

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Ю.Г. Полкунов

МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

Оренбург
2021

УДК 531.3(075.8)

ББК 22.251я73

П 51

Рецензент – профессор, доктор технических наук Н.З. Султанов

Полкунов, Ю.Г.

П51 Модели механики сплошной среды и метод граничных элементов :
учебное пособие / Ю.Г. Полкунов ; Оренбургский гос. ун-т. –
Оренбург : ОГУ, 2021. – 184 с.
ISBN 978-5-7410-2575-8

В учебном пособии рассмотрены математические модели теории упругости и методы граничных элементов, позволяющие реализовывать данные модели механики сплошной среды.

Учебное пособие по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» предназначено для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника.

УДК 531.3(075.8)

ББК 22.251я73

ISBN 978-5-7410-2575-8

© Полкунов Ю.Г., 2021

© ОГУ, 2021

Содержание

Введение	6
1 Дифференциальные уравнения равновесия	7
2 Геометрические уравнения механики линейной сплошной деформируемой среды	9
3 Закон Гука для линейной изотропной упругой среды	11
4 Основные дифференциальные уравнения теории упругости	13
4.1 Плоское напряженное состояние	15
4.2 Плоская деформация	18
5 Фундаментальные решения двумерных задач теории упругости	21
6 Непрямой метод граничных элементов	25
6.1 Метод фиктивных нагрузок	25
6.2 Дискретные представления поверхностных и объемных интегралов	31
6.3 Плоская деформация	36
7 Прямой метод граничных элементов	40
7.1 Построение граничных интегральных уравнений	42
7.2 Дискретное представление граничных и объемных интегралов	44
8 Фундаментальные решения пространственной статической теории упругости	46
9 Непрямой метод граничных элементов для объемных задач	49
9.1 Метод фиктивных нагрузок	49
9.2 Дискретные представления поверхностных интегралов	52
9.3 Пример	56
10 Лабораторная работа. Напряженно-деформированное состояние плоской бесконечной полуплоскости от действия вертикальной единичной силы	66
10.1 Ввод граничных значений	66
10.2 Ввод координат внутренних точек (x_k, y_k)	67
10.3 Метод фиктивных нагрузок	69
10.4 Алгоритм расчета	71

11 Лабораторная работа. Кручение призматических стержней	76
11.1 Постановка задачи.....	76
11.2 Граничные интегральные уравнения	77
11.3 Значения функции $\Phi(x, y)$ и касательные напряжения	78
11.4 Алгоритм решения задачи	79
12 Лабораторная работа. Напряженно-деформированное состояние конечного тела (балки) под действием вертикальных нагрузок	85
12.1 Ввод граничных значений	85
12.2 Ввод координат внутренних точек (x_k, y_k)	86
12.3 Метод фиктивных нагрузок	87
12.4 Алгоритм расчета	90
13 Лабораторная работа. Критерии локального разрушения	93
13.1 Коэффициенты интенсивности напряжений	94
13.2 Методы определения коэффициентов интенсивности напряжений	95
13.3 Алгоритм расчета	99
14 Лабораторная работа. Ползучесть материала с трещиной.....	105
14.1 Постановка задачи.....	105
14.2 Граничные интегральные уравнения	106
14.3 Определение напряжения σ_{yy} внутри материала перед трещиной.....	107
14.4 Функции ползучести	108
14.5 Алгоритм расчета	108
15 Основные понятия, определения и физические свойства жидкостей и газов.....	112
15.1 Основные понятия и определения	112
15.2 Физические свойства жидкостей и газов	117
16 Гидростатика.....	122
16.1 Гидростатическое давление и его свойство	122
16.2 Основное уравнение гидростатики	125
16.3 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости	127
17 Кинематика движения жидкости	130

17.1 Основные понятия и определения	130
17.2 Расход. Уравнение расхода	135
17.3 Ускорение жидкой частицы	137
18 Динамика невязкой жидкости	139
18.1 Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости	139
18.2 Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости.....	141
18.3 Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкого газа	146
19 Динамика вязкой жидкости	149
19.1 Уравнения Навье - Стокса	149
19.2 Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости при установившемся движении.....	154
19.3 Уравнение Бернулли для потока при установившемся движении вязкой жидкости.....	156
19.4 Гидравлические сопротивления.....	160
19.5 Коэффициент Рейнольдса.....	163
19.6 Теория ламинарного течения в круглых трубах	165
19.7 Турбулентное движение жидкости.....	171
20 Математические модели истечения жидкости через отверстия.....	173
21 Гидравлический удар в трубах.....	181
Список использованных источников	184

Введение

Пособие предназначено для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника и ориентировано на рабочие планы и программы направления «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Пособие содержит 21 раздел, охватывающих фундаментальные темы механики сплошной среды: теория упругости; гидромеханика. Численная реализация двумерных и трехмерных моделей механики сплошной среды осуществляется методом граничных элементов. Рассматриваются методы и алгоритмы граничных элементов для дифференциальных уравнений с частными производными. Для закрепления изучаемого материала для обучающихся приводятся лабораторные работы.

Надеемся, что предлагаемое пособие станет подспорьем в изучении курса для сдачи кандидатского экзамена.

1 Дифференциальные уравнения равновесия

Компоненты напряжений, приведенные на рисунках 1.1 и 1.2, характеризуют однородное напряженное состояние. На рисунке 1.1 показаны нормальные напряжения, а на рисунке 1.2 – касательные.

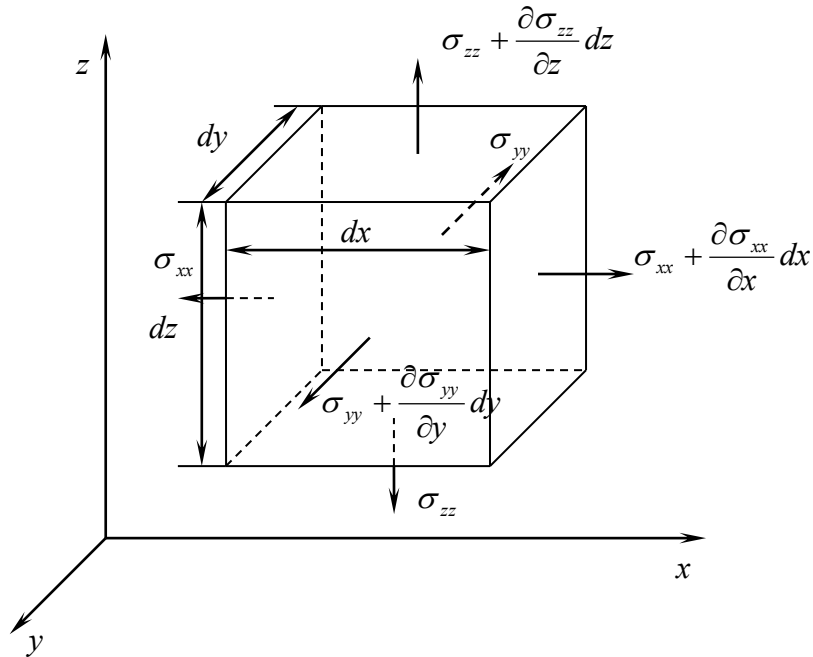


Рисунок 1.1

Применяя к указанному на рисунке 1 параллелепипеду уравнения равновесия

$$\sum_k F_{kx} = 0; \sum_k F_{ky} = 0; \sum_k F_{kz} = 0;$$

$$\sum_k M_{kx} = 0; \sum_k M_{ky} = 0; \sum_k M_{kz} = 0;$$

после раскрытия первых трех уравнений приходим к следующим условиям,

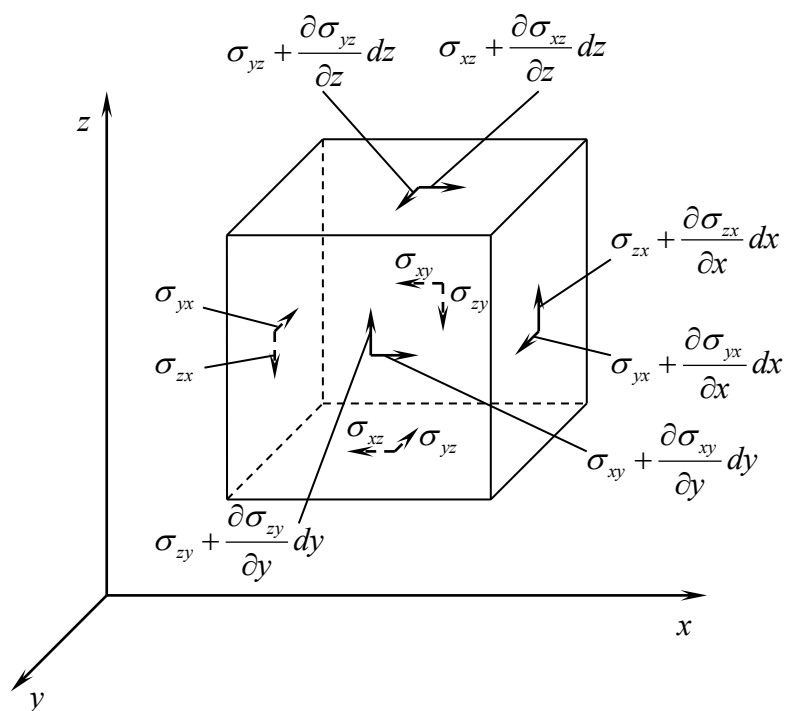


Рисунок 1.2

называемым дифференциальными уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X_{\rho} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y_{\rho} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z_{\rho} = 0;$$

где X, Y, Z - компоненты объемных сил;

ρ - плотность;

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \text{тензор напряжений для данной точки, т.е.}$$

совокупность компонентов напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках в случае однородного напряженного состояния.

Раскрытие последних трех уравнений (сумма моментов) приводит к закону взаимности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy}; \sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (1.2)$$

Эти выражения означают, что в каждой двух взаимно перпендикулярных плоскостях компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей, равны между собой и при этом оба направлены либо к линии пересечения, либо от нее.

2 Геометрические уравнения механики линейной сплошной деформируемой среды

Компоненты тензора деформации связаны не только друг с другом в рассматриваемой точке, но и в окрестности ее с деформацией соседних точек.

Компоненты тензора деформации зависят от закона изменения компонент смещения в окрестности рассматриваемой точки, о чем свидетельствуют геометрические уравнения деформации сплошной среды, называемые уравнениями Коши:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (2.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ - относительные удлинения (в декартовых координатах) по направлению осей x, y, z (рисунок 2.1, а);

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - относительные сдвиги (в декартовых координатах); индексы указывают координатные плоскости, на которые проектируются соответствующие сдвиги (рисунок 2.1, б)

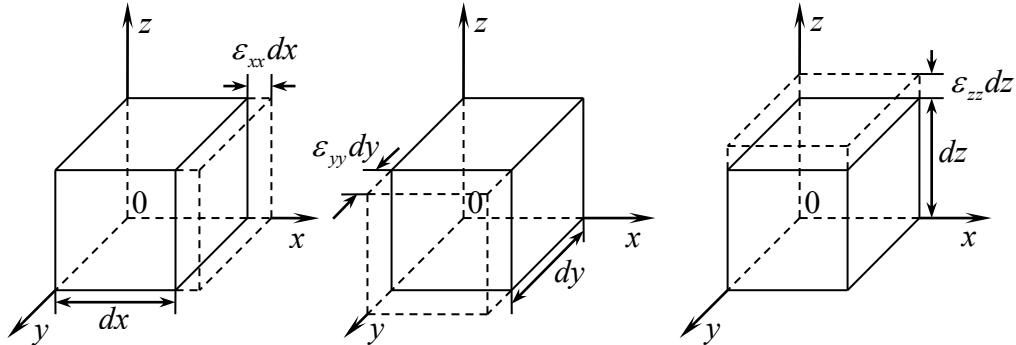
$2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$ - другие обозначения относительных сдвигов;

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} - \text{тензор деформаций, т.е. совокупность компонентов}$$

деформации бесконечно малого объема (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки;

u, v, w - проекции на неподвижные координатные оси (x, y, z) действующего смещения рассматриваемой точки тела.

а)



б)

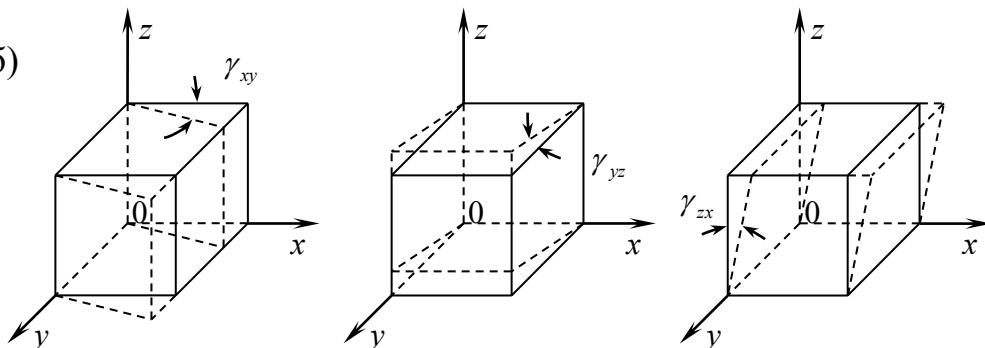


Рисунок 2.1

Из уравнений (2.1) вытекает, что компоненты тензора малой деформации в окрестности любой точки в пределах каждого малого объема самой среды должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2), выведенные Сен-Венаном, называют уравнениями (условиями) совместности, или неразрывности деформаций.

Физический смысл уравнений заключается в следующем. Если разбить тело на параллелепипеды, то при деформации тела деформируются все параллелепипеды. Если сложить эти деформированные параллелепипеды, то при соблюдении уравнений Сен-Венана они и после деформации образуют сплошное и непрерывное тело.

3 Закон Гука для линейной изотропной упругой среды

Закон упругости выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]; \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right]; \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]; \gamma_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G};
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где E - модуль Юнга;

G - модуль сдвига;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

ν - коэффициент Пуассона.

Закон (3.1) формируется следующим образом: компоненты тензора деформации в данной точке тела находятся в линейной зависимости от компонентов тензора напряжений той же точки.

При $\nu = 0$ любой компонент тензора напряжений прямо пропорционален соответствующему компоненту тензора деформации.

Закон упругости можно представить в виде, когда напряжения выражаются через деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{cp} \right]; \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}; \\
\sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{cp} \right]; \sigma_{yz} = G \varepsilon_{yz}; \\
\sigma_{zz} &= 2G \left[\varepsilon_{zz} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{cp} \right]; \sigma_{zx} = G \varepsilon_{zx};
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где ε_{cp} - средняя деформация;

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}).$$

Уравнения (6) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; \sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta; \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta; \sigma_{zx} = G\varepsilon_{zx};\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $\theta = 3\varepsilon_{cp} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$;

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu};$$

λ - постоянная Ляме.

4 Основные дифференциальные уравнения теории упругости

Подставляя (3.3) в (1.1) и используя (2.1), получаем дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\Delta u + X_\rho &= 0; \\ (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\Delta v + Y_\rho &= 0; \\ (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + G\Delta w + Z_\rho &= 0;\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\Delta() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Уравнения (4.1) называют уравнениями Ляме (иногда их также называют уравнениями Навье).

Граничные условия на поверхности тела в напряжениях

$$\begin{aligned}
p_{x_n} &= \sigma_{xx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{xy} \cos(\bar{n}, y) + \sigma_{xz} \cos(\bar{n}, z); \\
p_{y_n} &= \sigma_{yx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{yy} \cos(\bar{n}, y) + \sigma_{yz} \cos(\bar{n}, z); \\
p_{z_n} &= \sigma_{zx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{zy} \cos(\bar{n}, y) + \sigma_{zz} \cos(\bar{n}, z);
\end{aligned} \tag{4.2}$$

можно выразить через перемещения

$$\begin{aligned}
p_{x_n} &= \lambda \theta \cos(\bar{n}, x) + G \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\bar{n}, z) \right] + \\
&\quad + G \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\bar{n}, z) \right]; \\
p_{y_n} &= \lambda \theta \cos(\bar{n}, y) + G \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(\bar{n}, z) \right] + \\
&\quad + G \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(\bar{n}, z) \right]; \\
p_{z_n} &= \lambda \theta \cos(\bar{n}, z) + G \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(\bar{n}, z) \right] + \\
&\quad + G \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(\bar{n}, x) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(\bar{n}, y) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(\bar{n}, z) \right];
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\bar{n}$ - вектор нормали к поверхности тела.

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды в смещениях (4.1)

без учета объемных сил в развернутом виде можно представить так:

$$\begin{aligned}
G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) &= 0; \\
G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) &= 0;
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Уравнения (4.4) совместно с (4.2) или (4.3) позволяют непосредственно решать задачи теории упругости в перемещениях.

Преобразуя величины

$$\lambda + G = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} + G = G\left(\frac{1}{1 - 2\nu}\right)$$

(4.4) предстанет в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

4.1 Плоское напряженное состояние

Если тонкая пластинка нагружена усилиями, приложенными на ее границе параллельно плоскости пластинки и равномерно распределенными по толщине (рисунок 4.1),

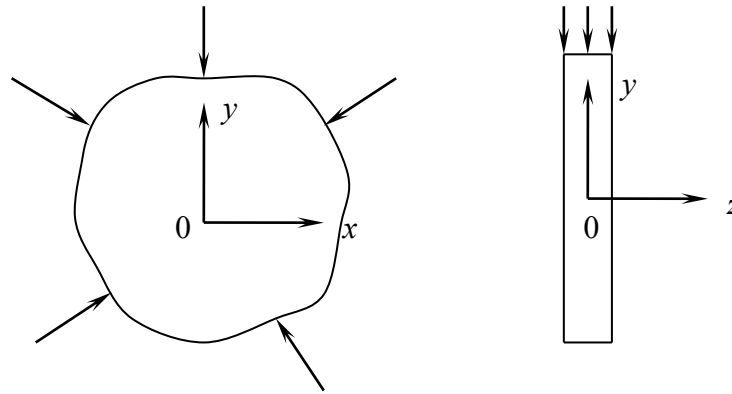


Рисунок 4.1

то компоненты напряжений σ_{zz} , σ_{xz} , σ_{yz} на обеих поверхностях пластинки равны нулю, и можно предположить, что они равны нулю и внутри пластинки.

Тогда напряженное состояние будет определяться только компонентами σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , и называться плоским напряженным состоянием.

Можно предположить, что эти три компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} не зависят от z , т.е. не меняются по толщине пластинки, а являются функциями только от x и y .

Тензор напряжений для плоского напряженного состояния представляется в сокращенном виде:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

Соответствующий тензор деформации можно выразить так:

$$T_{def} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}.$$

Однако полное его начертание должно быть следующим:

$$T_{def} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Из третьей строки обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

следует, что

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}).$$

Примем, что объемной силой является только сила тяжести, т.е.

$$Z = X = 0; Y_{\rho} = -q;$$

где q - объемный вес.

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - q &= 0. \end{aligned}$$

Условия на контуре:

$$p_{x_n} = \sigma_{xx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{xy} \cos(\bar{n}, y);$$

$$p_{y_n} = \sigma_{yx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{yy} \cos(\bar{n}, y).$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Физические уравнения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}.$$

Из уравнений неразрывности деформаций остается одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

4.2 Плоская деформация

Если при каком-либо напряженном состоянии перемещения всех точек могут происходить только в двух направлениях, т.е. только в одной плоскости, то такую деформацию называют плоской.

Пусть размеры тела, например, в направлении оси z , очень велики. Если такое длинное призматическое тело нагружено силами, не изменяющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, подвергается плоской деформации.

Перемещение всех точек деформируемого тела в таком случае происходит в плоскостях, перпендикулярных к длине тела (рисунок 4.2).

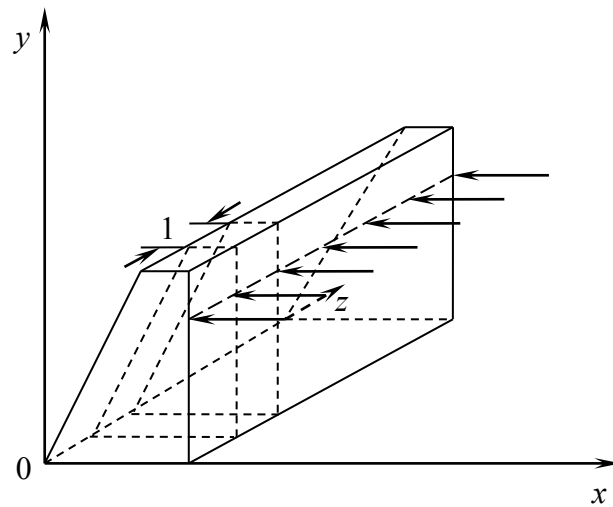


Рисунок 4.2

Тогда тензор деформации представится в виде сокращенной матрицы:

$$T_{def} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}.$$

Соответственно тензор напряжений можно представить в виде:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}.$$

Однако полное его представление должно быть следующим:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Если при плоском напряженном состоянии имеется компонент ε_{zz} , но отсутствует σ_{zz} , то при плоской деформации, наоборот, присутствует σ_{zz} и отсутствует ε_{zz} .

Применяя к данному случаю обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

и полагая $\varepsilon_{zz} = 0$, получаем

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Физические уравнения благодаря σ_{zz} принимают для относительных удлинений другой вид:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1 + \nu)\sigma_{yy}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1 + \nu)\sigma_{xx}]$$

причем для сдвига сохраняется выражение

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy}.$$

Или

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right]; \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right]; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}),$$

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy}; \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для двумерных задач теории упругости в случае малых деформаций можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) = 0;$$

(4.6)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0.$$

5 Фундаментальные решения двумерных задач теории упругости

Применим нумерованные обозначения координатных осей

$$x, y = 1, 2.$$

Тогда вектор смещений имеет следующие обозначения проекций на оси декартовой системы координат

$$u_1 = u = u_x; u_2 = v = u_y,$$

а тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \sigma_{21} = \sigma_{12}.$$

Матрица фундаментальных решений в условиях плоской деформации для дифференциальных уравнений (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

имеет вид

$$I_{ij}(x, \xi) = \begin{pmatrix} I_{11}(x, \xi) & I_{12}(x, \xi) \\ I_{21}(x, \xi) & I_{22}(x, \xi) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\text{где } I_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} \ln r - \frac{r_i r_j}{r^2} \right] + A_{ij},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ - модуль сдвига;}$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

$$r_i = x_i - \xi_i;$$

$$r_j = x_j - \xi_j;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2;$$

x_1, x_2 - декартовы координаты;

ξ_1, ξ_2 - декартовы координаты;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} - символ Кронекера.

Поле смещений $u_i(x)$ при действии единичной сосредоточенной силы $e_j(\xi)$ принимает следующий вид

$$u_i(x) = I_{ij}(x, \xi) e_j(\xi) \quad (5.2)$$

или

$$\begin{aligned} u_1(x) &= I_{11}(x, \xi) e_1(\xi) + I_{12}(x, \xi) e_2(\xi), \\ u_2(x) &= I_{21}(x, \xi) e_1(\xi) + I_{22}(x, \xi) e_2(\xi), \end{aligned}$$

где $e_1(\xi), e_2(\xi)$ - проекции вектора единичной силы, приложенные в точке (ξ_1, ξ_2) и направленные по осям декартовой системы координат x_1, x_2 .

Деформации получаются подстановкой данных смещений выражение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.3)$$

что дает

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi), \quad (5.4)$$

где

$$B_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) + 2\frac{r_i r_j r_k}{r^2} - \delta_{ij}r_k \right].$$

Подставляя (5.4) в закон Гука (4.5) получаем зависимости между напряжениями и деформацией

$$\sigma_{ij}(x) = K_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi) \quad (5.5)$$

$$\text{где } K_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2\frac{r_i r_j r_k}{r^2} \right].$$

Или

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x) &= K_{111}(x, \xi) e_1(\xi) + K_{112}(x, \xi) e_2(\xi), \\ \sigma_{12}(x) &= K_{121}(x, \xi) e_1(\xi) + K_{122}(x, \xi) e_2(\xi), \\ \sigma_{21}(x) &= K_{211}(x, \xi) e_1(\xi) + K_{212}(x, \xi) e_2(\xi), \\ \sigma_{22}(x) &= K_{221}(x, \xi) e_1(\xi) + K_{222}(x, \xi) e_2(\xi), \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Усилия $p_i(x)$ в точке x_i поверхности с внешней нормалью $n_j(x)$ определяются на основе соотношения (5.7) с использованием (5.6)

$$p_1(x) = \sigma_{11}(x) u_1(x) + \sigma_{12}(x) u_2(x); \quad (5.7)$$

$$p_2(x) = \sigma_{21}(x) u_1(x) + \sigma_{22}(x) u_2(x);$$

откуда имеем

$$p_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x) = F_{ik}(x, \xi) e_k(\xi). \quad (5.8)$$

Или

$$p_1(x) = F_{11}(x, \xi)e_1(\xi) + F_{12}(x, \xi)e_2(\xi),$$

$$p_2(x) = F_{21}(x, \xi)e_1(\xi) + F_{22}(x, \xi)e_2(\xi),$$

$$\text{где } F_{ik}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(n_k r_i - n_i r_k) + \left((1-2\nu)\delta_{ik} + 2\frac{r_i r_k}{r^2} \right) r_j n_j \right],$$

$$n_1 = \cos(n, x_1), n_2 = \cos(n, x_2),$$

n_1, n_2 - проекции вектора нормали $\bar{n}$ на оси декартовой системы координат x_1, x_2 соответственно.

6 Непрямой метод граничных элементов

6.1 Метод фиктивных нагрузок

Рассмотрим двумерную область V , заполненную изотропным линейно-упругим однородным материалом и ограниченную поверхностью S . К поверхности S приложены распределенные по S усилия $\varphi(\xi_i)$.

Смещения $u_i(x)$ любой внутренней точки x_i (рисунок 6.1),

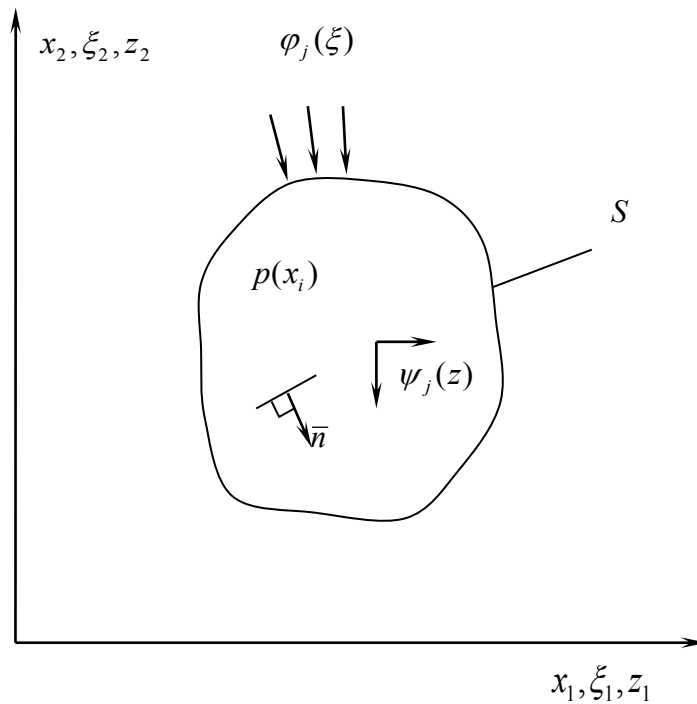


Рисунок 6.1

обусловленные действием поверхностных усилий $\varphi(\xi_i)$ и известного распределения объемных сил $\psi_j(z)$. Для получения $u_i(x)$ надо подставить $\varphi(\xi)$ вместо $e(\xi)$ в уравнение (5.2), проинтегрировать по S и добавить результат интегрирования по области V уравнения (5.2), в котором $e(\xi)$ заменена на $\psi(z)$. В итоге получим

$$u_i(x) = \int_S I_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS(\xi) + \int_V I_{ij}(x, z) \psi_j(z) dv(z) + c_i \quad (6.1)$$

или

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \int_S [I_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ & + \int_V [I_{11}(x, z) \psi_1(z) + I_{12}(x, z) \psi_2(z)] dv(z) + c_1; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) = & \int_S [I_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ & + \int_V [I_{21}(x, z) \psi_1(z) + I_{22}(x, z) \psi_2(z)] dv(z) + c_2; \end{aligned}$$

где $dS(\xi)$ и $dv(z)$ показывают, что интегрирование ведется по переменным ξ и z соответственно. Величина c_i представляет собой неизвестные смещения тела как целого.

Деформации можно получить из соотношения (5.4) аналогичным образом.

$$\varepsilon_{ij}(x) = \int_S B_{ikj}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V B_{ijk}(x, z) \psi_k(z) dv(z) \quad (6.3)$$

Напряжения $\sigma_{ij}(x)$ в точке x_i определяются из (5.5) выражениями

$$\sigma_{ij}(x) = \int_S K_{ijk}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V K_{ijk}(x, z) \psi_k(z) dv(z) \quad (6.4)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x) &= \int_S [K_{111}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + K_{112}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &\quad + \int_V [K_{111}(x, z) \psi_1(z) + K_{112}(x, z) \psi_2(z)] dv(z); \\ \sigma_{12}(x) &= \int_S [K_{121}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + K_{122}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &\quad + \int_V [K_{121}(x, z) \psi_1(z) + K_{122}(x, z) \psi_2(z)] dv(z); \\ \sigma_{22}(x) &= \int_S [K_{221}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + K_{222}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &\quad + \int_V [K_{221}(x, z) \psi_1(z) + K_{222}(x, z) \psi_2(z)] dv(z); \end{aligned} \quad (6.5)$$

Поверхностные усилия $p_i(x)$, проходящие через точку x_i поверхности с внешней нормалью $n_j(x)$, выражаются формулой

$$p_i(x) = \int_S F_{ik}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V F_{ik}(x, z) \psi_k(z) dv(z) \quad (6.6)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \int_S [F_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &\quad + \int_V [F_{11}(x, z) \psi_1(z) + F_{12}(x, z) \psi_2(z)] dv(z); \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$p_2(x) = \int_S [F_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ + \int_V [F_{21}(x, z) \psi_1(z) + F_{22}(x, z) \psi_2(z)] dv(z).$$

Замечания

1. Поверхностные интегралы в (6.1)-(6.7) удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности во всей области V , потому что фундаментальные решения, с помощью которых они получены, удовлетворяют этим уравнениям.

2. Поверхностные интегралы содержат функции, непрерывные и определенные для всех положений x_i в V .

3. Объемные интегралы в области V содержат функции, обращающиеся в бесконечность при $x_i = z_i$ (т.е. совпадении точки приложения нагрузки и точки наблюдения). Тем не менее эти интегралы действительно существуют в обычном смысле, поскольку в процессе интегрирования по объему особенности пропадают (т.е. члены порядка $\frac{1}{r}$ являются слабой особенностью при интегрировании по объему), поэтому эти интегралы также удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности в V .

4. Условиям единственности решения, отражающим тот факт, что влияние распределенных сил и усилий не должно распространяться на бесконечность, удовлетворяют интегралы из уравнений (6.3)-(6.7). Уравнение (6.1) будет удовлетворять этим условиям, если потребовать, чтобы компоненты c_i смещения тела как твердого целого принимали специальные значения, которые в точности компенсируют совместное влияние всех сил φ и ψ на бесконечности. Значения c_i можно определить при помощи дополнительных уравнений.

Устремляя точку наблюдения x_i к поверхности можно получить граничные интегральные уравнения из уравнений (6.1)-(6.7):

$$u_i(x_0) = \int_S I_{ij}(x_0, \xi) \varphi_j(\xi) dS(\xi) + \int_V I_{ij}(x_0, z) \psi_j(z) dv(z) + c_i; \quad (6.8)$$

$$p_i(x_0) = \pm \frac{1}{2} \delta_{ik} \varphi_k(x_0) + \int_S F_{ik}(x_0, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi) + \int_V F_{ik}(x_0, z) \psi_k(z) dv(z), \quad (6.9)$$

$$(x_0, \xi \in S, z \in V)$$

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= \int_S [I_{11}(x_0, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{12}(x_0, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &+ \int_V [I_{11}(x_0, z) \psi_1(z) + I_{12}(x_0, z) \psi_2(z)] dv(z) + c_1; \\ u_2(x_0) &= \int_S [I_{21}(x_0, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{22}(x_0, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &+ \int_V [I_{21}(x_0, z) \psi_1(z) + I_{22}(x_0, z) \psi_2(z)] dv(z) + c_2; \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= \pm \frac{1}{2} \varphi_1(x_0) + 0 \cdot \varphi_2(x_0) + \int_S [F_{11}(x_0, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{12}(x_0, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &+ \int_V [F_{11}(x_0, z) \psi_1(z) + F_{12}(x_0, z) \psi_2(z)] dv(z); \end{aligned} \quad (6.11)$$

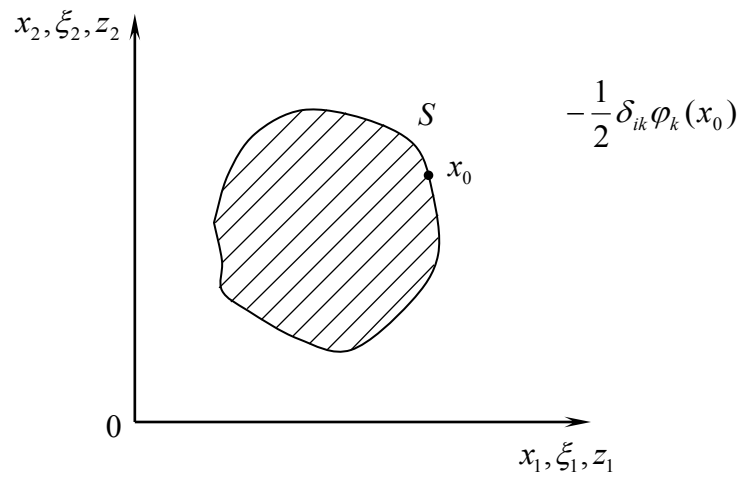
$$\begin{aligned} p_2(x_0) &= 0 \cdot \varphi_1(x_0) \pm \frac{1}{2} \varphi_2(x_0) + \int_S [F_{21}(x_0, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{22}(x_0, \xi) \varphi_2(\xi)] dS(\xi) + \\ &+ \int_V [F_{21}(x_0, z) \psi_1(z) + F_{22}(x_0, z) \psi_2(z)] dv(z). \end{aligned}$$

Замечания

1. Точка x_0 расположена не на ребре и не в углу.
2. Поверхностный интеграл в (6.9) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

3. Выражение $\pm \frac{1}{2} \delta_{ik} \varphi_k(x_0)$ в (6.9) отрицательно, если V - конечная область (рисунок 6.2, а), и положительно, если V - бесконечная область (рисунок 6.2, б).

а)



б)

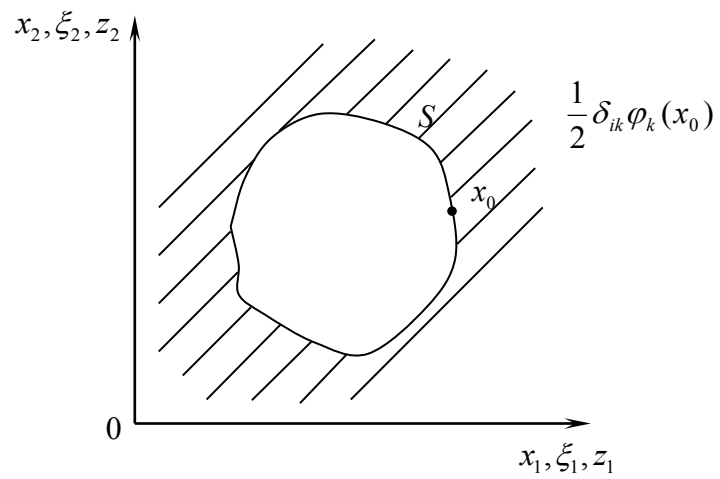


Рисунок 6.2

6.2 Дискретные представления поверхностных и объемных интегралов

Для реализации граничных интегральных уравнений необходимо разработать численные методы решения. Приведенные выражения (6.8), (6.9) являются точным представлением решения задачи. При численном решении любая ошибка в конечном результате получается исключительно из-за дискретизации интегралов и последующего решения алгебраических уравнений.

Рассмотрим самый простейший алгоритм, который оказался эффективным и удобным для большинства практических задач.

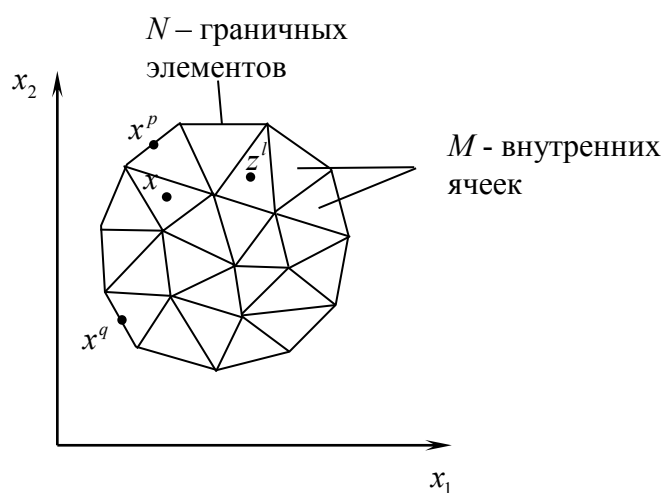


Рисунок 6.3

Разобьем нашу двумерную область на линейные граничные элементы и треугольные внутренние ячейки (рисунок 6.3).

Пусть M - количество треугольных ячеек, а N - количество прямоугольных отрезков. Предполагаем, что неизвестные функции $\varphi_j(\xi)$ и $\psi_i(z)$, т.е. заданные по условию задачи, являются постоянными в пределах граничного элемента и треугольной ячейки.

Замечания

1. Порядок системы линейных алгебраических уравнений, получающийся при численной реализации МГЭ, определяется лишь количеством использованных граничных элементов и совершенно не связан с количеством использованных внутренних ячеек.

2. Дискретизация объемными ячейками в МГЭ может быть произвольной и не соответствовать поверхностной дискретизации.

Предположим, что в пределах каждого элемента φ и ψ имеют постоянные значения, то для p -го граничного элемента можно записать

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi_j(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{ij}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi_j(z^l) \int_{\Delta V} I_{ij}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + c_i, \quad (6.12)$$

$$p_i(x_0^p) = \pm \frac{1}{2} \varphi_i(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi_k(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{ik}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi_k(z^l) \int_{\Delta V} F_{ik}(x_0^p, z^l) dv(z^l), \quad (6.13)$$

или

$$\begin{aligned} u_1(x_0^p) = & \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{11}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{12}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \\ & + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} I_{11}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} I_{12}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + c_1, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_0^p) = & \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{21}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{22}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \\ & + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} I_{21}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} I_{22}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + c_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(x_0^p) = & \pm \frac{1}{2} \varphi_1(x_0^p) + 0 \cdot \varphi_2(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{11}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \\ & + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{12}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} F_{11}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + \\ & + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} F_{12}(x_0^p, z^l) dv(z^l), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}
p_2(x_0^p) = & 0 \cdot \varphi_1(x_0^p) \pm \frac{1}{2} \varphi_2(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{21}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \\
& + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{22}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} F_{21}(x_0^p, z^l) dv(z^l) + \\
& + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} F_{22}(x_0^p, z^l) dv(z^l),
\end{aligned}$$

где x_0^p - координаты некоторой характерной точки p -го граничного элемента, например его середины;

ΔS - длина q -го граничного элемента;

ΔV - площадь поверхности l -ой ячейки.

Используя матричные обозначения, уравнения (6.12) и (6.13) можно записать в более удобной форме:

$$u^p = \left(\int_{\Delta S} I^{pq} dS \right) \varphi^q + \left(\int_{\Delta V} I^{pl} dv \right) \psi^l + IC, \quad (6.16)$$

$$p^p = \left(\int_{\Delta S} F^{pq} ds \right) \varphi^q + \left(\int_{\Delta V} F^{pl} dv \right) \psi^l \pm \frac{1}{2} I \varphi^p, \quad (6.17)$$

где $q = 1, 2, \dots, N$ и $l = 1, 2, \dots, M$.

Описанный выше алгоритм включает данные, относящиеся к дискретизации поверхности внутренней области.

Если на границе моделируемой области заданы только смещения $u_i(x_0)$, то реализуются уравнения (6.16). Если на границе приведены только напряжения $p_j(x_0)$, то расчет производится по уравнениям (6.17).

Для смешанной задачи, когда на одном участке границы заданы смещения, а на другом напряжения, можно использовать совместно уравнения (6.16) и (6.17) в виде:

$$\begin{Bmatrix} \alpha u^s \\ t^s \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2N+2) \times 1} = \begin{bmatrix} I^0 & I^{ss} \alpha \\ 0 & F^{ss} \\ 0 & b_m \end{bmatrix}_{(2N+2) \times (2N+2)} \begin{Bmatrix} c \alpha \\ \varphi \end{Bmatrix}_{(2N+2) \times 1} + \begin{bmatrix} I^{cv} \alpha \\ F^{sv} \\ c_m \end{bmatrix}_{(2N+2) \times 2M} \{\psi\}_{(2M+1)}. \quad (6.18)$$

Здесь индексы s и v означают, что соответствующие величины получаются на основе данных, относящихся только к точкам поверхности (ss) или к точкам поверхности и объема (sz);

u^s - есть $2m$ -мерный вектор-столбец, соответствующий числу ($2m$) компонент данных поверхностных смещений, которые обычно содержат известные граничные смещения в узлах границы;

t^s - есть $2n$ -мерный вектор-столбец, соответствующий числу ($2n$) компонент данных поверхностных усилий, которые могут включать известные усилия в n граничных узлах;

0 - матрица нулей, связанная с условиями равновесия (вспомогательное условие);

$$I^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{матрица размером } (2m \times 2);$$

c - двумерный вектор-столбец с компонентами c_1 и c_2 ;

$I^{ss}, F^{ss}, I^{sv}, F^{sv}$ - матрицы коэффициентов имеют размеры $(2M \times 2N), (2n \times 2N), (2m \times 2M), (2n \times 2M)$ соответственно;

φ - векторы неизвестных усилий, имеют размерности $(2N)$;

ψ - векторы известных объемных сил, имеют размерность $(2M)$;

$$b_m = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & \dots \end{pmatrix} - \text{матрица размером } (2 \times 2N);$$

$$c_m = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & \dots \end{pmatrix} - \text{матрица размером } (2 \times 2M);$$

b_m, c_m - матрицы, включающие весовые функции (длину и площадь) поверхностных элементов и внутренних ячеек соответственно;

N - число всех граничных элементов;

M - полное число внутренних ячеек;

α - масштабирующий коэффициент, на который уравнения для смещений умножаются так, чтобы все коэффициенты в матрице оказались величинами одного порядка.

Решение системы (6.18) даст значения φ и c для определенного допустимого набора значений u, t, ψ .

После определения всех значений φ и c , смещения, деформации и напряжения во внутренних точках вычисляются по следующим формулам (6.1), (6.3), (6.4):

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{11}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{12}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \\ & + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} I_{11}(x, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} I_{12}(x, z^l) dv(z^l) + c_1, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) = & \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{21}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{22}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \\ & + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} I_{21}(x, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} I_{22}(x, z^l) dv(z^l) + c_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x) &= \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{111}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{112}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \\
&\quad + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} K_{111}(x, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} K_{112}(x, z^l) dv(z^l), \\
\sigma_{12}(x) &= \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{121}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{122}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \\
&\quad + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} K_{121}(x, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} K_{122}(x, z^l) dv(z^l), \\
\sigma_{22}(x) &= \sum_{q=1}^N \varphi_1(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{221}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \sum_{q=1}^N \varphi_2(\xi^q) \int_{\Delta S} K_{222}(x, \xi^q) dS(\xi^q) + \\
&\quad + \sum_{l=1}^M \psi_1(z^l) \int_{\Delta V} K_{221}(x, z^l) dv(z^l) + \sum_{l=1}^M \psi_2(z^l) \int_{\Delta V} K_{222}(x, z^l) dv(z^l).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

6.3 Плоская деформация

Граничные интегральные уравнения в напряжениях

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} p_{x_i}^* - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^N \left[p_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) + 2 \frac{r_{x_{ij}}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} + p_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{n_{y_i} r_{x_{ij}} - n_{x_i} r_{y_{ij}}}{r^2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \right] \Delta S_j = p_{x_i}; \\
&\frac{1}{2} p_{y_i}^* - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^N \left[p_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{n_{x_i} r_{y_{ij}} - n_{y_i} r_{x_{ij}}}{r^2} \right) + 2 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + p_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu) + 2 \frac{r_{y_{ij}}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \Delta S_j = p_{y_i};
\end{aligned}$$

где $\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_{x_{ij}} n_{x_i} + r_{y_{ij}} n_{y_i}}{r^2}$;

$$r^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2;$$

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j;$$

$$r_{y_{ij}} = y_i - y_j;$$

x_i, y_i - координаты i -ой граничной точки;

p_{x_i}, p_{y_i} - напряжения в i -ой точке, заданные на границе;

$p_{x_i}^*, p_{y_i}^*$ - фиктивные (неизвестные) нагрузки;

n_{x_i}, n_{y_i} - проекции вектора нормали $\bar{n}$ на оси координат ox, oy ;

N - количество граничных элементов.

Напряжения внутри области моделирования

$$\sigma_{xx_i} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[p_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu)r_{x_{ij}} + 2\frac{r_{x_{ij}}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + p_{y_j}^* \left\{ -(1-2\nu)r_{y_{ij}} + 2\frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{xy_i} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[p_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu)r_{y_{ij}} + 2\frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + p_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu)r_{x_{ij}} + 2\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{yy_i} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[p_{x_j}^* \left\{ -(1-2\nu)r_{x_{ij}} + 2\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + p_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu)r_{y_{ij}} + 2\frac{r_{y_{ij}}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right] \Delta S_j;$$

где $r_{x_{ij}} = x_i - x_j$;

$r_{y_{ij}} = y_i - y_j$;

x_i, y_i - координаты i -ой внутренней точки;

x_j, y_j - координаты j -ой граничной точки;

$\sigma_{xx_i}, \sigma_{xy_i}, \sigma_{yy_i}$ - напряжения в i -ой внутренней точке.

Главные напряжения:

$$\sigma_{1i} = \frac{\sigma_{xx_i} + \sigma_{yy_i}}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_{xx_i} - \sigma_{yy_i})^2}{4} + \sigma_{xy_i}^2};$$
$$\sigma_{2i} = \frac{\sigma_{xx_i} + \sigma_{yy_i}}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_{xx_i} - \sigma_{yy_i})^2}{4} + \sigma_{xy_i}^2}.$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max_i} = \frac{1}{2}(\sigma_{1i} - \sigma_{2i}) = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx_i} - \sigma_{yy_i})^2}{4} + \sigma_{xy_i}^2}.$$

Смещения внутри области моделирования

$$u_x^i = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left\{ p_{x_j}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{x_{ij}}^2}{r^2} \right] + p_{y_j}^* \left[-\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \right] \right\} \Delta S_j;$$
$$u_y^i = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left\{ p_{x_j}^* \left[-\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \right] + p_{y_j}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{y_{ij}}^2}{r^2} \right] \right\} \Delta S_j;$$

где $r_{x_{ij}} = x_i - x_j$;

$r_{y_{ij}} = y_i - y_j$;

$r^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2$;

x_i, y_i - координаты i -ой внутренней точки;

x_j, y_j - координаты j -ой граничной точки;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига;

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

u_{x_i}, u_{y_i} - смещения в i -ой внутренней точке.

Граничные интегральные уравнения в смещениях

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left\{ \left[(3-4\nu) \left(\ln \left(\frac{\Delta S}{2} \right) - 1 \right) + n_{x_i}^2 \right] p_{x_i}^* + n_{x_i} n_{y_i} p_{y_i}^* \right\} - \\
 & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left\{ p_{x_j}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{x_{ij}}^2}{r^2} \right] + p_{y_j}^* \left[-\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \right] \right\} \Delta S_j + c_1 = u_{x_i}; \\
 & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left\{ n_{x_i} n_{y_i} p_{x_i}^* + \left[(3-4\nu) \left(\ln \left(\frac{\Delta S}{2} \right) - 1 \right) + n_{y_i}^2 \right] p_{y_i}^* \right\} - \\
 & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left\{ p_{x_j}^* \left[-\frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r^2} \right] + p_{y_j}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{y_{ij}}^2}{r^2} \right] \right\} \Delta S_j + c_2 = u_{y_i}.
 \end{aligned}$$

Применяя зависимости

$$P_{x_j}^* = \int_{\Delta S_j} p_{x_j}^* ds; \quad P_{y_j}^* = \int_{\Delta S_j} p_{y_j}^* ds;$$

$$P_{x_j} = \int_{\Delta S_j} p_{x_j} ds; \quad P_{y_j} = \int_{\Delta S_j} p_{y_j} ds;$$

приходим к уравнениям, которые предложены в 1 лабораторной работе, т.е. к условиям, когда на границе заданы силы.

7 Прямой метод граничных элементов

Вывод прямого метода осуществляется на основе теоремы взаимности.

Теорема (взаимности)

Если в области V , ограниченной поверхностью S , заданы два различных состояния упругого равновесия ψ_i^*, p_i^*, u_i^* и ψ_i, p_i, u_i , то работа, совершенная силами первого состояния на смещениях второго, равна работе, совершенной силами второго состояния на смещениях первого

$$\int_S p_i^*(x) u_i(x) ds(x) + \int_V \psi_i^*(z) u_i(z) dv(z) = \int_S p_i(x) u_i^*(x) ds(x) + \int_V \psi_i(z) u_i^*(z) dv(z), \quad (7.1)$$

где $x \in S$ - точка на поверхности тела;

$z \in V$ - внутренняя точка области V .

Известно, что

$$u_i(x) = I_{ij}(x, \xi) e_j(\xi);$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = B_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi);$$

$$\sigma_{ij}(x) = K_{ijk}(x, \xi) e_k(\xi);$$

$$p_i(x) = \sigma_{ij}(x, \xi) n_j(x) = F_{ij}(x, \xi) e_j(\xi);$$

$$\psi_i^*(z) = e_i^*(z); \quad \psi_i(z) = e_i(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_S p_i^*(x) u_i(x) ds(x) &= \int_S F_{ij}(x, \xi) e_j^*(\xi) u_i(x) ds(x) \\ \int_S \psi_i^*(z) u_i(z) ds(z) &= \int_V e_i^*(z) u_i(z) dv(z) = \int_V e_i^*(\xi) \delta(z, \xi) u_i(z) dv(z) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V e_j^*(\xi) \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dv(z); \\
\int_S p_i(x) u_i^*(x) ds(x) &= \int_S p_i(x) I_{ij}(x, \xi) e_j^*(x) ds(x); \\
\int_V \psi_i(z) u_i^*(z) dv(z) &= \int_V \psi_i(z) I_{ij}(z, \xi) e_j^*(\xi) dv(z).
\end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в (7.1).

$$\begin{aligned}
&\int_S F_{ij}(x, \xi) e_j^*(\xi) u_i(x) ds(x) + \int_V e_j^*(\xi) \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dv(z) = \\
&= \int_S p_i(x) I_{ij}(x, \xi) e_j^*(x) ds(x) + \int_V \psi_i(z) I_{ij}(z, \xi) e_j^*(\xi) dv(z).
\end{aligned}$$

Множитель $e_j^*(\xi)$ является общим для всех интегралов и выносится за знак интеграла

$$\begin{aligned}
&\int_S F_{ij}(x, \xi) u_i(x) ds(x) + \int_V \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dv(z) = \\
&= \int_S p_i(x) I_{ij}(x, \xi) ds(x) + \int_V \psi_i(z) I_{ij}(z, \xi) dv(z). \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_V \delta_{ij} \delta(z, \xi) u_i(z) dv(z) = \int_V u_j(z) \delta(z, \xi) dv(z) = \beta u_j(\xi),$$

где $\beta = 1$ - для точки находящейся внутри области V ;

$\beta = 0$ - для точки, расположенной вне поверхности S .

Из (7.2) получаем:

$$u_j(\xi) = \int_S [p_i(x)I_{ij}(x, \xi) - F_{ij}(x, \xi)u_i(x)]ds(x) + \int_V \psi_i(z)I_{ij}(z, \xi)dv(z). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) позволяет получить смещения $u_j(\xi)$ в любой точке ξ при любых значениях $p_i(x)$ и $u_i(x)$ на S и заданным распределением $\psi_i(z)$ в объеме.

7.1 Построение граничных интегральных уравнений

Устремляя внутреннюю точку ξ к точке x_0 на поверхности области, получаем следующие результаты:

$$\frac{1}{2}u_j(x_0) = \int_S [p_i(x)I_{ij}(x, x_0) - F_{ij}(x, x_0)u_i(x)]ds(x) + \int_V \psi_i(z)I_{ij}(z, x_0)dv(z), \quad (7.4)$$

где $u_j(\xi) = u_j(x_0)$;

$$\int_S p_i(x)I_{ij}(x, \xi)ds(x) = \int_V p_i(x)I_{ij}(z, x_0)ds(x);$$

$$\int_S^* F_{ij}(x, \xi)u_i(x)ds(x) = -\frac{1}{2}\delta_{ij}u_i(x_0) + \int_S F_{ij}(x, x_0)u_i(x)ds(x).$$

Уравнение (7.4) является граничным интегральным уравнением, позволяющим решить любую корректно поставленную краевую задачу.

Деформации и напряжения во внутренних точках моделируемой области

Подставляя выражение (7.3) в уравнение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

получаем

$$\varepsilon_{jk}(\xi) = \int_S \left[p_i(x) T_{ijk}^*(x, \xi) - C_{ijk}^*(x, \xi) u_i(x) \right] ds(x) + \int_V \psi_i(z) B_{ijk}^*(z, \xi) dv(z), \quad (7.5)$$

$$\text{где } B_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial I_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial I_{ik}}{\partial \xi_j} \right);$$

$$C_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_j} \right).$$

Используя закон Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}$$

получаем соотношения для напряжений

$$\sigma_{jk}(\xi) = \int_S \left[p_i(x) T_{ijk}^*(x, \xi) - E_{ijk}^*(x, \xi) u_i(x) \right] ds(x) + \int_V \psi_i(z) T_{ijk}^*(z, \xi) dv(z), \quad (7.6)$$

где

$$T_{ijk}^*(x, \xi) = \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial I_{im}}{\partial \xi_m} + G \left(\frac{\partial I_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial I_{ik}}{\partial \xi_j} \right) \right], \quad (7.7)$$

$$E_{ijk}^*(x, \xi) = \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial F_{im}}{\partial \xi_m} + G \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_j} \right) \right]. \quad (7.8)$$

В результате преобразований имеем

$$T_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{a_1}{r} \left[\frac{a_2}{r} (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i - \delta_{ij} r_k) + 2 \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right], \quad (7.9)$$

$$E_{ijk}^*(x, \xi) = \frac{a_3}{r} \left[\frac{n_l r_l}{r^2} \left\{ 2a_2 \delta_{ij} r_k + 2\nu (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) - 8 \frac{r_i r_j r_k}{r^2} \right\} + n_i \left(2\nu \frac{r_j r_k}{r^2} + a_2 \delta_{jk} \right) + \right. \\ \left. + n_j \left(2\nu \frac{r_i r_k}{r^2} + a_2 \delta_{ik} \right) + n_k \left(2a_2 \frac{r_i r_j}{r^2} - a_4 \delta_{ij} \right) \right], \quad (7.10)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)};$$

$$a_2 = 1 - 2\nu;$$

$$a_1 = \frac{G}{4\pi(1-\nu)};$$

$$a_4 = 1 - 4\nu;$$

$$r_i = x_i - \xi_i.$$

7.2 Дискретное представление граничных и объемных интегралов

Разбивая двумерную область на M треугольных ячеек и границу области на N прямолинейных отрезков, то, аналогично как для непрямого метода (фиктивных нагрузок), для вектора смещений в узловой точке p -го граничного элемента можно написать уравнение (7.11) при условии постоянства p_i , u_i и ψ_i в пределах каждого элемента и каждой ячейки:

$$\frac{1}{2} u_j(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \left[p_i(x^q) \int_{\Delta S} I_{ij}(x^q, x_0^p) ds(x^q) - u_i(x^q) \int_{\Delta S} F_{ij}(x^q, x_0^p) ds(x^q) \right] + \quad (7.11)$$

$$+ \sum_{l=1}^M \psi_i(z) \int_{\Delta V} I_{ij}(z^l, x_0^l) dv(z^l).$$

Уравнение (11) в матричной форме имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} I u^p = \sum_{q=1}^N \left\{ \left[\int_{\Delta S} I^{pq} ds \right] p^q - \left[\int_{\Delta S} F^{pq} ds \right] u^q \right\} + \sum_{l=1}^M \left[\int_{\Delta V} I^{pl} dv \right] \psi^l,$$

или

$$\begin{aligned} Ip - Fu + I\psi &= 0, \\ Ip + I\psi &= Fu. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Численная реализация

На границе заданы усилия, то (7.12) переписывается в виде

$$\left[F^{ss} \right] \left\{ u^s \right\} = \left[I^{sv} \right] \left\{ \psi^v \right\} + \left[I^{ss} \right] \left\{ p^s \right\},$$

где правая часть известна и вычисляются значения u^s .

На границе заданы смещения, то (7.12) запишем следующим образом

$$\left[I^{ss} \right] \left\{ p^s \right\} = \left[F^{ss} \right] \left\{ u^s \right\} - \left[I^{sv} \right] \left\{ \psi^v \right\}.$$

Правая часть известна и определяем усилия p^s .

Для смешанной задачи уравнения (7.12) имеют вид

$$-\left[\alpha I^{ss}\right]\left\{\frac{1}{\alpha}t^s\right\}+\left[F^{ss}\right]\left\{u^s\right\}=\left[I^{sv}\right]\left\{u^v\right\},$$

где α - масштабирующий коэффициент, который преобразует коэффициенты матрицы I таким образом, что они оказываются того же порядка, что и коэффициенты матрицы F .

8 Фундаментальные решения пространственной статической теории упругости

Применим нумерованные обозначения координатных осей

$$x, y, z = 1, 2, 3.$$

Тогда вектор смещений имеет следующие проекции на оси декартовой системы координат

$$u_1 = u; u_2 = v; u_3 = w,$$

а тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица фундаментальных решений дифференциальных уравнений (4.4), полученная Кельвином, имеет вид

$$I_{ij}(x, \xi) = \begin{pmatrix} I_{11}(x, \xi) & I_{12}(x, \xi) & I_{13}(x, \xi) \\ I_{21}(x, \xi) & I_{22}(x, \xi) & I_{23}(x, \xi) \\ I_{31}(x, \xi) & I_{32}(x, \xi) & I_{33}(x, \xi) \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

$$\text{где } I_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right];$$

G, ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды, соответственно;

$$r_i = x_i - \xi_i;$$

$$r_j = x_j - \xi_j;$$

(x_1, x_2, x_3) - декартовы координаты точки Q ;

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) - декартовы координаты точки P ;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} - символ Кронекера;

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Поле смещений $u_i(x)$ при действии единичной сосредоточенной силы, с использованием соотношения (7.13), имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= I_{11}(x, \xi)e_1(\xi) + I_{12}(x, \xi)e_2(\xi) + I_{13}(x, \xi)e_3(\xi), \\ u_2(x) &= I_{21}(x, \xi)e_1(\xi) + I_{22}(x, \xi)e_2(\xi) + I_{23}(x, \xi)e_3(\xi), \\ u_3(x) &= I_{31}(x, \xi)e_1(\xi) + I_{32}(x, \xi)e_2(\xi) + I_{33}(x, \xi)e_3(\xi), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $e_1(\xi), e_2(\xi), e_3(\xi)$ - проекции вектора единичной силы, приложенные в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и направленные по осям декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 .

Подставляя (8.2) в (3.3), с использованием выражения (2.1), можно получить зависимости между напряжениями и деформацией

$$\sigma_{11}(x) = K_{111}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{112}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{113}(x, \xi)e_3(\xi),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}(x) &= K_{121}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{122}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{123}(x, \xi)e_3(\xi), \\
\sigma_{13}(x) &= K_{131}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{132}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{133}(x, \xi)e_3(\xi), \\
\sigma_{22}(x) &= K_{221}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{222}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{223}(x, \xi)e_3(\xi), \\
\sigma_{23}(x) &= K_{231}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{232}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{233}(x, \xi)e_3(\xi), \\
\sigma_{33}(x) &= K_{331}(x, \xi)e_1(\xi) + K_{332}(x, \xi)e_2(\xi) + K_{333}(x, \xi)e_3(\xi), \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32},
\end{aligned} \tag{8.3}$$

где

$$K_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r^2} \left[\left(\delta_{ik} \frac{r_j}{r} + \delta_{jk} \frac{r_i}{r} - \delta_{ij} \frac{r_k}{r} \right) (1-2\nu) + 3 \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right].$$

Усилия $p_i(x)$ в точке x_i поверхности с внешней нормалью $n_j(x)$ вычисляются на основе соотношения (7.9) с использованием (8.3)

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \sigma_{11}(x)u_1(x) + \sigma_{12}(x)u_2(x) + \sigma_{13}(x)u_3(x); \\
p_2(x) &= \sigma_{21}(x)u_1(x) + \sigma_{22}(x)u_2(x) + \sigma_{23}(x)u_3(x); \\
p_3(x) &= \sigma_{31}(x)u_1(x) + \sigma_{32}(x)u_2(x) + \sigma_{33}(x)u_3(x);
\end{aligned} \tag{8.4}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= F_{11}(x, \xi)e_1(\xi) + F_{12}(x, \xi)e_2(\xi) + F_{13}(x, \xi)e_3(\xi); \\
p_2(x) &= F_{21}(x, \xi)e_1(\xi) + F_{22}(x, \xi)e_2(\xi) + F_{23}(x, \xi)e_3(\xi); \\
p_3(x) &= F_{31}(x, \xi)e_1(\xi) + F_{32}(x, \xi)e_2(\xi) + F_{33}(x, \xi)e_3(\xi);
\end{aligned}$$

где

$$F_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu) \left(n_j \frac{r_i}{r} - n_i \frac{r_j}{r} \right) + \left(3 \frac{r_i r_j}{r^2} + (1-2\nu) \delta_{ij} \right) \frac{r_k n_k}{r} \right], \tag{8.5}$$

$$n_1 = \cos(n, x_1), n_2 = \cos(n, x_2), n_3 = \cos(n, x_3),$$

n_1, n_2, n_3 - проекции вектора нормали $\bar{n}$ на оси декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 соответственно.

9 Непрямой метод граничных элементов для объемных задач

9.1 Метод фиктивных нагрузок

Рассмотрим трехмерную область V , которая является изотропным линейно-упругим материалом. На поверхности S приложены распределенные по S усилия $\varphi_j(\xi)$.

Смещения $u_i(x)$ в любой точке x_i возникают от действия поверхностных сил $\varphi_j(\xi)$ и известных объемных (или массовых) сил $\psi_j(z)$.

Процедура определения смещений $u_i(x)$ аналогична МГЭ, изложенному в плоских задачах. Подставляем $\varphi(\xi)$ вместо $e(\xi)$ в уравнение (8.2), интегрируем по S и добавляем результат интегрирования по области V уравнения (8.2), в котором $e(\xi)$ заменяем на $\psi(z)$.

В результате получаем

$$u_i(x) = \int_S I_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) ds(\xi) + \int_V I_{ij}(x, \zeta) \psi_j(\zeta) dv(\zeta), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (9.1)$$

Или

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \int_S [I_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi) + I_{13}(x, \xi) \varphi_3(\xi)] ds(\xi) + \\ & + \int_V [I_{11}(x, \zeta) \psi_1(\zeta) + I_{12}(x, \zeta) \psi_2(\zeta) + I_{13}(x, \zeta) \psi_3(\zeta)] dv(\zeta); \\ u_2(x) = & \int_S [I_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + I_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi) + I_{23}(x, \xi) \varphi_3(\xi)] ds(\xi) + \\ & + \int_V [I_{21}(x, \zeta) \psi_1(\zeta) + I_{22}(x, \zeta) \psi_2(\zeta) + I_{23}(x, \zeta) \psi_3(\zeta)] dv(\zeta); \end{aligned}$$

$$u_3(x) = \int_S [I_{31}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + I_{32}(x, \xi)\varphi_2(\xi) + I_{33}(x, \xi)\varphi_3(\xi)]ds(\xi) + \\ + \int_V [I_{31}(x, \zeta)\psi_1(\zeta) + I_{32}(x, \zeta)\psi_2(\zeta) + I_{33}(x, \zeta)\psi_3(\zeta)]dv(\zeta).$$

Напряжения $\sigma_{ij}(x)$ в точке x_i определяются из соотношения (8.3) выражениями

$$\sigma_{ij}(x) = \int_S K_{ijk}(x, \xi)\varphi_k(\xi)ds(\xi) + \int_V K_{ijk}(x, \zeta)\psi_k(\zeta)dv(\zeta), (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (9.2)$$

Или

$$\sigma_{11}(x) = \int_S [K_{111}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + K_{112}(x, \xi)\varphi_2(\xi) + K_{113}(x, \xi)\varphi_3(\xi)]ds(\xi) + \\ + \int_V [K_{111}(x, \zeta)\psi_1(\zeta) + K_{112}(x, \zeta)\psi_2(\zeta) + K_{113}(x, \zeta)\psi_3(\zeta)]dv(\zeta); \\ \sigma_{12}(x) = \int_S [K_{121}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + K_{122}(x, \xi)\varphi_2(\xi) + K_{123}(x, \xi)\varphi_3(\xi)]ds(\xi) + \\ + \int_V [K_{121}(x, \zeta)\psi_1(\zeta) + K_{122}(x, \zeta)\psi_2(\zeta) + K_{123}(x, \zeta)\psi_3(\zeta)]dv(\zeta); \\ \sigma_{13}(x) = \int_S [K_{131}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + K_{132}(x, \xi)\varphi_2(\xi) + K_{133}(x, \xi)\varphi_3(\xi)]ds(\xi) + \\ + \int_V [K_{131}(x, \zeta)\psi_1(\zeta) + K_{132}(x, \zeta)\psi_2(\zeta) + K_{133}(x, \zeta)\psi_3(\zeta)]dv(\zeta).$$

Поверхностные усилия $p_i(x)$, проходящие через точку x_i поверхности с внешней нормалью $n_j(x)$, выражаются формулой

$$p_i(x) = \int_S F_{ik}(x, \xi) \varphi_k(\xi) ds(\xi) + \int_V F_{ik}(x, \zeta) \psi_k(\zeta) dv(\zeta), (i, k = 1, 2, 3). \quad (9.3)$$

Или

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \int_S [F_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi) + F_{13}(x, \xi) \varphi_3(\xi)] ds(\xi) + \\ &\quad + \int_V [F_{11}(x, \zeta) \psi_1(\zeta) + F_{12}(x, \zeta) \psi_2(\zeta) + F_{13}(x, \zeta) \psi_3(\zeta)] dv(\zeta); \\ p_2(x) &= \int_S [F_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi) + F_{23}(x, \xi) \varphi_3(\xi)] ds(\xi) + \\ &\quad + \int_V [F_{21}(x, \zeta) \psi_1(\zeta) + F_{22}(x, \zeta) \psi_2(\zeta) + F_{23}(x, \zeta) \psi_3(\zeta)] dv(\zeta); \\ p_3(x) &= \int_S [F_{31}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + F_{32}(x, \xi) \varphi_2(\xi) + F_{33}(x, \xi) \varphi_3(\xi)] ds(\xi) + \\ &\quad + \int_V [F_{31}(x, \zeta) \psi_1(\zeta) + F_{32}(x, \zeta) \psi_2(\zeta) + F_{33}(x, \zeta) \psi_3(\zeta)] dv(\zeta). \end{aligned}$$

Устремляя точку наблюдения x_i к поверхности можно получить граничные интегральные уравнения из уравнений (9.1)-(9.3):

$$u_i(x_0) = \int_S I_{ij}(x_0, \xi) \varphi_j(\xi) ds(\xi) + \int_V I_{ij}(x_0, \zeta) \psi_j(\zeta) dv(\zeta); \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} p_i(x_0) &= \pm \frac{1}{2} \delta_{ik} \varphi_k(x_0) + \int_S F_{ik}(x_0, \xi) \varphi_k(\xi) ds(\xi) + \int_V F_{ik}(x_0, \zeta) \psi_k(\zeta) dv(\zeta); \quad (9.5) \\ &\quad (x_0, \xi \in S; \zeta \in V). \end{aligned}$$

Замечания (аналогичны плоским задачам):

1. Точка x_0 расположена не на ребре и не в углу (т.е. в этой точке существует единственная касательная плоскость).

2. Поверхностный интеграл в (9.4), (9.5) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

3. Выражение $\left(\pm \frac{1}{2}\right) \delta_{ik} \varphi_k(x_0)$ в (9.5) положительно, если рассматривается бесконечная область, и отрицательно – если V конечная область.

9.2 Дискретные представления поверхностных интегралов

Будем предполагать, что объемные (или массовые) силы отсутствуют.

Разобьем границу объемного тела на плоские треугольные или четырехугольные элементы.

Граничные интегральные уравнения в напряжениях:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} P_{x_i}^* - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left[P_{x_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) + 3 \frac{r_{x_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} + \right. \\
 & + P_{y_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - (1-2\nu) \left(\frac{r_{x_{ij}} n_{y_i} - r_{y_{ij}} n_{x_i}}{r_{ij}} \right) \right\} + \\
 & \left. + P_{z_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - (1-2\nu) \left(\frac{r_{x_{ij}} n_{z_i} - r_{z_{ij}} n_{x_i}}{r_{ij}} \right) \right\} \right] \Delta S_i = P_{x_i}; \\
 \\
 & \frac{1}{2} P_{x_i}^* - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left[P_{x_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - (1-2\nu) \left(\frac{r_{y_{ij}} n_{x_i} - r_{x_{ij}} n_{y_i}}{r_{ij}} \right) \right\} + \right. \\
 & + P_{y_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) + 3 \frac{r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} + P_{z_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - \right. \\
 & \left. \left. - (1-2\nu) \left(\frac{r_{y_{ij}} n_{z_i} - r_{z_{ij}} n_{y_i}}{r_{ij}} \right) \right\} \right] \Delta S_i = P_{y_i};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} P_{z_i}^* - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left[P_{x_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - (1-2\nu) \left(\frac{r_{z_{ij}} n_{x_i} - r_{x_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}} \right) \right\} + \right. \\
& \quad \left. + P_{y_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} - (1-2\nu) \left(\frac{r_{z_{ij}} n_{y_i} - r_{y_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}} \right) \right\} + \right. \\
& \quad \left. + P_{z_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) + 3 \frac{r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} \right] \Delta S_i = P_{z_i};
\end{aligned}$$

где x_i, y_i, z_i - координаты i -ой граничной точки;

x_j, y_j, z_j - координаты j -ой граничной точки;

$r_{x_{ij}} = x_i - x_j$; $r_{y_{ij}} = y_i - y_j$; $r_{z_{ij}} = z_i - z_j$;

$P_{x_i}, P_{y_i}, P_{z_i}$ - проекция внешних сил на оси координат Ox, Oy, Oz

соответственно;

$n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i}$ - проекция вектора нормали $\bar{n}$ на оси координат Ox, Oy, Oz

соответственно;

$P_{x_i}^*, P_{y_i}^*, P_{z_i}^*$ - фиктивные нагрузки;

ΔS_i - площадь i -го граничного элемента;

$$\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{ij} = \frac{r_{x_{ij}} n_{x_i} + r_{y_{ij}} n_{y_i} + r_{z_{ij}} n_{z_i}}{r_{ij}};$$

$$r_{ij}^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2;$$

N - количество граничных элементов граничной поверхности;

$$i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, N};$$

$$P_{x_i}^* = \int_{\Delta S_i} p_x^* ds; \quad P_{y_i}^* = \int_{\Delta S_i} p_y^* ds; \quad P_{z_i}^* = \int_{\Delta S_i} p_z^* ds;$$

$$P_{x_i} = \int_{\Delta S_i} p_x ds; \quad P_{y_i} = \int_{\Delta S_i} p_y ds; \quad P_{z_i} = \int_{\Delta S_i} p_z ds;$$

ν - коэффициент Пуассона.

Напряжения внутри области моделирования:

$$\sigma_{xx_i} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{x_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{x_{ij}}^3}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + \right. \\ \left. + P_{y_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{y_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} + P_{z_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{z_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \right];$$

$$\sigma_{xy_i} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{y_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} + \right. \\ \left. + P_{y_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{x_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} + P_{z_j}^* \frac{1}{r_{ij}^2} \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \right];$$

$$\sigma_{xz_i} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{z_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + \right. \\ \left. + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + P_{z_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{x_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} \right];$$

$$\sigma_{yy_i} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{x_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + \right. \\ \left. + P_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{y_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{y_{ij}}^3}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + P_{z_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{z_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{y_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} \right];$$

$$\sigma_{yz_i} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + P_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{z_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{y_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + P_{z_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{y_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} \Bigg]; \\
\sigma_{zz_i} = & - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{x_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + \right. \\
& \left. + P_{y_j}^* \left\{ (1-2\nu) \left(-\frac{r_{y_{ij}}}{r_{ij}} \right) + 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} + P_{z_j}^* \left\{ (1-2\nu) \frac{r_{z_{ij}}}{r_{ij}} + 3 \frac{r_{z_{ij}}^3}{r_{ij}^3} \right\} \frac{1}{r_{ij}^2} \right];
\end{aligned}$$

где x_i, y_i, z_i - координаты i -ой внутренней точки;

x_j, y_j, z_j - координаты j -ой граничной точки;

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j; \quad r_{y_{ij}} = y_i - y_j; \quad r_{z_{ij}} = z_i - z_j;$$

$$r_{ij}^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2.$$

На рисунках 9.1 и 9.2 приведены примеры разбивки поверхности тела на четырехугольные элементы.

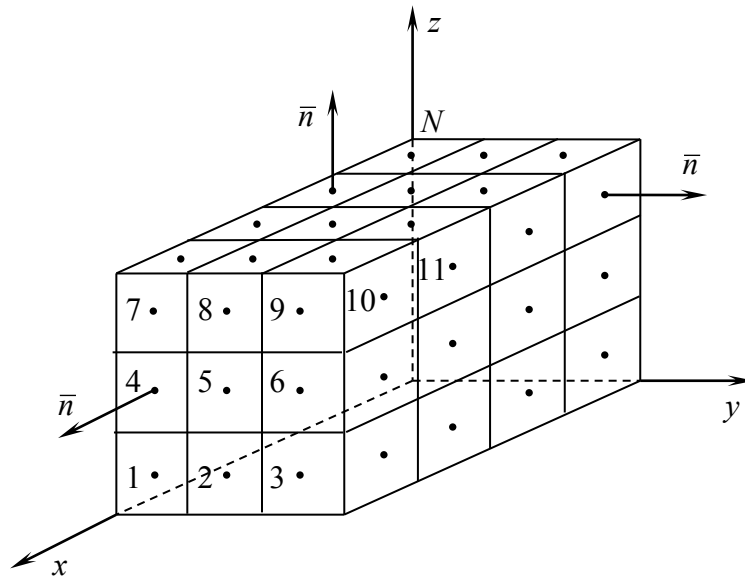


Рисунок 9.1

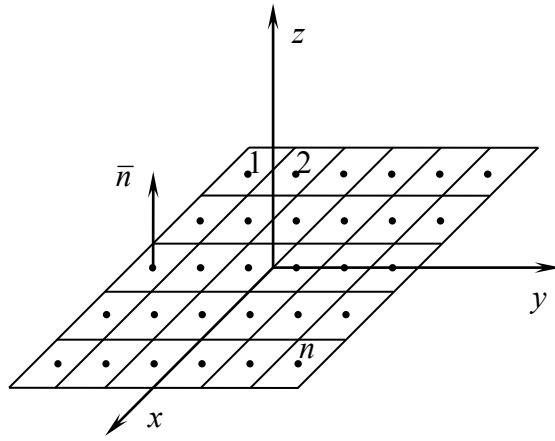


Рисунок 9.2

Здесь N - количество граничных элементов. Предполагаем, что неизвестные функции $\varphi_j(\xi)$ являются постоянными в пределах граничного элемента.

Тогда для p -го граничного элемента можно записать

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi_j(\xi^q) \int_{\Delta S} I_{ij}(x_0^p, \xi^q) ds(\xi^q); \quad (9.6)$$

$$p_i(x_0^p) = \pm \frac{1}{2} \varphi_i(x_0^p) + \sum_{q=1}^N \varphi_k(\xi^q) \int_{\Delta S} F_{ik}(x_0^p, \xi^q) ds(\xi^q), \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (9.7)$$

9.3 Пример

Полупространство, нагруженное вертикальным усилием, при условии, что $\nu = \frac{1}{2}$ (рисунок 9.3).

$P = P_z[k] = -100$ в k -ой граничной точке.

$\frac{1}{2} P_{x_i}^* = P_{x_i}$; $\frac{1}{2} P_{y_i}^* = P_{y_i}$; $\frac{1}{2} P_{z_i}^* = P_{z_i}$ - фиктивные усилия для полупространства и

$$\nu = \frac{1}{2}.$$

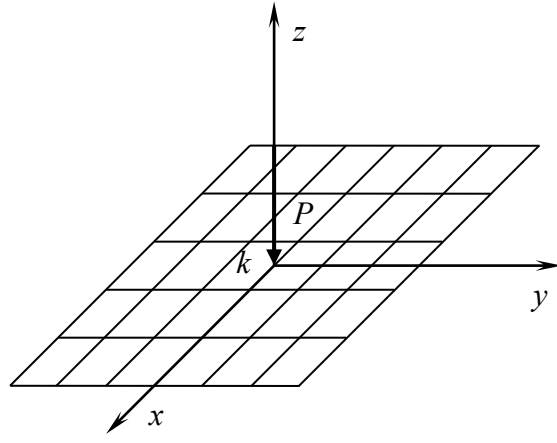


Рисунок 9.3

Для нашей задачи $P_{x_i}^* = 0$; $P_{y_i}^* = 0$; $P_{z_i}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\sigma_{xx_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}}^3}{r_{ij}^5} \right\} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{xy_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{y_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{xz_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{yy_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} \frac{1}{r^2} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}}^3}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{yz_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}}^2 r_{z_{ij}}}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$\sigma_{zz_i} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} \frac{1}{r^2} + P_{y_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^5} \right\} + P_{z_j}^* \left\{ 3 \frac{r_{z_{ij}}^3}{r_{ij}^5} \right\} \right] \Delta S_j;$$

$$i = \overline{1, M};$$

где M - количество внутренних точек;

N - количество граничных элементов;

x_i, y_i, z_i - координаты i -ой внутренней точки;

x_j, y_j, z_j - координаты центра тяжести j -го граничного элемента;

$$r_{x_{ij}} = x_i - x_j; \quad r_{y_{ij}} = y_i - y_j; \quad r_{z_{ij}} = z_i - z_j;$$

$$r_{ij}^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2.$$

$$\frac{1}{2} P_{x_i}^* = P_{x_i}; \quad \frac{1}{2} P_{y_i}^* = P_{y_i}; \quad \frac{1}{2} P_{z_i}^* = P_{z_i}.$$

По условию на поверхность действует только вертикальная сила P_{z_k} на одном элементе $i = k$.

Отсюда

$$P_{x_i}^* = 0; \quad P_{y_i}^* = 0; \quad P_{z_i}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow P_{z_k}.$$

Вычисление смещений внутри области моделирования.

$$u_{x_i} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ (3-4\nu) + \frac{r_{x_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + P_{y_j}^* \left\{ \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + P_{z_j}^* \left\{ \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} \Big] \Delta S_j; \\
u_{y_i} &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ \frac{r_{x_{ij}} r_{y_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + P_{y_j}^* \left\{ (3-4\nu) + \frac{r_{y_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + \right. \\
& \left. + P_{z_j}^* \left\{ \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} \right] \Delta S_j; \\
u_{z_i} &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left[P_{x_j}^* \left\{ \frac{r_{x_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + P_{y_j}^* \left\{ \frac{r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} + \right. \\
& \left. + P_{z_j}^* \left\{ (3-4\nu) + \frac{r_{z_{ij}}^2}{r_{ij}^2} \right\} \frac{1}{r_{ij}} \right] \Delta S_j; \\
& (i = \overline{1, M}),
\end{aligned}$$

где $r_{x_{ij}} = x_i - x_j$; $r_{y_{ij}} = y_i - y_j$; $r_{z_{ij}} = z_i - z_j$;

$$r_{ij}^2 = r_{x_{ij}}^2 + r_{y_{ij}}^2 + r_{z_{ij}}^2;$$

$$r_{ij} = \sqrt{r_{ij}^2};$$

x_i, y_i, z_i - координаты внутренней i -ой точки области;

x_j, y_j, z_j - координаты центра тяжести j -го граничного элемента;

ΔS_j - площадь j -го граничного элемента.

Граничные интегральные уравнения в смещениях

$$u_i(x_0) = \int_{\Delta S} I_{ij}(x_0, \xi) \varphi_j(\xi) ds(\xi)$$

$$(11) \quad u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi_j(\xi^q) \underbrace{\int_{\Delta S} I_{ij}(x_0^p, \xi^q) ds(\xi^q)}_{J_{ij}(x_0^p, \xi) \quad (i=1,3)} - \text{границные интегральные уравнения в}$$

смещениях.

Или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} J_{11}(x_0^p, \xi^q) & J_{12}(x_0^p, \xi^q) & J_{13}(x_0^p, \xi^q) \\ J_{21}(x_0^p, \xi^q) & J_{22}(x_0^p, \xi^q) & J_{23}(x_0^p, \xi^q) \\ J_{31}(x_0^p, \xi^q) & J_{32}(x_0^p, \xi^q) & J_{33}(x_0^p, \xi^q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi^q) \\ \varphi_2(\xi^q) \\ \varphi_3(\xi^q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x_0^p) \\ u_2(x_0^p) \\ u_3(x_0^p) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_j(\xi^q)$ - фиктивные нагрузки;

$u_i(x_0^p)$ - заданные смещения на границе;

x_0^p, ξ^p - координаты центров тяжести граничных элементов.

$$u_{1i} = \sum_{j=1}^N [J_{11}^{ij} \varphi_{1j} + J_{12}^{ij} \varphi_{2j} + J_{13}^{ij} \varphi_{3j}]$$

$$u_{2i} = \sum_{j=1}^N [J_{21}^{ij} \varphi_{1j} + J_{22}^{ij} \varphi_{2j} + J_{23}^{ij} \varphi_{3j}]$$

$$u_{3i} = \sum_{j=1}^N [J_{31}^{ij} \varphi_{1j} + J_{32}^{ij} \varphi_{2j} + J_{33}^{ij} \varphi_{3j}]$$

$$\text{где } J_{11}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) + \frac{r_{xij}^2}{r_{ij}^2} \right] \frac{1}{r_{ij}} \Delta S_j;$$

$$J_{12}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{r_{xij} r_{yij}}{r_{ij}^2} \right] \frac{1}{r_{ij}} \Delta S_j;$$

$$J_{13}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{r_{xij} r_{zij}}{r_{ij}^3} \right] \Delta S_j;$$

$$J_{21}^{ij} = J_{12}^{ij};$$

$$J_{22}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) + \frac{r_{yij}^2}{r_{ij}^2} \right] \frac{1}{r_{ij}} \Delta S_j;$$

$$J_{23}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{r_{yij} r_{zij}}{r_{ij}^3} \right] \Delta S_j;$$

$$J_{31}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{r_{xij} r_{zij}}{r_{ij}^2} \right] \frac{1}{r_{ij}} \Delta S_j$$

$$J_{32}^{ij} = J_{23}^{ij};$$

$$J_{33}^{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) + \frac{r_{zij}^2}{r_{ij}^2} \right] \frac{1}{r_{ij}} \Delta S_j;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ - модуль сдвига;}$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

$$r_{xij} = x_i - x_j; \quad r_{yij} = y_i - y_j; \quad r_{zij} = z_i - z_j;$$

$$r_{ij}^2 = r_{xij}^2 + r_{yij}^2 + r_{zij}^2;$$

$$r_{ij} = \sqrt{r_{ij}^2};$$

x_i, y_i, z_i - координаты центра тяжести i -го граничного элемента;

x_j, y_j, z_j - координаты центра тяжести j -го граничного элемента;

$\varphi_{1j} = P_{xj}^*; \quad \varphi_{2j} = P_{yj}^*; \quad \varphi_{3j} = P_{zj}^*$ - фиктивные нагрузки;

u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} - заданные проекции вектора $\bar{u}$ на границы моделирующей области на оси декартовой системы координат Ox_1, Ox_2, Ox_3 ;

$$\bar{u} = \bar{u}(u_1, u_2, u_3) = \bar{u}(u_x, u_y, u_z).$$

$$A = \begin{pmatrix} A[i, j] & A[i, j + N] & A[i, j + N2] \\ A[i + N, j] & A[i + N, j + N] & A[i + N, j + N2] \\ A[i + N2, j] & A[i + N2, j + N] & A[i + N2, j + N2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}[i, j] & J_{12}[i, j] & J_{13}[i, j] \\ J_{21}[i, j] & J_{22}[i, j] & J_{23}[i, j] \\ J_{31}[i, j] & J_{32}[i, j] & J_{33}[i, j] \end{pmatrix};$$

$$i = \overline{1, N}; j = \overline{1, N}; N2 = N + N.$$

$$\begin{pmatrix} P_{x_i}^* \\ P_{y_i}^* \\ P_{z_i}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x_1}^* \\ \vdots \\ P_{x_n}^* \\ P_{y_1}^* \\ \vdots \\ P_{y_n}^* \\ P_{z_1}^* \\ \vdots \\ P_{z_n}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \psi_{n+1} \\ \vdots \\ \psi_{n2} \\ \psi_{n2} \\ \vdots \\ \psi_{n3} \end{pmatrix} - \text{вектор неизвестных величин (фиктивных нагрузок)};$$

$$u_{1i} = u_{x_i}; u_{2i} = u_{y_i}; u_{3i} = u_{z_i};$$

$$\begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_{y_1} \\ \vdots \\ u_{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{n+1} \\ \vdots \\ B_{n+n} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_{z_1} \\ \vdots \\ u_{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{n2+1} \\ \vdots \\ B_{n2+n} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ u_{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \\ B_{n+1} \\ \vdots \\ B_{n2} \\ B_{n2+1} \\ \vdots \\ B_{n3} \end{pmatrix}.$$

Вычисление сингулярных интегралов в объемной постановке. Определение диагональных элементов.

$J'_{ij} = \int_{\Delta S} I_{ij}(x_0, \xi) ds(\xi)$, когда $x_0 = \xi$, x_0, ξ - центры тяжести граничных элементов.

Введем локальную систему координат. Оси z_1 и z_2 в плоскости элемента и ось z_3 по направлению нормали в рассматриваемом узле.

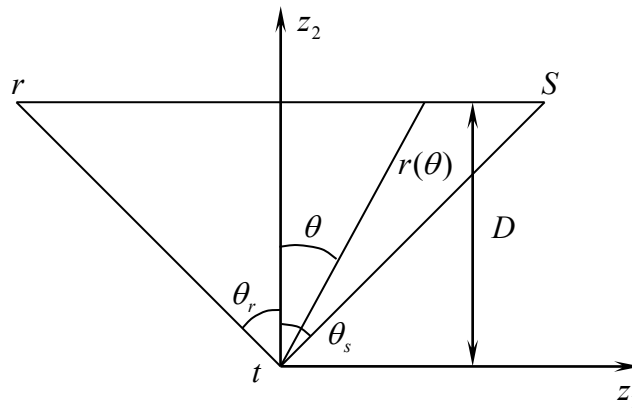


Рисунок 9.4

Тогда

$$\frac{r_i}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \sin \theta \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \cos \theta \frac{\partial z_2}{\partial x_i} = \sin \theta e_{1i} + \cos \theta e_{2i},$$

где $e_{1i} = \cos(z_1, x_i)$, $e_{2i} = \cos(z_2, x_i)$ - направляющие косинусы осей z_1 и z_2 соответственно в глобальной системе координат.

Запишем интеграл в виде

$$J'_{ij} = \int_{\Delta S} I_{ij}(x_0, \xi) ds(\xi) = \int_{-\theta_r}^{\theta_s} \int_0^r A \frac{1}{r} \left[\delta_{ij}(3-4\nu) + \frac{r_i r_j}{r^2} \right] r dr d\theta = \int_{-\theta_r}^{\theta_s} A r(\theta) \left[\delta_{ij}(3-4\nu) + (\sin \theta e_{1i} + \cos \theta e_{2i})(\sin \theta e_{1j} + \cos \theta e_{2j}) \right] d\theta,$$

$$\text{где } A = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}; \quad r(\theta) = \frac{D}{\cos \theta}.$$

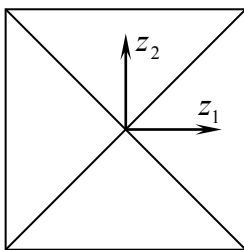
Поэтому

$$J'_{ij} = \int_{\Delta S} I_{ij}(x, \xi) ds(\xi) = DA \left[\delta_{ij}(3-4\nu) \ln(\operatorname{tg} \theta + \sec \theta) + a_{ij} \{ \ln(\operatorname{tg} \theta + \sec \theta) - \sin \theta \} + b_{ij} \cos \theta + c_{ij} \sin \theta \right]_{-\theta_r}^{\theta_s},$$

$$\text{где } a_{ij} = e_{1i} e_{1j}; \quad b_{ij} = -(e_{2i} e_{1j} + e_{1i} e_{2j}); \quad c_{ij} = e_{2i} e_{2j}.$$

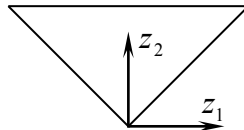
Пример

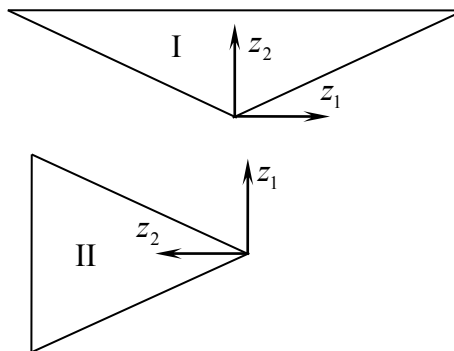
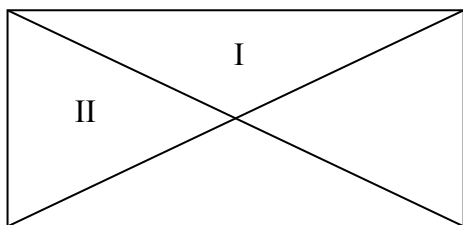
а) Квадрат



$$J_{ii} = 4J'_{ii}$$

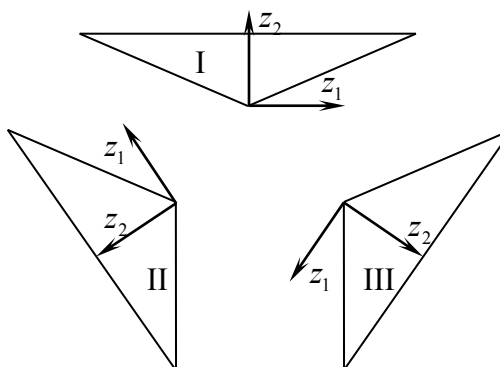
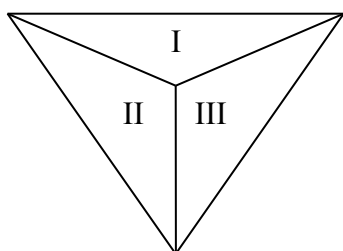
б) Прямоугольник





$$J_{ii} = 2J_{I11}' + 2J_{II11}'$$

в) Треугольник



$$J_{ii} = J_{I11}' + J_{II11}' + J_{III11}'$$

10 Лабораторная работа. Напряженно-деформированное состояние плоской бесконечной полуплоскости от действия вертикальной единичной силы

Цель работы: определить максимальные касательные напряжения в полуплоскости, нагруженной единичной вертикальной силой.

10.1 Ввод граничных значений

На рисунке 10.1 приведена схема воздействия единичной силы на полупространство.

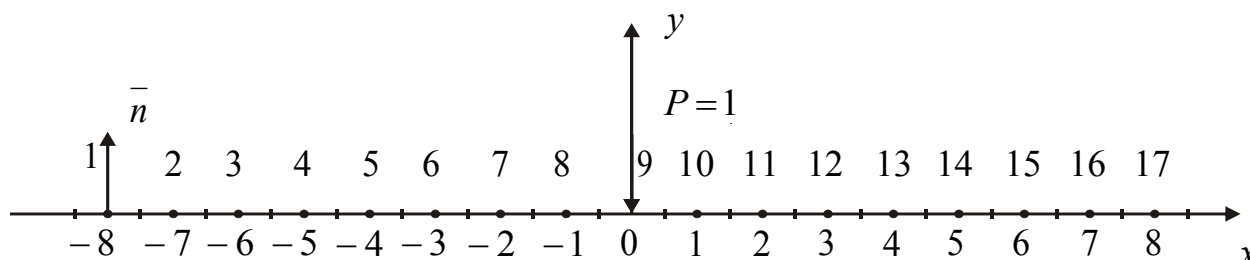


Рисунок 10.1

Разбиваем границу области на граничные элементы и координаты середин граничных элементов (x_i, y_i) , длин граничных элементов S_i , проекции вектора нормали на оси декартовой системы координат OX , OY $n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i)$, $n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i)$ и проекции вектора внешних сил $\bar{P}$ на оси OX , OY заносим в таблицу 1.

Здесь:

$N=17$ - общее количество граничных элементов;

(x_i, y_i) - координаты центров тяжести (середин) граничных элементов;

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали на оси координат OX , OY ;

$n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i)$, $n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i)$;

S_i - длина граничных элементов;

P_{xi}, P_{yi} - проекции вектора внешних сил на оси координат OX , OY

соответственно.

Для всей границы полуплоскости $n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i) = \cos 90^\circ = 0$,
 $n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i) = \cos 0^\circ = 1$.

Таблица 10.1 - Входные данные

N	x_i , см	y_i , см	n_{xi}	n_{yi}	S_i , см	P_{xi} , кгс	P_{yi} , кгс
1	-8	0	0	1	1	0	0
2	-7	0	0	1	1	0	0
3	-6	0	0	1	1	0	0
4	-5	0	0	1	1	0	0
5	-4	0	0	1	1	0	0
6	-3	0	0	1	1	0	0
7	-2	0	0	1	1	0	0
8	-1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	1	1	0	-1
10	1	0	0	1	1	0	0
11	2	0	0	1	1	0	0
12	3	0	0	1	1	0	0
13	4	0	0	1	1	0	0
14	5	0	0	1	1	0	0
15	6	0	0	1	1	0	0
16	7	0	0	1	1	0	0
17	8	0	0	1	1	0	0

10.2 Ввод координат внутренних точек (x_k, y_k)

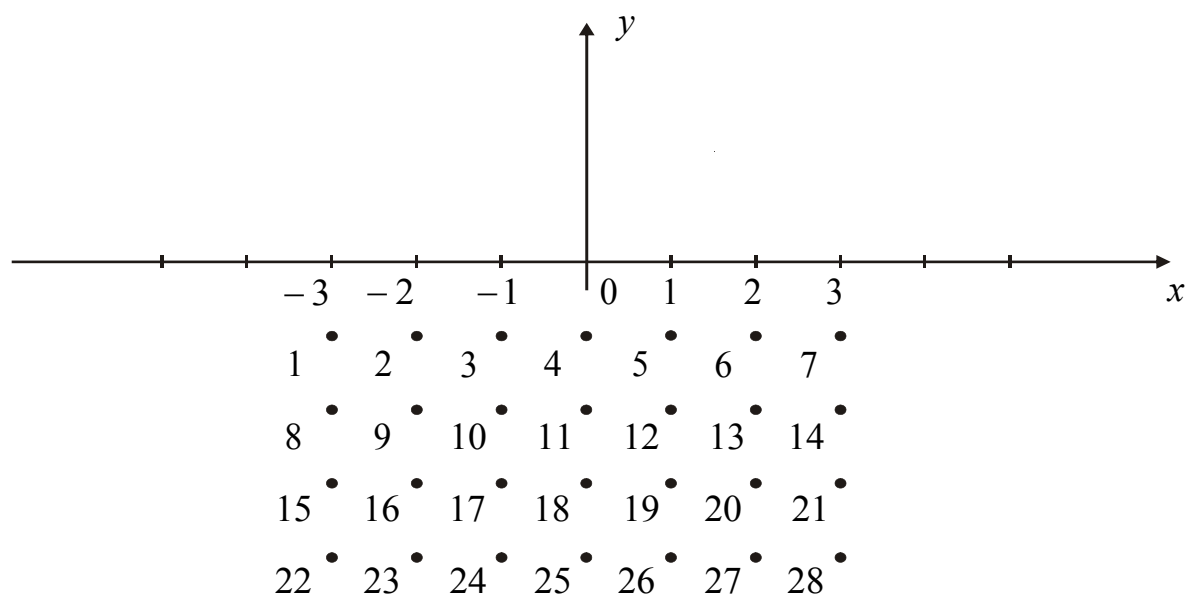


Рисунок 10.2

На рисунке 10.2 приведены внутренние точки, в которых определяем напряжения.

Координаты внутренних точек заносим в таблицу 10.2.

Таблица 10.2 - Координаты внутренних точек

M	x_k	y_k
1	-3	-1
2	-2	-1
3	-1	-1
4	0	-1
5	1	-1
6	2	-1
7	3	-1
8	-3	-2
9	-2	-2
10	-1	-2

M	x_k	y_k
11	0	-2
12	1	-2
13	2	-2
14	3	-2
15	-3	-3
16	-2	-3
17	-1	-3
18	0	-3
19	1	-3
20	2	-3

M	x_k	y_k
21	3	-3
22	-3	-4
23	-2	-4
24	-1	-4
25	0	-4
26	1	-4
27	2	-4
28	3	-4

M - количество внутренних точек;

(x_k, y_k) - координаты k -ой внутренней точки.

10.3 Метод фиктивных нагрузок

10.3.1 Граничные интегральные уравнения, представленные в виде линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N AXX_{ij} P_{xj}^* + \sum_{j=1}^N AXY_{ij} P_{yj}^* = PX_i,$$

$$(i = \overline{1, N})$$

(10.1)

$$\sum_{j=1}^N AYX_{ij} P_{xj}^* + \sum_{j=1}^N AYY_{ij} P_{yj}^* = PY_i,$$

где

$$AXX_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) + 2 \frac{r_{xij}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$AXY_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{n_{yi} r_{xij} - n_{xi} r_{yij}}{r^2} \right] + 2 \frac{r_{xij} r_{yij}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$AYX_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{n_{xi} r_{yij} - n_{yi} r_{xij}}{r^2} \right] + 2 \frac{r_{xij} r_{yij}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$A_{YY_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) + 2\frac{r_{yij}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad (10.2)$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{n_{xi}r_{xij} + n_{yi}r_{yij}}{r^2};$$

$$r_{xij} = x_i - x_j; \quad r_{yij} = y_i - y_j; \quad r^2 = r_{xij}^2 + r_{yij}^2;$$

(x_i, y_i) - координата центра тяжести (середины) i -го граничного элемента;

(x_j, y_j) - координата центра тяжести (середины) j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали $\bar{n}$ на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно;

$$n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i), \quad n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i);$$

S_i - длина граничных элементов;

ν - коэффициент Пуассона;

PX_i, PY_i - проекции вектора внешних сил на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно;

P_{xj}^*, P_{yj}^* - неизвестная фиктивная нагрузка.

10.3.2 Напряжения внутри области моделирования

$$\sigma_{xxi} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{xj}^* \left\{ (1-2\nu) r_{xij} + 2\frac{r_{xij}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + P_{yj}^* \left\{ -(1-2\nu) r_{yij} + 2\frac{r_{xij}^2 r_{yij}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right],$$

$$\sigma_{xyi} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{xj}^* \left\{ (1-2\nu) r_{yij} + 2\frac{r_{xij}^2 r_{yij}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + P_{yj}^* \left\{ (1-2\nu) r_{xij} + 2\frac{r_{xij} r_{yij}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right]$$

,

$$\sigma_{yyi} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[P_{xj}^* \left\{ -(1-2\nu) r_{xij} + 2 \frac{r_{xij} r_{yij}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + P_{yj}^* \left\{ (1-2\nu) r_{yij} + 2 \frac{r_{yij}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right] ,$$

$$(i = \overline{1, M}) \quad (10.3)$$

где

M - количество внутренних точек;

$r_{xij} = x_i - x_j$;

$r_{yij} = y_i - y_j$;

(x_i, y_i) - координата i -ой внутренней точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки.

Главные нормальные напряжения:

$$\sigma_{1i} = \frac{\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi}}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_{xxi} - \sigma_{yyi})^2}{4} + \sigma_{xyi}^2} , \quad (10.4)$$

$$\sigma_{2i} = \frac{\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi}}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_{xxi} - \sigma_{yyi})^2}{4} + \sigma_{xyi}^2} .$$

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{\max i} = \frac{1}{2}(\sigma_{1i} - \sigma_{2i}) = \sqrt{\frac{(\sigma_{xxi} - \sigma_{yyi})^2}{4} + \sigma_{xyi}^2} . \quad (10.5)$$

10.4 Алгоритм расчета

10.4.1 Ввод входных данных из таблицы 10.1 ($N, x_i, y_i, n_{xi}, n_{yi}, S_i, P_{xi},$

P_{yi}), таблицы 10.2 (M, x_k, y_k) и $\nu = 0,3$.

10.4.2 Формирование элементов матрицы A и вектор-столбцов B, Z

Элементы матрицы A формируются на основе формул (10.2).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} AXX_{11} & \dots & AXX_{1N} & AXY_{11} & \dots & AXY_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{AXX_{N1}}{AYX_{11}} & \dots & \frac{AXX_{NN}}{AYX_{1N}} & \frac{AXY_{N1}}{AYY_{11}} & \dots & \frac{AXY_{NN}}{AYY_{1N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A Y X_{N1} & \dots & A Y X_{NN} & A Y Y_{N1} & \dots & A Y Y_{NN} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A(i,j)}{A(i+N,j)} & \frac{A(i,j+N)}{A(i+N,j+N)} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \dots & A_{1N} & A_{1,N+1} & \dots & A_{1,N+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{N1}}{A_{1+N,1}} & \dots & \frac{A_{NN}}{A_{1+N,N}} & \frac{A_{N,N+1}}{A_{1+N,1+N}} & \dots & \frac{A_{N,N+N}}{A_{1+N,N+N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N+N,1} & \dots & A_{N+N,N} & A_{N+N,1+N} & \dots & A_{N+N,N+N} \end{array} \right).$$

Замечание

Все элементы матрицы A_{ij} формируются при условии, что i и j изменяются от 1 до N , т.е. $i = \overline{1, N}$ и $j = \overline{1, N}$.

Столбец свободных членов B выбирается из таблицы 10.1.

$$B = \begin{pmatrix} PX_1 \\ \dots \\ \frac{PX_N}{PY_1} \\ \dots \\ PY_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \frac{b_N}{b_{N+1}} \\ \dots \\ b_{N+N} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} P_{x1}^* \\ \dots \\ \frac{P_{xN}^*}{P_{y1}^*} \\ \dots \\ P_{yN}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ \frac{z_N}{z_{N+1}} \\ \dots \\ z_{N+N} \end{pmatrix},$$

где

B - столбец свободных членов;

Z - столбец неизвестных величин;

$P_{xi} = PX_i$, $P_{yi} = PY_i$ ($i = \overline{1, N}$).

10.4.3 Решение системы линейных уравнений

Для решения системы линейных уравнений использовать метод Гаусса или любой другой метод.

$$\begin{cases} A_{11}z_1 + \dots + A_{1,N+N}z_{N+N} = b_1, \\ \dots \\ A_{N+N,1}z_1 + \dots + A_{N+N,N+N}z_{N+N} = b_{N+N}. \end{cases}$$

10.4.4 Определение напряжений во внутренних точках моделируемой области

На основе найденных неизвестных величин $z_1, z_2, \dots, z_{N+N}$ и таблиц 10.1 и 10.2 определяем напряжения $\sigma_{xx}(k)$, $\sigma_{xy}(k)$, $\sigma_{yy}(k)$ во внутренних k -ых точках:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(k) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[z(j) \left\{ (1-2\nu) r_{xkj} + 2 \frac{r_{xkj}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + z(i+N) \left\{ -(1-2\nu) r_{yjk} + 2 \frac{r_{xkj}^2 r_{yjk}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right], \\ \sigma_{xy}(k) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[z(j) \left\{ (1-2\nu) r_{yjk} + 2 \frac{r_{xkj}^2 r_{yjk}}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + z(j+N) \left\{ (1-2\nu) r_{xkj} + 2 \frac{r_{xkj} r_{yjk}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right], \\ \sigma_{yy}(k) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \left[z(j) \left\{ -(1-2\nu) r_{xkj} + 2 \frac{r_{xkj} r_{yjk}^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + z(j+N) \left\{ (1-2\nu) r_{yjk} + 2 \frac{r_{yjk}^3}{r^2} \right\} \frac{1}{r^2} \right], \quad (i = \overline{1, M})\end{aligned}$$

где

(x_k, y_k) - координаты k -ой внутренней точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки;

$$r_{xkj} = x_k - x_j;$$

$$r_{yjk} = y_k - y_j;$$

M - количество внутренних точек.

10.4.5 Определение главных напряжений $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k)$ и максимального касательного напряжения $\tau_{\max}(k)$

Используя значения напряжений $\sigma_{xx}(k)$, $\sigma_{xy}(k)$, $\sigma_{yy}(k)$ в k -ых внутренних точках, определенных в пункте 10.4.4 на основании формул (10.4) и (10.5), определяем:

$$\sigma_1(k) = \frac{\sigma_{xx}(k) + \sigma_{yy}(k)}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_{xx}(k) - \sigma_{yy}(k))^2}{4} + \sigma_{xy}^2(k)},$$

$$\sigma_2(k) = \frac{\sigma_{xx}(k) + \sigma_{yy}(k)}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_{xx}(k) - \sigma_{yy}(k))^2}{4} + \sigma_{xy}^2(k)},$$

$$\tau_{\max}(k) = \frac{1}{2}(\sigma_1(k) - \sigma_2(k)) = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx}(k) - \sigma_{yy}(k))^2}{4} + \sigma_{xy}^2(k)}.$$

10.4.6 Выдача результата

Выдача результатов представляется в виде таблицы 10.3 и построении изолиний максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}(k)$.

Таблица 10.3

M	x_k	y_k	$\tau_{\max}(k)$
1			
...			
...			
...			
M			

Для изображения изолиний, показанных на рисунке 3, отметим найденные численные значения $\tau_{\max}(k)$ для каждой внутренней точки (рисунок 10.2). Соединим одинаковые или приближенные значения $\tau_{\max}(k)$. Полученные изолинии будут представлять собой полуокружности или окружности.

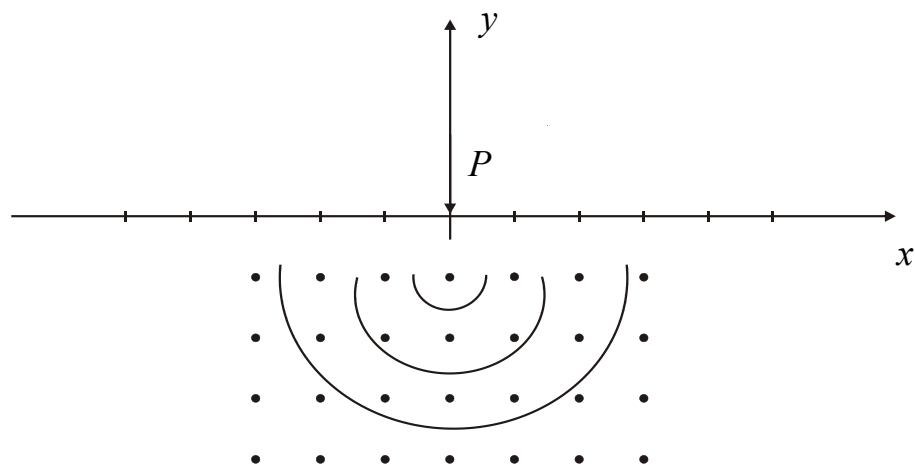


Рисунок 10.3

11 Лабораторная работа. Кручение призматических стержней

На рисунке 11.1 приведёно чистое кручение призматического стержня.

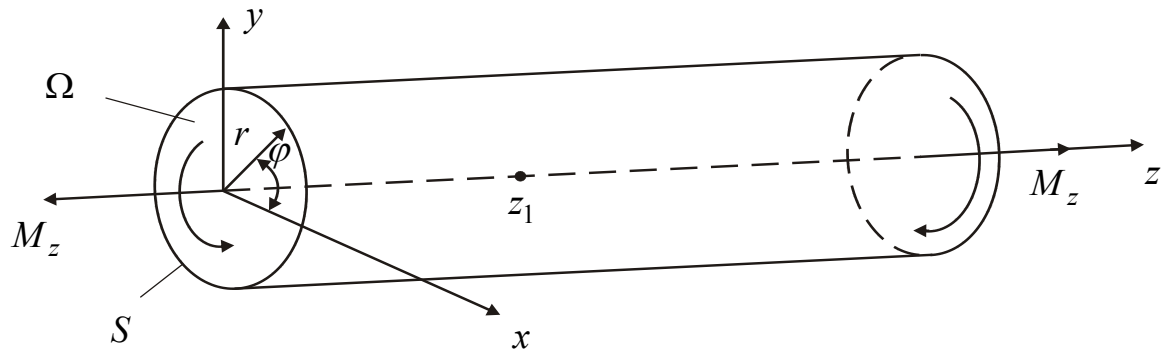


Рисунок 11.1

Здесь Ω - область; S - граница области Ω ; M_z - крутящий момент; z_1 - значение координаты z .

11.1 Постановка задачи

Решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (11.1)$$

с заданными на границе условиями

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n} \right|_S = [y \cos(n, x) - x \cos(n, y)]_S, \quad (11.2)$$

где

$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n}$ - нормальная производная;

x, y - координаты точек, заданные на границе области Ω ;

n - вектор нормали к границе области Ω .

Таким образом, задача кручения является краевой задачей Неймана.

Крутящий момент M_z в условия (11.1) и (11.2) не входит.

Цель работы - определить касательные напряжения во внутренних точках области Ω :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} = \tau_{zx} &= G\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right),\end{aligned}\quad (11.3)$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{модуль сдвига};$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

$$\theta = \varphi / z;$$

r, φ - координаты точек;

z - значение координаты по оси OZ ;

x, y - координаты внутренней области Ω .

11.2 Граничные интегральные уравнения

В результате дискретизации границ, когда фиктивный источник φ_j на границе считается постоянным в пределах каждого граничного элемента, граничные интегральные уравнения принимают вид

$$-\frac{1}{2}\varphi_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \left[\frac{r_{xij}n_{xi} + r_{yij}n_{yi}}{r^2} \right] S_j = u_i, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (11.4)$$

где

$$u_i = y_i n_{xi} - x_i n_{yi};$$

$$r_{xij} = x_i - x_j;$$

$$r_{yij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{xij}^2 + r_{yij}^2;$$

S_j - длина j -го граничного элемента;

(x_i, y_i) - координата центра тяжести (середина элемента) i -го

граничного элемента;

(x_j, y_j) - координата центра тяжести j - го граничного элемента;

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали на оси координат OX, OY в i - ой точке центра тяжести;

$$n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i), \quad n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i);$$

φ_i, φ_j - неизвестный фиктивный источник;

N - количество граничных элементов.

11.3 Значения функции $\Phi(x, y)$ и касательные напряжения

Значения функции $\Phi(x, y)$ и касательные напряжения во внутренних точках области Ω определяются по следующим формулам:

$$\Phi(k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \ln(r) S_j, \quad (k = \overline{1, M})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{r_{xkj}}{r^2} \varphi_j S_j;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{r_{yjk}}{r^2} \varphi_j S_j;$$

$$\tau_{xz}(k) = G\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - y_k \right); \quad (11.5)$$

$$\tau_{yz}(k) = G\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + x_k \right); \quad (11.6)$$

где

$\Phi(k) = \Phi_k$ - значение функции в k -ой внутренней области Ω ;

$$r_{xkj} = x_k - x_j;$$

$$r_{yjk} = y_k - y_j;$$

$$r^2 = r_{xkj}^2 + r_{yjk}^2;$$

(x_k, y_k) - координата k – ой внутренней точки;
 (x_j, y_j) - координата j – ой граничной точки;
 S_j - длина j – го граничного элемента;
 $\tau_{xz}(k), \tau_{yz}(k)$ - значения касательных напряжений в k – ой внутренней точке;
 N - количество граничных элементов;
 φ_j - значение известного фиктивного источника.

11.4 Алгоритм решения задачи

11.4.1 Ввод входных данных

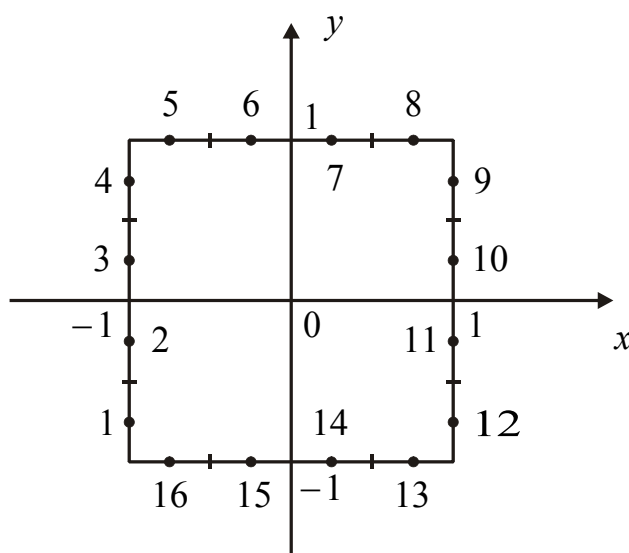


Рисунок 11.2

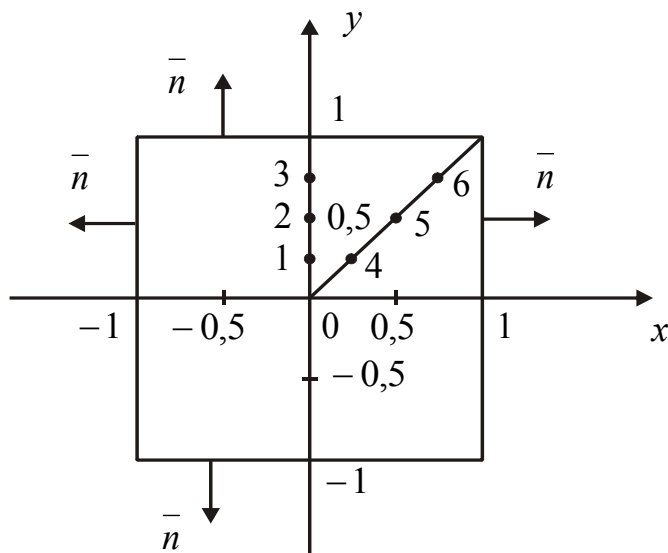


Рисунок 11.3

Таблица 11.1

N	x_i , см	y_i , см	n_{xi}	n_{yi}	S , см
1	-1	-0,75	-1	0	0,5
2	-1	-0,25	-1	0	0,5
3	-1	0,25	-1	0	0,5
4	-1	0,75	-1	0	0,5
5	-0,75	1	0	1	0,5
6	-0,25	1	0	1	0,5
7	0,25	1	0	1	0,5
8	0,75	1	0	1	0,5

9	1	0,75	1	0	0,5
10	1	0,25	1	0	0,5
N	x_i , см	y_i , см	n_{xi}	n_{yi}	S , см
11	1	-0,25	1	0	0,5
12	1	-0,75	1	0	0,5
13	0,75	-1	0	-1	0,5
14	0,25	-1	0	-1	0,5
15	-0,25	-1	0	-1	0,5
16	-0,75	-1	0	-1	0,5

N - количество граничных элементов (в данной задаче $N=16$);

(x_j, y_j) - координаты граничных точек ($j=1,2,\dots,N$);

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали на оси декартовой системы координат

OX, OY ($i=1,2,\dots,N$);

Таблица 11.2

M	x_k	y_k
1	0	0,25
2	0	0,5
3	0	0,75
4	0,25	0,25
5	0,5	0,5
6	0,75	0,75

M - количество внутренних точек;

(x_k, y_k) - координаты внутренних точек;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига;

$E=10^5$ - модуль Юнга;

$\nu=0,2$ - коэффициент Пуассона;

$z_1=100$ см;

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ для внутренних точек $k=1, 2, 3$;

$\varphi = \frac{\varphi}{4}$ для внутренних точек $k=4, 5, 6$.

$$\theta = \frac{\varphi}{z_1}.$$

11.4.2 Ввод граничных значений функции u_i (свободный член в системе (11.4))

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n} \right|_S = u_i = y_i n_{xi} - x_i n_{yi},$$

где x_i, y_i, n_{xi}, n_{yi} - значения таблицы 1.

11.4.3 Формирование элементов матрицы уравнений (4) и вектор столбцов

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } i = j; \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{xij} n_{xi} + r_{yij} n_{yi}}{r^2} \right] S_j, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$r_{xij} = x_i - x_j; \quad r_{yij} = y_i - y_j; \quad r^2 = r_{xij}^2 + r_{yij}^2.$$

Значения $x_i, y_i, n_{xi}, n_{yi}, S_j$ - берутся из таблицы 11.1.

$$z = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix} - \text{вектор неизвестных величин, определяемый из (11.4).}$$

$$B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix} \text{ - вектор входных величин, формирующихся в пункте б)}$$

алгоритма.

11.4.4 Решение системы линейных алгебраических уравнений

[illegible]

11.4.5 Вычисление касательных напряжений во внутренних точках области

$$\Phi(k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N z_j (\ln r) S_j, \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

$$\frac{\partial \Phi(k)}{\partial x_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{r_{xkj}}{r^2} z_j S_j,$$

$$\frac{\partial \Phi(k)}{\partial y_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{r_{ykj}}{r^2} z_j S_j,$$

$$\tau_{xz}(k) = G\theta \left(\frac{\partial \Phi(k)}{\partial x_k} - y_k \right),$$

$$\tau_{yz}(k) = G\theta \left(\frac{\partial \Phi(k)}{\partial y_k} + x_k \right),$$

$$r_{xkj} = x_k - x_j; \quad r_{yjk} = y_k - y_j; \quad r^2 = r_{xkj}^2 + r_{yjk}^2,$$

(x_k, y_k) - координата k - ой внутренней точки (из таблицы 11.2);

(x_j, y_j) - координата центра тяжести (середина) j - го граничного элемента (берется из таблицы 11.1);

S_j - длина j -го граничного элемента (значения приведены в таблице 11.1);

z_j - значения, определенные из системы линейных алгебраических уравнений
г).

Определить значения касательных напряжений:

- $\tau_{xz}(k)$ в точках $k = 1, 2, 3$;

- $\tau_{yz}(k)$ в точках $k = 4, 5, 6$.

Здесь $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ - номера внутренних точек.

Выдача результатов на печать и графическая интерпретация результатов расчета.

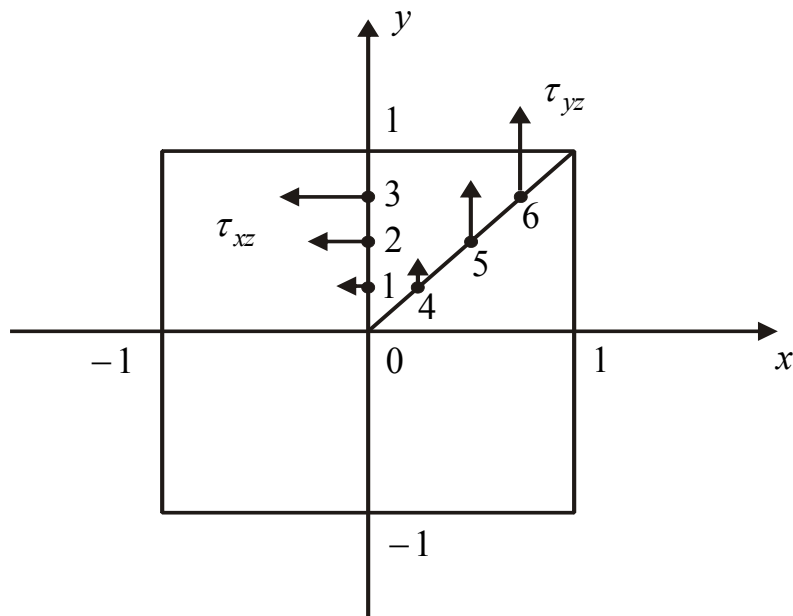
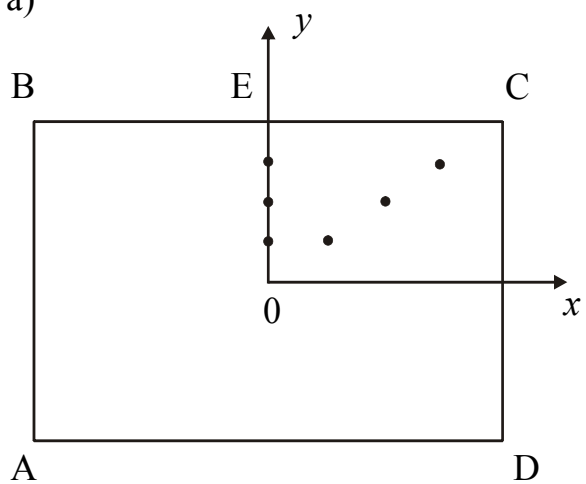
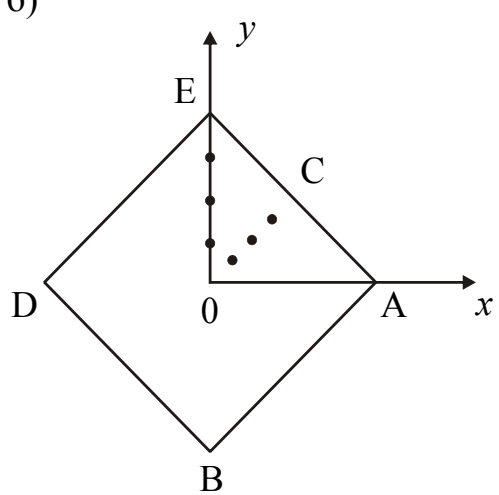


Рисунок 11.4

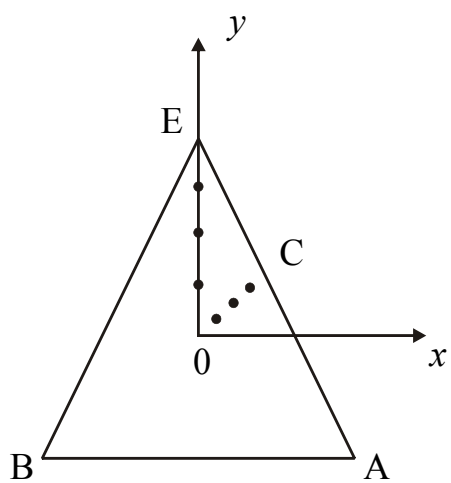
a)



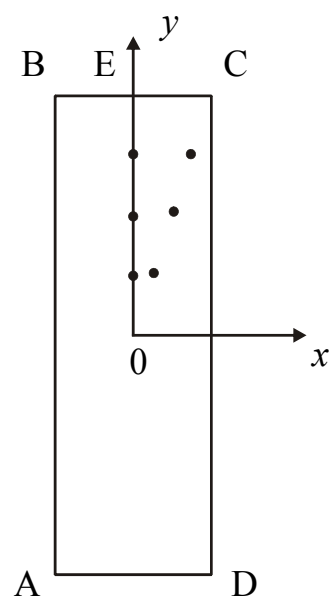
б)



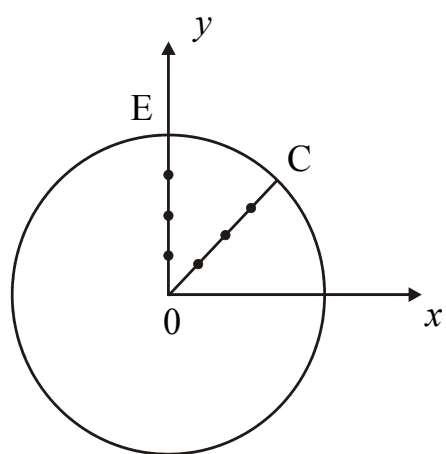
в)



г)



д)



е)

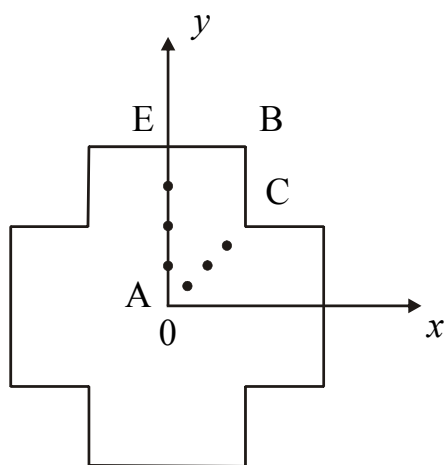


Рисунок 11.5

12 Лабораторная работа. Напряженно-деформированное состояние конечного тела (балки) под действием вертикальных нагрузок

Цель работы: определить смещение в балке по оси параллельной оси OX .

12.1 Ввод граничных значений

На рисунке 12.1 приведена схема воздействия вертикальных усилий действующих на балку (конечное тело).

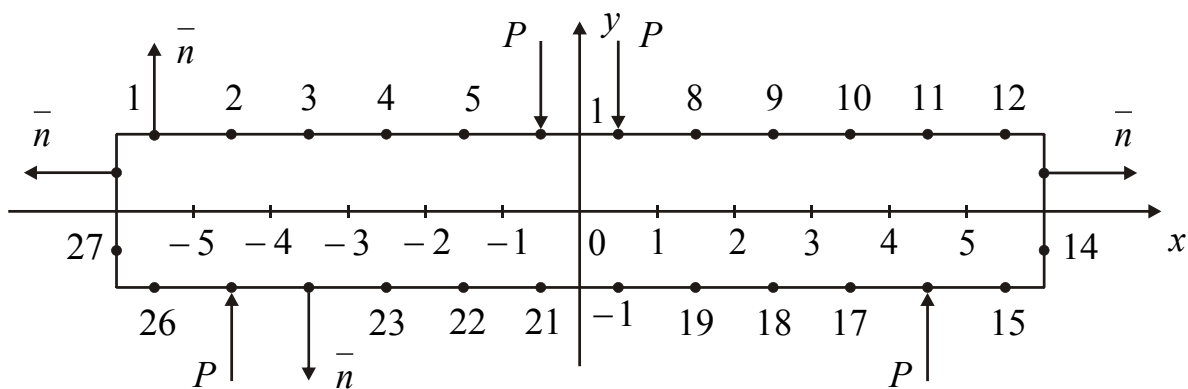


Рисунок 12.1

Разбиваем границу области на граничные элементы и координаты середин граничных элементов (x_i, y_i) , длин граничных элементов S_i , проекции вектора нормали на оси декартовой системы координат OX , OY $n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i)$, $n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i)$ и проекции вектора внешних сил $\bar{P}$ на оси OX , OY заносим в таблицу 12.1.

Здесь:

$N = 28$ - общее количество граничных элементов;

(x_i, y_i) - координаты центров тяжести (середин) граничных элементов;

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали на оси координат OX , OY ;

$n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i)$, $n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i)$.

S_i - длина граничных элементов;

P_{xi}, P_{yi} - проекции вектора внешних сил на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно.

Таблица 12.1 - Входные данные

N	x_i , см	y_i , см	n_{xi}	n_{yi}	S_i , см	P_{xi} , кгс	P_{yi} , кгс
1	- 5,5	1	0	1	1	0	0
2	- 4,5	1	0	1	1	0	0
3	- 3,5	1	0	1	1	0	0
4	- 2,5	1	0	1	1	0	0
5	- 1,5	1	0	1	1	0	0
6	- 0,5	1	0	1	1	0	- 1000
7	0,5	1	0	1	1	0	- 1000
8	1,5	1	0	1	1	0	0
9	2,5	1	0	1	1	0	0
10	3,5	1	0	1	1	0	0
11	4,5	1	0	1	1	0	0
12	5,5	1	0	1	1	0	0
13	6	0,5	1	0	1	0	0
14	6	- 0,5	1	0	1	0	0
15	5,5	- 1	0	- 1	1	0	0
16	4,5	- 1	0	- 1	1	0	1000
17	3,5	- 1	0	- 1	1	0	0
18	2,5	- 1	0	- 1	1	0	0
19	1,5	- 1	0	- 1	1	0	0
20	0,5	- 1	0	- 1	1	0	0
21	- 0,5	- 1	0	- 1	1	0	0
22	- 1,5	- 1	0	- 1	1	0	0
23	- 2,5	- 1	0	- 1	1	0	0
24	- 3,5	- 1	0	- 1	1	0	0
25	- 4,5	- 1	0	- 1	1	0	1000
26	- 5,5	- 1	0	- 1	1	0	0
27	- 6	- 0,5	- 1	0	1	0	0
28	- 6	0,5	- 1	0	1	0	0

12.2 Ввод координат внутренних точек (x_k, y_k)

На рисунке 12.2 приведены внутренние точки, в которых определяем

проекции вектора смещений u_{xk}, u_{yk} .

В таблице 12.2 указаны координаты внутренних точек.

$M = 11$ - количество внутренних точек;

(x_k, y_k) - координаты k -ой внутренней точки.

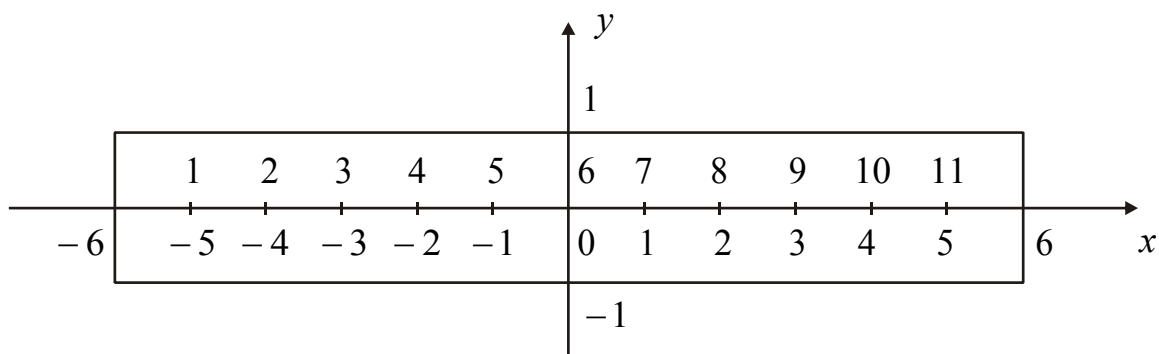


Рисунок 12.2

Таблица 12.2 - Координаты внутренних точек

M	x_k , см	y_k , см
1	- 5	0
2	- 4	0
3	- 3	0
4	- 2	0
5	- 1	0
6	0	0
7	1	0
8	2	0
9	3	0
10	4	0
11	5	0

12.3 Метод фиктивных нагрузок

12.3.1 Граничные интегральные уравнения, представленные в виде линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N AXX_{ij} P_{xj}^* + \sum_{j=1}^N AXY_{ij} P_{yj}^* = PX_i,$$

$$(i = \overline{1, N}) \quad (12.1)$$

$$\sum_{j=1}^N A Y X_{ij} P_{xj}^* + \sum_{j=1}^N A Y Y_{ij} P_{yj}^* = P Y_i,$$

где

$$A X X_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) + 2 \frac{r_{xij}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$A X Y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{n_{yi} r_{xij} - n_{xi} r_{yij}}{r^2} \right] + 2 \frac{r_{xij} r_{yij}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$A Y X_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{n_{xi} r_{yij} - n_{yi} r_{xij}}{r^2} \right] + 2 \frac{r_{xij} r_{yij}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$A Y Y_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } i = j; \\ -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) + 2 \frac{r_{yij}^2}{r^2} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} S_i, & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad (12.2)$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{n_{xi} r_{xij} + n_{yi} r_{yij}}{r^2};$$

$$r_{xij} = x_i - x_j; \quad r_{yij} = y_i - y_j; \quad r^2 = r_{xij}^2 + r_{yij}^2;$$

(x_i, y_i) - координата центра тяжести (середины) i -го граничного элемента;

(x_j, y_j) - координата центра тяжести (середины) j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

n_{xi}, n_{yi} - проекции вектора нормали $\bar{n}$ на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно;

$$n_{xi} = \cos(\bar{n}, x_i), n_{yi} = \cos(\bar{n}, y_i);$$

S_i - длина граничных элементов;

ν - коэффициент Пуассона;

PX_i, PY_i - проекции вектора внешних сил на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно;

P_{xj}^*, P_{yj}^* - неизвестная фиктивная нагрузка.

12.3.2 Смещение внутри области моделирования

$$u_{xk} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left\{ P_{xj}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{xkj}^2}{r^2} \right] P_{yj}^* \left[-\frac{r_{xkj}r_{yjk}}{r^2} \right] \right\},$$

$$u_{yk} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \sum_{j=1}^N \left\{ P_{xj}^* \left[-\frac{r_{xkj}r_{yjk}}{r^2} \right] + P_{yj}^* \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{r_{yjk}^2}{r^2} \right] \right\},$$
(12.3)

где

u_{xk}, u_{yk} - проекции вектора смещений $\bar{u}$ в k -ой внутренней точке на оси декартовой системы координат OX, OY соответственно;

$$r_{xkj} = x_k - x_j; \quad r_{yjk} = y_k - y_j; \quad r^2 = r_{xkj}^2 + r_{yjk}^2;$$

(x_k, y_k) - координата k -ой внутренней точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки (середина j -го граничного элемента);

N - количество граничных элементов;

$k = 1, 2, \dots, M$;

M - количество внутренних точек;

P_{xj}^*, P_{yj}^* - фиктивные нагрузки;

ν - коэффициент Пуассона;

$\nu = 0,3$;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{модуль сдвига};$$

$$E = 30000 \frac{\text{кг с}}{\text{см}^2} - \text{модуль Юнга.}$$

12.4 Алгоритм расчета

12.4.1 Ввод входных данных

Из таблиц 12.1 и 12.2 ввести входные данные N , x_i , y_i , n_{xi} , n_{yi} , S_i , P_{xi} , P_{yi} и M , x_k , y_k , $\nu = 0,3$, $E = 30000 \frac{\text{кг с}}{\text{см}^2}$.

12.4.2 Формирование элементов матрицы A и вектор-столбцов B , Z

Элементы матрицы A формируются на основе формул (12.2)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} AXX_{11} & \dots & AXX_{1N} & AXY_{11} & \dots & AXY_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{AXX_{N1}}{AYX_{11}} & \dots & \frac{AXX_{NN}}{AYX_{1N}} & \frac{AXY_{N1}}{AYY_{11}} & \dots & \frac{AXY_{NN}}{AYY_{1N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{AYX_{N1}}{AYX_{11}} & \dots & \frac{AYX_{NN}}{AYX_{1N}} & \frac{AYY_{N1}}{AYY_{11}} & \dots & \frac{AYY_{NN}}{AYY_{1N}} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{A(i,j)}{A(i+N,j)} & \frac{A(i,j+N)}{A(i+N,j+N)} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \dots & A_{1N} & A_{1,N+1} & \dots & A_{1,N+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{N1}}{A_{1+N,1}} & \dots & \frac{A_{NN}}{A_{1+N,N}} & \frac{A_{N,N+1}}{A_{1+N,1+N}} & \dots & \frac{A_{N,N+N}}{A_{1+N,N+N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{N+N,1}}{A_{1+N,1}} & \dots & \frac{A_{N+N,N}}{A_{1+N,N}} & \frac{A_{N+N,1+N}}{A_{1+N,1+N}} & \dots & \frac{A_{N+N,N+N}}{A_{1+N,N+N}} \end{array} \right).$$

Замечание

Все элементы матрицы A_{ij} формируются при условии, что i и j изменяются от 1 до N , т.е. $i = \overline{1, N}$ и $j = \overline{1, N}$.

Столбец свободных членов B выбирается из таблицы 12.1.

$$B = \begin{pmatrix} PX_1 \\ \dots \\ \frac{PX_N}{PY_1} \\ \dots \\ PY_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \frac{b_N}{b_{N+1}} \\ \dots \\ b_{N+N} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} P_{x1}^* \\ \dots \\ \frac{P_{xN}^*}{P_{y1}^*} \\ \dots \\ P_{yN}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ \frac{z_N}{z_{N+1}} \\ \dots \\ z_{N+N} \end{pmatrix},$$

где

B - столбец свободных членов;

Z - столбец неизвестных величин;

$$P_{xi} = PX_i, \quad P_{yi} = PY_i \quad (i = \overline{1, N}).$$

12.4.3 Решение системы линейных уравнений

Для решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A_{11}z_1 + \dots + A_{1,N+N}z_{N+N} = b_1, \\ \vdots \\ A_{N+N,1}z_1 + \dots + A_{N+N,N+N}z_{N+N} = b_{N+N}. \end{cases}$$

использовать метод Гаусса или любой другой метод.

12.4.4 Определение смещений во внутренних точках моделируемой области

На основе выражений (12.3), используя найденные неизвестные величины $z_1, z_2, \dots, z_{N+N}$ и данные таблицы 12.2, определяем смещения u_{xk} , u_{yk} во внутренних k -ых точках.

12.4.5 Выдача результата

Выдача результата представляется в виде таблицы 12.3 и построения вектора смещений $\bar{u} = \bar{u}(u_x, u_y)$ на оси OX (при $y = 0$) во внутренних k -ых точках.

Таблица 12.3

M	x_k	y_k	u_{xk}	u_{yk}
1				
...				
...				
...				
M				

На рисунке 12.3 приведены примерные направления вектора смещений, т.е. направления проекций u_{xk} , u_{yk} вектора смещений, при изгибе балки.

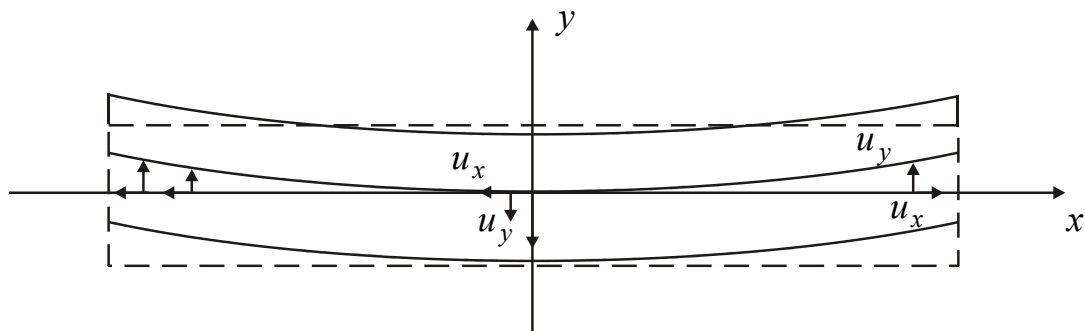
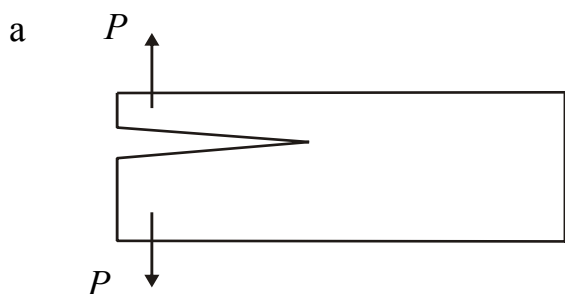


Рисунок 12.3

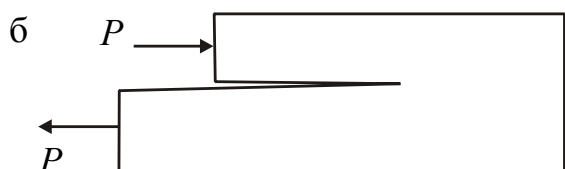
13 Лабораторная работа. Критерии локального разрушения

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), предложенные Дж. Ирвином, являются характеристиками напряженности материала у вершины трещины.

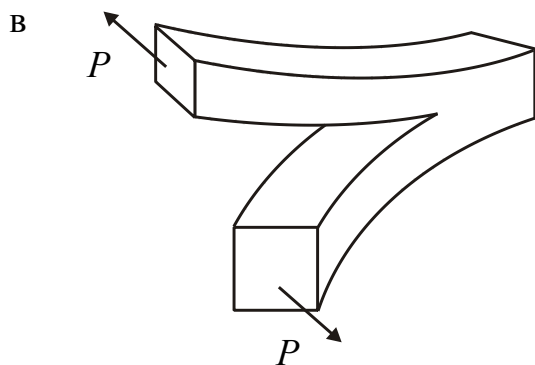
Различаются в общем виде три случая развития трещин:



- нормальный разрыв, когда поверхности трещины расходятся в противоположные направления (рисунок 13.1, а);



- поперечный сдвиг, когда поверхности трещины скользят относительно друг друга в направлении, перпендикулярном краю трещины (рисунок 13.1, б);



- продольный сдвиг, когда поверхности трещины скользят относительно друг друга в направлении параллельном краю трещины, например, режущие ткань ножницы (рисунок 13.1, в).

Рисунок 13. 1

Комбинация этих случаев развития трещин позволяет описать произвольное трехмерное локальное напряженно-деформированное состояние у вершины трещины.

В общем случае напряженное состояние у вершины трещины определяется зависимостью

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{Iij}(\theta) + K_{II} f_{IIij}(\theta) + K_{III} f_{IIIij}(\theta)],$$

где

r, θ - полярные координаты, связанные с вершиной трещины;

$f_{Iij}(\theta), f_{IIij}(\theta), f_{IIIij}(\theta)$ - некоторые тригонометрические функции;

K_I, K_{II}, K_{III} - коэффициенты интенсивности напряжений трещин

нормального разрыва, поперечного сдвига и продольного сдвига соответственно.

Величины K_I, K_{II} и K_{III} называются коэффициенты интенсивности поля напряжений у вершины трещины или просто коэффициентами интенсивности напряжений.

Они характеризуют концентрацию напряжений у вершины трещины. Физически K_I, K_{II}, K_{III} можно интерпретировать как интенсивность передачи нагрузки через область вершины трещины в теле.

Поскольку разрушение вызывается полем напряжений у вершины трещины, коэффициенты интенсивности напряжений являются основными параметрами, практически используемые при анализе.

13.1 Коэффициенты интенсивности напряжений

Введем в носик трещины (рисунок 13.2) полярную систему координат r, θ .

Будем считать, что трещина перемещается по оси OX при $y = 0$.

Тогда расстояние от любой точки, лежащей на оси OX , до начала координат $r = x$ и $\theta = 0$.

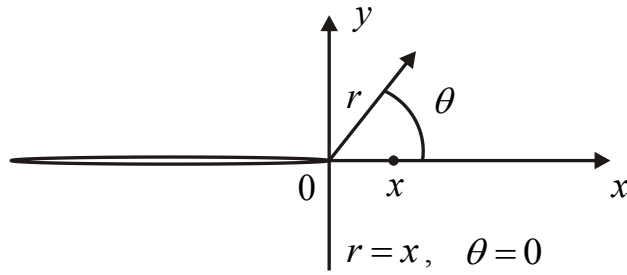


Рисунок 13.2

Поле напряжений вблизи вершины трещины при $r = x$, $\theta = 0$ описывается следующими формулами:

- для случая нормального разрыва ($K_I \neq 0, K_{II} = K_{III} = 0$)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0;$$

- для случая поперечного сдвига ($K_{II} \neq 0, K_I = K_{III} = 0$)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0;$$

- для случая продольного сдвига ($K_{III} \neq 0, K_I = K_{II} = 0$)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0.$$

13.2 Методы определения коэффициентов интенсивности напряжений

13.2.1 Постановка задачи

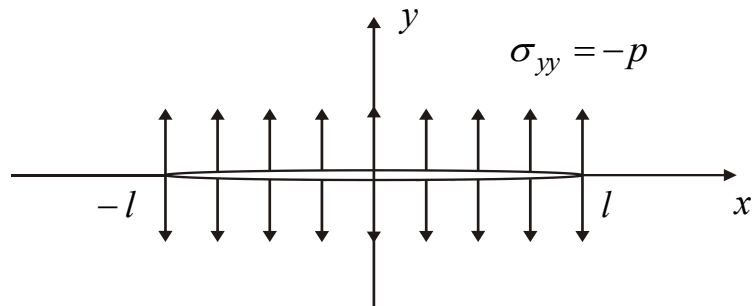


Рисунок 13.3

Задана трещина под внутренним давлением $\sigma_{yy} = -p$, $|x| < l$, $y = 0$ (рисунок 13.3).

13.2.2 Асимптотический метод

Коэффициент интенсивности напряжений первого рода K_I будет определяться по формуле

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi(x-l)}. \quad (13.1)$$

Для вычисления K_I необходимо знать распределение σ_{yy} в точках x_k , принадлежащих оси OX перед носиком трещины (рисунок 4).

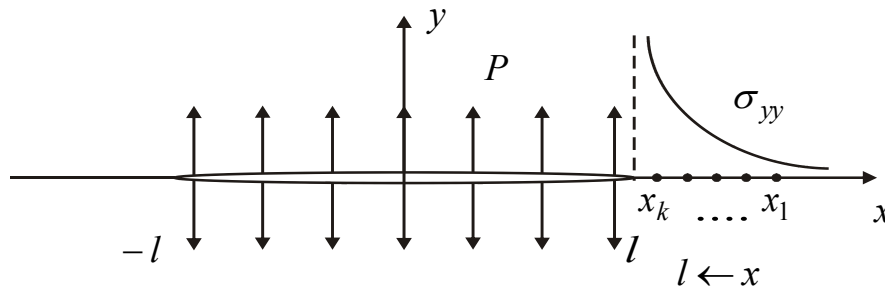


Рисунок 13.4

Из решения аналитической задачи следует, что

$$\sigma_{yy} = p \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}}. \quad (13.2)$$

Подставим σ_{yy} из формулы (13.2) в формулу (13.1) и вычислим K_I :

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi(x-l)} = \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{x-l} \cdot p \frac{x}{\sqrt{x-l} \sqrt{x+l}} = \sqrt{2\pi} p \frac{l}{\sqrt{2l}} = p \sqrt{\pi l}. \quad (13.4)$$

Замечание

В асимптотическом методе точки x_k ($k = \overline{1, M}$) выбираются со стороны оси OX , приближаясь к носику трещины $x = l$.

13.2.3 Метод разрывных смещений

Коэффициент интенсивности напряжений первого рода K_I будет определяться по формуле

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_y}{\sqrt{l-x}}, \quad (13.5)$$

где

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига;

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

D_y - нормальное смещение берегов трещины (раскрытие трещины параллельно оси OY).

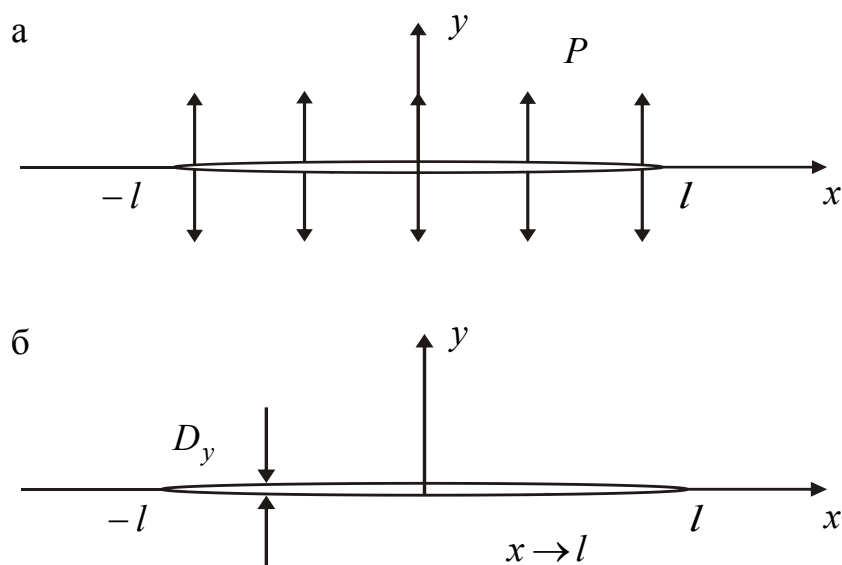


Рисунок 13. 5

Для вычисления K_I необходимо знать раскрытие берегов трещины D_y . Из решения аналитической задачи известно, что раскрытие трещины имеет вид

$$D_y = -\frac{2(1-\nu)}{G} p \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (13.6)$$

Подставим D_ν в (13.5) и вычислим K_I :

$$\begin{aligned} K_I &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow l} \frac{1}{\sqrt{l-x}} \cdot \frac{(-2)(1-\nu)}{G} p \sqrt{l-x} \sqrt{l+x} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} p \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{l+x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} p \sqrt{2l} = p \sqrt{\pi l}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Замечание

В методе разрывных смещений точки x_j - граничные точки ($j=\overline{1,N}$), выбираются в сторону возрастания координат x , стремясь к l ($x \rightarrow l$).

Граничные интегральные уравнения для решения данной задачи представляются в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} D_{yj} = -p_i, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (13.8)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} A_{11}D_{y_1} + A_{12}D_{y_2} + \dots + A_{1N}D_{y_N} = -p_1, \\ A_{21}D_{y_1} + A_{22}D_{y_2} + \dots + A_{2N}D_{y_N} = -p_2, \\ \vdots \\ A_{N1}D_{y_1} + A_{N2}D_{y_2} + \dots + A_{NN}D_{y_N} = -p_N. \end{cases}$$

где

$$A_{ij} = -\frac{G}{\pi(1-\nu)} \frac{(S_j/2)}{\left[(x_i - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2} \right)^2 \right]}, \quad (13.9)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ν - коэффициент Пуассона;
 E - модуль Юнга;

S_j - длина j -го граничного элемента;

x_i, x_j - координаты по оси OX i -го и j -го граничных элементов;

N - количество граничных элементов;

D_{yj} - раскрытие нижнего и верхнего берегов трещины (разрыв смещений) j -го граничного элемента;

$$E = 30000 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};$$

$$\nu = 0,25.$$

Определение напряжения σ_{yy} внутри материала перед трещиной

$$\sigma_{yy}(k) = -\frac{G}{\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^N D_{yj} \frac{(S_j/2)}{\left[(x_k - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2} \right)^2 \right]}, \quad (13.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots, M)$$

где

$\sigma_{yy}(k)$ - напряжения в k -ой внутренней точке;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига;

ν - коэффициент Пуассона;

E - модуль Юнга;

x_k - внутренняя k -ая координата по оси OX ;

x_j - координата центра тяжести (середины) j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

M - количество внутренних точек;

D_{yj} - разрыв смещений j -го граничного элемента;

S_j - длина j -го граничного элемента.

13.3 Алгоритм расчета

13.3.1 Ввод входных граничных данных и напряжений на границе

Разбиваем трещину на граничные элементы (прямолинейные отрезки) и координаты середин отрезков заносим в таблицу 13.1.

В таблицу 13.1 заносим длины граничных элементов и нормальные напряжения, заданные на граничных элементах. Длина трещины $2l = 2$ см.

$$p = \sigma_{yy} = -100 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$$

Знак "–" показывает, что напряжение p противоположно оси OY , так как p прилагается только к нижнему берегу трещины (рисунки 13.6, 13.7).

$N = 10$ - количество граничных элементов.

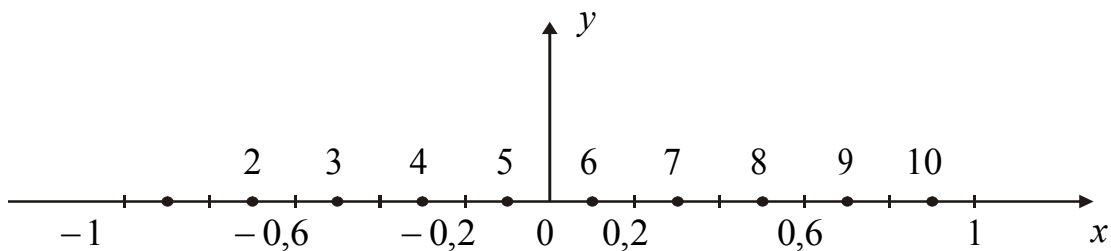
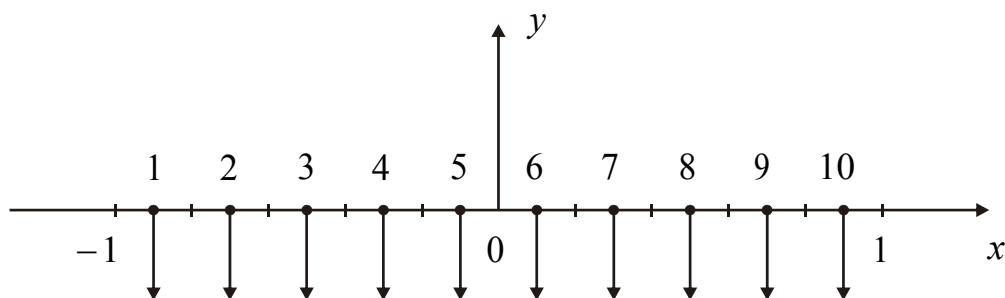


Рисунок 13.6



$$P = \sigma_{yy} = -100 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$$

Рисунок 13.7

Таблица 13.1

N	$x_j, \text{ см}$	$S_j, \text{ см}$	$p_j, \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$
1	- 0,9	0,2	- 100
2	- 0,7	0,2	- 100
3	- 0,5	0,2	- 100
4	- 0,3	0,2	- 100
5	- 0,1	0,2	- 100
6	0,1	0,2	- 100
7	0,3	0,2	- 100
8	0,5	0,2	- 100
9	0,7	0,2	- 100
10	0,9	0,2	- 100

13.3.2 Ввод внутренних точек

В таблицу 13.2 заносим координаты точек, лежащих на оси OX перед носиком трещины. Возьмем количество внутренних точек на оси OX при $y=0$ равное четырем, т.е. $M=4$ при $y_k=0$ (рисунок 13.8).

($M=4$ - количество внутренних точек на оси OX (при $y=0$).)

($y_k=0$.)

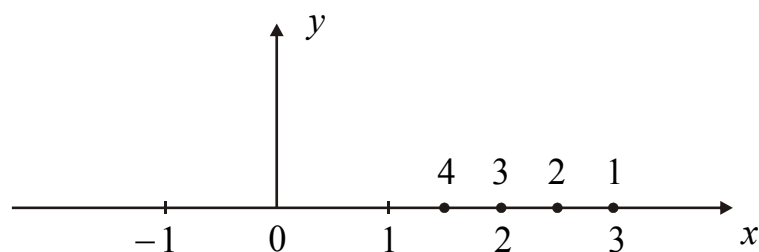


Рисунок 13.8

Таблица 13.2

M	$x_k, \text{ см}$
1	3
2	2,5
3	2
4	1,5
...	...
...	...
...	...
M	1,00001

где z_j - раскрытие j -го граничного элемента (или разрыв смещений j -го граничного элемента), определяются из решения системы линейных уравнений (13.12).

13.3.6 Вычисление коэффициента интенсивности напряжения первого рода K_I

Определим точное значение K_I по формуле (13.1)

$$K_I = p\sqrt{\pi l}.$$

Подставим входные данные: $p = 100$, $l = 1$ в формулу, получим

$$K_I = 100\sqrt{\pi \cdot l} = 177,2.$$

13.3.6.1 Асимптотический метод

Используя формулу (13.5) представим ее в следующем виде:

$$K_I(k) = \lim_{x \rightarrow l} \sigma_{yy}(k) \sqrt{2\pi(x(k) - l)},$$

где

$l = 1$ см;

$x(k)$ - координата k -ой внутренней точки;

$\sigma_{yy}(k)$ - напряжения в k -ой внутренней точке, определенные по формуле (13.13) ранее.

Полученные результаты представить в виде таблицы 13.3.

Решением задачи является определение координаты точки $x(k)$, при которой

$$K_I(k) \approx K_I = 177,2.$$

Таблица 13.3

M	$x(k)$	$\sigma_{yy}(k)$	$K_I(k)$
1	3		
2	2,5		

3	2		
4	1,5		
5	1,2		
6	1,1		
...	...		
<i>M</i>	1,00001		

Замечание

Выбор координат внутренних точек $x(k)$ осуществляется произвольным образом. Систему линейных уравнений решают один раз.

13.3.6.2 Метод разрывных смещений

Используя формулу (13.5) представим ее в следующем виде:

$$K_I(j) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_y(j)}{\sqrt{l-x(j)}} \quad \text{или}$$

$$K_I(j) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow l} \frac{z(j)}{\sqrt{l-x(j)}},$$

где

$l = 1$ см;

$x(j)$ - координата j -ой точки, расположенной на оси OX и приближающаяся к $x = l$;

$z(j)$ - раскрытие j -го граничного элемента.

Длину трещины разбить на $N = 100$ элементов.

Результаты представить в виде таблицы 13.4.

Таблица 13.4

N	$x(j)$	$D_{yj} = z_j$	$K_I(j)$
1			
2			
3			
...			

...			
...			
100			

Решением задачи является определение координаты граничной точки $x(j)$, при которой

$$K_I(j) \approx K_I = 177,2.$$

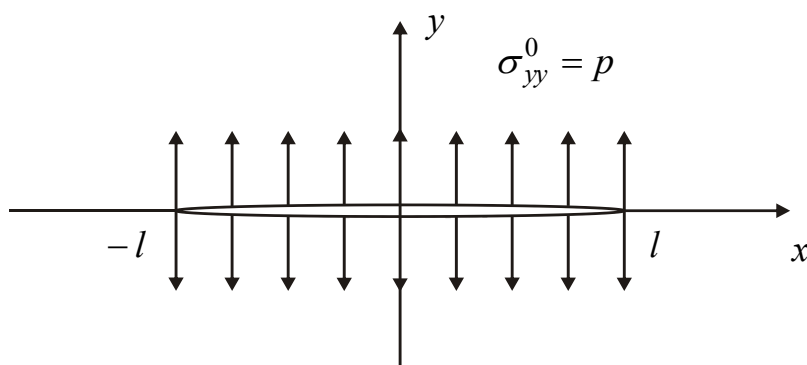
Замечание

Точность задачи определяется разбивкой трещины на граничные элементы $N = 100$ или $N = 200$ элементов.

14 Лабораторная работа. Ползучесть материала с трещиной

14.1 Постановка задачи

Задана бесконечная плоскость с трещиной длиной $2l$ (рисунок 14.1), нагруженная двумя равными и противоположно направленными напряжениями p .



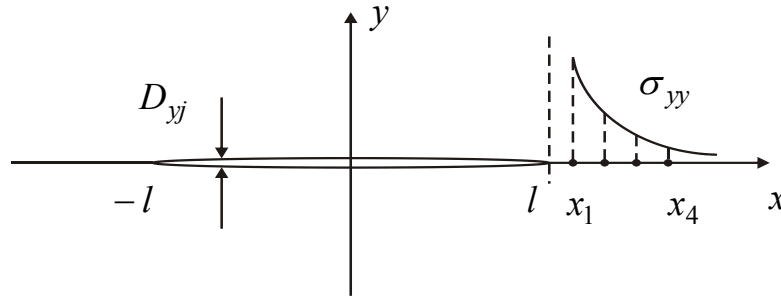
$\sigma_{yy} = p$ - постоянное нормальное напряжение

Рисунок 14.1 – Бесконечная плоскость с трещиной длиной $2l$
Крайевые условия:

$$\sigma_{xy}^0 = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0.$$

$$\sigma_{yy}^0 = \begin{cases} +p, & |x| < l, y = 0; \\ 0, & |x| > l, y = 0, \end{cases}$$

где σ_{xy}^0 - касательное напряжение;
 σ_{yy}^0 - нормальное напряжение.



D_{yj} - нормальное раскрытие трещины

Рисунок 14.2 – Распределение напряжения σ_{yy} вдоль оси OX при $y = 0$

На рисунке 14.2 показан график распределения нормального напряжения σ_{yy} в точках x_1, x_2, x_3, x_4 . График функции σ_{yy} при $x = l$ стремится к бесконечности.

14.2 Граничные интегральные уравнения

Граничные интегральные уравнения для решения данной задачи представляются в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} D_{yj} = -p_i, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (14.1)$$

или

$$\begin{cases} A_{11}D_{y1} + A_{12}D_{y2} + \dots + A_{1N}D_{yN} = -p_1; \\ A_{21}D_{y1} + A_{22}D_{y2} + \dots + A_{2N}D_{yN} = -p_2; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{N1}D_{y1} + A_{N2}D_{y2} + \dots + A_{NN}D_{yN} = -p_N, \end{cases}$$

где

$$A_{ij} = -\frac{G}{\pi(1-\nu)} \frac{(S_j/2)}{\left[(x_i - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2} \right)^2 \right]}, \quad (14.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} - \text{модуль сдвига};$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

G, E, ν - упругие характеристики материала, в котором образуется трещина;

S_j - длина j -го граничного элемента;

x_i, x_j - координаты по оси OX i -го и j -го граничных элементов;

N - количество граничных элементов;

D_{yj} - раскрытие нижнего и верхнего берегов трещины (разрыв смещений)

j -го граничного элемента.

14.3 Определение напряжения σ_{yy} внутри материала перед трещиной

Напряжение σ_{yy} внутри материала перед трещиной определяется по формуле

$$\sigma_{yy}(k) = -\frac{G}{\pi(1 - \nu)} \sum_{j=1}^N D_{yj} \left[\frac{(S_j/2)}{(x_k - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2}\right)^2} \right], \quad (k=1, 2, \dots, M) \quad (14.3)$$

где $\sigma_{yy}(k)$ - напряжения в k -ой внутренней точке;

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} - \text{модуль сдвига};$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

D_{yj} - разрыв смещений j -го граничного элемента;

S_j - длина j -го граничного элемента;

x_k - внутренняя k -ая координата по оси OX ;

x_j - координата центра тяжести (середины) j -го граничного элемента;

N - количество граничных элементов;

M - количество внутренних точек.

14.4 Функции ползучести

Определение

Процесс изменения деформаций тела во времени при постоянном напряжении называется *ползучестью*.

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{E}{1 + \Phi}; & \nu_t &= 0,5 - \frac{(0,5 - \nu)}{1 + \Phi}; \\ G_t &= \frac{G}{1 + 1,5 \frac{\Phi}{(1 + \nu)}}; & \Phi &= \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1 - \alpha}, \end{aligned} \quad (14.4)$$

где E_t, G_t, ν_t - изменяющиеся упругие параметры при ползучести;

Φ - функция ползучести;

α, δ - параметры ползучести;

t - время, сутки.

14.5 Алгоритм расчета

14.5.1 Ввод входных граничных данных и напряжений на границе

Разбиваем трещину на граничные элементы (отрезки). В рассматриваемом примере длина трещины равна 2, т.е. $2l = 2$ (рисунок 14.3).

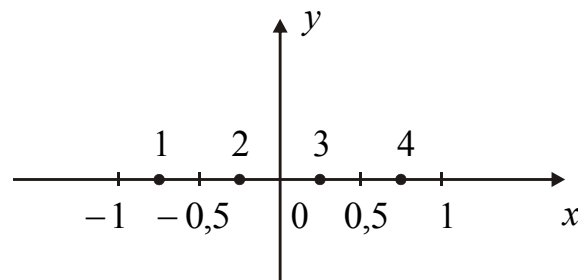


Рисунок 14.3 – Пример разбивки трещины на граничные

Координаты середин отрезков, длины граничных элементов и нормальные напряжения p (рисунок 14.4), заданные на граничных элементах, заносим в таблицу 1.

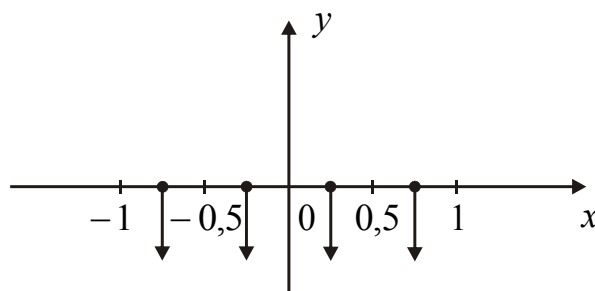


Рисунок 4 – Нормальные напряжения p , заданные на нижнем берегу (нижней поверхности) трещины

Таблица 14.1 - Входные данные при разбивки границы трещины на отрезки

N	$x_j, \text{см}$	$S_j, \text{см}$	$p_j, \frac{\text{кг с}}{\text{см}^2}$
1	-0,75	0,5	-100
2	-0,25	0,5	-100
3	0,25	0,5	-100
4	0,75	0,5	-100

14.5.2 Ввод внутренних точек

В таблицу 14.2 заносим координаты точек, лежащих на оси OX перед носиком трещины (рисунок 14.5).

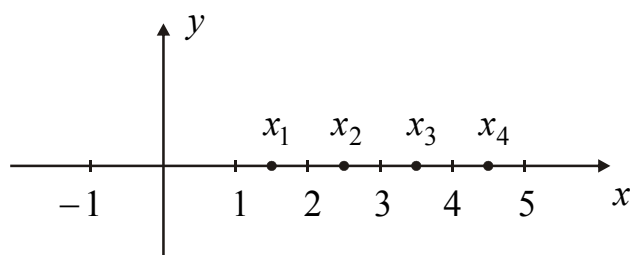


Рисунок 14.5 – Координаты внутренних точек на оси OX при $y = 0$

Таблица 14.2 – Координаты внутренних точек, лежащих на оси OX при $y = 0$

M	$x_k, \text{см}$
1	1,5
2	2,5
3	3,5
4	4,5

14.5.3 Ввод параметров ползучести и упругих характеристик

$$\alpha = 0,6; \quad \delta = 0,0094; \quad E = 30000 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \quad \nu = 0,25.$$

14.5.4 Формирование матрицы A и вектор-столбцов

Используя соотношения (2), (4) и значения таблицы 1, сформируем элементы матрицы:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = -\frac{G_t}{\pi(1-\nu_t)} \frac{(S_j/2)}{\left[(x_i - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2} \right)^2 \right]}.$$

Вектор-столбцы неизвестных величин и свободных членов представим в виде:

$$z = \begin{pmatrix} D_{y1} \\ D_{y2} \\ \dots \\ D_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ \dots \\ -p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}.$$

14.5.5 Решение системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений решается любым известным методом.

[illegible]

14.5.6 Вычисление напряжений $\sigma_{ij}(k)$ во внутренних точках

Напряжения $\sigma_{yy}(k)$ во внутренних точках x_k , лежащих на оси OX при $y=0$, вычисляются по формуле:

$$\sigma_{yy}(k) = -\frac{G_t}{\pi(1-\nu_t)} \sum_{j=1}^N z_j \sqrt{\frac{(S_j/2)}{(x_k - x_j)^2 - \left(\frac{S_j}{2}\right)^2}}, \quad (k=1, 2, \dots, M).$$

Примечание

Значения x_k берутся из таблицы 14.2, x_j , S_j - из таблицы 14.1.

14.5.7 Выдача результатов

Результаты вычислений выдать на печать в виде таблиц 14.3 и 14.4 для значений $t_1 = 0$, $t_2 = 30$, $t_3 = 90$ (суток).

Таблица 14.3 – Результаты разрывов смещения на берегах трещины

N	$z_j = D_{yj}$
1	
...	
N	

Таблица 14.4 – Значения напряжений σ_{yy} во внутренних точках

M	$\sigma_{yy}(k)$
1	
...	
M	

Примечание

Раскрытие трещины $D_{yj} = z_j$ имеет форму эллипса (рисунок 14.6).

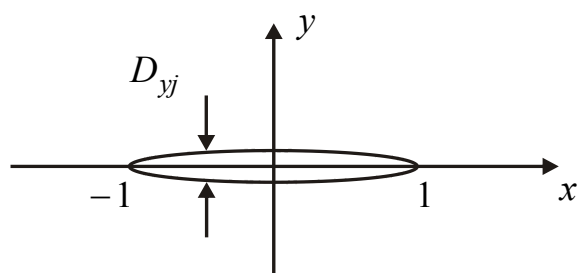


Рисунок 14.6 – Численное и аналитическое решения для распределения разрывов смещения

15 Основные понятия, определения и физические свойства жидкостей и газов

15.1 Основные понятия и определения

Предмет гидромеханика – это (раздел механики) наука, изучающая равновесие (гидростатика) и движение (гидродинамика) жидкости, а также взаимодействие

между жидкостью и твердыми телами, полностью или частично погруженными в жидкость.

Механика подразделяется на статику, кинематику и динамику.

Жидкость – агрегатное состояние вещества, соединяющее в себе при внешних механических воздействиях черты твердого состояния (практическую несжимаемость) и газообразного состояния (изменчивость формы).

Жидкости подразделяют на:

- идеальные;
- ньютоновские;
- неньютоновские (пластичные).

Идеальная жидкость – жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение.

Ньютоновская жидкость – жидкость, не подчиняющаяся при своем течении закону пропорциональности между касательными напряжениями и скоростью сдвига.

Неньютоновская жидкость – жидкость, не подчиняющаяся при своем течении закону пропорциональности между касательными напряжениями и скоростью сдвига.

(Ньютоновские жидкости способны течь под действие сколь угодно малой силы. Неньютоновские (пластичные) жидкости требуют приложения силы в течении более длительного промежутка времени, после него начинают течь).

Для того чтобы установить различия между текучими свойствами ньютоновских и неньютоновских жидкостей, рассмотрим жидкость между двумя параллельными поверхностями, отстоящими друг от друга на расстоянии d (рисунок 15.1,а).

Если к верхней пластине приложить силу F , действующую в направлении оси OX , то пластика начнет двигаться с постоянной скоростью U . При этом жидкость просто увлекается в направлении OX вследствие своего сцепления с верхней пластиной. Результирующее касательное напряжение определяется формулой

$$\tau_{xy} = F/S \quad ,$$

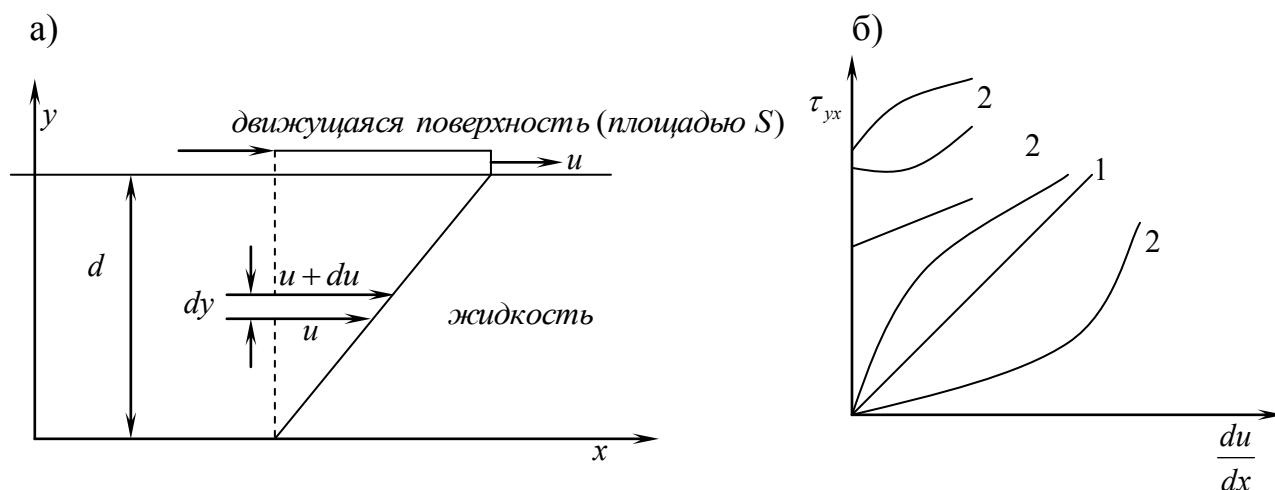


Рисунок 15.1

где S – площадь поверхности верхней пластины.

Для ньютоновских жидкости характерно линейное распределение скоростей, как показано на рисунке 15.1,б. При этом градиент скорости du/dy (скорость сдвига поперек слоя жидкости) остается постоянным. Угловой коэффициент графика зависимости напряжения сдвига от градиента скорости соответствует коэффициенту вязкости жидкости μ . Он зависит только от температуры и давления и не зависит от скорости сдвига.

В случае неньютоновских жидкостей график зависимости τ_{yx} от du/dy уже не является прямой линией, проходящей через начало координат. При этом кажущаяся вязкость, определяемая как отношение касательного напряжения к результирующей скорости сдвига, меняется в зависимости от величины скорости сдвига du/dy (рисунок 15.1,б)

Примеры неньютоновских жидкостей:

растворы, расплавы полимеров, эмульсии, краски, и т.д.

Существует два подхода к исследования поведения материальных сред:

- вероятностный (статистический) и феноменологический (феномен – явление).

Вероятностный используется в статистической физике. Статистические методы всегда связаны с введением дополнительных гипотез о свойствах частиц, их взаимодействии и с упрощением этих свойств и взаимодействий. Во многих случаях не существует даже базы для построения этих методов, а если они построены то обычно не являются эффективными средствами решения задач в силу чрезмерной сложности.

Феноменологический подход к построению макроскопической теории основывается на общих, добытых из опыта закономерностях и гипотезах.

Феноменологические макроскопические теории являются эффективным средством решения практических задач, и добытые с их помощью сведения согласуются с опытом.

Для введения этой теории необходимо ввести понятие сплошной среды. Все тела (жидкости) состоят из отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому жидкость можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом воду, раствор и т.д. будем рассматривать как жидкость, целиком заполняющую некоторую часть пространства.

В механике сплошной среды рассматриваются движения таких материальных тел (жидкости), которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и расстояния между точками которых во время движения меняются.

Силы действующие на жидкость. Давление жидкости

Все силы действующие на жидкость подразделяются на две группы:

- объемные или массовые;
- поверхностные силы.

Силы, распределенные по объему V , называются объемными или массовыми силами.

Пусть $\bar{R}$ – главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm .

Тогда плотность $\bar{F}$ массовой силы в данной точке есть

$$F = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\bar{R}}{\Delta m} \quad \left[\frac{H}{\kappa \mathcal{L}} \right] = \left[\frac{\kappa \mathcal{L} \cdot \mathcal{M} / c^2}{\kappa \mathcal{L}} \right] = \left[\frac{\mathcal{M}}{c^2} \right]$$

Для малой частицы $\bar{R} \approx \bar{F} \Delta m$.

Иногда рассматривают силу $\bar{\Phi}$, приходящуюся не на единицу массы, а на единицу объема. Тогда

$$\bar{\Phi} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\bar{R}}{\Delta V},$$

т.е. $\bar{\Phi} = \rho \bar{F}$, $\bar{\Phi} dV$ и $\bar{F} dm$ имеют размерность силы, $\bar{F}$ – размерность ускорения, а ρ – размерность ускорения, умноженную на размерность плотности.

Число различных массовых сил невелико.

Это – сила тяжести (вес) $\bar{F} = \bar{g}$, $\bar{\Phi} = \rho \bar{g}$ и вообще гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона; электромагнитные силы; силы инерции.

Силы, распределенные по поверхности сплошной среды, называются поверхностными.

Пример.

Если взять воду, налитую в сосуд, то на поверхности соприкосновения воды со стенками сосуда будет наблюдаться силовое взаимодействие.

Взяв элемент dS поверхности S , можно ввести элементарную поверхностную силу $d\bar{P} = \bar{p} dS$,

где $\bar{p} = \lim_{\Delta S} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta S} \left[\frac{H}{\mathcal{M}^2} \right] = Pa$ – плотность поверхностных сил, действующих на

площадку dS .

Плотность $\bar{p}$ поверхностной силы можно ввести в каждой точке поверхности S , и она будет разной в разных точках.

Внутренние и внешние силы

Силы можно разбить на внутренние и внешние.

Силы называются внутренними, если они вызваны объектами, принадлежащими к системе, движение которой рассматривается.

Силы называются внешними, если они вызваны внешними по отношению к рассматриваемой системе объектами.

Силы внутренних напряжений

Силу внутренних напряжений $\bar{p}_n d\sigma$ в каждой точке сплошной среды можно разложить на две составляющие – по нормали $\bar{n}$ и касательной $\bar{\tau}$ к элементарной площадке $d\sigma$

$$\bar{p}_n dS = p_{nn} \bar{n} dS + p_{n\tau} \bar{\tau} dS,$$

где $p_{nn} dS$ – нормальная компонента силы внутреннего напряжения,

$p_{n\tau} dS$ – касательная, которая носит название тангенциальной силы или силы внутреннего трения.

Поверхностные силы $\bar{p}_n d\sigma$ могут быть и внешними силами, т.е. силами, действующими на внешней поверхности, ограничивающей сплошную среду.

15.2 Физические свойства жидкостей и газов

1. Плотность. Удельный вес и удельный объем

Среды, имеющие одинаковые объемы, но состоящие из разных веществ, обладают различной массой.

Основной динамической характеристикой среды является плотность среды, которая определяется по формуле

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

где ΔV – объем, занятый массой Δm .

Плотность в реальности представляет собой соотношение

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

Для однородной жидкости

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right].$$

Отношение веса жидкости к его объему называется удельным весом

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$$

Тогда связь между плотностью ρ и удельным весом γ имеет вид:

$$\gamma = \rho g.$$

Величина, обратная плотности, называется удельным объемом:

$$V_y = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} \quad \left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right].$$

2. Сжимаемость – свойство жидкостей и газов изменять объем при изменении давления.

Сжимаемость характеризуется коэффициентом, определяемым как отношение относительного изменения объема к изменению давления, вызвавшему это изменение:

$$\beta_p = -\frac{\Delta V}{V \Delta p}, \quad \beta_p = -\frac{dV}{V dp} \quad \left[\frac{1}{\text{Па}} \right] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{Н}} \right].$$

где β_p – коэффициент сжимаемости жидкости;

V – объем жидкости;

ΔV – изменение объема при изменении давления;

Δp – изменение давления.

Объем жидкостей газов изменяется при изменении не только давления, но и температуры. Жидкости и газы расширяются с повышением температуры, т.е. плотность их при этом уменьшается.

Количественное изменение объема при изменении температуры и постоянном давлении оценивается коэффициентом теплового объемного расширения.

Коэффициент объемного расширения α равен отношению относительного объема расширения $\Delta V/V_1$ к разности температур ΔT :

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_1 \Delta T} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{1}{V_1} \frac{dV}{dT} \quad \left[\frac{1}{\text{град}} \right]$$

где V_1 – объем жидкости при температуре T_1 ,

V_2 – объем жидкости при температуре T_2 ,

$\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение объема жидкости.

Замечание:

1. Коэффициент объемного расширения α слабо зависит от температуры.
2. Вода является исключением. Коэффициент объемного расширения воды сильно зависит от температуры, а в интервале от 0 до 4°C принимает отрицательное значение.
3. Величина, обратная коэффициенту β_p , представляет собой объемный модуль упругости

$$E_{жс} = \frac{1}{\beta_p}$$

3. Сопротивление растяжению внутри капельных жидкостей по молекулярной теории может быть весьма значительным. При опытах с тщательно очищенной и дегазированной водой в ней были получены кратковременные напряжения растяжения до 23-28 МПа. Однако технически чистые жидкости, содержащие взвешенные твердые частицы и мельчайшие пузырьки газов, не выдерживают даже

незначительных напряжений растяжения. Потому пренебрежение в дальнейшем напряжениями растяжения в капельной жидкости не вызывает каких-либо недоразумений.

4. Силы поверхностного натяжения

Поверхностное натяжение обусловлено силами притяжения между молекулами. Внутри жидкости силы притяжения между молекулами взаимно компенсируются, а на молекулы, находящиеся вблизи поверхности, действуют некомпенсированная результирующая сила направленная внутрь поверхности жидкости. Поэтому, чтобы переместить молекулы из глубины на поверхность жидкости, надо совершить работу против этой результирующей жидкости.

В результате молекулы на поверхности жидкости обладают определенной потенциальной энергией, называемой поверхностной энергией. Капли жидкости в невесомости имеют форму шариков.

Плотностью поверхностной энергии /поверхностным натяжением/ называется отношение работы, требующееся для увеличения площади поверхности, к величине этого приращения площади:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$$

Давление внутри шарообразной капли жидкости или внутри пузырька газа в жидкости определяется по формуле

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Для ряда жидкостей, граничащих с воздухом при температуре 20°C, коэффициент поверхностного натяжения имеет значения:

$7,3 \cdot 10^{-2}$ – вода,

$2,7 \cdot 10^{-2}$ – керосин,

$46 \cdot 10^{-2}$ – ртуть.

С ростом температуры натяжение уменьшается.

5. Капиллярность – это свойство жидкости подниматься или опускаться под действием сил поверхностного натяжения в трубках малого размера.

Высота подъема жидкости в капилляре имеет вид:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r}$$

Высота подъема жидкости в капилляре зависит только от радиуса капилляра r , а остальные величины в формуле постоянные.

6. Вязкость жидкости.

Вязкость – это свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев.

При относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые силами внутреннего трения, или силами вязкости.

$$F_{mp} = \mu S \frac{dV}{dy}; \quad \tau = \frac{F}{S}; \quad \tau = \pm \mu \frac{dV}{dy}; \quad \mu = [Па \cdot с] = \left[\frac{Н \cdot с}{м^2} \right].$$

где F_{mp} – сила внутреннего трения,

S – площадь соприкосновения,

dV – относительная скорость граничных плоскостей среды,

dy – расстояния между граничными плоскостями,

μ – динамическая вязкость, коэффициент внутреннего трения.

Кроме понятия динамической вязкости применяют понятие кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{м^2}{с} \right]$$

где μ – динамическая вязкость, ρ – плотность.

7. Испаряемость – свойство жидкости переходить в пар.

Жидкость может переходить в газообразное состояние и при температурах ниже точки кипения. Такой процесс называется испарением. Необходимая для этого тепловая энергия (теплота испарения) соответствует теплоте парообразования. Источником ее обычно служит внутренняя энергия самой жидкости, которая в результате испарения охлаждается.

Кипением называется процесс интенсивного испарения жидкости не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара.

Кипение жидкости приводит к нарушению сплошности среды.

16 Гидростатика

Гидростатика – часть гидромеханики, изучающая равновесие жидкости, а также равновесие твердых тел, полностью или частично погруженных в жидкость.

16.1 Гидростатическое давление и его свойство

Пусть имеется некоторый объем жидкости, имеющий массу и находящийся в состоянии покоя (рисунок 16.1). Разделим рассматриваемый объем плоскостью на две части, содержащие массы m_1 и m_2 , и отбросим одну из частей объема. Например, левую часть.

а)



б)

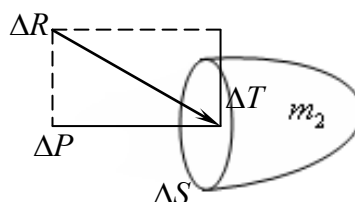


Рисунок 16.1

Для сохранения равновесия оставшейся правой части массы жидкости m_2 необходимо приложить к ней силу, эквивалентную действию отброшенной массы

m_1 . Эта сила ΔR является поверхностной для оставшегося объема. Ее можно разложить на две составляющие: ΔP – нормальную и ΔT – тангенциальную.

Однако, вследствие текучести жидкости приводит к сдвигению одной части объема жидкости относительно другой, т.е. равновесие жидкости нарушится. Поэтому в покоейся жидкости возможно только

$$\Delta T = 0 \text{ и } \Delta R = \Delta P$$

Сила ΔP распределена по площадке рассечения ΔS и напряжение этой силы в произвольной точке A площади ΔS определяется плотностью распределения нормальных сил

$$\bar{p} = \lim \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta S} \left[\frac{H}{\text{м}^2} \right] = \text{Па}$$

и называется гидростатическим давлением.

Следовательно, в покоейся жидкости поверхностные силы всегда нормальны (перпендикулярны) по отношению к площадке объема жидкости, на который они действуют, и эти силы сжимающие.

Рассмотрим основное свойство гидростатического давления: в любой точке жидкости гидростатическое давление не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует, относительно осей координат.

Выделим в покоейся жидкости элементарный объем в форме тетраэдра с ребрами, параллельными координатным осям и, соответственно, равным dx , dy , dz (рисунок 16.2).

Объем тетраэдра равен $\Delta V = dx \, dy \, dz / 6$.

Отбросим окружающую тетраэдр жидкость и для сохранения равновесия выделенного объема приложим к каждой грани тетраэдра поверхностные силы $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z$ и ΔP_H .

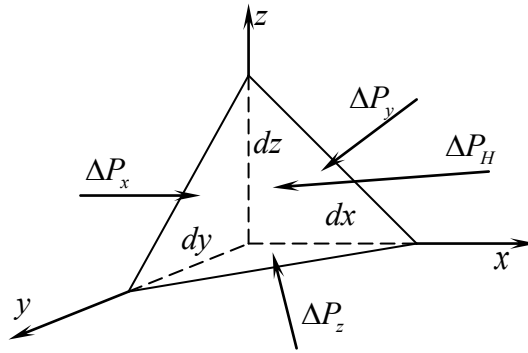


Рисунок 16.2

Кроме поверхностных сил на жидкость, заключенную в тетраэдре, действует массовая сила $\rho\Delta V R$, плотность распределения которой R . Проекции на оси координат будут R_x, R_y, R_z .

Уравнения равновесия жидкости, заключенной в тетраэдре, в проекциях на оси координат имеют вид:

$$\Delta P_x - \Delta P_H n_x + R_x \rho \Delta V = 0;$$

$$\Delta P_y - \Delta P_H n_y + R_y \rho \Delta V = 0;$$

$$\Delta P_z - \Delta P_H n_z + R_z \rho \Delta V = 0;$$

где

$$n_x = \cos(\bar{n}, \hat{x});$$

$$n_y = \cos(\bar{n}, \hat{y});$$

$$n_z = \cos(\bar{n}, \hat{z});$$

проекции вектора нормали к осям декартовой системы координат.

Перепишем первое уравнение выразив поверхностные силы через гидростатическое давления на соответствующие грани тетраэдра:

$$p_x \Delta S_x - p_H \Delta S_H \cos(\bar{n}, \hat{x}) + R_x \rho \Delta V = 0,$$

где

$$\Delta S_x = dydz/2$$

$$\Delta S_x = \Delta S_H \cos(\bar{n}, \hat{x})$$

После преобразования имеем:

$$p_X \frac{dydz}{2} - p_H \frac{dydz}{2} + R_X \rho \frac{dxdydz}{6} = 0$$

$$p_X - p_H + R_X \rho \frac{dx}{3} = 0.$$

При стягивании объема тетраэдра в точку последний член уравнения содержащий множитель dx , также стремиться к нулю.

Следовательно,

$$p_X - p_H = 0, \quad p_X = p_H.$$

Поступая аналогично с остальными уравнениями имеем:

$$p_X = p_Y = p_Z = p_H.$$

Так как dx, dy, dz взяты произвольно, то, следовательно, в пределе при стягивании тетраэдра в точку давление в этой точке по всем направлениям будет одинаково.

16.2 Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим частный случай покоя жидкости, когда на нее действует лишь одна массовая сила – сила тяжести.

Пусть жидкость находится в сосуде, покоящемся относительно Земли. Будем считать свободную поверхность плоской и горизонтальной.

На свободную поверхность действует давление p_0 как результат действующих на нее поверхностных сил (рисунок 16.3). Найдем гидростатическое давление p_A в произвольной точке A , расположенной на глубине h .

Выделим около точки A горизонтальную площадку dS и построим на ней вертикальный цилиндрический объем жидкости высотой h . Объем цилиндра равен $dV = hdS$, а масса $dm = \rho hdS$.

Составим уравнение равновесия этого объема, выделенного из общей массы жидкости.

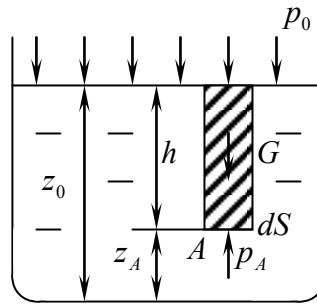


Рисунок 16.3

Из схемы, приведенной на рисунке 16.3, имеем в проекциях на вертикаль

$$p_A dS - p_0 dS - \rho h g dS = 0,$$

где $\rho h g dS$ – вес жидкости (сила тяжести).

После преобразования имеем:

$$p_A = p_0 + \rho h p.$$

Данное уравнение называется основным уравнением гидростатики. По нему можно вычислить давление в любой точке объема покоящейся жидкости.

А так как точка выбрана произвольно, то можно заключить, что внешнее давление p_0 передается всем точкам этого объема жидкости и по всем направлениям одинаково. Это положение носит название закона Паскаля.

Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется поверхностью уровня (изобарической поверхностью).

Для рассматриваемого случая поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости, включая и свободную поверхность. Если ввести ось OZ , то наше уравнение можно представить в следующем виде

$$p_A = p_0 + (z_0 - z_A) \rho g \quad \text{или} \quad p_A + z_A \rho g = p_0 + z_0 \rho g.$$

Разделив все члены на ρg получим:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_0}{\rho g} + z_0.$$

Поскольку точка A взята произвольно, имеем для всего рассматриваемого неподвижного объема жидкости

$$\frac{p_i}{\rho g} + z_i = \text{const},$$

где p_i – давление любой i -ой точки;

z_i – вертикальная координата i -ой точки.

Координата называется геометрической высотой (напором).

Величина $p/\rho g$ называется пьезометрической высотой

$$\frac{p}{\rho g} = \left[\frac{H}{M^2} \cdot \frac{M^3}{Kг} \cdot \frac{C^2}{M} \right] = \left[\frac{Kг \cdot M}{C^2 M^2} \cdot \frac{M^3}{Kг} \cdot \frac{C^2}{M} \right] = [M].$$

Сумма геометрического и пьезометрического напоров называется полным напором в точке покоящейся жидкости или гидростатическим напором.

16.3 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Составим общее дифференциальное уравнения жидкости, справедливое для любых массовых сил (силы тяжести, сил инерции, центробежных сил и т.д.).

В сосуде с неподвижной относительно него жидкостью возьмем произвольный объем жидкости в виде параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (рисунок 16.4).

Отбросив окружающую параллелепипед жидкость, необходимо заменить ее действие силами. Это будут сжимающие поверхностные силы давления. Кроме поверхностных сил на жидкость в объеме параллелепипеда действуют массовые силы. Равнодействующая массовых сил равна $\rho R dV$ а, плотность

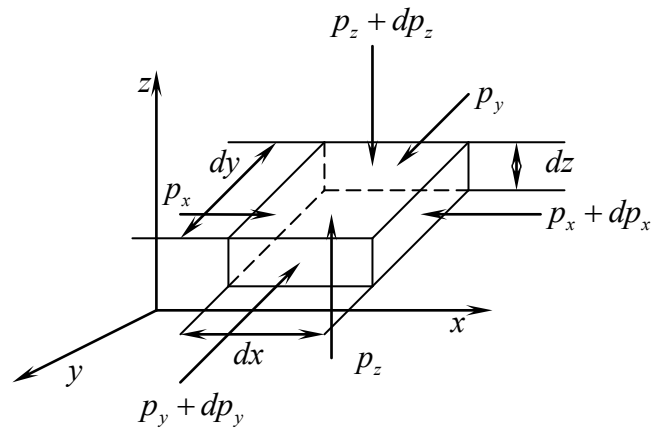


Рисунок 16.4

распределения которой R . Проекции на оси координат обозначим, соответственно

$$R = R(R_X, R_Y, R_Z).$$

Пусть нормальное давление p_X на первой (левой) площадке, перпендикулярной к оси OX , определяемой координатами x, y и z имеет выражение

$$p_X = f(x, y, z).$$

Тогда оно же на второй (правой) площадке, перпендикулярной к оси OX , определяемой координатами $(x + dx), y$ и z , будет

$$p_X + dp_X = f(x + dx, y, z).$$

Так как

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

то

$$p_X + dp_X = p_X + \frac{\partial p_X}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 p_X}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим

$$p_X + dp_X = p_X + \frac{\partial p_X}{\partial x} dx.$$

Тогда уравнения равновесия параллелепипеда в направлении оси OX имеем:

$$\begin{aligned} dydz \left[p_X - \left(p_X + \frac{\partial p_X}{\partial x} dx \right) \right] + R_X \rho dx dy dz &= 0 \\ \Rightarrow R_X \rho dx dy dz - \frac{\partial p_X}{\partial x} dx dy dz &= 0. \end{aligned}$$

В этой формуле $dV = dx dy dz$ – объем параллелепипеда,

$dS_X = dy dz$ – площадь грани нормальной к оси OX .

Разделив все члены этого уравнения на массу жидкости параллелепипеда $dm = \rho dx dy dz$, получим

$$R_X = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_X}{\partial x} = 0.$$

Поступая аналогично в направлении осей OY и OZ , получим

$$\begin{cases} R_X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_X}{\partial x} = 0 \\ R_Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_Y}{\partial y} = 0 \\ R_Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_Z}{\partial z} = 0 \end{cases}.$$

Данная система дифференциальных уравнений гидростатики называется уравнениями Эйлера.

Сложив эти уравнения имеем:

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} dz \right) = 0,$$

где $dp = \frac{\partial P_x}{\partial x} dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} dz$ – представляет полный дифференциал

давления.

Или

$$dp = \rho(R_x dx + R_y dy + R_z dz).$$

Полученное уравнение выражает приращение давления dp при изменении координат на dx, dy, dz в общем случае относительного покоя жидкости.

Поверхности уровня (поверхности равного давления) из условия $dp = 0$ при $\rho \neq 0$ описываются дифференциальным уравнением вида

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz = 0.$$

17 Кинематика движения жидкости

Кинематика жидкости – раздел гидромеханики, в котором движение жидкости и газа изучается вне зависимости от действующих сил. В этом разделе устанавливаются связи между координатами жидких частиц, их скоростями, ускорениями и другими параметрами, а также закономерности их изменения во времени.

17.1 Основные понятия и определения

Движение сплошной среды может быть изучено двумя методами, один из которых – метод Лагранжа – является обобщением метода, применявшегося в кинематике одной точки, другой метод – метод Эйлера – широко использует концепцию теории поля.

Переменные Лагранжа

Для задания движения сплошной среды в переменных Лагранжа, как и в случае одной точки, достаточно задать декартовы координаты x, y, z всех точек сплошной среды или их радиусы-векторы $\vec{r}$, но уже как функции четырех переменных Лагранжа:

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t); \quad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t); \quad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t),$$

где x_0, y_0, z_0 – начальные координаты каждой точки при $t = 0$. Тогда скорости и ускорения в Лагранжевых координатах имеют вид:

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t};$$

или

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad V_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad V_z = \frac{\partial z}{\partial t},$$

или

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}, \quad a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

В методе Лагранжа объектом изучения являются сами точки движущейся сплошной среды.

Переменные Эйлера

В механике жидкости и газов преимущественно используются метод Эйлера и соответственно переменные Эйлера.

В методе Эйлера рассматриваются не фиксированные точки сплошной среды, а точки пространства, занятые движущейся сплошной средой. За независимые переменные принимают время t и декартовы координаты точки М пространства x, y, z или другие параметры, характеризующие различные точки пространства.

Четыре независимые переменные величины x, y, z, t – называют переменными Эйлера.

Различные векторные и скалярные величины, характеризующие сплошную среду, такие, как, например, скорость, ускорение, плотность и т.д., рассматривают как функции этих переменных.

Поле скоростей будет иметь вид: $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$,

$$V_x = f_1(x, y, z, t)$$

$$V_y = f_2(x, y, z, t).$$

$$V_z = f_3(x, y, z, t)$$

Течение жидкости может быть установившемся (стационарным) или не установившемся (нестационарным).

При установившемся движении жидкости параметр времени в поле скоростей отсутствует

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z).$$

При рассмотрении движения сплошной среды и применении переменных Эйлера используется понятие линии тока.

Линии тока – кривые в потоке движущейся жидкости, в каждой точке которых в рассматриваемый момент времени векторы скоростей параллельны касательным этих линий (рисунок 17.1).

Отсюда следует, что составляющие скорости, нормальные к линии тока, в любой точке этой линии равны нулю.

Уравнение линии тока определяется из условия совпадения направления касательной к линии тока с направлением вектора скорости в каждой точке.

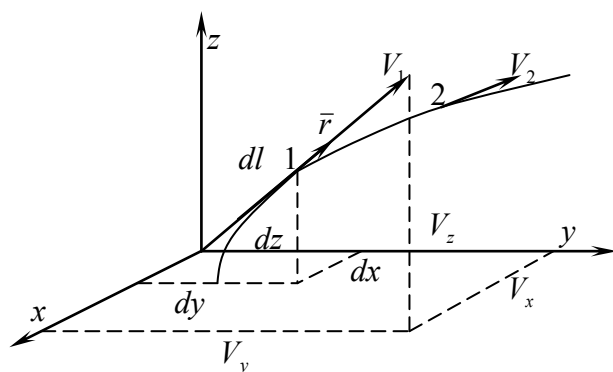


Рисунок 17.1

Направляющие косинусы углов касательной к линии тока с осями координат) равны

$$\cos(\bar{r}, x) = \frac{dx}{dl}, \quad \cos(\bar{r}, y) = \frac{dy}{dl}, \quad \cos(\bar{r}, z) = \frac{dz}{dl},$$

где dx, dy, dz – проекции элемента линии тока dl на оси координат.

Направляющие косинусы вектора скорости равны

$$\cos(\bar{r}, \hat{x}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\bar{r}, \hat{y}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\bar{r}, \hat{z}) = \frac{V_z}{V}.$$

Тогда на линии тока имеем

$$\frac{dx}{dl} = \frac{V_x}{V}; \quad \frac{dy}{dl} = \frac{V_y}{V}; \quad \frac{dz}{dl} = \frac{V_z}{V};$$

или

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \frac{dl}{V}.$$

Отсюда, дифференциальные уравнения линий тока для данного момента времени

$$\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{V_z(x, y, z, t)}.$$

Здесь t рассматривается как параметр, имеющий заданное значение.

Для установившегося движения жидкости уравнение линии тока имеет вид,

$$\frac{dx}{V_x(x, y, z)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z)} = \frac{dz}{V_z(x, y, z)}.$$

Для стационарного движения, при котором вектор скорости не зависит от времени, семейство линий тока совпадает с семейством траекторий. Для нестационарного движения это разные семейства линий.

Если в пространстве, в котором движется жидкость, выбрать какой-либо замкнутый контур L и через каждую его точку провести свою линию тока, то получим трубку тока (рисунок 17.2).

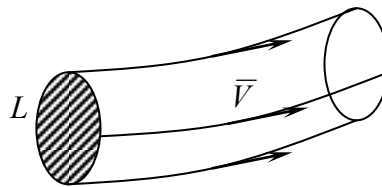


Рисунок 17.2

Жидкость не может выходить из трубки тока через боковую ее поверхность, так как в ее точках, состоящих из линий тока, скорости точек сплошной среды направлены по касательным к поверхности трубки тока. Сплошная среда может входить и выходить из трубки тока только через ее торцевые сечения.

Часть потока, заключенная внутри трубки тока, называется элементарной струйкой.

При стремлении поперечных размеров элементарной струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока.

В любой точке трубки тока в данный момент времени проходит единственная линия тока.

Живым сечением струйки, или просто сечением струйки, называется сечение, нормальное к каждой линии тока в пределах трубки тока.

При изучении движения жидкости используются понятия: смоченный периметр и гидравлический радиус.

Смоченным периметром называется длина линии, по которой жидкость в живом сечении соприкасается с твердыми поверхностями, ограничивающими поток.

Смоченный периметр χ для напорного потока равен длине всего периметра сечения. Под напорным потоком понимается такой поток, который ограничен твердыми поверхностями.

Пример. Поток в трубе

$$\chi = 2\pi r,$$

где r – радиус трубы.

В безнапорных потоках смоченный периметр составляет некоторую часть полного периметра. Примеры: поток в реке или канале, а также в трубе, работающей неполным сечением.

Для получения сопоставимых оценок потоков разной конфигурации и возможности описывать их едиными формулами используется понятие гидравлического радиуса.

Гидравлическим радиусом называется отношение площади живого сечения к смоченному периметру

$$R = \frac{S}{\chi}; \quad R = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}.$$

17.2 Расход. Уравнение расхода

Расходом называется количество жидкости, протекающее через живое сечение струйки (потока) в единицу времени.

Это количество можно измерить в единицах объема, в единицах массы или весовых единицах. В связи с этим различают объемный Q , массовый Q_m и весовой Q_G расходы

Для элементарной струйки, имеющей бесконечно малые поперечные сечения, можем считать скорость V одинаковой во всех точках каждого сечения. Тогда для этой струйки имеем :

- объемный расход $dQ = VdS [м^3 / с]$;
- массовый расход $dQ_m = \rho dQ = \rho VdS [кг / с]$;
- весовой расход $dQ_G = \rho g dQ = \rho g VdS [Н / с]$.

Для струйки (потока) конечных размеров в общем случае скорость частиц по живому сечению имеет различные значения, поэтому расход определяют как сумму элементарных расходов струек

$$Q = \int_S V dS.$$

На практике для расчетов используются понятие средней скорости по сечению потока $V_{cp} = Q / S$, и тогда $Q = V_{cp} \cdot S$.

Для установившегося сечения несжимаемой жидкости объемный расход во всех сечениях элементарной струйки один и тот же

$$dQ = V_1 dS_1 = V_2 dS_2 = const.$$

Это уравнение называется уравнением объемного расхода для элементарной струйки.

Для потока несжимаемой жидкости конечных размеров, ограниченного непроницаемыми стенками (например, трубопровод), можно воспользоваться средней скоростью по сечению:

$$Q = V_{cp1} S_1 = V_{cp2} S_2 = const.$$

Отсюда следует, что средние скорости в потоке несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площади сечений:

$$\frac{V_{cp1}}{V_{cp2}} = \frac{S_2}{S_1}.$$

17.3 Ускорение жидкой частицы

Ускорение жидкой частицы можно представить в виде

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z},$$

то в проекциях на оси координат имеем:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z;$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z.$$

Здесь $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ – называется локальная производная от вектора скорости,

$V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$ – представляет собой конвективную производную от

вектора скорости.

Локальная производная $\partial \bar{V} / \partial t$ характеризует изменение вектора скорости $\bar{V}$ в точке $M(x, y, z)$ пространства вследствие изменения только одного времени при неизменных x, y, z .

Группа слагаемых, представляющая конвективную производную, учитывает изменение вектора скорости, вызванное переносом рассматриваемой точки сплошной среды самой движущейся средой.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $\bar{V} = \bar{V}(x, y, z)$, т.е. поле скоростей стационарно, то $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$ и

$$\bar{a} = V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}.$$

2. Если $\bar{V} = \bar{V}(t)$, $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = 0$ и $\bar{a} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$

3. Если $\bar{V} = \text{const}$, то, $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = 0$ и $a = 0$

Преобразованием конвективной производной можно получить другое выражение для ускорения (формула Лэмба-Громеко).

В проекциях на координатные оси имеем:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z w_y - V_y w_z);$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_x w_z - V_z w_x);$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_y w_x - V_x w_y);$$

где

$$w_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right);$$

$$w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right);$$

$$w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right);$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2.$$

Величина $2\vec{\omega} = 2\vec{\omega}(w_x, w_y, w_z)$ - называется вихрем вектора скорости.

18 Динамика невязкой жидкости

Динамика жидкости – раздел гидромеханики, в котором изучаются законы движения жидкостей в зависимости от приложенных к ним сил. Объектом исследования является идеальная жидкость (невязкая жидкость), то есть жидкость, лишенная действия сил внутреннего трения (сил вязкости). Это значит, что в потоке нет касательных напряжений, и действующие на жидкость силы являются сжимающими. Нормальные напряжения (давление) в движущейся жидкости обладают теми же свойствами, что и в покоящейся жидкости. Идеальная жидкость считается несжимаемой.

18.1 Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости

В потоке невязкой жидкости выделим элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz , параллельными координатным осям (рисунок 18.1).

На массу жидкости в объеме параллелепипеда, равную $\rho dx dy dz$, действуют массовые силы $\vec{R}\rho dx dy dz$ и поверхностные силы давления окружающей жидкости, распределенные по граням параллелепипеда, перпендикулярные к ним и пропорциональные площадям соответствующих граней.

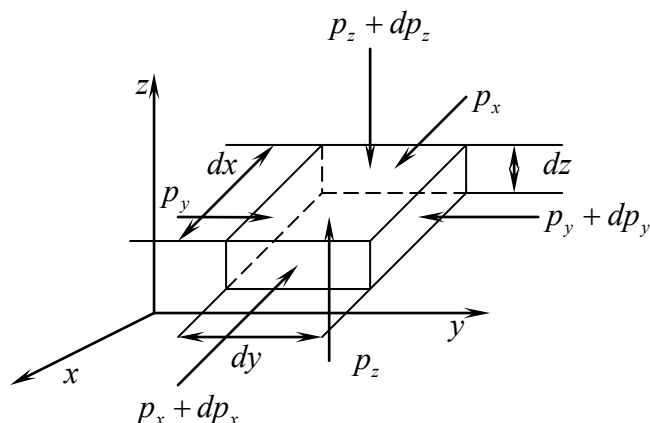


Рисунок 18.1

Запишем уравнения движения в направлении оси OX

$$m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k \quad \text{или} \quad \sum_k \bar{F}_k = m\bar{a}$$

$$R_x \rho dxdydz - \frac{\partial p}{\partial x} dxdydz = \rho dxdydz \frac{dV_x}{dt}$$

или после деления на массу $\rho dxdydz$ получим:

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений движения невязкой жидкости имеет вид:

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt},$$

$$R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt},$$

$$R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}.$$

Эти дифференциальные уравнения были получены Л.Эйлером в 1755 г.

Подставляя в правые части ускорения получаем:

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z,$$

$$R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z,$$

$$R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z.$$

Для случая покоящейся жидкости ($V_x = 0, V_y = 0, V_z = 0$) уравнения совпадают с дифференциальными уравнениями равновесия жидкости.

В задачах динамики жидкости массовые силы обычно считаются заданными.

Неизвестными являются функции давления

$p = f(x, y, z, t)$, проекции скорости $V_x = f_1(x, y, z, t)$, $V_y = f_2(x, y, z, t)$, $V_z = f_3(x, y, z, t)$ и плотность $\rho = f_4(x, y, z, t)$, т.е. всего пять неизвестных функций.

Для определения неизвестных переменных используется система уравнений Эйлера. Поскольку число неизвестных превышает число уравнений, к системе Эйлера добавляют уравнение неразрывности и уравнение состояния среды.

Для несжимаемой жидкости уравнение состояния $\rho = \text{const}$ и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости в форме Ламе-Громеко можно представить в виде:

$$\begin{aligned} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z w_y - V_y w_z), \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_x w_z - V_z w_x), \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_y w_x - V_x w_y). \end{aligned} \quad (18.1)$$

18.2 Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости

Массовые силы можно представить через потенциальную функцию:

$$R_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad R_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad R_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

откуда

$$-d\Pi = R_x dx + R_y dy + R_z dz.$$

Тогда из (18.1) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2(V_z w_y - V_y w_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + 2(V_x w_z - V_z w_x) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + 2(V_y w_x - V_x w_y).\end{aligned}$$

При установившемся движении

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнения системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= 2(V_z w_y - V_y w_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= 2(V_x w_z - V_z w_x) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) &= 2(V_y w_x - V_x w_y).\end{aligned}$$

Умножим каждое уравнение на соответствующий дифференциал и сложим эти уравнения:

$$d \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = -2 \left[(V_z w_y - V_y w_z) dx + (V_x w_z - V_z w_x) dy + (V_y w_x - V_x w_y) dz \right]$$

Или

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ w_x & w_y & w_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Если определитель равен нулю, т.е.

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = 0$$

то имеем

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}. \quad (18.2)$$

Это уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся движении невязкой жидкости.

Когда действует только сила тяжести $R_x = R_y = 0$, $R_z = -g$

то имеем

$$-d\Pi = -gdr \quad (\text{ось } OZ \text{ направлена вверх}).$$

$\Rightarrow \Pi = gz + C$. Подставим в уравнение (18.2).

$$\Rightarrow gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C = \text{const}.$$

Данное выражение соответствует уравнению Бернулли.

Произведя перегруппировку членов уравнения по сечениям струйки имеем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Это уравнение называется уравнением Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости (установлено в 1738 г).

Два члена уравнения Бернулли представляют:

z - геометрический напор,

$p/\rho g$ - пьезометрический напор,

сумма которых является полным напором в любой точке объема покоящейся жидкости.

Третий член уравнения имеет также линейную размерность

$$\frac{V^2}{2g} = \left[\frac{m^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{m} \right] = [m].$$

и называется скоростным напором, а трехчлен вида

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \text{ - полным напором.}$$

Следовательно, для идеальной движущейся жидкости полный напор есть величина постоянная вдоль струйки.

Так как трехчлен уравнения Бернулли имеет линейную размерность, то приведенный вывод отражает геометрическим смысл уравнения Бернулли и может быть представлен графически (рисунок 18.2.

На рисунке 18.2 показано изменение всех трех напоров (высот) вдоль струйки. На участке струйки между сечениями 1 и 2 диаметр струйки не изменяется.

Поэтому не изменяется и скорость движения жидкости и, как следствие этого, постоянен скоростной напор.

На участке от сечения 2 до сечения 3 струйка плавно сузилась. Исходя из

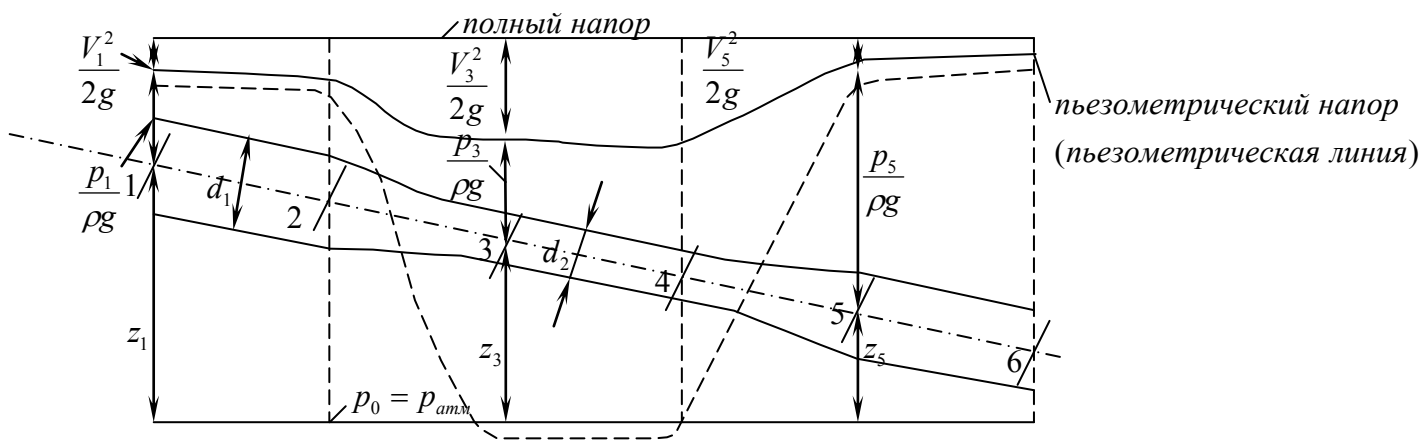


Рисунок 18.2

уравнения расходов

$$Q = V_{cp1} S_1 = V_{cp2} S_2 = const \Rightarrow \frac{V_{cp1}}{V_{cp2}} = \frac{S_2}{S_1}$$

скорость жидкости будет возрастать пропорционально уменьшению диаметра струйки. Так на графике в сечении 3 диаметр струйки стал в два раза меньше, чем на участке 1-2, т.е. $d_2 = 0,5d_1$. Как следствие этого скорость жидкости в сечении 3 увеличится в 4 раза, а скоростной напор в 16 раз. В сечении 5 вновь будет как в сечении 1. Штриховой линией показана пьезометрическая линия при увеличении расхода в $\sqrt{2}$ раз, вследствие чего скоростные напоры увеличиваются в 2 раза, а в узкой части струйки (между сечениями 3 и 4) давление становится меньше атмосферного.

Уравнение Бернулли можно записать в другой форме. Умножив все уравнения на ускорение g , получим:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}.$$

Размерность каждого члена этого уравнения

$$\frac{p}{\rho} = \left[\frac{H}{m^2} \cdot \frac{m^3}{кг} = \frac{H \cdot m}{кг} = \frac{Дж}{кг} \right] \begin{matrix} \leftarrow работа \\ \leftarrow масса \end{matrix}.$$

Видно, что эта составляющая представляет собой работу (энергию) сил давления, приходящуюся на единицу массы жидкости, т.е. удельную работу сил давления.

gz - представляет собой удельную потенциальную энергию (энергию положения), т.к. частица жидкости массой Δm и, находясь на высоте z , обладает энергией положения, равной Δmgz .

$\frac{V^2}{2}$ - представляет собой удельную кинетическую энергию, так как для той же частицы массой Δm кинетическая энергия составит $\Delta m V^2 / 2$.

Следовательно, энергетический смысл уравнения Бернулли заключается в следующем: для элементарной струйки идеальной жидкости полная удельная энергия жидкости в любом сечении струйки является постоянной величиной.

Следовательно, уравнение Бернулли выражает закон сохранения механической энергии в идеальной жидкости.

18.3 Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкого газа

Известно, что $d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = 0$.

При постоянном давлении и температуре по длине потока

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = const ,$$

для большой сжимаемости газа

$$\Pi + \frac{V^2}{2} + \int_p \frac{dp}{\rho} = const .$$

Если задана только одна массовая сила – сила тяжести, то

$$gz + \frac{V^2}{2} + \int_p \frac{dp}{\rho} = const .$$

1. Изотермический процесс

Изотермический процесс выражается зависимостью

$$\frac{p}{\rho} = c = const ,$$

где $c = p_0 / \rho_0$ - постоянная, определяемая начальными параметрами p_0 и ρ_0 .

Тогда $\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$.

Вычисляя интеграл, получаем

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} .$$

Отсюда уравнение Бернулли для газа при изотермическом процессе имеет вид

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = const . \quad (18.3)$$

2. Адиабатический процесс

Такой процесс возможен, если изменение состояния газа происходит с большой скоростью, когда можно пренебречь теплообменом между потоком газа и внешней средой. Адиабатический процесс выражается зависимостью

$$\frac{p}{\rho^k} = C = const ,$$

где k - показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости газа при постоянном давлении (c_p) к его теплоемкости при постоянном объеме (c_v), т.е.

$$k = c_p / c_v .$$

Для начальных условий будет $c = \frac{p_0}{\rho_0^k}$ или $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$.

Отсюда

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/k}.$$

Тогда решение интеграла $\int_p \frac{dp}{\rho}$ имеет вид:

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{1/k} dp = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \left(p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right).$$

После преобразования получим

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

С практически небольшой погрешностью решение интеграла запишем в виде

$$\int_p \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Тогда имеем

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Имея в виду уравнение Клапейрона $pV = RT$ имеем

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const}. \quad (18.4)$$

Таким образом, при больших перепадах давления и температуры по длине струйки полная удельная энергия равна сумме потенциальной, кинетической и тепловой (последнее слагаемое) энергии.

Уравнения (18.3) и (18.4) являются основными при исследованиях и расчетах установившегося движения невязкого газа.

19 Динамика вязкой жидкости

При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, т.к. вязкая жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительному сдвигу своих слоев и частиц. Нормальные и касательные напряжения в вязкой жидкости зависят не только от координат точек жидкости. В данной точке жидкости напряжения зависят от направления действия или, иначе, от ориентации в пространстве площадки, на которую они действуют.

19.1 Уравнения Навье - Стокса

Рассмотрим элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz который выделим из движущейся жидкости. Обозначим напряжения на гранях, ближайших к началу координат через

$$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$$

Первый индекс указывает ось, которой перпендикулярна данная грань, т.е. направление нормали к граням, второй – направление действия напряжения, т.е. параллельно какой оси координат оной направлено.

Отметим, что в любой точке потока вязкой жидкости касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках, направленные по нормали к линии пересечения этих площадок, равны друг другу, т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Таким образом, напряженное состояние вязкой движущейся жидкости характеризуется шестью независимыми компонентами напряжений

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Составим уравнения движения массы жидкости, заключенной в параллелепипеде (рисунок 19.1).

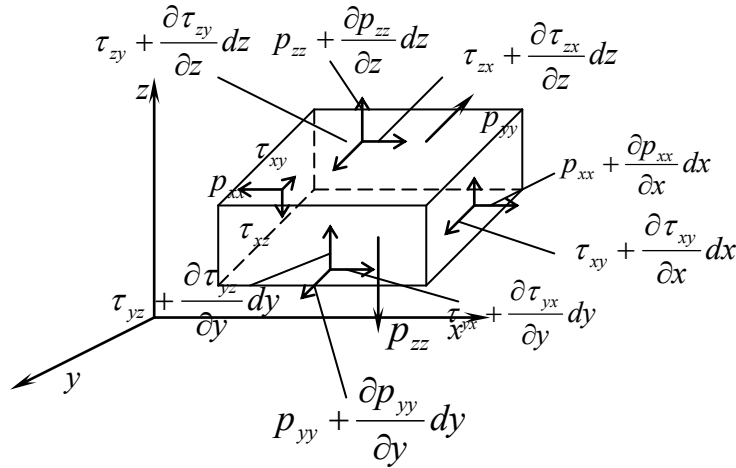


Рисунок 19.1

В проекции на ось OX уравнение движения имеет вид

$$R_x \rho \, dx dy dz - p_{xx} dy dz + \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\ - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \rho \, dx dy dz \frac{dV_x}{dt},$$

где $R_x \rho \, dx dy dz$ - проекция равнодействующей массовых сил на ось OX .

Произведя сокращения подобных членов, получим:

$$R_x \rho + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \rho \frac{dV_x}{dt}.$$

Выполнив аналогичные действия для проекций сил на направления осей OY и OZ , получим систему дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях:

$$\begin{aligned} R_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{dV_x}{dt}, \\ R_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) &= \frac{dV_y}{dt}, \\ R_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{dV_z}{dt}, \end{aligned} \quad (19.1)$$

Если считать заданными проекции плотности распределения массовых сил, то в уравнение (19.1) входят десять неизвестных функций:

$$V_x, V_y, V_z; p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}; \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}; \rho$$

Так как уравнений движения всего три, то система уравнений движения вязкой жидкости оказывается незамкнутой. Замыкание этой системы уравнений может быть осуществлено с помощью уравнения неразрывности и других соотношений, устанавливающих связи между неизвестными. Обычно эти соотношения вводятся на основе гипотез и поэтому обязательно должны быть подтверждены экспериментально.

В основу получения соотношений между касательными напряжениями τ и скоростями деформации жидких частиц в гидромеханике положен закон внутреннего трения Ньютона

$$\tau = \pm \mu \frac{dV}{dn},$$

где μ - коэффициент динамической вязкости,

$\frac{dV}{dn}$ - градиент скорости по нормали к направлению движения.

Градиент скорости при слоистом движении жидкости выражает скорость угловой деформации частицы

$$\frac{dV}{dn} = \frac{d\theta}{dt}, \text{ т.е. } \tau = \pm \mu \frac{d\theta}{dt}.$$

Распространяя закон вязкого трения на трехмерное движение, получим для касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_y}{dx} \right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{dV_y}{dz} + \frac{dV_z}{dy} \right);$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_z}{dx} \right);$$

В каждой точке движущейся вязкой жидкости кроме касательных напряжений есть нормальные напряжения, значения которых зависят от направления действия. Последнее является следствием проявления вязкости в гидромеханике описывается зависимостями

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{dV_x}{dx};$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{dV_y}{dy};$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{dV_z}{dz};$$

где p - давление, аналогично давлению, действующему в невязкой жидкости,

$2\mu \frac{dV_x}{dx}; 2\mu \frac{dV_y}{dy}; 2\mu \frac{dV_z}{dz}$ - добавочные нормальные напряжения от

действия сил вязкости.

$$\begin{aligned} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $\nu = \mu / \rho$ - кинематический коэффициент вязкости. Эти уравнения носят название уравнений Навье-Стокса. Они записаны для неустановившегося движения несжимаемой вязкой жидкости.

Составляющие плотности распределения массовых сил R_x, R_y, R_z считаются заданными, а плотность ρ и кинематическая вязкость ν - постоянными.

Тогда полученные уравнения совместно с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

образуют замкнутую систему: при четырех уравнениях имеем четыре неизвестные функции p, V_x, V_y, V_z .

Граничные условия задаются значениями скорости и давления на границах потока. На твердой границе используется условие прилипания частиц жидкости к твердому телу, т.е., например, на неподвижной твердой границе скорость потока будет равна нулю. Границей потока может служить и свободная поверхность. В этом случае граничным условием является: давление во всех точках свободной поверхности одинаково и равно давлению во внешней среде.

19.2 Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости при установившемся движении

Представим дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Громеки. Для установившегося движения несжимаемой жидкости уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu\Delta V_x &= 2(V_z w_y - V_y w_z), \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu\Delta V_y &= 2(V_x w_z - V_z w_x), \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu\Delta V_z &= 2(V_y w_x - V_x w_y), \end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Умножим уравнения на соответствующие проекции элементарного перемещения dx, dy, dz вдоль струйки и просуммируем:

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) - \nu(\Delta V_x dx + \Delta V_y dy + \Delta V_z dz) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ w_x & w_y & w_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Введя обозначение $dA = -\nu(\Delta V_x dx + \Delta V_y dy + \Delta V_z dz)$ получим

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A\right) = 0.$$

После интегрирования будем иметь

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}.$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, получим

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}.$$

Для двух точек одной и той же линии тока можно записать

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{A_1}{g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{A_2}{g}.$$

На практике в большинстве случаев удельная работа сил вязкости $A_2 > A_1$, введем обозначение

$$\frac{A_2 - A_1}{g} = h_{1-2}.$$

Тогда окончательно запись уравнения Бернулли для установившегося движения элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{A_2}{g} + h_{1-2}.$$

Для элементарной струйки сжимаемого вязкого газа по аналогии получим уравнение Бернулли в виде

$$z_1 + \frac{k}{(k-1)g} RT_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{k}{(k-1)g} RT_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{A_2}{g} + h_{1-2}.$$

Та часть энергии, которая затрачена на работу сил вязкости, превращается из механической в тепловую. Этот процесс необратим, т.е. обратное превращение невозможно из-за рассеивания тепла в окружающее пространство. Такой процесс называется диссипацией энергии.

19.3 Уравнение Бернулли для потока при установившемся движении вязкой жидкости

1. Удельная энергия потока

Удельная энергия потока (отнесенная к единице веса) складывается из удельной потенциальной и кинетической энергий.

1.1. Удельная потенциальная энергия потока

В плавно изменяющемся установившемся потоке

$$V_x \approx V_i; V_y \approx 0; V_z \approx 0; \frac{\partial V}{\partial t} \approx 0.$$

и уравнение Навье-Стокса примет вид

$$\begin{aligned} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

где скорость частицы жидкости в V_i -й точке живого сечения потока. Отсюда следует, что при установившемся плавно меняющемся движении вязкой жидкости давление по живому сечению распределяется по гидростатическому закону, т.е.

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}.$$

Следовательно, исходя из этого можем определить в уравнении Бернулли для потока удельную потенциальную энергию, применительно к любой выбранной в данном живом сечении точке так же, как и для элементарной струйки.

1.2. Удельная кинетическая энергия потока

Удельная кинетическая энергия массы жидкости, протекающей через живое сечение в единицу времени, вычисленная по скоростям потока и отнесенная к единице веса, равна

$$E_{k_i} = \frac{\int_s \rho V_i dS \frac{V_i^2}{2}}{\rho g a} = \frac{1}{2ga} \int_s V_i^3 dS,$$

где $\int_s \rho V_i dS \frac{V_i^2}{2}$ кинетическая энергия массы жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение, найденная по элементарным массам $dm_i = \rho V_i dS$, проходящим через площадки dS со скоростью V_i .

Вычисление E_{k_i} по скоростям потока затруднительно, т.к. функция $V_i = f(x, y, z)$ зачастую неизвестна.

Гораздо проще вычислить удельную кинетическую энергию по средней скорости в живом сечении $V_{cp} = Q/S$. В этом случае удельная кинетическая энергия при расходе Q и средней скорости V_{cp} будет равна

$$E_{k_{cp}} = \frac{\rho Q \frac{V_{cp}^2}{2}}{\rho g Q} = \frac{V_{cp}^2}{2g}.$$

Возьмем отношение E_{k_i} и $E_{k_{cp}}$, обозначив его через α

$$\alpha = \frac{E_{k_i}}{E_{k_{cp}}} = \frac{1}{SV_{cp}^3},$$

где α - отношение действительной кинетической энергии массы жидкости, протекающей через живое сечение потока, к кинетической энергии, вычисленной в

предположении, что во всех точках живого сечения скорости V_i равны средней скорости V_{cp} .

Коэффициент α называется коэффициентом кинетической энергии или коэффициентом Кориолиса.

При равномерном распределении скоростей по живому сечению потока (рисунок 19.2, а) коэффициент $\alpha = 1$, а при реальном распределении скоростей (рисунок 19.2, б) всегда больше единицы.

Последнее можно доказать, если скорость V_i можно выразить в виде суммы

$$V_i = V_{cp} + \Delta V,$$

где ΔV - знакопеременная добавка.

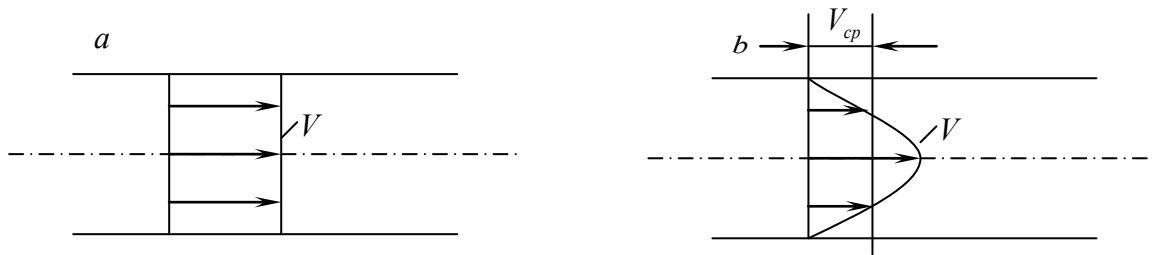


Рисунок 19.2

Тогда имеем

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \int_S \left(\frac{V_{cp} + \Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS = \frac{1}{\rho} \int_S \left(1 + \frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS.$$

Далее можем записать

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \int_S \left[1 + \rho \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^2 + 3 \frac{\Delta V}{V_{cp}} + \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 \right] dS$$

Расход жидкости через живое сечение потока

$$Q = \int_S (V_{cp} + \Delta V) dS = \int_S V_{cp} dS + \int_S \Delta V dS,$$

но $\int_S V_{cp} dS = Q$ и тогда $\int_S \Delta V dS = 0$.

Далее в силу знакопеременности ΔV

$$\int_S \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS \approx 0.$$

Таким образом

$$\alpha = 1 + \frac{3}{SV_{cp}^2} \int_S (\Delta V)^2 dS.$$

Замечание

1. Значение коэффициента α определяются экспериментально.

2. α - это безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по живому сечению потока реальной жидкости (физический смысл).

2. Уравнение Бернулли для потока

Исходя из вышеизложенного, уравнение Бернулли для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя сечениями потока, в котором движение плавно изменяется, будет иметь вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_{cp2}^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Отметим, что движение должно удовлетворять условиям плавной изменяемости только в рассматриваемых сечениях, а на участке между ними движение может быть и не плавно изменяющимся.

19.4 Гидравлические сопротивления

Потери удельной энергии (напора) или, как их часто называют гидравлические потери, зависят от формы, размеров русла, скорости течения и вязкости жидкости, а иногда и от абсолютного давления

Гидравлические потери полного напора определяются по формуле

$$h = \xi \frac{V_{cp}^m}{2g},$$

где $1 \leq m \leq 2$,

ξ - безразмерный коэффициент потерь, который характеризует отношение потерянного напора к скоростному напору.

Гидравлические потери разделяются на местные потери и потери по длине русла.

Местным сопротивлением называется короткий участок трубопровода на котором изменяется скорость по величине или по направлению.

Местные потери энергии обусловлены местными гидравлическими сопротивлениями, вызывающими деформацию потока, из-за местных изменений формы и размера русла.

Местные потери напора определяются по формуле $h = \xi \frac{V_{cp}^2}{2g}$, где V_{cp} - средняя скорость по живому сечению трубы.

На рисунке 19.3 приведены примеры типичных местных гидравлических сопротивлений

Каждое местное сопротивление характеризуется своим значением коэффициента сопротивления ξ , которое определяется экспериментально.

Потери напора по длине – это потери энергии, которые возникают в прямых трубах постоянного сечения и возрастают пропорционально длине трубы. Эти потери обусловлены внутренним трением жидкости (вязкостью) и имеют место в шероховатых и в гладких трубах.

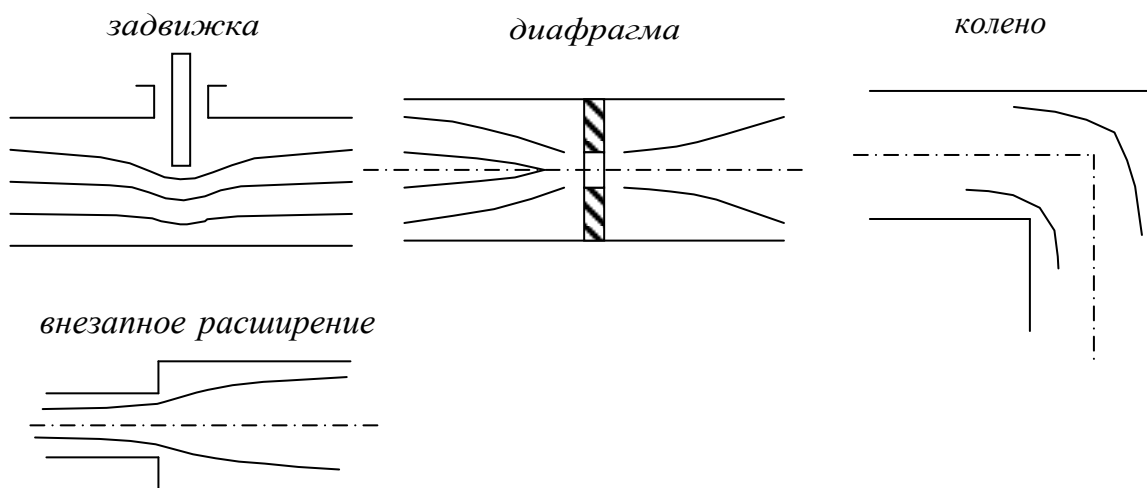


Рисунок 19.3

Потери напора по длине рассчитываются по формуле Вейсбаха-Дарси

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V_{cp}^2}{2g},$$

где $\xi = \lambda \frac{l}{d}$

λ - коэффициент потерь на трение по длине, или коэффициент Дарси.

Для выяснения физического смысла коэффициента Дарси рассмотрим равномерное движение в трубе объема жидкости цилиндрической формы длиной l и диаметром d , равным диаметру трубы (рисунок 19.4).

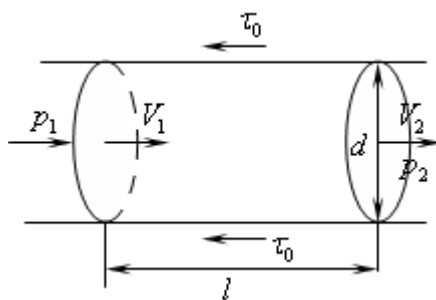


Рисунок 19.4

Составим уравнения сил, действующих на объем – сил давления и силы трения:

$$p_{mp} = p_1 - p_2; \quad p_{mp} \frac{\pi d^2}{4} - \pi d l \tau_0 = 0,$$

где τ_0 - напряжение трения на стенки трубы.

Тогда

$$p_{mp} = \frac{4l\tau_0}{d}.$$

С другой стороны имеем

$$p_{mp} = h_{cp} g \rho = \lambda \frac{l}{d} \frac{V_{cp}^2}{2} \rho.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{V_{cp}^2}{2}}.$$

Таким образом, коэффициент Дарси есть величина, пропорциональная напряжению трения на стенке трубы к динамическому давлению, определенному по средней скорости.

19.5 Коэффициент Рейнольдса

В 1839 г немецкий инженер-строитель Г. Гаген определил сопротивление движения воды по капиллярам (трубки малого диаметра) в зависимости от влияния температуры.

Одновременно с ним французский врач Ж. Пуазейль установил сопротивление движения крови в венах и капиллярных сосудах.

Они получили идентичную формулу

$$R \sim \frac{\nu V}{d^2} - \text{сила сопротивления,}$$

где

ν - кинематический коэффициент вязкости,

d - диаметр капилляра.

Инженер бельгийский А. Дарси получил по исследованиям течения воды в трубах, проведенных в ходе строительства водопроводов, другую формулу

$$R \sim \frac{\nu V^2}{d}.$$

Формулу Пуазейля экспериментально подтвердили - англичанин Дж. Стоке, швейцарец Э. Гагенбах, немец Ф.Нейман.

Формулу Дарси подтвердили - англичанин Дж.Ранкин, немец Майер и др.

Решение проблемы было найдено учеными - русским Н.П. Петровым и английским О.Рейнольдсом.

Петровым в своей теории гидродинамической смазки установил, что существуют два различных режима течения жидкости в трубе. Первый режим им представлялся как прямолинейное движение жидкости в виде вложенных один в другой цилиндрических слоев параллельно оси трубы. Сопротивление в этом случае пропорционально первой степени скорости. При втором режиме в

движущейся жидкости образуются вихри, разрывы струек и поперечное движение частиц. Сопротивление движению становится пропорционально квадрату скорости. Эти наблюдения Петрова стали ключевой идеей в открытиях английского гидродинамика О.Рейнольдса.

На основе многочисленных и многолетних (более 10 лет) экспериментов О.Рейнольде установил, что существуют некоторые критические скорости, при которых происходит смена режимов течения жидкости. Рейнольде обнаружил существование двух критических скоростей. Одна имеет место при переходе ламинарного режима движения в турбулентный режим, она называется верхней критической скоростью $V_{кр.в.}$ другая - при переходе турбулентного режима в ламинарный режим, она называется нижней критической скоростью $V_{кр.н.}$. Задержка $V_{кр.н.} < V_{кр.в.}$ с обратным переходом, очевидно, обусловлена необходимостью успокоения течения жидкости.

Опытным путем установлено, что значение верхней критической скорости меняется довольно в широких пределах в зависимости от внешних условий: постоянства температуры, уровня вибрации экспериментальной установки и т.п. В противоположности ей нижняя критическая скорость в широком диапазоне изменения внешних условий остается практически постоянной.

Опыты показали, что

$$V_{кр.н.} = k \frac{v}{d}.$$

Величина пропорциональности k одинакова для всех жидкостей и газов, а также для любых диаметров труб. Это означает, что изменение режима течения происходит при определенном соотношении между скоростью, диаметром и кинематической вязкостью:

$$k = \frac{V_{кр} d}{v}.$$

Полученное безразмерное число называется критическим числом Рейнольдса и обозначается

$$Re_{кр} = \frac{V_{кр} d}{\nu}.$$

Рейнольдс установил, что для труб круглого сечения $Re_{кр} = 2320$.

При $Re < Re_{кр}$ - ламинарный режим,

$Re > Re_{кр}$ - турбулентный режим (рисунок 19.5).

В реальных условиях

$Re_{кр} = 2320 - 40000$ - переходная область.

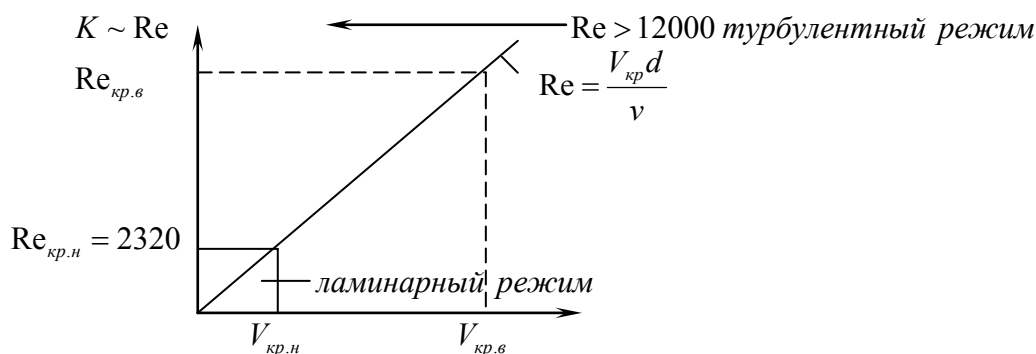


Рисунок 19.5

19.6 Теория ламинарного течения в круглых трубах

Ламинарное течение характеризуется параллельно-струйчатым упорядоченным движением частиц жидкости. Движение можно представить как совокупность бесконечно тонких кольцевых концентрических слоев, перемещающихся относительно друг друга, единственным источником потерь энергии в данном случае является трение между слоями движущейся жидкости, подчиняющейся закону Ньютона.

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости в прямой круглой трубе с внутренним диаметром $d = 2r$. Расположим трубу горизонтально. Этим мы исключим влияние силы тяжести.

Выделим участок длиной l двумя сечениями 1-1 и 2-2 (рисунок 19.6). Запишем уравнение Бернулли для выделенного участка:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2},$$

где $h_{1-2} = \frac{A_2 - A_1}{g}$.

Вследствие неизменности диаметра трубы и стабильности потока $V_1 = V_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$. Так как труба горизонтальна, то $z_1 = z_2$.

Отсюда имеем

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_{1-2}.$$

Тогда потери на трение по длине составят:

$$h_{1-2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Составим уравнения равновесия выделенного объема:

$$\Delta p \pi r^2 - 2\pi l \tau = 0.$$

Касательные напряжения

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2l}.$$

Известно, что

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\Delta pr}{2l} = -\mu \frac{dV}{dr}.$$

Отсюда приращение скорости

$$dV = -\frac{\Delta pr}{2l\mu} dr.$$

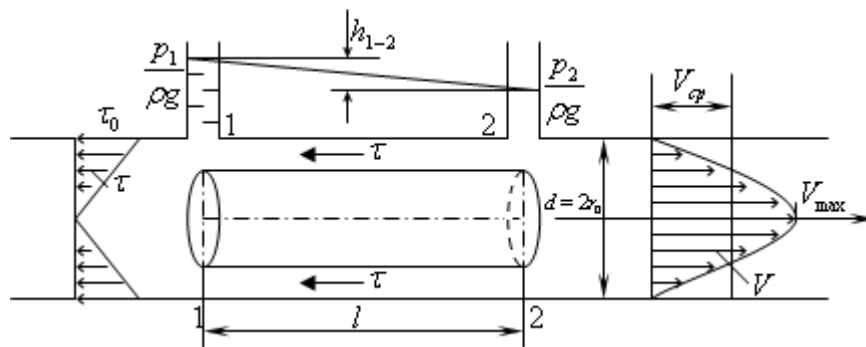


Рисунок 19.6

Проинтегрировав это выражение, имеем:

$$V = -\frac{\Delta pr^2}{4l\mu} + C.$$

Тогда при $r = r_0$ и $V = 0$

$$C = \frac{\Delta pr_0^2}{4l\mu}.$$

Таким образом, формула скорости по окружности радиусом r имеет вид:

$$V = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu}.$$

Полученное выражение является законом распределения скоростей по живому сечению круглой трубы при ламинарном режиме течения. Кривая, изображающая эпюру скоростей, представляет собой квадратичную параболу (рисунок 19.6).

Максимальная скорость частиц жидкости будет на оси трубы ($r = 0$)

$$V_{\max} = \frac{\Delta p r_0^2}{4l\mu}. \quad (19.2)$$

Расход через элементарную площадку dS составит

$$dQ = V dS,$$

где $dS = 2\pi r dr$,

$$V = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu},$$

$$dQ = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu} 2\pi r dr.$$

В результате интегрирования имеем

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{2l\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr \Rightarrow Q = \frac{\pi \Delta p}{8l\mu} r_0^4. \quad (19.3)$$

Средняя скорость по живому сечению составит:

$$V_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p r_0^2}{8l\mu}. \quad (19.4)$$

В результате сравнивая (19.2) и (19.4) имеем $V_{cp} = 0,5 V_{\max}$.

Зная закон распределения скоростей по сечению потока, можно определить величину коэффициента кинетической энергии -коэффициента Кориолиса.

В соотношение

$$\alpha = \frac{1}{SV_{cp}^3} \int_S V_1^3 dS$$

подставим среднюю скорость

$$V_{cp} = \frac{\Delta p r_0^2}{8l\mu} \quad \text{и} \quad V_1 = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu}.$$

Тогда имеем

$$\alpha = \frac{(8\mu l)^3}{(\Delta p r_0^2)^3 S} \int_S \left[\frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu} \right]^3 dS.$$

Так как $S = \pi r_0^2$ и $dS = 2\pi r dr$, получим

$$\alpha = \frac{\int_0^{r_0} \left[\frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu} \right]^3 2\pi r dr}{\pi r_0^2 \left(\frac{\Delta p r_0^2}{8l\mu} \right)^3} = 2.$$

Таким образом, действительная кинетическая энергия потока при ламинарном режиме течения в два раза превышает кинетическую энергию того же потока, но при равномерном распределении скоростей.

Определим зависимость потерь напора h_{1-2} , на трение от параметров потока из (19.3).

В виду того, что $\mu = \nu \rho$, $r_0 = d/2$, $h_{1-2} = \frac{\Delta p}{\rho g}$ и (19.3), имеем:

$$h_{1-2} = \frac{128 \nu l Q}{g \pi d^4}.$$

Данная формула получена Пуазейлем.

Данная формула используется для расчета трубопроводов с ламинарным режимом течения.

Пусть расход жидкости выразится через среднюю скорость

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} V_{cp}.$$

Тогда

$$h_{1-2} = \frac{32 \nu l V_{cp}}{g d^2}.$$

Тогда формула потерь на трение по длине, приравняв к формуле Вейсбаха-Дарси имеем:

$$\frac{32 \nu l V_{cp}}{g d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V_{cp}^2}{2g},$$

Тогда коэффициент Дарси для ламинарного потока будет иметь вид:

$$\lambda_2 = \frac{64 \nu}{d V_{cp}}.$$

Или, имея ввиду $Re = \frac{d V_{cp}}{\nu}$, получим:

$$\lambda_2 = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Тогда

$$h_{1-2} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{V_{cp}^2}{2g}.$$

Следовательно, при установившемся ламинарном движении линии тока и траектории жидких частиц совпадают и это прямые, параллельные направлению движения.

Если направить оси OX вдоль оси трубы, то проекции скорости частицы жидкости будут

$$V_x = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4l\mu}; \quad V_y = 0; \quad V_z = 0,$$

где $r^2 = y^2 + z^2$.

Отсюда видно, что проекция скорости не зависит от координаты OX .

19.7 Турбулентное движение жидкости

Турбулентный режим течения жидкости является наиболее часто встречающимся в природе и технике, но в то же время представляет собой одно из сложнейших гидравлических явлений. Несмотря на многочисленные исследования в этой области, строгая теория турбулентного режима движения до настоящего времени еще не создана.

Турбулентным называется течение жидкости, при котором ее частицы совершают неустановившиеся неупорядоченные движения по сложным траекториям, в результате чего происходит интенсивное перемешивание различных слоев движущейся жидкости.

Для характеристики турбулентного потока пользуются понятием средней скорости $\bar{V}$ в данной точке пространства, получающейся в результате усреднения истинной скорости V за достаточно большой промежуток времени (рисунок 19.7).

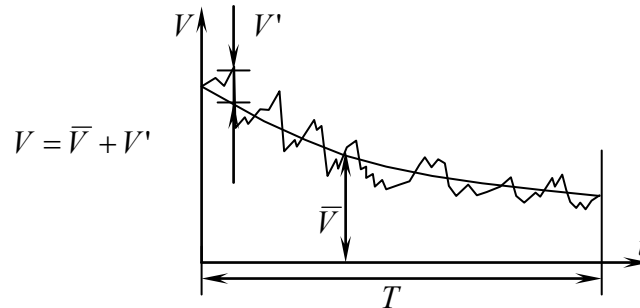


Рисунок 19.7

Разность $V' = V - \bar{V}$ называется пульсацией скорости.

Турбулентное течение условно считается установившемся, если $\bar{V}$ не зависит от времени $\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0\right)$.

Турбулентное течение возникает в результате потери устойчивости ламинарным течением при достаточно больших значениях числа Рейнольдса.

Рассмотрим некоторые способы осреднения истинных характеристик движения: V , p , τ .

$$V = \bar{V} + V', \quad p = \bar{p} + p', \quad \tau = \bar{\tau} - \tau'.$$

Осреднение по времени

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt; \quad \bar{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau dt.$$

Осреднение по объему

$$\bar{V} = \frac{1}{V} \int_V V dV; \quad \bar{p} = \frac{1}{V} \int_V p dV; \quad \bar{\tau} = \frac{1}{V} \int_V \tau dV.$$

Осреднение с весом

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V g(t) dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p g(t) dt; \quad \bar{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau g(t) dt$$

где $g(t)$ - некоторая заданная функция.

После введения среднего значения $\bar{V}, \bar{p}, \bar{\tau}$ истинное значение предстанет в виде

$$V = \bar{V} + V'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \tau = \bar{\tau} + \tau'.$$

где V', p', τ' - пульсации

$\bar{V}' = 0, \bar{p}' = 0, \bar{\tau}' = 0$ - среднее значение пульсации равно нулю.

$$\text{Т.е. } \bar{V}' = \frac{1}{T} \int_0^T V' dt = 0; \quad \bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0; \quad \bar{\tau}' = \frac{1}{T} \int_0^T \tau' dt = 0.$$

20 Математические модели истечения жидкости через отверстия

Рассмотрим схему истечения жидкости через отверстие (рисунок 20.1).

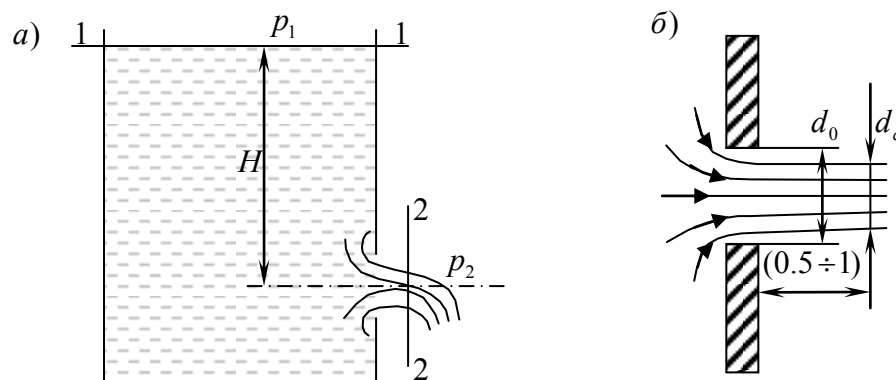


Рисунок 20.1

Из большого резервуара (а) с жидкостью, находящейся под давлением p_1 , через малое отверстие ($d_0 \leq 0.1H$) в стенке происходит истечение жидкости в воздушное пространство.

Такое истечение называется свободным истечением.

Частицы жидкости приближаются к отверстию из всего прилежащего объема, двигаясь ускоренно по различным плавным траекториям. Действующая центробежная сила направлена внутрь формирующейся струи. Сечение струи постепенно уменьшается. Сжатие продолжается и после выхода струи из резервуара. По мере удаления от отверстия кривизна линий тока уменьшается и на некотором расстоянии от стенки $(0.5 \div 1)d_0$ движение становится плавно изменяющимся.

Сечение, где движение становится плавно изменяющимся, называют сжатым сечением струи.

Скорость во всех точках сжатого сечения практически одинакова ввиду малости сечения и только наружный слой несколько заторможен из-за трения о кромку отверстия.

Степень сжатия характеризуется коэффициентом сжатия ε ;

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \left(\frac{d_c}{d_0} \right)^2,$$

где S_c, S_0 - площади сечения струи и отверстия.

Для определения скорости и расхода через отверстие составим уравнение Бернулли для участка, ограниченного сечениями 1-1 (свободная поверхность жидкости в резервуаре) и 2-2 (сжатое сечение).

Считаем, что движение жидкости в этих сечениях плавно изменяющимися.

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

где α_1, α_2 - безразмерный коэффициент кинематической энергии или коэффициент Кориолиса. Значение α определяется экспериментально.

Потери удельной энергии на участке определяются сопротивлением отверстия (местные потери) и представим их в виде формулы

$$h_{1-2} = \xi_0 \frac{V_2^2}{2g},$$

где ξ_0 - коэффициент потерь при истечении из отверстия с острой кромкой.

Тогда

$$H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = (\alpha_2 + \xi_0) \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Из условия неразрывности

$$V_2 S_c = V_1 S_1$$

$$\text{или } V_2 \varepsilon S_0 = V_1 S_1,$$

где S_1 - площадь свободной поверхности жидкости в резервуаре,

можно записать

$$H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \left(\alpha_2 + \xi_0 - \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2 \right) \frac{V_2^2}{2g}.$$

Если $p_1 \neq p_2$, то средняя скорость в сжатом сечении

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_0 - \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} = \varphi_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)},$$

где множитель $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_0 - \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2}}$

называется коэффициентом скорости.

Тогда

$$V_2 = \varphi_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}.$$

Если $p_1 = p_2 = p_{атм}$ (т.е. имеем открытый резервуар и истечение струи происходит в окружающую атмосферу), то

тогда

$$V_2 = \varphi_0 \sqrt{2gH}.$$

Расход жидкости через отверстие составит

$$Q = V_2 S_c$$

или

$$Q = V_2 \varepsilon S_0.$$

Тогда

$$Q = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}.$$

Или, если $p_1 = p_2$,

$$Q = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2gH}.$$

Произведение коэффициентов $\mu_0 = \varepsilon \varphi_0$ называют коэффициентом расхода.

Тогда

$$Q = \mu_0 S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}, \quad (20.1)$$

$$Q = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH}.$$

Эксперименты показали, что в ядре струи скорость практически равна идеальной

$$V_u = \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}.$$

Следовательно, коэффициент скорости φ является коэффициентом средней скорости.

Из (20.1) следует, что

$$\mu_0 = \frac{Q}{S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}} \quad \text{или} \quad \mu_0 = \frac{Q}{S_0 V_u}.$$

Истечение под уровень, или истечение через затопленное отверстие

В этом случае вся кинетическая энергия струи теряется на вихреобразование, как при внезапном расширении (рисунок 20.2).

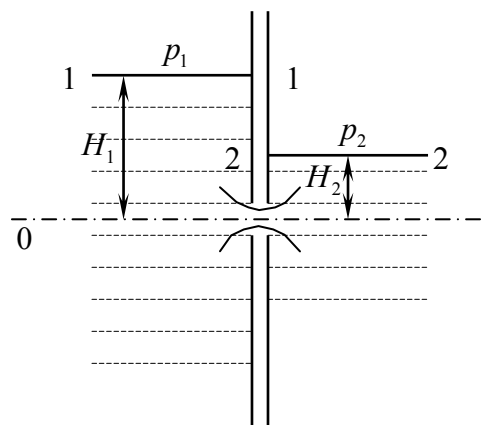


Рисунок 20.2

Запишем уравнение Бернулли для участка, ограниченного сечениями 1-1 и 2-2, где скорости будем считать равными нулю.

$$H_1 + \frac{p_1}{\rho g} = H_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + h_0,$$

где V - скорость истечения в сжатом сечении;

$$h_0 = \xi \frac{V^2}{2g} - \text{потери напора на отверстии};$$

ξ - коэффициент потерь.

$\alpha \frac{V^2}{2g}$ - является потерей напора, связанной с внезапным расширением струи

от сжатого состояния до сечения во втором резервуаре.

Тогда

$$V = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi}} \sqrt{2gH_p} = \varphi \sqrt{2gH_p},$$

где $H_p = H_1 - H_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ - расчетный напор.

Расход жидкости составит:

$$Q = V \cdot S_c = \xi \varphi S_0 \sqrt{2gH_p} = \mu S_0 \sqrt{2gH_p}.$$

Таким образом, имеем те же расчетные формулы, что и при свободном истечении, только расчетный напор H_p в данном случае представляет собой разность гидростатических напоров по обе стороны стенки, т.е. скорость и расход не зависит от высоты расположения отверстия.

Для определения скорости истечения и расхода жидкости через насадки применяются те же формулы, что и для малого отверстия в тонкой стенке, но

коэффициенты $\varepsilon, \varphi, \mu$ в них имеют другие значения в зависимости от формы насадки.

Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре

Рассмотрим схему истечения жидкости (рисунок 20.3).

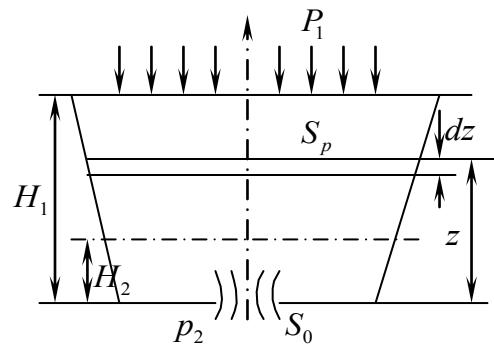


Рисунок 20.3

Поперечное сечение резервуара меняется по высоте, т.е.

$$S_p = f(z).$$

Истечение происходит через малое отверстие в дне. Площадь сечения отверстия равна S_0 .

Давление на поверхности жидкости в резервуаре равно p_1 , а на выходе из отверстия - p_2 и $p_1 = p_2$.

Определим время истечения жидкости из резервуара от уровня H_1 до уровня H_2 .

Обозначив через Z переменную высоту уровня жидкости в резервуаре, отсчитываемую от дна, и взяв бесконечно малый отрезок времени dt , запишем следующее уравнение объемов:

$$-S_p dz = Q dt,$$

где $S_p dz$ - объем воды, вытекающий из резервуара (знак минус означает, что с уменьшением Z объем вытекшей жидкости увеличивается);

dz - изменение уровня в резервуаре за время dt ,

Q - расход жидкости через отверстие

$$Q = \mu_0 S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}.$$

Тогда

$$-S_p dz = \mu S_0 \sqrt{2g \left(Z + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} dt.$$

Следовательно

$$dt = - \frac{S_p dz}{\mu S_0 \sqrt{2g \left(Z + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}}.$$

Если известно $S_p = f(z)$, то можно определить t .

Пусть $S_p = \text{const}$ и $p_1 = p_2$.

Тогда

$$\int_0^t dt = - \int_{H_1}^{H_2} \frac{S_p dz}{\mu S_0 \sqrt{2g(z)}},$$

$$t = \frac{2S_p \sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}}{\mu S_0 \sqrt{2g}}.$$

В случае полного истечения жидкости из резервуара $H_2 = 0$.

Тогда

$$t = \frac{2S_p \sqrt{H_1}}{\mu S_0 \sqrt{2g}} = \frac{2S_p H_1}{\mu S_0 \sqrt{2g H_1}} = \frac{2W}{Q_{\max}}.$$

где W - полный объем резервуара;

$Q_{\max}$ - максимальный расход жидкости в начале истечения при H_1 .

21 Гидравлический удар в трубах

Гидравлический удар – явление резкого повышения давления, возникающее при напорном движении жидкости в трубе при быстром изменении скорости потока в одном из сечений.

Это явление характеризуется возникновением волны повышенного или пониженного давления, распространяющегося от места изменения скорости.

Процесс протекает очень быстро и связан с упругими деформациями жидкости и стенок трубопровода.

Гидравлический удар приводит к нарушениям целостности трубопроводов и других устройств гидросистемы.

Причины гидравлического удара:

- быстрое закрытие или открытие запорных или регулируемых устройств;
- внезапная остановка насоса.

При внезапной остановке насоса или резком открытии задвижки возникает гидравлический удар с резким падением давления вплоть до давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. В результате возможно нарушение сплошности потока.

Впервые исследование гидравлического удара были выполнены Н.Е. Жуковским в 1898г.

Он детально проанализировал физическую картину процесса, вывел дифференциальные уравнения удара и дал их решение, нашел основные расчетные зависимости для вычисления изменения давления при гидравлическом ударе.

Повышение давления при гидравлическом ударе можно определить, применив теорему об изменении количества движения к массе остановившейся жидкости.

Схема перемещения ударной волны за время dt (рисунок 21.1).

Пусть за время dt фронт ударной волны прошел от задвижки путь dl .

Тогда изменение количества движения сжатого объема будет:

$$[(p_0 + \Delta p_{y\partial}) - p_0] S dt = S \rho (V_0 - 0) dl,$$

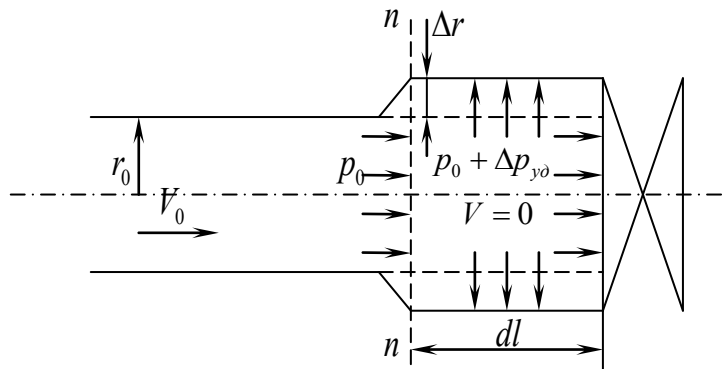


Рисунок 21.1

где S - площадь поперечного сечения трубы;

ρ - плотность жидкости.

Отсюда получаем скорость распространения ударной волны:

$$\Delta p_{y\partial} S dt = S \rho V_0 dl$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{\Delta p_{y\partial}}{\rho V_0},$$

где $C = \frac{dl}{dt}$ - скорость распространения ударной волны.

$$C = \frac{\Delta p_{y\partial}}{\rho V_0} \Rightarrow \Delta p_{y\partial} = \rho V_0 C - \text{называется формулой Жуковского,}$$

где $C = \sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}$ скорость звука в однородной упругой среде.

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho / E_{ж}}}.$$

Получили формулу скорости звука в однородной упругой среде.

Поскольку гидравлический удар приводит к отрицательным последствиям, то необходимо при проектировании гидравлических систем учитывать возможное повышение давления и предусматривать способы предотвращения и смягчения гидравлического удара.

Наиболее эффективным способом снижения $\Delta p_{уд}$ является устранение возможности возникновения гидравлического удара за счет:

- увеличения времени срабатывания задвижек и других устройств. Большой эффект достигается установкой перед этими устройствами компенсаторов в виде воздушно-гидравлических колпаков, гидроаккумуляторов и предохранительных клапанов.
- уменьшение скорости движения жидкости в трубопроводе за счет увеличения диаметра трубы или уменьшения длины трубопровода также способствует снижению ударного давления.

Список использованных источников

1. Безухов, Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
2. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
3. Бреббия, К. Применение метода граничных элементов в технике/ К. Бреббия. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа /Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
5. Ухин, Б.В. Гидравлика / Б.В. Ухин. – М.: Форум: ИНФРА – М, 2009. – 464 с.