравнения $\Delta v - \kappa^2 v = 0$, регулярного в области V . Ввиду произвола функции v , получаем:

$$u(M_0) = - \int_S u(M) \frac{\partial G(M_0, M)}{\partial n} dS + \int_V G(M_0, M) f(M) dV, \quad (10.12)$$

$$\text{где } G(M_0, M) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} + v \quad (10.13)$$

- функция источника Грина, обладающая следующими свойствами:

- 1) $G(M, M_0)$ обращается в бесконечность при $M = M_0$ как $1/4\pi r$, что следует из формулы (10.13);
- 2) $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ всюду в V , кроме точки M_0 ;
- 3) $G(P, M_0) = 0$ в точках P , лежащих на границе S .

Вопрос о существовании функции источника связан с вопросом о существовании функции v , удовлетворяющей уравнению $L(v) = 0$ в V и граничному условию

$$u = -\frac{e^{-kr}}{4\pi r} \text{ на } S.$$

Функция $G(M, M_0)$ однозначно определена для любой области, допускающей единственное решение первой краевой задачи. В частности, при $c = -k^2 < 0$ эта функция определена для любой области.

Для функции источника $G(M, M_0)$, определенной для произвольной области T , имеет место принцип взаимности, выражаемый равенством

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

В случае двух независимых переменных уравнение для функции $v_0(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_0}{dr} \right) + k^2 v_0 = 0$$

или

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = 0,$$

т.е. является уравнением Бесселя нулевого порядка, общее решение которого может быть записано следующим образом:

$$v_0(r) = c_1 H_0^{(1)}(kr) + c_2 H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ - функция Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода.

Функции $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ при $r=0$ имеют логарифмическую особенность:

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{-2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \dots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \dots, \quad (\rho = kr),$$

где точками обозначены слагаемые, остающиеся конечными при $\rho = 0$. На бесконечности (при $\rho \rightarrow \infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $1/\rho$.

Таким образом, уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ имеет вид фундаментальных решений

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

имеющих логарифмическую особенность и соответствующих функциям e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r для пространства.

Замечание

1. Выбор фундаментальной функции зависит от вида условий излучения на бесконечности. Если временная зависимость берется в виде $e^{i\omega t}$, то функция $H_0^{(2)}(kr)$ (или e^{-ikr}/r) определяет расходящуюся цилиндрическую волну. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ расходящуюся волну определяет функция $H_0^{(1)}(kr)$ (или e^{ikr}/r).

2. Если $c = -\kappa^2 < 0$, то линейно-независимыми решениями уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} - \kappa^2 v_0 = 0$$

являются цилиндрические функции мнимого аргумента $I_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$.

Функция $I_0(\kappa r)$ ограничена при $r = 0$ и экспоненциально возрастает при $r \rightarrow \infty$. Функция $K_0(\kappa r)$ имеет в точке $r = 0$ логарифмическую особенность

$$K_0(\rho) = \ln \frac{1}{\rho} + \dots$$

и является искомым фундаментальным решением. На бесконечности она убывает по закону

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\rho} + \dots$$

10.3 Потенциалы

Определение. Объемным потенциалом для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ называется интеграл

$$v(M) = \int_V \rho(P) \frac{e^{-\kappa r}}{r} dV(P), \quad (10.13)$$

где $r = r_{MP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$;

$$dV(p) = d\xi d\eta d\zeta;$$

$\rho(p)$ - плотность потенциала.

Основные свойства объемного потенциала

1. Вне области V функция $v(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta v - \kappa^2 v = 0.$$

2. Внутри области V интеграл (10.13) сходится, и сходятся интегралы, полученные при помощи формального дифференцирования $v(M)$ под знаком интеграла

$$\int_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right] d\xi d\eta d\zeta \text{ и т.д.}$$

3. Функция $v(x, y, z)$ – дифференцируема, и ее первые производные можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right] d\xi d\eta d\zeta \text{ и т.д.}$$

Из этого свойства следует дифференцируемость v и в точках поверхности S , ограничивающих область V , где имеет место разрыв плотности $\rho(M)$.

4. Во внутренних точках области V , в окрестности которых плотность ρ дифференцируема, вторые производные объемного потенциала v существуют, и потенциал v удовлетворяет уравнению

$$\Delta v - \kappa^2 v = -4\pi\rho(M).$$

5. Первые производные объемного потенциала представляются равномерно сходящимися интегралами в предположении равномерной ограниченности ρ . Поэтому первые производные являются непрерывными функциями во всем пространстве, включая точки поверхности S .

Объемные потенциалы позволяют представить решение краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\Delta u - \kappa^2 u = -f$$

в виде суммы

$$u(M) = v(M) + u_1(M),$$

где $v(M)$ – объемный потенциал с плотностью $\rho = \frac{f}{4\pi}$;

$u_1(M)$ – решение краевой задачи для однородного уравнения

$$\Delta u_1 - \kappa^2 u_1 = 0.$$

Определение

Потенциалом двойного слоя называется интеграл

$$w(M) = \int_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left[\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right] dS_P,$$

где $r = r_{MP}$;

$\mu(P)$ - поверхностная плотность потенциала w .

Основные свойства потенциала двойного слоя

1. Вне поверхности S потенциал двойного слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta w - \kappa^2 w = 0.$$

2. Потенциал двойного слоя сходится в точках границы, если S принадлежит к классу поверхностей Ляпунова.

3. Функция w разрывна в точках поверхности S и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} w_B(M_0) &= w(M_0) + 2\pi\mu(M_0), \\ w_H(M_0) &= w(M_0) - 2\pi\mu(M_0), \end{aligned}$$

где $w_B(M_0)$ - предельное значение функции $w(M)$ при стремлении M к M_0 изнутри области V ;

$w_H(M_0)$ - предельное значение $w(M)$ при стремлении M к M_0 снаружи области V .

Определение

Потенциалом простого слоя называется интеграл

$$v(M) = \int_S \rho(P) \frac{e^{-\kappa r}}{r} dS_P,$$

где $r = r_{MP}$;

$\rho(P)$ - плотность.

Основные свойства потенциала простого слоя

1. Вне поверхности S потенциал простого слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta v - \kappa^2 v = 0.$$

2. Интеграл равномерно сходится на S и определяет функцию $v(M)$, непрерывную во всем пространстве.

3. Нормальные производные потенциала простого слоя для поверхностей класса Ляпунова удовлетворяют соотношениям

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_B = U_0 + 2\pi \rho(M_0),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_H = U_0 - 2\pi \rho(M_0),$$

где $\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_B$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_H$ - предельные значения для нормальной производной

изнутри и извне S в точке M_0 на поверхности S соответственно;

n - внешняя нормаль;

$$U_0(M_0) = \int_S \rho(P) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right] dS_P;$$

$$r = r_{M_0 P}.$$

10.4 Задачи для бесконечной области

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta v - \kappa^2 v = -f \tag{10.14}$$

Решение уравнения (10.14) можно представить в виде объемных потенциалов

$$v_1(M) = \int_V f(P) \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} dS_P ; \quad (10.15)$$

$$v_2(M) = \int_V f(P) \frac{e^{\kappa r}}{4\pi r} dS_P ; \quad (10.16)$$

где $r = r_{MP}$.

Теорема единственности

Уравнение $\Delta v - \kappa^2 v = -f$ не может иметь более одного решения, обращаемого в нуль на бесконечности.

Потенциал (10.15) удовлетворяет условию обращения функции $v_1(M)$ в нуль на бесконечности, а (10.16) нет.

2. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta v + k^2 v = -f . \quad (10.17)$$

Функции

$$v_1(M) = \int_V f(P) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} dS_P , \quad (10.18)$$

$$v_2(M) = \int_V f(P) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} dS_P , \quad (10.19)$$

где $r = r_{MP}$, являются решениями уравнения (10.17).

Однако обе функции убывают на бесконечности.

Отсюда вытекает необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решение уравнения (10.17).

Теорема единственности

Существует единственное решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -f(M), \quad (10.20)$$

где $f(M)$ – локальная функция, удовлетворяющая на бесконечности условиям

$$\left. \begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Условия (10.21) называют условиями излучения или условиями Зоммерфельда.

а) Покажем, что объемный потенциал

$$v(M) = \int_V f(P) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} dS_P, \quad (r = r_{MP})$$

удовлетворяет условию (10.21.1).

Действительно

$$L(v) = \int_V f(P) L\left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right) dS_P = \int_V f(P) o\left(\frac{1}{r}\right) dS_P = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $L(u) = \Delta u + k^2 u$.

б) Пусть S_r – сфера радиуса r , который мы в дальнейшем устремим в бесконечность.

Рассмотрим основную формулу Грина для функции $w(M)$

$$w(M_0) = \iint_{S_r} \left(v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) dS,$$

где точка M_0 лежит внутри S , $v_0(M) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$.

Условие (10.21.1) для $v_0(r)$ и $w(M)$ дает

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} &= v_0 \left[-ikw + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] - w \left[-ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] = \\ &= v_0 \cdot o\left(\frac{1}{r}\right) - w \cdot o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, $w(M_0) = \int_{S_r} o\left(\frac{1}{r^2}\right) dS \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

В силу произвольности точки M_0 следует единственность решения нашей задачи.

Для задач на плоскости, связанных с уравнением

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0, \quad (10.22)$$

условия излучения на бесконечности принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Простейшими решениями этого уравнения являются функции Ханкеля нулевого порядка $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$.

Из асимптотических формул

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right],$$

$$H_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right]$$

и рекуррентных соотношений

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx} = -H_1^{(1)}(x), \quad \frac{dH_0^{(2)}}{dx} = -H_1^{(2)}(x)$$

видно, что условию излучения (10.23) удовлетворяет лишь функция $H_0^{(2)}(kr)$.

Таким образом, функция $H_0^{(2)}(kr)$ удовлетворяет уравнению (10.22), условиям излучения (10.23) и имеет логарифмическую особенность при $r = 0$.

Поэтому функция $H_0^{(2)}(kr)$ есть функция точечного источника для волнового уравнения в случае двух независимых переменных.

Решение неоднородного уравнения $\Delta_2 v + k^2 v = -f$ выражается формулой

$$v(M) = -\frac{i}{4} \iint_S H_0^{(2)}(kr_{MP}) f(P) dS_P,$$

где S – область, в которой функция f отлична от нуля.

11 Метод граничных интегральных уравнений, основанный на преобразовании Лапласа

11.1 Предварительные замечания

Определение

Функцией – оригиналом будем называть любую функцию $f : R \rightarrow C$, определенную на всей числовой прямой R и удовлетворяющую следующим условиям:

1) f – непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными n -го порядка на всей числовой прямой;

2) $\forall t < 0 \quad f(t) = 0$;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $a > 0$, что $\forall t > 0$ справедлива оценка

$$|f(t)| \leq M e^{at}.$$

Показателем роста функции f называется число $\alpha = \inf\{a\}$. Для ограниченных функций считаем, что $\alpha = 0$.

Простейшей функцией – оригиналом является функция Хевисайда η , где

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 1, & \text{если } t \geq 0 \end{cases}.$$

Если функция φ удовлетворяет условиям 1 и 3 и не удовлетворяет условию 2, то произведение

$$f(t) = \eta(t)\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ \varphi(t), & \text{если } t \geq 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию 2, т.е. будет оригиналом.

В дальнейшем множитель η будем опускать в записи функции, считая их равными нулю при $t < 0$.

Определение

Изображением функции f по Лапласу называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Связь между f и F обозначается: $f \stackrel{\cdot}{=} F$. Смысл этого обозначения состоит в том, что оригиналу f сопоставлено изображение F , а изображение F имеет своим оригиналом f .

Если функция f – оригинал с показателем роста α , то функция F существует в полуплоскости

$$P = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p > \alpha\}$$

и является в ней аналитической функцией.

Свойства преобразования Лапласа

1. Свойство однородности

Если $f \stackrel{\cdot}{=} F$ и $a \in \mathbf{C}$, то $af \stackrel{\cdot}{=} aF$

2. Свойство линейности

Если $f_j = F_j$, $\operatorname{Re} p > \alpha_j$ ($j = \overline{1, n}$), то

$$\sum_{j=1}^n \mu_j f_j = \sum_{j=1}^n \mu_j F_j, \operatorname{Re} p > \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j,$$

где μ_j - заданные постоянные числа, действительные или комплексные;

α_j - показатель роста функций f_j .

3. Свойство подобия

Пусть $f = F$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда $\forall \beta > 0$

$$f(\beta t) = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right).$$

4. Свойство запаздывания

Если $f = F$ и $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau) = e^{-p\tau} F \left[\cdot \right].$$

5. Свойство опережения

Если $f = F$ и $\tau > 0$, то

$$f(t + \tau) = e^{p\tau} \left(F \left[\cdot \right] + \int_0^{\tau} e^{-p(t-\tau)} f(t) dt \right).$$

Следствие

Если f - T -периодическая функция, то

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

6. Свойство смещения

Если $f = F$, $p_0 \in \mathbf{C}$, то

$$e^{p_0 t} f(t) = F \left[\cdot - p_0 \right].$$

7. Свойство о дифференцировании оригинала

Если $f \equiv F$ и функции $f^{(k)}$ ($k = \overline{1, n}$) являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\equiv pF - f(0); \\ f''(t) &\equiv p^2F - pf(0) - f'(0); \\ &\dots \end{aligned}$$

Пример

Стержень длины l находится в состоянии покоя и его конец $x=0$ закреплен, а к свободному концу $x=l$ приложена сила $A \sin \omega t$, направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня.

Уравнение колебания стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11.1)$$

где $u = u(x, t)$ - продольное смещение;

a^2 - постоянный коэффициент, зависящий от материала стержня.

Начальные и граничные условия следующие:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \quad (11.2)$$

где E - модуль упругости.

Дифференциальной задаче соответствует операторная задача

$$p^2 U = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad (11.3)$$

$$U|_{x=0}, \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (11.4)$$

Общее решение уравнения (11.3) записывается в виде

$$U(x, p) = c_1 ch \frac{p}{a} x + c_2 sh \frac{p}{a} x.$$

Из условия (11.4) находим:

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2)ch \frac{p}{a} l},$$

где $b = \frac{Aa\omega}{E}$.

Получаем решение операторного уравнения в виде

$$U(x, p) = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2)} - \frac{sh \frac{x}{a} p}{ch \frac{l}{a} p} = \frac{X(x, p)}{Y(x, p)}. \quad (11.5)$$

Для нахождения оригинала $u(x, t)$ воспользуемся второй теоремой разложения. Функция U имеет один действительный полюс $p = 0$ и бесконечное множество попарно сопряженных чисто мнимых полюсов. Полюсы, лежащие в верхней полуплоскости

$$p = i\omega, p_k = i \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2} \right) = i\omega_k, (k \in N)$$

все первого порядка и различны, если $\omega_k \neq \omega \quad \forall k \in N$ (условие отсутствия резонанса). По второй теореме разложения находим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2\operatorname{Re} \left(\frac{X(x, i\omega)}{Y_p'(x, i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X(x, p_k)}{Y_p'(x, p_k)} e^{i\omega_k t} \right) = \\ &= \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \end{aligned}$$

11.2 Решение интегральных уравнений при помощи преобразования Лапласа

Рассмотрим волновое уравнения

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_3^2} \right) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (11.6)$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = u_0(x) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dot{u}_0(x) = \psi(x). \quad (11.7)$$

Граничные условия:

$$u(x,t)|_S = \bar{u}(x,t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_S = \bar{\bar{u}}(x,t). \quad (11.8)$$

Изображение имеет вид

$$U(p,x) = \int_0^{+\infty} u(x,t) e^{-pt} dt. \quad (11.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_1^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_2^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_3^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= p^2 U(p,x) - u(x,0)p - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(p,x) - u_0(x)p - \dot{u}_0(x). \end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в волновое уравнение (11.6) имеем

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(p,x)}{\partial x_3^2} \right) &= p^2 U(p,x) - u_0(x)p - \dot{u}_0(x), \\ \Delta U(p,x) - \frac{p^2}{c^2} U(p,x) &= (-u_0(x)p - \dot{u}_0(x))/c^2. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Ограничимся условием, что

$$u_0(x) = 0, \dot{u}_0(x) = 0.$$

Тогда

$$\Delta U(p, x) - \aleph^2 U(p, x) = 0 \quad (11.11)$$

и

$$\Delta U(p, x)|_S = \bar{U}(p, x)$$

или

$$\left. \frac{dU(p, x)}{dn} \right|_S = \bar{\bar{U}}(p, x)$$

где $\aleph^2 = p^2 / c^2$,

$$\bar{U}(p, x) = \int_0^{+\infty} \bar{u}(x, t) e^{-pt} dt,$$

$$\bar{\bar{U}}(p, x) = \int_0^{+\infty} \bar{\bar{u}}(x, t) e^{-pt} dt.$$

Фундаментальные решения уравнения (11) имеют вид

$$G(x, \xi, p) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} e^{-\aleph r \frac{1}{r}} & \text{— для трехмерных задач;} \\ \frac{1}{2\pi} K_0(\aleph r) & \text{— для двумерных задач,} \end{cases} \quad (11.12)$$

где $K_0(\aleph r)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Проверка для двух независимых переменных.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \lambda^2 u = 0,$$

где $u = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\lambda r)$ - его решение и $H_0^{(2)}(\lambda r)$ - функция Ханкеля второго

рода нулевого порядка от аргумента λr ,

$$K_n(-i\omega) = -\frac{1}{2}i\pi(i)^n H_n^{(2)}(\omega).$$

Пусть $n=0$, $\lambda^2 = -\aleph^2$, $\lambda = i\aleph$, $\omega = \lambda r = i\aleph r$.

Тогда

$$K_0(-i \cdot i\aleph r) = -\frac{1}{2}i\pi H_0^{(2)}(i\aleph r),$$

$$K_0(\aleph r) = -\frac{1}{2}i\pi H_0^{(2)}(i\aleph r),$$

$$H_0^{(2)}(i\aleph r) = -\frac{2}{i\pi} K_0(\aleph r).$$

Следовательно

$$u = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(i\aleph r) = \frac{1}{4i} (-1) \frac{2}{i\pi} K_0(\aleph r) = \frac{1}{2\pi} K_0(\aleph r).$$

Нормальная производная относительно фундаментального решения

$$F(x, \xi; p) = \frac{\partial G(x, \xi; p)}{\partial n}. \quad (6.13)$$

Значение функции $U(p, x)$ во внутренних точках области D

$$U(p, x) = \int_S G(x, \xi; p) \varphi(\xi, p) ds(\xi), \quad (\xi \in S; x \in D). \quad (11.14)$$

Устремляя точку x к границе S ($x \rightarrow x_0 \in S$) получаем граничные интегральные уравнения:

- задача Дирихле (первая основная задача)

$$\bar{U}(p, x_0) = \int_S G(x_0, \xi; p) \varphi(\xi, p) ds(\xi), \quad (x_0, \xi \in S); \quad (11.15)$$

- задача Неймана (вторая основная краевая задача)

$$\bar{\bar{U}}(p, x_0) = \frac{\partial U(p, x_0)}{\partial u} = \int_S F(x_0, \xi; p) \varphi(\xi, p) ds(\xi) \pm \frac{1}{2} \varphi(\xi, p), \quad (x_0, \xi \in S); \quad (11.16)$$

Этапы решения

1. Решаются уравнения (11.15), (11.16) и (11.14) для произвольных действительных значений p .

2. Вычисление $u(x, t)$ по $U(p, x)$, т.е. получение обратного преобразования $U(p, x)$.

12 Лабораторные работы. Эллиптические уравнения

12.1 Постановка и краевые условия

Решить уравнение Лапласа методом граничных элементов с краевыми условиями на границе (рисунок 12.1-12.3).

а) Задача Дирихле (первая основная краевая задача)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (12.1)$$

$$p|_S = p^*, \quad (x, y) \in S,$$

где p^* - значение потенциала на границе.

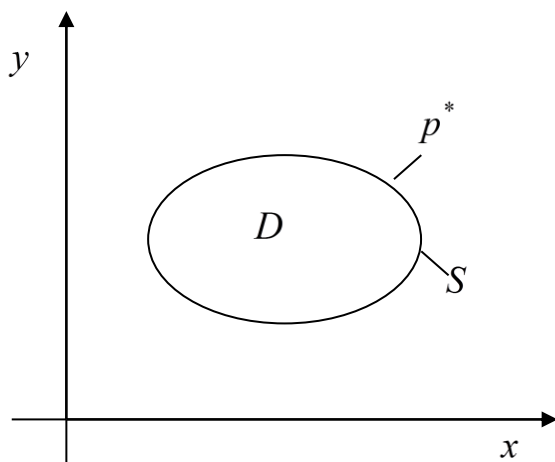


Рисунок 12.1 - Краевые условия задачи Дирихле

б) Задача Неймана (вторая основная краевая задача)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (12.2)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = q, \quad (x, y) \in S,$$

где q - значение скорости нормального потока на границе.

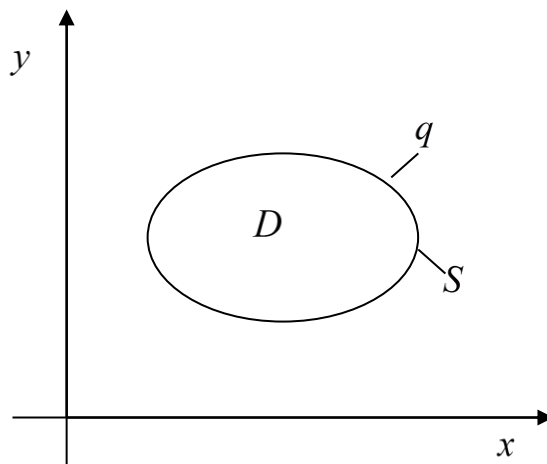


Рисунок 12.2 - Краевые условия задачи Неймана

в) Смешанная краевая задача

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (12.3)$$

$$p|_S = p^*, \quad (x, y) \in S_p,$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = q, \quad (x, y) \in S_q.$$

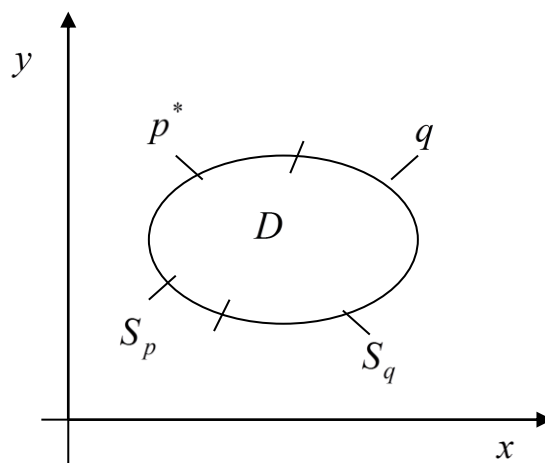


Рисунок 12.3 - Краевые условия смешанной задачи

12.2 Основные соотношения прямого метода граничных элементов

12.2.1 Вычисление значения потенциала внутри моделируемой области

$$p(\xi) = \int_S [p(x)F(x, \xi) - u(x)G(x, \xi)] dS(x), \quad x \in S, \xi \in D, \quad (12.4)$$

где $x = (x_1, x_2)$;

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$;

$Ox_1x_2, O\xi_1\xi_2$ - декартовы системы координат;

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r;$$

$$F(x, \xi) = \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{2\pi r^2};$$

$$r_1 = x_1 - \xi_1;$$

$$r_2 = x_2 - \xi_2;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

$p(\xi)$ - потенциал внутри моделируемой области;

$u(x)$ - скорость нормального потока на границе;

$p(x)$ - потенциал на границе области.

12.2.2 Вычисление значения потенциала на границе

$$\frac{1}{2}p(\xi_0) = \int_S [p(x)F(x, \xi_0) - u(x)G(x, \xi_0)] dS(x), \quad \xi_0, x \in S, \quad (12.5)$$

где $x = (x_1, x_2)$;

$\xi = (\xi_1^0, \xi_2^0)$;

$G(x, \xi_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r$;

$F(x, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{r^2}$;

$r_1 = x_1 - \xi_1^0$;

$r_2 = x_2 - \xi_2^0$;

$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1^0)^2 + (x_2 - \xi_2^0)^2$;

$p(\xi_0)$ - потенциал на границе;

$u(x)$ - скорость нормального потока на границе;

$p(x)$ - потенциал на границе области.

12.2.3 Вычисление скорости потока внутри моделируемой области

$$u_1(\xi) = \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_1} = \int_S \left[p(x) \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_1} - u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_1} \right] dS(x), \quad (12.6)$$

$$u_2(\xi) = \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_2} = \int_S \left[p(x) \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_2} - u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_2} \right] dS(x),$$

$\xi \in D, x \in S,$

ИЛИ

$$u_1(\xi) = \int_S \left[p(x)H_1(x, \xi) - u(x)F(x, \xi) \right] dS(x),$$

$$u_2(\xi) = \int_S \left[p(x)H_2(x, \xi) - u(x)F(x, \xi) \right] dS(x),$$

где $r_1 = x_1 - \xi_1$;

$$r_2 = x_2 - \xi_2;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

$$F(x, \xi) = \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{2\pi r^2};$$

$$H_1(x, \xi) = \left(\frac{k}{2\pi r^2} \right) \left[2r_1 \left(\frac{r_1 n_1(\xi) + r_2 n_2(\xi)}{r^2} \right) - n_1(\xi) \right] n_1(x);$$

$$H_2(x, \xi) = \left(\frac{k}{2\pi r^2} \right) \left[2r_2 \left(\frac{r_1 n_1(\xi) + r_2 n_2(\xi)}{r^2} \right) - n_2(\xi) \right] n_2(x);$$

$u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ - проекции вектора скорости потока внутри области на оси декартовой системы координат $O\xi_1$, $O\xi_2$ соответственно.

12.2.4 Граничные интегральные уравнения общие для трех краевых задач

$$\frac{1}{2} p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N p_i \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N u_i \ln r \Delta S_i \right]$$

или

$$\frac{1}{2} p_j - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N p_i \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N u_i \ln r \Delta S_i \quad (12.7)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}$$

где

$$F_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } i = j, \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] & \text{при } i \neq j, \end{cases},$$

$$G_{ji} = \begin{cases} -\frac{\Delta S_i}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2}{\Delta S_i} \right) + 1 \right] & \text{при } i = j, \\ \frac{\Delta S_i}{2\pi} \ln r & \text{при } i \neq j, \end{cases},$$

$$r_{1ij} = x_i - x_j;$$

$$r_{2ij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{1ij}^2 + r_{2ij}^2;$$

n_{1i} - проекция вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на ось OX ;

n_{2i} - проекция вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на ось OY ;

(x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки;

ΔS_i - длина i -ого граничного элемента;

p_i - потенциал заданный на границе;

u_i - скорость нормального потока на границе;

N - количество граничных элементов на границе.

12.3 Метод граничных элементов в краевых задачах

12.3.1 Задача Дирихле

Выражение (12.7) можно представить в следующем виде

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (12.8)$$

где p_i - заданный потенциал на границе;

u_i - неизвестная определяемая величина на границе.

12.3.2 Задача Неймана

Выражение (12.7) представляется для данной краевой задачи в виде

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (12.9)$$

где u_i - заданный поток на границе;

p_i - неизвестный определяемый потенциал на границе.

12.3.3 Смешанная краевая задача

Выражение (12.7) для смешанной краевой задачи представляется следующим образом (рисунок 12.3)

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N_1}) \quad (12.10)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{N_1 + 1, N}),$$

где в первом уравнении на участке границы ($j = \overline{1, N_1}$) задан потенциал p_i , а во втором ($j = \overline{N_1 + 1, N}$) нормальная составляющая скорости потока u_i .

12.3.4 Определение потенциала во внутренних точках моделируемой области для трех краевых задач

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N p_i \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N u_i \ln r \Delta S_i \right],$$

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N p_i \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N u_i \ln r \Delta S_i, \quad (j = \overline{1, M}) \quad (12.11)$$

или

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M})$$

где

$$F_{ji} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i;$$

$$G_{ji} = \frac{1}{2\pi} \ln r \Delta S_i;$$

$$r_{1ij} = x_i - x_j;$$

$$r_{2ij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{1ij}^2 + r_{2ij}^2;$$

n_{1j} - проекция вектора нормали \vec{n} в i -ой граничной точке на ось OX ;

n_{2j} - проекция вектора нормали \vec{n} в i -ой граничной точке на ось OY ;

(x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой внутренней точки;

ΔS_i - длина i -ого граничного элемента;

M - количество внутренних точек;

p_i - определенный потенциал в i -ой граничной точке;

u_i - определенная нормальная составляющая скорости потока в i -ой граничной точке;

p_j - неизвестный потенциал, определяемый в j -ой внутренней точке.

12.4 Алгоритмы решения задач прямым методом граничных элементов

Пример

Определить распределение температуры в единичной пластине, когда

$$p|_S = \begin{cases} 50^0 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{на всей оставшейся границе.} \end{cases}$$

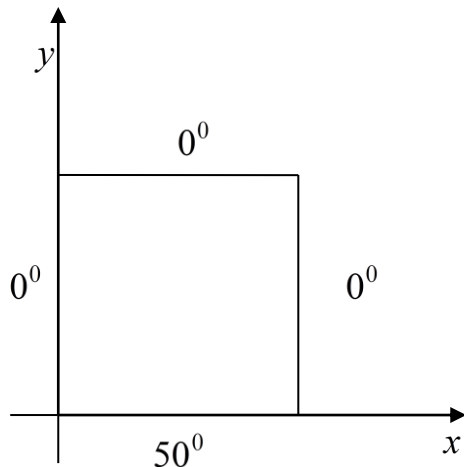


Рисунок 12.4 - Задание температуры на границе

Пример разбивки границы на граничные элементы приведен на рисунке 12.5, а входные данные представлены в таблице 12.1.

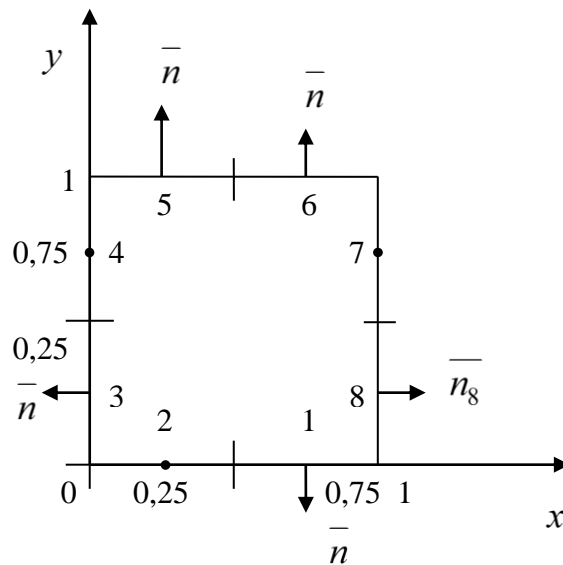


Рисунок 12.5 - Разбивка границы на элементы

Таблица 12.1 - Входные данные

N	x , см	y , см	ΔS , см	p , град	n_1	n_2
1	0,75	0	0,5	50	0	-1
2	0,25	0	0,5	50	0	-1
3	0	0,25	0,5	0	-1	0
4	0	0,75	0,5	0	-1	0
5	0,25	1	0,5	0	0	1
6	0,75	1	0,5	0	0	1
7	1	0,75	0,5	0	1	0
8	1	0,25	0,5	0	1	0

Здесь:

N - количество граничных элементов;

(x, y) - координаты центров тяжести (середины) граничных элементов;

ΔS - длина граничного элемента;

p - значение температуры на сторонах квадрата;

n_1, n_2 - проекции вектора нормали на оси декартовой системы координат Ox, Oy .

Пример представления в области системы внутренних точек показан на рисунке 12.6, а в таблице 12.2 приведены входные данные координат внутренних точек.

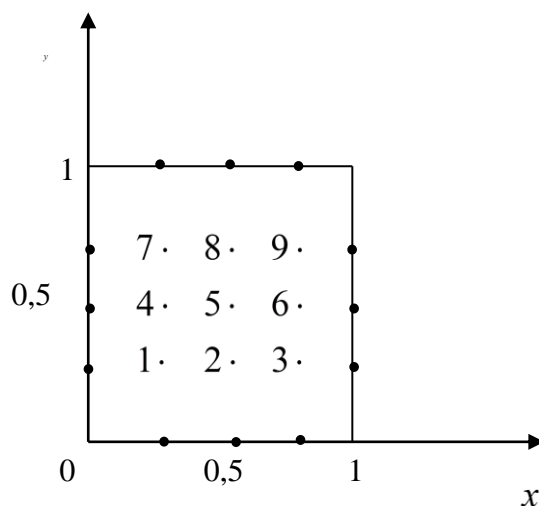


Рисунок 12.6 - Система внутренних точек в области

Таблица 12.2 - Входные данные координат внутренних точек

M	$x, \text{ см}$	$y, \text{ см}$
1	0,25	0,25
2	0,5	0,25
3	0,75	0,25
4	0,25	0,5
5	0,5	0,5
6	0,75	0,5
7	0,25	0,75
8	0,5	0,75
9	0,75	0,75

Здесь:

M - количество внутренних точек;

(x, y) - координаты внутренних точек.

12.4.1 Алгоритм решения задачи Дирихле

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (12.8)$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (12.11)$$

- a) Ввод входных данных, представленных в таблицах 12.1 и 12.2.
- b) Формирование матрицы G_{ji} (12.7)

$$G_{ji} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} = A.$$

- c) Формирование вектор-столбца правой части системы линейных уравнений (12.7)

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p_i F_{1i} \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{2i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{Ni} \end{pmatrix}.$$

d) Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

методом Гаусса.

e) Вычисление значений потенциала во внутренних точках области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (12.11)$$

f) Выдача результатов значений потенциала во внутренних точках моделируемой области p_j ($j = \overline{1, M}$).

12.4.2 Алгоритм решения задачи Неймана

Определить распределение температуры в единичной пластине (рисунок 12.4), когда

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = u = \begin{cases} 10 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{на всей оставшейся границе.} \end{cases}$$

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (12.9)$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (12.11)$$

Алгоритм расчета выполняется аналогично как для задачи Дирихле, а входные данные представлены в таблицах 12.1 и 12.2.

12.4.3 Алгоритм смешанной краевой задачи

Определить распределение температуры в единичной пластине (рисунок 12.4), когда

$$p|_S = \begin{cases} 50^0 & \text{при } x = 0, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при } y = 1, 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_S = u = \begin{cases} 10 & \text{при } x = 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N_1}), \quad (12.10)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{N_1 + 1, N}).$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (12.11)$$

- a) Ввод входных данных, представленных в таблицах 12.1 и 12.2.
 b) Формирование матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1,1} & G_{N1,2} & \dots & G_{N1+N} \\ F_{N1,1} & F_{N1+1,2} & \dots & F_{N1+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1} & F_{N2} & \dots & F_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1,N} & A_{N1,2} & \dots & A_{N1,N} \\ A_{N1+1,1} & A_{N1+1,2} & \dots & A_{N1+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}.$$

- c) Формирование вектор-столбца правой части системы линейных уравнений

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{N1} \\ b_{N1+1} \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p_i F_{1i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{N1i} \\ \sum_{i=1}^N u_i G_{N1+1,i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N u_i G_{Ni} \end{pmatrix}.$$

- d) Обозначение неизвестных величин

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_{N1} \\ \dots \\ z_{N1+1} \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{N1} \\ \dots \\ p_{N1+1} \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}.$$

е) Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

методом Гаусса.

ф) Вычисление значений потенциала во внутренних точках области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (12.11)$$

г) Выдача значений потенциала $p_j (j = \overline{1, M})$ во внутренних точках моделируемой области D .

13 Лабораторная работа. Моделирование плоского течения несжимаемой невязкой жидкости между зазорами

Цель работы: Определить функции тока в зазоре при обтекании твердого тела

13.1 Уравнения движения несжимаемой невязкой жидкости

Основными уравнениями, описывающими установившееся плоское течение несжимаемой невязкой жидкости при отсутствии внешних сил, являются два уравнения:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - u = const, \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (13.2)$$

Здесь первое уравнение называется интегралом Бернулли, а второе представляет собой математическую запись условия несжимаемости.

Отсутствие завихренности для плоского движения описывается следующим выражением

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (13.3)$$

Тогда условие потенциальности поля скоростей позволяет ввести функцию $\varphi(x, y)$ такую, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (13.4)$$

Подставляя (13.4) в (13.2), имеем, что потенциал скоростей будет гармонической функцией двух переменных, и будет удовлетворять двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (13.5)$$

Уравнение (13.2) показывает, что выражение

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy \quad (13.6)$$

является точным дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, так, что

$$-v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (13.7)$$

Линии уровня $\psi = const$ являются векторными линиями поля скоростей. При установившемся движении эти линии совпадают с траекториями движущихся частиц, т.е. с линиями тока, и поэтому ψ называется функцией тока. Из уравнения (13.3) видно, что ψ , как и φ , является гармонической функцией. Сравнивая (13.4) и (13.7), получаем, что эти функции связаны соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (13.8)$$

Функции, связанные такими соотношениями, как (13.8) называются сопряженными гармоническими.

Таким образом, для плоского движения несжимаемой невязкой жидкости имеем следующие выражения

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

13.2 Прямой метод граничных интегральных уравнений (ПМГУ)

13.2.1 Суть метода ПМГУ

Решение дифференциального уравнения с частными производными

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad (13.9)$$

имеющими следующие граничные условия (рисунок 13.1)

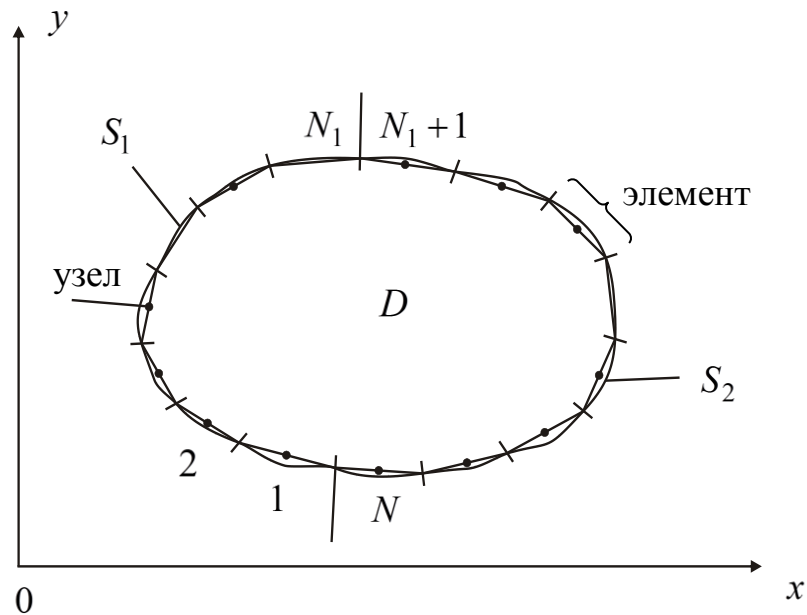


Рисунок 13.1

$$\psi = \psi^* \text{ на контуре } S_1, \quad (13.10)$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial n} = u^* \text{ на контуре } S_2, \quad (13.11)$$

сводится к решению интегральных уравнений

$$\frac{1}{2}\psi(\xi_0) = \int_S \left[\psi(x) F^*(x, \xi_0) - u(x) G^*(x, \xi_0) \right] dS(x), \quad (13.12)$$

$$(\xi_0, x \in S)$$

где

$x = (x_1, x_2)$ - координаты граничных точек;

$\xi_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ - координаты граничных точек;

$$G^*(x, \xi_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r;$$

$$F^*(x, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_1 u_1(x) + r_2 u_2(x)}{r^2} \right);$$

$$r_1 = x_1 - \xi_1^0; \quad r_2 = x_2 - \xi_2^0;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1^0)^2 + (x_2 - \xi_2^0)^2;$$

r - расстояние между точками.

В области D

$$\psi(\xi) = \int_S \left[\psi(x) F^*(x, \xi) - u(x) G^*(x, \xi) \right] dS(x), \quad (13.13)$$

$$(x \in S, \xi \in D)$$

где

$x = (x_1, x_2)$ - координаты граничных точек;

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ - координаты внутренних точек;

$$G^*(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r;$$

$$F^*(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_1 u_1(x) + r_2 u_2(x)}{r^2} \right);$$

$$r_1 = x_1 - \xi_1; \quad r_2 = x_2 - \xi_2;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

r - расстояние между точками.

13.2.2 Дискретизация граничных интегральных уравнений

Граница области в плоской постановке разбивается на N сегментов или граничных элементов. Точки, в которых рассматриваются неизвестные величины, называются узлами. Они находятся в середине каждого сегмента (рисунок 13.1).

В случае постоянных элементов граница разбивается на N элементов, из которых N_1 элементов относятся к части границы S_1 , а N_2 элементов – к части S_2 . Значения функций ψ и u предполагаются постоянными для каждого элемента и равными их значениям во внутреннем узле элемента. Отметим, что для каждого элемента известна одна из двух функций ψ или u .

Граничные интегральные уравнения (13.12) в дискретном виде принимают следующий вид:

$$\frac{1}{2} \psi_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \psi_i \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N u_i \ln r S_i \right],$$

($j = \overline{1, N}$)

или

$$\sum_{i=1}^N \psi_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (13.14)$$

где

$$F_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } i = j, \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] S_i & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$G_{ji} = \begin{cases} -\frac{S_i}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2}{S_i} \right) - 1 \right] & \text{при } i = j, \\ \frac{S_i}{2\pi} \ln r & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$r_{1ij} = x_i - x_j; \quad r_{2ij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{1ij}^2 + r_{2ij}^2;$$

n_{1i}, n_{2i} - проекции вектора нормали \vec{n} в i -ой граничной точке на оси OX и OY соответственно;

(x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки;

S_i - длина i -го граничного элемента;

ψ_i - значения функции линии тока на границе;

u_i - нормальная производная функции линии тока на границе;

N - количество граничных элементов на границе.

Для смешанных граничных условий (13.10) и (13.11) граничные интегральные уравнения (13.14) представляются следующим образом

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N \psi_i^* F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N_1})$$

(13.15)

$$\sum_{i=1}^N \psi_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i^* G_{ji}, \quad (j = \overline{N_1 + 1, N})$$

где в первом уравнении на участке границы ($j = \overline{1, N_1}$) заданы значения функции линии тока ψ_i^* , а во втором на участке ($j = \overline{N_1 + 1, N}$) нормальная производная функции линии тока $u_i^* = \frac{\partial \psi_i}{\partial n}$.

Значения функции линии тока в любой внутренней точке моделируемой области определяются в следующем виде

$$\psi_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \psi_i \left[\frac{r_{1ik} n_{1i} + r_{2ik} n_{2i}}{r^2} \right] S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N u_i \ln r S_i \right],$$

$$(k = \overline{1, M})$$

или

$$\psi_k = \sum_{i=1}^N \psi_i F_{ki} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ki}, \quad (k = \overline{1, M}) \quad (13.16)$$

где

$$F_{ki} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ik} n_{1i} + r_{2ik} n_{2i}}{r^2} \right] S_i;$$

$$G_{ki} = \frac{1}{2\pi} (\ln r) S_i;$$

$$r_{1ik} = x_i - x_k; \quad r_{2ik} = y_i - y_k;$$

$$r^2 = r_{1ik}^2 + r_{2ik}^2;$$

n_{1i}, n_{2i} - проекции вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на оси декартовой системы координат OX и OY соответственно;

(x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;

(x_k, y_k) - координата k -ой внутренней точки;

S_i - длина i -го граничного элемента;

M - количество внутренних точек;

ψ_k - значения функции линии тока в k -ой внутренней точке;

ψ_i - значения функции линии тока в i -ой граничной точке;

$u_i = \frac{d\psi_i}{dn}$ - значения нормальной производной функции линии тока

на границе.

13.3. Алгоритм расчета

13.3.1 Ввод входных данных

Ввести следующие входные данные:

N - количество граничных элементов;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки ($j = 1, 2, \dots, N$);

n_{1i}, n_{2i} - проекции единичного вектора нормали на оси декартовой системы координат OX и OY соответственно ($i = 1, 2, \dots, N$);

S_j - длина j -го граничного элемента ($j = 1, 2, \dots, N$);

M - количество внутренних точек;

(x_k, y_k) - координата k -ой внутренней точки ($k = 1, 2, \dots, M$).

13.3.2 Ввод граничных значений функций

ψ_i^* - значение функции тока на участке границы ($i = 1, 2, \dots, N_1$);

u_i^* - значения производной функции тока относительно единичного вектора нормали ($i = N_1 + 1, \dots, N$).

13.3.3 Формирование элементов матриц уравнений (13.15) и вектор-столбцов

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{N_1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{N_1,N} \\ F_{N_1+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F_{N_1+1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{N,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N_1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N_1,N} \\ A_{N_1+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N_1+1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N,N} \end{pmatrix};$$

$$Z = \begin{pmatrix} u \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{N_1} \\ \cdot \\ z_{N_1+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{pmatrix}; \quad (13.17)$$

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \psi_i^* F_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^N \psi_i^* F_{N_1i} \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^N u_i^* G_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^N u_i^* G_{Ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N_1} \\ \cdot \\ b_{N_1+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix}.$$

13.3.4 Решение системы линейных уравнений

Систему линейных алгебраических уравнений (13.15) решить методом Гаусса. Система линейных уравнений (13.15) на основе формул (13.17) принимает вид

Осевая линия. Осевая линия обозначена на рисунке 13.2 цифрой 2. Значение функции тока на осевой линии произвольно. Поэтому было положено, что функция тока на осевой линии равна нулю, т.е. $\psi = 0$.

Твердая граница. Твердые границы обозначены на рисунке 13.2 цифрой 3. Для втекающего потока

$$\psi_{\text{стенка}} = \text{const}$$

и совпадает со значениями функции тока в сечении 1.

Значения функции тока на диске совпадают со значениями на осевой линии $\psi = 0$

Граница, расположенная вниз по потоку. Сечение вытекания потока обозначено на рисунке 13.2 цифрой 4. Значения скорости $v_y = -\frac{d\psi}{dx} = 0$, что соответствует значению $u^* = \frac{d\psi}{dn} = 0$.

13.5 Пример выполнения задания

Условие задачи

Определить линии тока жидкости при обтекании ею цилиндра, расположенного между двумя параллельными стенками (рисунок 13.3).

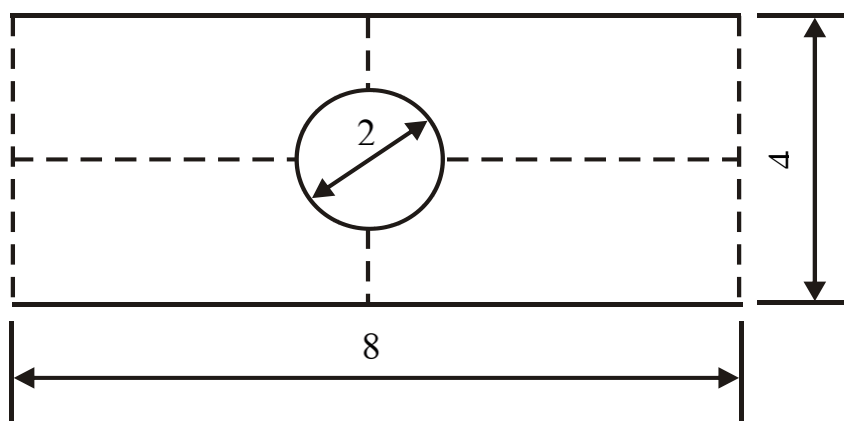


Рисунок 13.3

Решение

Благодаря симметрии задачи рассмотрим только четверть исследуемой области (рисунок 13.4). Граница области разбивается на элементы с постоянной плотностью на границе.

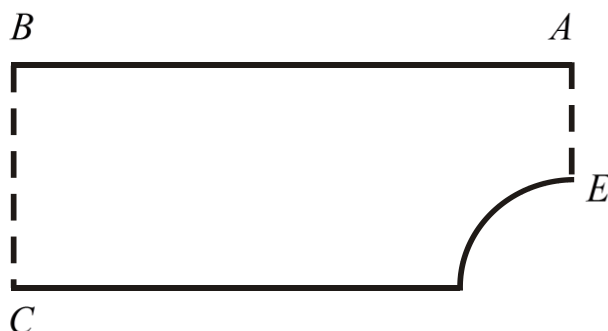


Рисунок 13.4

Граничные условия для исследуемой области, приведенной на рисунке 13.4, имеют вид

$$b_i = \psi^* = 2 \text{ на участке } AB \ (i = 1, \dots, 10);$$

$$b_i = \psi^* = y \text{ на участке } BC \ (i = 11, \dots, 15);$$

$$b_i = \psi^* = 0 \text{ на участке } CE \ (i = 16, \dots, 25);$$

$$b_i = \frac{d\psi}{dn} = 0 \text{ на участке } EA \ (i = 26, \dots, 30).$$

В таблице 13.1 приведены входные данные задачи.

Таблица 13.1 - Входные данные

N	x_i , см	y_i , см	n_{xi}	n_{yi}	S_i , см	
1	3,8	2,0	0	1	0,4	
2	3,4	2,0	0	1	0,4	
3	3,0	2,0	0	1	0,4	
4	2,6	2,0	0	1	0,4	
5	2,2	2,0	0	1	0,4	
6	1,8	2,0	0	1	0,4	

7	1,4	2,0	0	1	0,4	
8	1,0	2,0	0	1	0,4	
9	0,6	2,0	0	1	0,4	
10	0,2	2,0	0	1	0,4	
11	0	1,8	- 1	0	0,4	
12	0	1,4	- 1	0	0,4	
13	0	1,0	- 1	0	0,4	
14	0	0,6	- 1	0	0,4	
15	0	0,2	- 1	0	0,4	
16	0,25	0	0	- 1	0,5	
17	0,75	0	0	- 1	0,5	
18	1,25	0	0	- 1	0,5	
19	1,75	0	0	- 1	0,5	
20	2,25	0	0	- 1	0,5	
21	2,75	0	0	- 1	0,5	
22	3,0192	0,1951	$\cos(\pi/16)$	$-\sin(\pi/16)$	$\pi/8$	
23	3,1685	0,5556	$\cos(3\pi/16)$	$-\sin(3\pi/16)$	$\pi/8$	
24	3,4444	0,8315	$\cos(5\pi/16)$	$-\sin(5\pi/16)$	$\pi/8$	
25	3,8049	0,9808	$\cos(7\pi/16)$	$-\sin(7\pi/16)$	$\pi/8$	
26	4,0	1,1	1	0	2,0	
27	4,0	1,3	1	0	2,0	
28	4,0	1,5	1	0	2,0	
29	4,0	1,7	1	0	2,0	
30	4,0	1,9	1	0	2,0	

Решая данную систему алгебраических уравнений (13.18) и подставляя найденные значения z_i в (13.19), получаем значения функции тока в исследуемой области. На рисунке 13.5 приведены результаты расчетов по данной задаче.

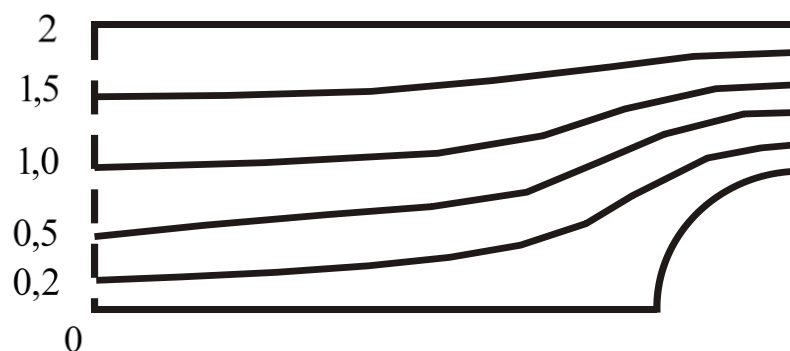


Рисунок 13.

Список использованных источников

1. Басниев К.С. Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
2. Дмитриев Н.М. Введение в подземную гидромеханику / Н.М. Дмитриев, В.В. Кадет. – М.: Интерконтакт Наука, 2003. – 250 с.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
4. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
5. Бреббия, К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 831с.
7. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.