Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

И.П. Болодурина, С.Т. Дусакаева, С.В. Колесник

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА КАК ИНСТРУМЕНТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Оренбург
2021

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73
Б 79

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук
С. В. Харитонова.

Болодурина И. П.
Б 79 Математическая логика как инструмент искусственного интеллекта для формализации знаний: учебное пособие / И. П. Болодурина, С. Т. Дусакаева, С. В. Колесник; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021 – 119 с.

ISBN 978-5-7410-2571-0

В учебном пособии изложены традиционные разделы курса математической логики: алгебра высказываний, булевы функции, логика предикатов и исчисление высказываний. Изложение материала осуществляется с акцентом на колоссальную роль формального языка математической логике в искусственном интеллекте для представления знаний. Пособие наряду с подробно представленным теоретическим материалом содержит достаточно большое количество разобранных примеров, вопросы для подготовки к коллоквиумам и задачи разного уровня сложности для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, и может быть использовано для других направлений подготовки и специальностей, в учебных планах которых предусмотрено изучение дисциплины «Математическая логика».

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-7410-2571-0

Содержание

Введение

В наступивший период интеллектуализации всех сфер человеческой деятельности по-прежнему остается актуальной проблема представления знаний в искусственном интеллекте. В рамках используемого логического подхода к решению этой проблемы математическая логика является средством формализации знаний, призванное на основе корректных гипотез выводить истинные утверждения. Помимо этого операции логического вывода позволяют манипулировать полученными знаниями.

К наиболее ярким примерам прикладного характера в области искусственного интеллекта можно отнести экспертные системы, используемые в различных социально-экономических процессах для диагностики, проектирования, прогнозирования, интерпретации и управления. Экспертная система содержит пять основных компонент: интерфейс с пользователем, базу знаний, систему логического вывода, модуль приобретения знаний, модуль отображения и интерпретации решений. В качестве внутреннего языка в экспертной системе часто используется язык математической логики. Запрос пользователя, сформулированный на языке представления знаний, поступает в подсистему логического вывода, которая на основе информации, содержащейся в базе знаний, генерирует рекомендации по решению поставленной задачи.

В этой связи изучение математической логики для студентов, обучающихся по направлениям подготовки, связанных с IT-технологиями, приобретает профессиональную направленность и способствует формированию профессиональных компетенций. Что способствует реализации компетентностного подхода в обучении. Кроме того изучение дисциплины «Математическая логика» прививает математическую культуру, развивая абстрактность и четкость рассуждений.

В пособии обобщены основные аспекты научно-исследовательского и методического опыта авторов для достижения цели изучения учебной дисциплины:

– знакомство с основными разделами математической логики в контексте формализации представления знаний для решения задач искусственного интеллекта (теоретический аспект);

– развитие способностей и навыков моделирования с помощью методов математической логики (практический аспект);

– формирование умения использовать методы математической логики для решения прикладных задач в различных предметных областях (научный аспект);

– реализация элементов компетентностного подхода в обучении в рамках формирования универсальных, профессиональных и общих компетенций (педагогический аспект).

1 Алгебра высказываний

1.1 Формулы алгебры высказываний

Предметом исследования и основным ключевым понятием алгебры высказываний (АВ) является высказывание, сама же алгебра высказываний служит фундаментом математической логики.

Определение 1. Высказыванием называется повествовательное предложение, представляющее собой утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Из определения высказывания следует, что вопросительные и восклицательные предложения не могут являться высказываниями. Что касается утверждений, сформулированных в виде повествовательных предложений, то они не должны носить субъективный характер. В частности, утверждение о том, что каша – вкусное блюдо, не является высказыванием. Также следует отметить, что определения не являются высказываниями.

Принято высказывания обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D,… или теми же буквами, индексируя снизу. Примерами высказываний могут служить утверждения:

A_1: «Москва – столица Российской Федерации»;

A_2: «Оренбург находится на берегу Волги»;

A_3: «Сумма углов в треугольнике равна 180^0»;

A_4: «Аристотель – человек »;

A_5: «Миллиард меньше миллиона»;

A_6: «Волга берет свое начало на Валдайской возвышенности»;

A_7: «Евклид – великий русский математик»;

A_8: «Тигр относится к семейству кошачьих»;

A_9: «Арбуз является ягодой».

Определение 2. Функцией истинности высказывания называется отображение множества всех высказываний в двухэлементное множество $\{0,1\}$, заданное по следующему правилу:

$$\lambda(A)=\begin{cases}1, \text{ если высказывание А истинно,}\\ 0, \text{ если высказывание А ложно.}\end{cases} \quad (1.1)$$

Значение $\lambda(A)$ из определения 2 называется логическим значением или значением истинности высказывания *А*. С учетом введенной функции истинности для приведенных выше высказываний логические значения примут вид: $\lambda(A_1)=1$, $\lambda(A_2)=0$, $\lambda(A_3)=1$, $\lambda(A_4)=1$, $\lambda(A_5)=0$, $\lambda(A_6)=1$, $\lambda(A_7)=0$, $\lambda(A_8)=1$, $\lambda(A_9)=1$.

В литературе [2, 3, 5, 10, 19, 27, 30] помимо введенных обозначений логических значений функции истинности также используются символы: «1», «И», «*t*» (от англ. *true* – истинный) для обозначения истинных высказываний и «0», «Л», «*f*» (от англ. *false* ложный) для обозначения ложный высказываний.

Из элементарных высказываний, примеры которых приведены выше, с помощью операций (логических связок) над высказываниями строят сложные высказывания. Результаты операций над высказываниями удобно изображать с помощью таблиц истинности. Ниже приведены определения операций над высказываниями и их таблицы истинности.

Определение 3. Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, обозначаемое $\neg A$, которое истинно, если A ложно и ложно, если A истинно.

Таблица 1 – Таблица истинности отрицания

$\lambda(A)$	$\lambda(\neg A)$
0	1
1	0

Определение 4. Конъюнкцией высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, которое истинно лишь в том случае, когда истинны оба высказывания A и B.

Таблица 2 – Таблица истинности конъюнкции

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение 5. Дизъюнкцией высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \vee B,$ которое ложно лишь в том случае, когда ложны оба высказывания A и B.

Таблица 3 – Таблица истинности дизъюнкции

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Определение 6. Импликацией высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \to B$, которое ложно лишь в том случае, когда A истинно, а B ложно.

Таблица 4 – Талица истинности импликации

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \to B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Определение 7. Эквивалентностью высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, которое ложно лишь в том случае, когда логические значения высказываний A и B совпадают.

Таблица 5 – Таблица истинности эквивалентности

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В алгебре высказываний интерес представляют не сами высказывания, а их логические значения. При таком подходе все введенные над высказываниями операции можно рассматривать как операции, введенные на двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Например, отрицание задает следующие правила действия с этими символами: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, конъюнкция – следующие: $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$ и т.д. С учетом введенных правил действия с символами 1 и 0 с помощью логических связок получим:

$$\lambda(\neg A) = \neg\lambda(A), \tag{1.2}$$

$$\lambda(A \wedge B) = \lambda(A) \wedge \lambda(B), \tag{1.3}$$

$$\lambda(A \vee B) = \lambda(A) \vee \lambda(B), \tag{1.4}$$

$$\lambda(A \to B) = \lambda(A) \to \lambda(B), \tag{1.5}$$

$$\lambda(A \leftrightarrow B) = \lambda(A) \leftrightarrow \lambda(B). \tag{1.6}$$

Равенства (1.3) – (1.6) можно записать в виде одного соотношения (1.7)

$$\lambda(A * B) = \lambda(A) * \lambda(B), \tag{1.7}$$

где знак «*» обозначает один из символов логических операций $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Термин «конъюнкция» происходит от лат. *conjunctio* – соединение, дизъюнкция – от лат. *dusjunctio* – разъединение, импликация от лат. *implication* – сплетение и *implico* – тесно связывать [6, 8, 11, 16, 24]. Каждая из введенных логических связок является некоторой математической моделью логического союза человеческого языка. Основное назначение логических операций состоит в отражении в виде нулей и единиц соответствующих союзов человеческого мышления, используемых в течение нескольких тысячелетий. В частности, отрицание достаточно полно передает суть логического союза «не», конъюнкция – «тогда и только тогда», эквивалентность – «когда». Что касается операции дизъюнкции, то в человеческом восприятии союз «или» чаще трактуется как один из двух объектов, поэтому дизъюнкцию можно приближенно считать образом логического союза «или». Импликация является наименее адекватной моделью логическому союзу «если…, то….» [12, 15, 21].

Введенные логические операции позволяют на базе простых высказываний конструировать более сложные высказывания. Например, высказывание «Если Оренбург стоит на берегу Волги, и сумма углов в треугольнике равна 180^0, то Евклид – великий русский математик» построено из высказываний A_2, A_3, A_7 с помощью операций конъюнкции и импликации и представимо в символьном виде $(A_2 \wedge A_3) \to A_7$. Учитывая логические значения используемых высказываний $\lambda(A_2) = 0,\ \lambda(A_3) = 1,\ \lambda(A_7) = 0$ и соотношение (1.7), получим, что логическое значение сложного высказывания равно единице. Действительно, $\lambda((A_2 \wedge A_3) \to A_7) = (\lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3) \to \lambda(A_7)) = (0 \wedge 1) \to 0 = 0 \to 0 = 1.$

В общем случае, схема сконструированного сложного высказывания имеет вид: $(X \wedge Y) \to Z$, где X, Y, Z – переменные, вместо которых были подставлены высказывания A_2, A_3, A_7, в результате которого было получено истинное высказывание. При подстановке в эту схему вместо X, Y, Z высказываний A_4, A_8, A_5 соответственно получим высказывание: «Если Аристотель – человек, и тигр относится к семейству кошачьих, то миллиард меньше миллиона», которое является ложным. Действительно, используя тот же подход, что и выше, получим: $\lambda((A_4 \wedge A_8) \to A_5) = (\lambda(A_4) \wedge \lambda(A_8) \to \lambda(A_5)) = (1 \wedge 1) \to 0 = 1 \to 0 = 0$.

Определение 8. Переменные, принимающие значения из множества высказываний, называются высказывательными или пропозициональными переменными.

Принято пропозициональные переменные обозначать заглавными буквами латинского алфавита P, Q, R, S, X, Y, Z или теми же буквами, индексируя снизу.

Определение 9 (формулы АВ).

1. Каждая пропозициональная переменная есть формула АВ.

2. Если F_1 и F_2 – формулы АВ, то $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами АВ.

3. Других формул АВ нет.

Определение 10. Если в формулу АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ вместо пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ подставить конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$ соответственно, то полученное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ называется конкретизацией формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ на наборе $A_1, A_2, ..., A_n$.

С учетом введенного определения рассмотренная выше схема конструирования сложного высказывания $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ является примером формулы АВ, а высказывание «Если Оренбург стоит на берегу Волги, и сумма углов в треугольнике равна 180^0, то Евклид – великий русский математик» $(A_2 \wedge A_3) \rightarrow A_7$ – конкретизацией формулы АВ $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ на наборе высказываний A_2, A_3, A_7.

В формуле АВ установлен следующий приоритет операций: сначала выполняется операция отрицания и действия в скобках, далее следует операция конъюнкция, все остальные операции выполняются слева направо.

Теорема 1. Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ на наборе $\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_n)$ логических значений составляющих высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, то есть

$$\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_n)). \tag{1.8}$$

Доказательство проведем методом математической индукции по количеству логических связок, входящих в формулу $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Если формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит 0 логических связок, то есть представляет собой пропозициональную переменную $F(X_1) = X_1$, тогда доказываемое соотношение (1.8) принимает тривиальный вид $\lambda(A_1) = \lambda(A_1)$.

Если формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит 1 логическую связку, то она является одной из следующих формул: $\neg X_1$, $(X_1 \wedge X_2)$, $(X_1 \vee X_2)$, $(X_1 \to X_2)$, $(X_1 \leftrightarrow X_2)$ и доказываемое равенство имеет вид равенств (1.2) – (1.6).

Предположим теперь, что равенство (1.8) справедливо для всех формул АВ, содержащих не более k логических связок. Докажем, используя индуктивное предположение, что утверждение верно для формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, содержащей (k+1) логических связок. Согласно определению формулы АВ, формула F имеет один из следующих видов: $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, где F_1 и F_2 – некоторые формулы АВ, содержащие не более k логических связок. Покажем, что утверждение верно для случая $(F_1 \wedge F_2)$. На основании формулы (1.3) вычисляем значение $\lambda(F(A_1, A_2, .., A_n)) = \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) =$ $= \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n)) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n))$, поскольку F_1 и F_2 – некоторые формулы АВ, содержащие не более k логических связок, то, используя индуктивное предположение, заключаем, что $\lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n)) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) =$ $=(F_1(\lambda(A_1), \lambda(A_2),..., \lambda(A_n)) \wedge (F_2(\lambda(A_1), \lambda(A_2),..., \lambda(A_n))=F(\lambda(A_1), \lambda(A_2),..., \lambda(A_n))$.

Аналогично, соотношение (1.8) доказывается для остальных случаев конструирования формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет определять логическое значение формулы АВ на основании логических значений входящих в нее пропозициональных переменных. Для нахождения логического значения формулы АВ на всевозможных наборах значений ее пропозициональных переменных удобным является построение таблицы истинности [22, 25].

Пример 1. Составить таблицу истинности формулы АВ $F(X, Y, Z) = (X \to Y) \vee \neg Z \leftrightarrow X$..

Решение. Согласно принятому в АВ приоритету операций расставим порядок действий в данной формуле: 1) отрицание, 2) импликация, 3) дизъюнкция, 4) эквивалентность.

Таблица 6 – Таблица истинности формулы из примера 1

X	Y	Z	1	2	3	4
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

В зависимости от принимаемых логических значений формул АВ в математической логике принята следующая классификация: выполнимые, тавтологии (тождественно истинные), опровержимые и противоречия (тождественно ложные).

Определение 11. Формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием, то есть существуют такие конкретные высказывания $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$, при подстановке которых в формулу $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ она обращается в истинное высказывание ($\exists A_1, A_2, ..., A_n$: $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$).

Определение 12. Формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется тавтологией (тождественно истинной), если любая ее конкретизация является истинным высказыванием ($\forall A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$).

Тот факт, что формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется тавтологией принято обозначать ‘ F.

Определение 13. Формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется опровержимой, если некоторая ее конкретизация является ложным высказыванием, то есть существуют такие конкретные высказывания $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$, при подстановке которых в формулу $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, она обращается в ложное высказывание ($\exists A_1, A_2, ..., A_n : \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$).

Определение 14. Формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется противоречием (тождественно ложной), если любая ее конкретизация является ложным высказыванием ($\forall A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$).

Тот факт, что формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется противоречием принято обозначать F ‘ .

Согласно введенным определениям формула АВ из примера 1 является выполнимой и опровержимой.

Теорема 2. Следующие формулы АВ являются тавтологиями:

1) закон исключения третьего $P \vee \neg P$;

2) закон отрицания противоречия $\neg(P \wedge \neg P)$;

3) закон двойного отрицания $\neg\neg P \leftrightarrow P$;

4) закон тождества $P \to P$;

5) закон контрапозиции $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$;

6) закон силлогизма $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$;

7) закон противоположности $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$;

8) правило добавления антецедента $P \to (Q \to P)$;

9) правило «из ложного что угодно» $\neg P \to (P \to Q)$;

10) правило modus ponens $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$;

11) правило modus tollens $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$;

12) правило перестановки посылок $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$;

13) правило объединения (и разъединения) посылок $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$;

14) правило разбора случаев $((P \to R) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \to R)$;

15) правило приведения к абсурду $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P$, $(\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P$.

Доказательство проведем двумя способами. Покажем, что утверждение верно для правила перестановки посылок, то есть для формулы 12.

а) С помощью таблицы истинности.

Расставим порядок действий в формуле АВ:

1) $(Q \to R)$; 2) $(P \to (Q \to R))$; 3) $(P \to R)$; 4) $(Q \to (P \to R))$; 5) $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$.

Таблица 7 – Таблица истинности правила перестановки посылок

P	Q	R	1	2	3	4	5
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

б) Методом от противного.

Предположим, что формула АВ $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$ не является тавтологией, это означает, что существуют такая конкретизация рассматриваемой формулы, на которой логическое значение формула АВ равно нулю, то есть $\lambda((P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))) = 0,$ это возможно лишь в одном из случаев:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda(P \to (Q \to R)) = 1, \\ \lambda(Q \to (P \to R)) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda(P \to (Q \to R)) = 0, \\ \lambda(Q \to (P \to R)) = 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda(P \to (Q \to R)) = 1, \\ \lambda(Q) = 1, \\ \lambda(P \to R) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda(P) = 1, \\ \lambda(Q \to R) = 0, \\ \lambda(Q \to (P \to R)) = 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda(P \to (Q \to R)) = 1, \\ \lambda(Q) = 1, \\ \lambda(P) = 1, \\ \lambda(R) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda(P) = 1, \\ \lambda(Q) = 0, \\ \lambda(R) = 1, \\ \lambda(Q \to (P \to R)) = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставляя в формулы АВ систем совокупности значения пропозициальных переменных получаем противеречия. Это означает, что предположение о том, что формула АВ $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$ не является тавтологией, не является верным.

Аналогично доказываются остальные тавтологии.

Теорема доказана.

Теорема 3 (свойства конъюнкции и дизъюнкции). Следующие формулы АВ являются тавтологиями:

А) законы идемпотентности $(P \wedge P) \leftrightarrow P, (P \vee P) \leftrightarrow P$;

Б) законы упрощения $(P \wedge Q) \to P, P \to (P \vee Q)$;

В) законы коммутативности $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P), (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$;

Г) законы ассоциативности

$(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R), (P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$;

Д) законы дистрибутивности

$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$, $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

Е) законы поглощения

$(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P$, $(P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$;

Ж) законы де Моргана

$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q), \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 2.

На базе имеющихся тавтологий с помощью правила заключения и правила подстановки можно получать новые тавтологии.

Теорема 4 (правило заключения). Если формулы АВ F и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула АВ H также является тавтологией. В символьном виде, из ‘ F и ‘ $F \to H$ следует, что ‘ H.

Доказательство проведем методом от противного.

Пусть формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $F(X_1, X_2, ..., X_n) \to H(X_1, X_2, ..., X_n)$ являются тавтологиями, а формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ не является тавтологией. Это означает, что существует такой набор конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, на котором логическое значение формулы H равно нулю, то есть $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$. Учитывая, что формула F является тавтологией, получим $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, тогда на указанном наборе конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ логическое значение формулы АВ $F \to H$ равно 0. Действительно, $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \to H(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) \to \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) =$ $= 1 \to 0 = 0$, что противоречит условию теоремы о том, что формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n) \to H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является тавтологией.

Теорема доказана.

В литературе [4, 13, 29] доказанное правило заключение также именуется правилом отделения или правилом «модус поненс» (*modus ponens*).

Теорема 5 (правило подстановки). Если формула АВ F, содержащая пропозициональную переменную X_k, является тавтологией, то при подстановке в формулу F вместо переменной X_k любой формулы АВ H получают новую тавтологию. В символьном виде: из ‘ $F(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, ..., X_n)$ следует, что ‘ $F(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, H, X_{k+1}, ..., X_n)$.

Доказательство. Поскольку по условию теоремы формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, ..., X_n)$ является тавтологией, то любая конкретизация этой формулы АВ является истинным высказыванием. В частности, при подстановке вместо пропозициональной переменной X_k высказывания, являющегося конкретизации формулы H, значит, формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, H, X_{k+1}, ..., X_n)$ является тавтологией.

Теорема доказана.

1.2 Логическое следование формул алгебры высказываний

Определение 15. Формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется логическим следствием формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, если конкретизация формулы $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ истинна всякий раз как только истинна соответствующая конкретизация формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Тот факт, что формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ принято обозначать $F \models H$.

Теорема 6 (признак логического следствия). Формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ тогда и только тогда, когда формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n) \to H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является тавтологией. В символьном виде, $F \models H \Leftrightarrow \models F \to H$.

Доказательство.

Необходимость. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что формула АВ F является логическим следствием формулы АВ H, но формула АВ $F \to H$ не является тавтологией. Это означает, что существует такой набор высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, на котором логическое значение формулы АВ $F \to H$ равно нулю, то есть $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \to H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$. Тогда, учитывая $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) \to \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$, получаем, что на наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ логические значения формул АВ равны соответственно: $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$, а это противоречит тому, что формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$. Полученное противоречие означает, что формула АВ $F \to H$ является тавтологией.

Достаточность. По условию формула АВ $F \to H$ является тавтологией, что означает, что любая конкретизация рассматриваемой формулы является истинным высказыванием, то есть на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ получим, что $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \to H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. Поскольку, согласно определению логического следствия формул, требуется, чтобы $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) = 1$, тогда $1 \to \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, что означает, что $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. То есть из $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) = 1$ следует, что $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, а, значит, формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Теорема доказана.

Пример 2. Проверить, является ли формула АВ Q логическим следствием формулы АВ $P \to Q$.

Решение. Согласно доказанному признаку логического следствия задача сводится к проверке, является ли формула АВ $(P \to Q) \to Q$ тавтологией. Составим таблицу истинности формулы АВ.

Таблица 7 – Таблица истинности формулы АВ $(P \to Q) \to Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \to Q$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Поскольку формула АВ $(P \to Q) \to Q$ не является тавтологией, то формула АВ Q не является логическим следствием формулы $P \to Q$.

Определение 16. Формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется логическим следствием формул $F_1(X_1, X_2, ..., X_n), F_2(X_1, X_2, ... X_n), ..., F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$, если конкретизация формулы АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ истинна всякий раз, как только истинны соответствующие конкретизации формул АВ $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $F_2(X_1, X_2, ... X_n)$, $..., F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Тот факт, что формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формул АВ $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $F_2(X_1, X_2, ... X_n)$, ..., $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$ принято обозначать $F_1, F_2, ..., F_m \models H$.

Из приведенного определения следует алгоритм проверки формул АВ на логическое следование, приведенный на рисунке 1.

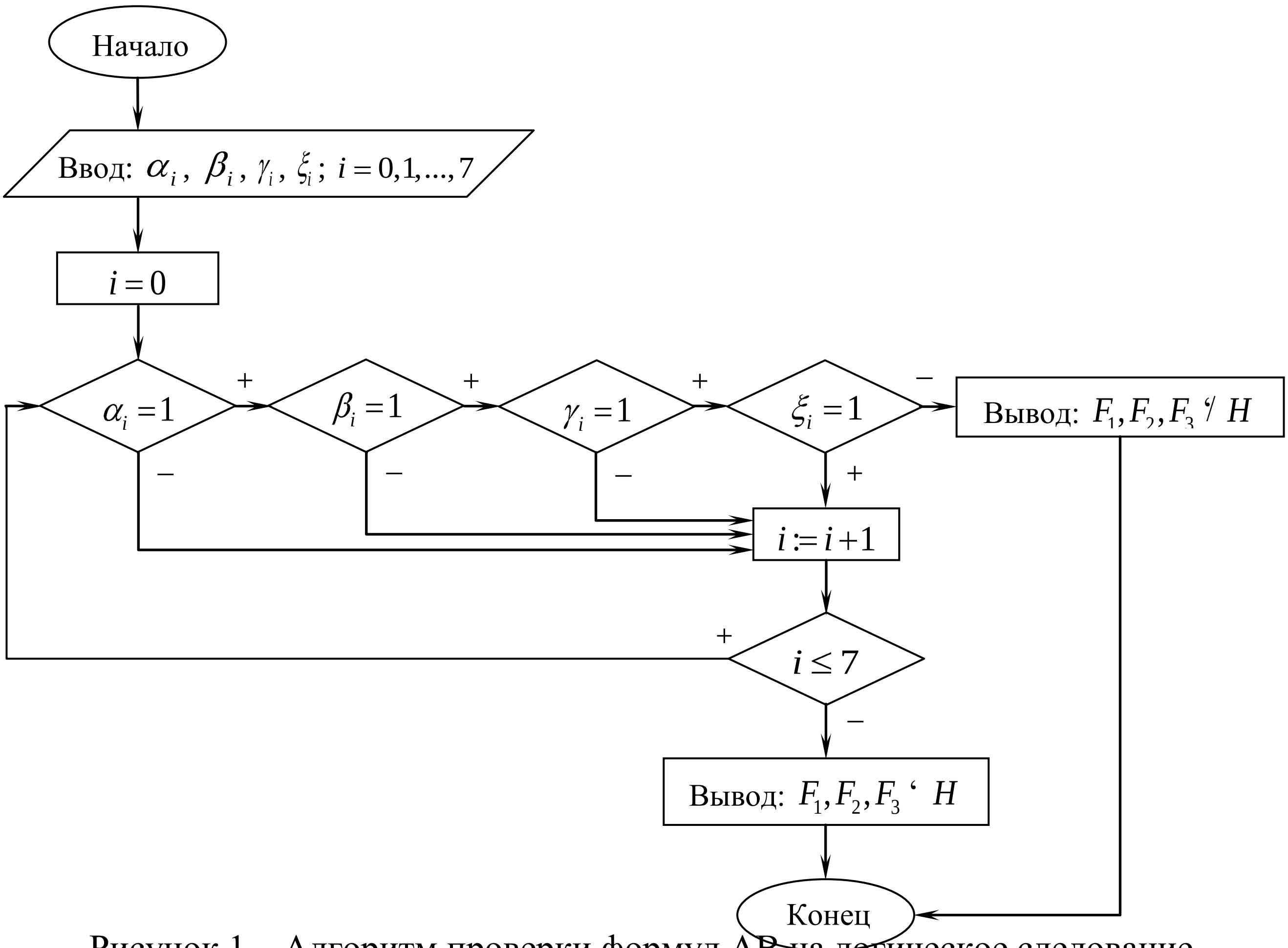

Рисунок 1 – Алгоритм проверки формул АВ на логическое следование

Пример 3. Пользуясь определением понятия логического следствия, выясните, справедливо ли логическое следование $P \to Q, P \to \neg Q \models \neg P$.

Решение. Составим таблицу истинности рассматриваемых формул АВ.

Таблица 8 – Таблица истинности формул АВ из примера 3

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$P \to \neg Q$	$\neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Сравнивая три последних столбца таблицы истинности и, руководствуясь определением понятия логического следствия, делаем вывод о том, что формула АВ $\neg P$ является логическим следствием формул АВ $P \to Q, P \to \neg Q$.

Теорема 7 (обобщение признака логического следствия). Для любых формул АВ $F_1, F_2, ..., F_m, H$ $(m \geq 2)$ следующие утверждения эквиваленты:

1) $F_1, F_2, ..., F_m \models H$;

2) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models H$;

3) $\models F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \to H$;

4) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \to \neg H \models 1$.

Доказательство. Утверждения 1) и 3) эквиваленты на основании теоремы 6. Докажем эквивалентность 1) и 2). Доказательство проведем в два этапа.

Сначала докажем, что из 1) следует 2). По условию $F_1, F_2, ..., F_m \models H$, что по определению логического следствия означает, что на конкретном наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ из $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, $\lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1, ...,$ $\lambda(F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ следует, что $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. По формуле (1.3) получим, что логическое значение формулы АВ $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$ на наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ равно 1, т.е. $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge (F_2(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge ... \wedge$ $\wedge (F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. Значит, из $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge (F_2(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge ... \wedge$ $\wedge (F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ следует $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, таким образом, формула АВ $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логическим следствием формул АВ $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, $F_2(X_1, X_2, ... X_n)$, ..., $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Докажем теперь, что из 2) следует 1). По условию $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models H$, что по определению логического следствия означает, что на конкретном наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ из $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge (F_2(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge ... \wedge$ $\wedge (F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ следует, что $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. По формуле (1.3) условие $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge (F_2(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge ... \wedge (F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ означает, что $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1, \lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1, ..., \lambda(F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, значит, из $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, $\lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, ..., $\lambda(F_m(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ следует $\lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. По определению логического следствия $F_1, F_2, ..., F_m \models H$. Аналогично доказываются остальные эквивалентности.

Теорема доказана.

Доказанная теорема упрощает процедуру проверки, является ли формула АВ логическим следствием других формул АВ, сводя решаемую задачу к проверке с помощью таблиц истинности, является ли новая формула АВ тавтологией.

Пример 4. Используя обобщение признака логического следствия, выясните, справедливо ли логическое следование.

Решение. Составим таблицу истинности формулы АВ $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \to \neg P$. Расставим порядок действий: 1) $\neg Q$); 2) $(P \to Q)$; 3) $(P \to \neg Q)$; 4) $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)$; 5) $\neg P$; 6) $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \to \neg P$.

Таблица 9 – Таблица истинности формулы АВ $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \to \neg P$

P	Q	1	2	3	4	5	6
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1

Поскольку формула АВ $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \to \neg P$ является тавтологией, значит, справедливо логическое следование $P \to Q, P \to \neg Q$ ‘ $\neg P$.

1.3 Равносильность формул алгебры высказываний

Определение 17. Формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ называются логически равносильными, если логические значения их конкретизаций совпадают на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$.

Тот факт, что формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ является логически равносильными принято обозначать $F \cong H$.

В символьной записи определение равносильности формул АВ имеет вид:

$$F \cong H \Leftrightarrow \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n)). \quad (1.9)$$

Пример 5. Пользуясь определением понятия логической равносильности, выясните, справедлива ли логическая равносильность $P \to (Q \vee R) \cong (P \to Q) \vee (P \to R)$.

Решение. Составим таблицы истинности формул АВ $P \to (Q \vee R), (P \to Q) \vee (P \to R)$ и сравним их логические значения на конкретных наборах. Расставим порядок действий в формулах АВ, используя сквозную нумерацию: 1) $(Q \vee R)$; 2) $P \to (Q \vee R)$; 3) $(P \to Q)$; 4) $(P \to R)$; 5) $(P \to Q) \vee (P \to R)$.

Таблиц 10 – Таблица истинности формул из примера 5

P	Q	R	1	2	3	4	5
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Сравнивая столбцы 2) и 5) таблицы 10, на основании определения логически равносильных формул АВ делаем вывод, что $P \to (Q \vee R) \cong (P \to Q) \vee (P \to R)$.

Из приведенного определения следует алгоритм проверки формул АВ на логическую равносильность, приведенный на рисунке 2.

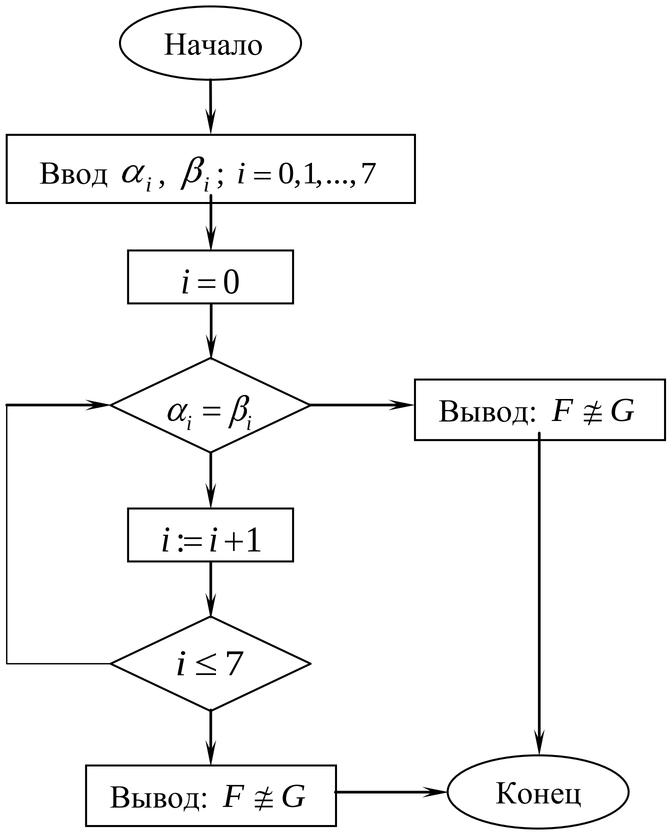

Рисунок 2 – Алгоритм проверки формул на равносильность

Теорема 8 (признак логической равносильности). Для того, чтобы формулы АВ F и H были логически равносильны необходимо и достаточно, чтобы формула АВ $F \leftrightarrow H$ являлась тавтологией.

Доказательство.

Необходимость. Согласно логической равносильности формул АВ F и H (1.9) на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ выполняется равенство: $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n))$. Тогда по определению логической операции эквивалентности $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \leftrightarrow H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, это означает, что формула АВ $F \leftrightarrow H$ является тавтологией.

Достаточность. Из того, что формула АВ $F \leftrightarrow H$ является тавтологией следует, что на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n) \leftrightarrow H(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. Тогда согласно определению логической операции эквивалентности $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, ..., A_n))$ на любом наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, а, значит, формулы АВ F и H были логически равносильны.

Теорема доказана.

Теорема 9. Имеют место следующие равносильности АВ:

1) $\neg\neg P \cong P$;

2) $P \to Q \cong \neg Q \to \neg P$;

3) $P \leftrightarrow Q \cong \neg P \leftrightarrow \neg Q$;

4) $P \to (Q \to R) \cong (P \wedge Q) \to R$;

5) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \cong (P \vee Q) \to R$;

6) $P \wedge P \cong P$;

7) $P \vee P \cong P$;

8) $P \wedge Q \cong Q \wedge P$;

9) $P \vee Q \cong Q \vee P$;

10) $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$;

11) $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$;

12) $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

13) $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;

14) $P \wedge (P \vee Q) \cong P$;

15) $P \vee (P \wedge Q) \cong P$;

16) $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$;

17) $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;

18) $P \leftrightarrow Q \cong Q \leftrightarrow P$;

19) $P \to Q \cong \neg P \vee Q$;

20) $P \to Q \cong \neg(P \wedge Q)$;

21) $P \wedge Q \cong \neg(P \to \neg Q)$;

22) $P \vee Q \cong \neg P \to Q$;

23) $P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P)$;

24) $P \vee \neg P \cong 1,\ P \wedge \neg P \cong 0$;

25) $P \vee 1 \cong 1,\ P \wedge 1 \cong P$;

26) $P \vee 0 \cong P,\ P \wedge 0 \cong 0$.

Справедливость приведенных логических равносильностей следует из справедливости соответствующих тавтологий, рассмотренных в 1.1, и доказанного признака равносильности формул АВ или могут быть доказаны построением таблиц истинности. Из равносильности 23) следует признак логической равносильности формул АВ на языке логического следствия.

Теорема 10 (признак логической равносильности на языке логического следствия). Для того, чтобы формулы АВ F и H были логически равносильны необходимо и достаточно, чтобы формулы АВ F и H являлись логическим следствием друг друга.

В символьной записи признак может быть представлен в виде:

$$F \cong H \Leftrightarrow F \models H \wedge H \models F. \tag{1.10}$$

Лемма 1 (о замене). Если формулы АВ $G(Y_1, Y_2, ..., Y_s)$ и $H(Y_1, Y_2, ..., Y_s)$ логически равносильны, то для любой формулы АВ $F(X_1, ... X_{i-1}, Y, X_{i+1}, ..., X_n)$ имеет место равносильность $F(X_1, ..., X_{i-1}, G(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \cong$ $\cong F(X_1, ... X_{i-1}, H(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$.

Доказательство. Из равносильности формул АВ $G(Y_1, Y_2, ..., Y_s)$ и $H(Y_1, Y_2, ..., Y_s)$ следует, что при одинаковых значениях пропозициональных переменных логические значения этих формул АВ совпадают, тогда логические значения формул АВ $F(X_1, ... X_{i-1}, G(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$ и $F(X_1, ... X_{i-1}, H(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$ при любых одинаковых наборах значений переменных $(X_1, ... X_n, Y_1, ..., Y_s)$ принимают одинаковые логические значения. Тогда $F(X_1, ... X_{i-1}, G(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \leftrightarrow F(X_1, ... X_{i-1}, H(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$, то есть $F(X_1, ... X_{i-1}, G(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \cong F(X_1, ... X_{i-1}, H(Y_1, Y_2, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$.

Теорема доказана.

Определение 18. Переход от формулы АВ F к логически равносильной ей формуле H называется равносильным преобразованием формулы F.

Равносильные преобразования используют для доказательства логических равносильностей, доказательства того, что формула АВ является тавтологией, упрощения формул АВ, приведения формул АВ к заданному виду.

Пример 5. Упростить формулу АВ $(X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y)$.

Решение.

$$(X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y) \cong (X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge (X \vee Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge$$
$$\wedge (X \vee Y) \cong (Y \vee (\neg X \wedge X)) \wedge (\neg Y \vee X) \cong (Y \vee 0) \wedge (\neg Y \vee X) \cong Y \wedge (\neg Y \vee X) \cong.$$
$$\cong (Y \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge X) \cong 0 \vee (Y \wedge X) \cong X \wedge Y.$$

Определение 19. Конъюнктом называется конъюнкция пропозициональных переменных и (или) их отрицаний.

Определение 20. Дизъюнктом называется дизъюнкция пропозициональных переменных и (или) их отрицаний.

Определение 21. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктов.

Определение 22. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктов.

Примерами ДНФ и КНФ могут служить соответственно формулы $F(X,Y,Z) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \vee Z)$, $H(X,Y,Z) \cong (\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z)$.

Определение 22. Дизъюнкт от n переменных называется совершенным, если в него от каждой пары X_i, $\neg X_i$, $i = \overline{1,n}$ входит только один представитель.

Определение 23. Конъюнкт от n переменных называется совершенным, если в него от каждой пары X_i, $\neg X_i$, $i = \overline{1,n}$ входит только один представитель.

Определение 24. ДНФ формулы АВ называется совершенной (СДНФ), если она состоит из попарно различных совершенных конъюнктов.

Определение 25. КНФ формулы АВ называется совершенной (СКНФ), если она состоит из попарно различных совершенных дизъюнктов.

Пусть формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ задана таблицей истинности. Введем следующие выражения:

1) $(F(0,0,...,0) \wedge \neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge ... \wedge \neg X_n) \vee (F(0,0,...,1) \wedge \neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge ... \wedge X_n) \vee$ $\vee .... \vee (F(1,1,...,1) \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n)$;

2) $(F(0, 0, ..., 0) \vee X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n) \wedge (F(0, 0, ..., 1) \vee X_1 \vee X_2 \vee ... \vee \neg X_n) \wedge$ $\wedge .... \wedge (F(1,1,...,1) \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee ... \vee \neg X_n)$.

Построенные выражения 1) и 2) равносильны заданной формуле АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, поскольку на каждом наборе логических значений переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ они принимают те же логические значения, что и формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$. Если на некотором наборе конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ принимает логическое значение 0, то есть $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$, то содержащая это значение скобка обращается в нуль и не оказывает влияния на дизъюнкцию, и выражение 1) можно упростить. Если на некотором наборе конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ принимает логическое значение 1, то есть $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$, то содержащая это значение скобка обращается в единицу и не оказывает влияния на конъюнкцию, и выражение 2) можно упростить. На основании сказанного имеют место следующие теоремы.

Теорема 11 (о существовании и единственности СДНФ). Каждая формула АВ, не являющаяся противоречием, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктов) СДНФ.

Теорема 12 (о существовании и единственности СКНФ). Каждая формула АВ, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктов) СКНФ.

Правило составления СДНФ (СКНФ) по таблице истинности.

1) Выделить наборы значений переменных, на которых формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ принимает значение 1(0).

2) Для каждого из таких наборов составить совершенный конъюнкт (дизъюнкт), который принимает значение 1(0) только на этом наборе.

3) Полученные конъюнкты (дизъюнкты) соединить знаком дизъюнкции (конъюнкции).

Пример 6. Для формулы АВ, заданной таблицей истинности (таблица 11), построить СДНФ и СКНФ.

Таблица 11 – Таблица истинности формулы АВ из примера 6

X	Y	Z	$F(X,Y,Z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение. Для удобства расширим таблицу 11, внеся в нее необходимые для построения СДНФ (СКНФ) компоненты в соответствии с выражениями 1) – 2) и сформулированным правилам построения СДНФ (СКНФ).

Таблица 12 – Вспомогательная таблица для решения примера 6

X	Y	Z	$F(X,Y,Z)$	$F(X,Y,Z)$	СДНФ	СКНФ
0	0	0	$F(0,0,0)$	1	$\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$	–
0	0	1	$F(0,0,1)$	1	$\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$	–
0	1	0	$F(0,1,0)$	0	–	$X \vee \neg Y \vee Z$
0	1	1	$F(0,1,1)$	1	$\neg X \wedge Y \wedge Z$	–
1	0	0	$F(1,0,0)$	0	–	$\neg X \vee Y \vee Z$
1	0	1	$F(1,0,1)$	0	–	$\neg X \vee Y \vee \neg Z$
1	1	0	$F(1,1,0)$	0	–	$\neg X \vee \neg Y \vee Z$
1	1	1	$F(1,1,1)$	1	$X \wedge Y \wedge Z$	–

Таким образом, СДНФ формулы АВ, представленной таблицей истинности 11 имеет вид: $(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$, а СКНФ – $(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$.

Правило составления СДНФ (СКНФ) с помощью равносильных преобразований.

1) Получить ДНФ (КНФ) формулы АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

2) Добавить недостающие в конъюнктах (дизъюнктах) переменные следующим образом:

$X \cong X \wedge 1 \cong X \wedge (Y \vee \neg Y) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$ для построения СДНФ;

$X \cong X \vee 0 \cong X \vee (Y \wedge \neg Y) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ для построения СКНФ.

СДНФ и СКНФ формулы АВ позволяют сформулировать новые признаки равносильности и логического следствия формул.

Теорема 13 (признак логической равносильности в терминах СДНФ и СКНФ). Формулы АВ F и H логически равносильны тогда и только тогда, когда СДНФ (СКНФ) этих формул совпадают с точностью до порядка следования конъюнктов (дизъюнктов) в их составе.

Теорема 14 (признак логического следствия в терминах СКНФ). Формула АВ H является логическим следствием формулы АВ F тогда и только тогда, когда все дизъюнкты СКНФ формулы H содержатся среди дизъюнктов СКНФ формулы F.

Правило составления следствий формул $F_1, F_2, ..., F_m$.

1) Построить конъюнкцию формулу АВ $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$;

2) Найти СКНФ полученной формулы АВ $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$;

3) Выписать все содержащиеся в СКНФ дизъюнкты и их всевозможные конъюнкции;

4) Полученное на предыдущем этапе множество представляет собой всевозможные следствия формул $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$.

Определение 26. Операции конъюнкции и дизъюнкции называются двойственными друг другу.

Определение 27. Пусть формула АВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и тесные отрицания (относящиеся непосредственно к переменным), тогда формула $F^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется двойственной к формуле $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, если она получена из F заменой конъюнкции на дизъюнкцию, а дизъюнкции на конъюнкцию.

Пример 7. Для формулы АВ $F(X,Y,Z) \cong (\neg X \vee Y) \wedge Z$ построить двойственную функцию.

Решение. Воспользовавшись определением двойственной функции, получим: $F^*(X,Y,Z) \cong (\neg X \wedge Y) \vee Z$.

Лемма 2. Прямая и двойственная формулы АВ связаны соотношением:

$$\neg F(X_1, X_2, ..., X_n) \cong F^*(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n). \quad (1.11)$$

Доказательство проведем методом математической индукции по количеству логических связок, входящих в формулу АВ.

Если формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит 0 логических связок, то есть представляет собой пропозициональную переменную $F(X) \cong X$, тогда двойственная формула имеет вид: $F^*(X) \cong X$, а остальные формулы АВ, входящие в формулу принимают вид: $\neg F(X_1) \cong \neg X_1$, $F^*(\neg X_1) \cong \neg X_1$, это означает, что доказываемое соотношение (1.11) выполняется.

Если формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит 1 логическую связку, то она является одной из следующих формул: $F(X_1) \cong \neg X_1$, $F(X_1, X_2) \cong (X_1 \wedge X_2)$, $F(X_1, X_2) \cong (X_1 \vee X_2)$.

Если $F(X_1) \cong \neg X_1$, то двойственная функция имеет вид: $F^*(X_1) \cong \neg X_1$, а остальные формулы АВ, входящие в формулу принимают вид: $\neg F(X_1) \cong \neg\neg X_1 \cong X_1$, $F^*(\neg X_1) \cong \neg\neg X_1 \cong X_1$, это означает, что доказываемое соотношение (1.11) выполняется.

Если $F(X_1, X_2) \cong (X_1 \wedge X_2)$, то двойственная функция имеет вид: $F^*(X_1, X_2) \cong (X_1 \vee X_2)$ а остальные формулы АВ, входящие в формулу принимают вид: $\neg F(X_1, X_2) \cong \neg(X_1 \wedge X_2) \cong \neg X_1 \vee \neg X_2$, $F^*(\neg X_1, \neg X_2) \cong (\neg X_1 \vee \neg X_2)$, это означает, что доказываемое соотношение (1.11) выполняется.

Если $F(X_1, X_2) \cong (X_1 \vee X_2)$, то двойственная функция имеет вид: $F^*(X_1, X_2) \cong (X_1 \wedge X_2)$ а остальные формулы АВ, входящие в формулу принимают вид: $\neg F(X_1, X_2) \cong \neg(X_1 \vee X_2) \cong \neg X_1 \wedge \neg X_2$, $F^*(\neg X_1, \neg X_2) \cong (\neg X_1 \wedge \neg X_2)$, это означает, что доказываемое соотношение (1.11) выполняется.

Предположим теперь, что равенство (1.11) справедливо для всех формул АВ, содержащих не более k логических связок. Докажем, используя индуктивное предположение, что утверждение верно для формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, содержащей (k+*1*) логических связок. Согласно определению формулы АВ, формула F имеет один из следующих видов: $F \cong \neg F_1$, $F \cong (F_1 \wedge F_2)$, $F \cong (F_1 \vee F_2)$, где F_1 и F_2 – некоторые формулы АВ, содержащие не более k логических связок. Покажем, что утверждение верно для случая $F \cong (F_1 \wedge F_2)$. Так как $F \cong (F_1 \wedge F_2)$, тогда на основании законов де Моргана получим: $\neg F(X_1, X_2, ..., X_n) \cong \neg(F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \wedge$ $\wedge F_2(X_1, X_2, ..., X_n)) \cong \neg F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \vee \neg F_2(X_1, X_2, ..., X_n)$. Поскольку формулы АВ содержат не более k логических связок, то по индуктивному предположению для них выполняется соотношение (1.11), это означает, что

$$\neg F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \vee \neg F_2(X_1, X_2, ..., X_n) \cong F_1^*(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n) \vee F_2^*(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n) \cong$$
$$\cong (F_1^* \vee F_2^*)(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n) \cong (F_1 \wedge F_2)(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n) \cong F^*(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n).$$

Для случая $F \cong (F_1 \wedge F_2)$ утверждение доказано.

Аналогично, соотношение (1.11) доказывается для остальных случаев конструирования формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Лемма доказана.

Доказанная лемма устанавливает связь логических значений формул F и F^*, которые на противоположных наборах значений переменных принимают противоположные значения.

Пример 8. Для формулы АВ $F(X,Y) \cong (X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y)$ построить двойственную функцию.

Решение. Решим задачу двумя способами: с помощью равносильных преобразований и, используя доказанную лемму.

1 способ (с помощью равносильных преобразований).

$F(X,Y) \cong (X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y) \cong (X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge (X \vee Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge$

$\wedge(\neg Y \vee X) \wedge (X \vee Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee (Y \wedge \neg Y)) \cong (\neg X \vee Y) \wedge X \cong (\neg X \wedge X) \vee$

$\vee(Y \wedge X) \cong Y \wedge X \cong X \wedge Y$.

С учетом определения двойственной функции получаем, что $F^*(X,Y) \cong X \vee Y$.

2 способ (с использованием леммы 2). Расставим порядок действий в формуле АВ: 1) $(X \leftrightarrow Y)$; 2) $(X \vee Y)$; 3) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y)$ и составим таблицу истинности.

Таблица 13 – Таблица истинности формулы АВ из примера 8

X	Y	1	2	3	$\neg F(X,Y)$	$F^*(X,Y)$
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

После построения таблицы истинности формулы АВ $F(X,Y) \cong (X \leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y)$ включаем в нее вспомогательный столбец $\neg F(X,Y)$, далее по доказанной лемме находим двойственную функцию $F^*(X,Y)$. По таблице истинности двойственной функции $F^*(X,Y)$ делаем вывод, что $F^*(X,Y) \cong X \vee Y$.

Теорема 15 (принцип двойственности). Формулы АВ F и H равносильны тогда и только тогда, когда равносильны F^* и H^*.

Доказательство.

$F(X_1, X_2,..., X_n) \cong H(X_1, X_2,..., X_n) \Leftrightarrow \quad \neg F(X_1, X_2,..., X_n) \cong \neg H(X_1, X_2,..., X_n)$.
Согласно доказанной лемме последняя равносильность можно заменить на эквивалентную: $F^*(\neg X_1, \neg X_2,..., \neg X_n) \cong H^*(\neg X_1, \neg X_2,..., \neg X_n) \Leftrightarrow$

$F^*(X_1, X_2,..., X_n) \cong H^*(X_1, X_2,..., X_n)$.

Теорема доказана.

1.4 Примеры для самостоятельного решения

1.4.1 Даны утверждения:

1) Студент математического факультета университета.

2) Луна – спутник Марса.

3) Математика – интересный предмет.

4) Река Ангара впадает в озеро Байкал.

5) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Среди них высказываниями являются:

а) все приведенные утверждения;

б) $2,4,5$;

в) $2,4$;

г) $2,3,4,5$;

д) $1,2,4$.

1.4.2 Даны утверждения:

1) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

2) $5+3=8$.

3) Число 28 не делится на 7.

4) $15 \leq 90$.

5) Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Среди них составными высказываниями являются:

а) все приведенные утверждения;

б) $1,3,4,5$;

в) $1,3,4$;

г) $2,5$;

д) $1,3$.

1.4.3 Даны утверждения:

1) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

2) $5+3=8$.

3) Число 28 не делится на 7.

4) $15 \le 90$.

5) Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Среди них элементарными высказываниями являются:

а) все приведенные утверждения;

б) $2,3,4,5$;

в) $2,4,5$;

г) 2;

д) $2,5$.

1.4.4 Укажите таблицу значений дизъюнкции.

а)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

д)

A	B	$A \vee B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в)

A	B	$A \vee B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

A	B	$A \vee B$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1.4.5 Укажите таблицу значений импликации.

а)

A	*B*	*A*→*B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

A	*B*	*A*→*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

A	*B*	A→B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

д)

A	*B*	*A*→*B*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в)

A	*B*	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

A	*B*	*A*→*B*
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1.4.6 Укажите таблицу значений эквивалентности.

а)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

д)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

A	*B*	*A*↔*B*
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1.4.7 Укажите таблицу значений конъюнкции.

а)

A	B	$A \wedge B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

г)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

б)

A	B	$A \wedge B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

д)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в)

A	B	$A \wedge B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

е)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.4.8 Даны высказывания *A, B, C* с логическими значениями *A=0, B=1, C=1*. Найдите логическое значение высказывания $((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (A \wedge B))$.

1.4.9 Даны высказывания *A, B, C* с логическими значениями *A=1, B=0, C=1*. Найдите логическое значение высказывания $((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (A \wedge B))$.

1.4.10 Даны высказывания *A, B, C* с логическими значениями *A=0, B=0, C=0*. Найдите логическое значение высказывания $((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (A \wedge B))$.

1.4.11 Даны высказывания *A, B, C* с логическими значениями *A=1, B=1, C=1*. Найдите логическое значение высказывания $((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee (A \wedge B))$.

1.4.12 Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих: $A \to B = 1, A \leftrightarrow B = 0, B \to A = \ldots$

1.4.13 Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих: $A \wedge B = 0, A \to B = 1, B \to \neg A = \ldots$

1.4.14 Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих: $A \vee B = 1, A \to B = 1, \neg B \to A = \ldots$

1.4.15 Даны высказывания:

1) $A \wedge 0$;

2) $A \to 1$;

3) $A \to A$;

4) $A \vee 0$;

5) $A \wedge 1$.

От логического значения высказывания A не зависят логические значения следующих высказываний:

а) $1, 2, 3, 4, 5$;

б) $1, 2, 4, 5$;

в) $1, 4, 5$;

г) 3;

д) $1, 2, 3$.

1.4.16 Составьте таблицу истинности формулы алгебры высказываний $(X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X)$. Вектор-столбец ее значений имеет вид:

а)	б)	в)	г)
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

1.4.17 Составьте таблицу истинности формулы алгебры высказываний $(\neg X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X)$. Вектор-столбец ее значений имеет вид:

а)	б)	в)	г)
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

1.4.18 Составьте таблицу истинности формулы алгебры высказываний $(X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to X)$. Вектор-столбец ее значений имеет вид:

а)

0
0
0
0

б)

1
1
1
1

в)

1
1
0
1

г)

0
0
1
1

1.4.19 Формула алгебры высказываний $(X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тавтологией;

г) противоречием.

1.4.20 Формула алгебры высказываний $(\neg X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тавтологией;

г) противоречием.

1.4.21 Формула алгебры высказываний $(X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to X)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тавтологией;

г) противоречием.

1.4.22 Признак логического следствия формулируется так:

а) $F \vDash H \Leftrightarrow \vDash F \to H$;

б) $F \vDash H \Leftrightarrow \vDash F \leftrightarrow H$;

в) $F \vDash H \Leftrightarrow \vDash F \wedge H$;

г) $F \vDash H \Leftrightarrow \vDash F \vee H$.$\vDash$

1.4.23 Даны формулы $F_1 : (X \to Y) \to Z$ и $F_2 : X \vee Y \vee Z$. Будет правильным сказать, что:

а) F_1 – следствие F_2;

б) F_2 – следствие F_1;

в) формулы являются следствием друг друга;

г) ни F_1 не является следствием F_2, ни F_2 не является следствием F_1.

1.4.24 Даны формулы $F_1:(X \to Y) \to Z$ и $F_2: X \to (Y \to Z)$. . Будет правильным сказать, что:

а) F_1 – следствие F_2;

б) F_2 – следствие F_1;

в) формулы являются следствием друг друга;

г) ни F_1 не является следствием F_2, ни F_2 не является следствием F_1.

1.4.25 Даны формулы $F_1:(X \wedge Y) \to Z$ и $F_2: X \to (Y \wedge Z)$. Будет правильным сказать, что:

а) F_1 – следствие F_2;

б) F_2 – следствие F_1;

в) формулы являются следствием друг друга;

г) ни F_1 не является следствием F_2, ни F_2 не является следствием F_1.

1.4.26 Равносильность, выражающая идемпотентность конъюнкции, имеет вид:

а) $\neg\neg X \cong X$;

б) $X \wedge X \cong X$;

в) $X \vee X \cong X$;

г) $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$;

д) $(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z)$.

1.4.27 Равносильность, выражающая ассоциативность дизъюнкции, имеет вид:

а) $\neg\neg X \cong X$;

б) $X \wedge X \cong X$;

в) $X \vee X \cong X$;

г) $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$;

д) $(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z)$.

1.4.28 Равносильность, выражающая идемпотентность дизъюнкции, имеет вид:

а) $\neg\neg X \cong X$;

б) $X \wedge X \cong X$;

в) $X \vee X \cong X$;

г) $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$;

д) $(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z)$.

1.4.29 Выражение $P \to 0$ равносильно:

а) P;

б) $\neg P$;

в) 0;

г) 1.

1.4.30 Выражение $0 \to P$ равносильно:

а) P;

б) $\neg P$;

в) 0;

г) 1.

1.4.31 Выражение $P \leftrightarrow 1$ равносильно:

а) P;

б) $\neg P$;

в) 0;

г) 1.

1.4.32 Выражение $1 \to \neg P$ равносильно:

а) P;

б) $\neg P$;

в) 0;

г) 1.

1.4.33 Выражение $P \leftrightarrow \neg P$ равносильно:

а) P;

б) $\neg P$;

в) 0;

г) 1.

1.4.34 Тавтология, называемая «закон контрапозиции», имеет вид:

а) $X \vee \neg X$;

б) $\neg(X \wedge \neg X)$;

в) $((X \to Y) \wedge X) \to Y$;

г) $(X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)$;

д) $(X \to (Y \to Z) \leftrightarrow (Y \to (X \to Z))$;

е) $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

1.4.35 Тавтология, называемая «закон силлогизма», имеет вид:

а) $X \vee \neg X$;

б) $\neg(X \wedge \neg X)$;

в) $((X \to Y) \wedge X) \to Y$;

г) $(X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)$;

д) $(X \to (Y \to Z) \leftrightarrow (Y \to (X \to Z))$;

е) $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

1.4.36 Тавтология, называемая «*modus ponens*», имеет вид:

а) $X \vee \neg X$;

б) $\neg(X \wedge \neg X)$;

в) $((X \to Y) \wedge X) \to Y$;

г) $(X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)$;

д) $(X \to (Y \to Z) \leftrightarrow (Y \to (X \to Z))$;

е) $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

1.4.37 Если вектор-столбец формулы $F(X,Y,Z)$ имеет вид $(01100110)^T$, то вектор-столбец двойственной ей формулы $F^*(X,Y,Z)$ имеет вид:

а) $(01100110)^T$;

б) $(11111111)^T$;

в) $(00000000)^T$;

г) $(10011001)^T$.

1.4.38 Если вектор-столбец формулы $F(X,Y,Z)$ имеет вид $(01000111)^T$, то вектор-столбец двойственной ей формулы $F^*(X,Y,Z)$ имеет вид:

а) $(00011101)^T$;

б) $(11111111)^T$;

в) $(00000000)^T$;

г) $(11100010)^T$.

1.4.39 Известно, что формула $F(X,Y,Z)$ принимает значение 1 на наборах $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Тогда ее СДНФ имеет вид:

а) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$;

б) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$;

в) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$;

г) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$.

1.4.40 Известно, что формула $F(X,Y,Z)$ принимает значение 0 на наборах $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Тогда ее СКНФ имеет вид:

а) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$;

б) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$;

в) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$;

г) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$.

1.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

1.5.1 Высказывания. Операции над высказываниями. Формулы АВ. Таблица истинности формулы.

1.5.2 Классификация формул. Основные тавтологии АВ.

1.5.3 Логическая равносильность. Основные равносильности АВ.

1.5.4 Упрощение формул АВ, приведение их к заданному виду. Пример.

1.5.5 Нормальные формы формул АВ: ДНФ, КНФ. СДН- и СКН-формы формул АВ.

1.5.6 Понятие формулы, двойственной данной. Принцип двойственности, его применение в преобразованиях формул.

1.5.7 Проблема разрешимости в АВ. Основные алгоритмы ее решения.

2 Булевы функции

2.1 Свойства булевых функций

Булевы функции (БФ) получили свое название по имени английского математика Джорджа Буля (1815–1864), который первым начал применять математические методы в логике.

Определение 28. Отображение $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется булевой функцией n аргументов.

Принято булевы функции обозначать малыми буквами латинского алфавита $f, g, h, \ldots$ или теми же буквами с индексами внизу, а переменные, пробегающие множество $0,1$ из определения БФ – $x, y, z, \ldots x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и называть булевыми.

Ввод понятия булевой функции позволяет абстрагироваться от содержательного смысла пропозициональных переменных, служивших в алгебре высказываний обозначениями для высказываний.

Основными способами представления БФ являются следующие:

а) табличный;

б) вектором значений $(f(0,0,\ldots,0), f(0,0,\ldots,1), \ldots, f(1,1,\ldots,0), f(1,1,\ldots,1))^T$;

в) указанием наборов булевых переменных, на которых БФ принимает значение 1(0);

г) аналитический.

Проиллюстрируем все указанные способы представления булевой функции при решении примера 9.

Пример 9. Судейская коллегия состоит из трех человек, каждый из которых может голосовать «за» или «против». Они принимают решение большинством голосов. Задать функцию, описывающую процесс голосования.

Решение.

а) Составим таблицу БФ, являющуюся решением примера 9.

Таблица 14 – Таблица значений БФ из примера 9

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

б) С учетом полученного выше решения, вектор значений БФ имеет вид: $f(x,y,z)=(0,0,0,1,0,1,1,1)^T$.

в) $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,0)=0$ или $f(0,1,1)=f(1,0,1)=f(1,1,0)=$ $=f(1,1,1)=1$.

г) $f(x,y,z)=x'yz\vee xy'z\vee xyz'\vee xyz$.

Теорема 16. Число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2n}.

Доказательство. Докажем сначала, что существует ровно 2^n различных наборов $(a_1,a_2,..,a_n)$ составленных из нулей и единиц, служащих возможными значениями для n аргументов $x_1,x_2,..,x_n$. Доказательство этого вспомогательного факта проведем методом математической индукции по количеству n аргументов БФ.

Если БФ содержит 1 аргумент $f(x_1)$, тогда имеется всего два набора значений для переменной x_1, это 0 и 1.То есть для $n=1$ вспомогательное утверждение верно.

Предположим теперь, что утверждение верно для БФ, содержащей k аргументов $f(x_1,x_2,...,x_k)$, то есть существует ровно 2^k различных наборов $(a_1,a_2,..,a_k)$, составленных их нулей и единиц для k аргументов. Тогда среди всевозможных наборов $(a_1,a_2,..,a_k,a_{k+1})$ значений для (k+*1*) аргументов имеется, согласно индуктивному предположению 2^k наборов вида $(a_1,a_2,..,a_k,0)$ и 2^k наборов вида $(a_1,a_2,..,a_k,1)$. Значит, всего различных наборов для (k+*1*) аргументов БФ будет $2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}$. Вспомогательное утверждение доказано.

Таким образом, для задания БФ n аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ требуется указать ее значение для каждого из 2^n различных наборов значений ее аргументов. Различных наборов длины 2^n, составленных из нулей и единиц, как показано выше, имеется 2^l, где $l = 2^n$ – длина набора. Значит, количество различных БФ от n аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ существует ровно 2^{2n}.

Теорема доказана.

Рассмотрим сначала БФ одного аргумента, согласно доказанной теореме количество таких функций будет выражаться числом $2^{2^1} = 4$. Представим все БФ одного аргумента в виде таблицы и аналитически (результаты записаны в последней строке таблицы), а также приведем названия БФ одного аргумента.

Таблица 15 – БФ одного аргумента

x	$f(x)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	$f(0)$	0	0	1	1
1	$f(1)$	0	1	0	1
–	–	0	x	x'	1

$f_0(x) = 0$ – тождественный нуль;

$f_1(x) = x$– тождественная функция;

$f_2(x) = x'$– отрицание;

$f_3(x) = 1$– тождественная единица.

Различных БФ двух аргументов будет ровно $2^{2^2} = 16$. Представим их в виде таблицы и аналитически (результаты записаны в первой строке таблицы) и приведем названия некоторых БФ.

Таблица 16 – БФ двух аргументов

x	y	0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x,y)=0$ – тождественный нуль;

$f_1(x,y)=x\cdot y$ – конъюнкция;

$f_2(x,y)=(x\to y)'$ – отрицание импликации;

$f_3(x,y)=x$;

$f_4(x,y)=(y\to x)'$;

$f_5(x,y)=y$;

$f_6(x,y)=(x\leftrightarrow y')=x+y=x\oplus y$ – сумма Жегалкина;

$f_7(x,y)=x\vee y$ – дизъюнкция;

$f_8(x,y)=(x\vee y)'=x\downarrow y$ – стрелка Пирса или функция Вебба;

$f_9(x,y)=x\leftrightarrow y$ – эквивалентность;

$f_{10}(x,y)=y'$;

$f_{11}(x,y)=y\to x$;

$f_{12}(x,y)=x'$;

$f_{13}(x,y)=x\to y$ – импликация;

$f_{14}(x,y)=(x\cdot y)'=x\,|\,y$ – штрих Шеффера;

$f_{15}(x,y)=1$ – тождественная единица.

БФ $f_6(x,y)=(x\leftrightarrow y')=x+y=x\oplus y$ – сумма Жегалкина, представляющая собой сумму по модулю два, также в литературе [1, 7] называется «исключающее или».

Определение 29. Переменная x_i булевой функции $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ называется существенной, если на некотором конкретном двоичном наборе $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ значений булевых переменных $(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ выполняется условие: $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$.

В противном случае, переменная x_i называется несущественной или фиктивной для булевой функции $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$.

В случае, описанном в определении 29, говорят, что БФ $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ зависит существенном образом от переменной x_i.

Пример 10. Определить существенные и фиктивные переменные БФ, заданной следующим вектором значений $(11110011)^T$.

Решение. Перейдем к табличному способу задания БФ трех переменных.

Таблица 17 – Таблица значений БФ из примера 10

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Поскольку $f(0,0,0) \neq f(1,0,0)$, то согласно определению существенной переменной заключаем, что x является существенной переменной данной БФ. Аналогично, на основании выполнении неравенства $f(1,0,0) \neq f(1,1,0)$ переменную y также относим к числу существенных переменных. Для переменной z выполняются равенства: $f(0,0,0) = f(0,0,1)$, $f(0,1,0) = f(0,1,1)$, $f(1,0,1) = f(1,0,0)$, $f(1,1,0) = f(1,1,1)$, что означает, что переменная z является фиктивной переменной данной БФ.

Пусть БФ n аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ содержит фиктивную переменную x_i. Удалим из таблицы значений БФ строки, соответствующие наборам $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ и столбец значений переменной x_i. В результате получим таблицу значений для БФ (n-1) аргументов $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, про которую будем говорить, что она получена из БФ $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ удалением фиктивной переменной. Обратный переход от функции $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ к функции $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ называется введением фиктивной переменной.

В частности, в рассмотренном выше примере 10 после удалении фиктивной переменной z получим БФ двух аргументов: $f(x,y) = x \to y$ – импликация (таблица 18).

Таблица 18 – Таблица значений БФ из примера 10 после удаления z

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 11. Добавить одну фиктивную переменную в БФ, заданной вектором значений $(11110011)^T$.

Решение. Воспользуемся таблицей 17 из примера 10 и добавим фиктивную переменную в соответствии с указанным выше способом.

Таблица 19 – Табличный способ задания БФ из примера 11

x	y	z	t	$f(x,y,z,t)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Определение 30. Булевы функции, получаемые одна из другой добавлением или удалением фиктивных переменных, называются равными.

Теорема 17. Для БФ выполняются следующие равенства:

1) $x \vee x = x, x \cdot x = x$ (идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции);

2) $x \vee y = y \vee x, x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность дизъюнкции и конъюнкции);

3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции);

4) $x \vee 1 = 1, x \cdot 1 = x$;

5) $x \vee 0 = x, x \cdot 0 = 0$;

6) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z), x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

7) $x \vee (y \cdot x) = x, x \cdot (y \vee x) = x$ (законы поглощения);

8) $(x \vee y)' = x' \cdot y', (x \cdot y)' = x' \vee y'$ (законы де Моргана);

9) $x \vee x' = 1, x \cdot x' = 0$;

10) $x'' = x$.

Доказательство. Докажем свойства 1) и 3) в случае конъюнкции.

Доказательство свойства 1) вытекает из таблиц, определяющих дизъюнкцию и конъюнкцию, действительно, $0 \vee 0 = 0, 1 \vee 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$.

Для доказательства свойства 3) для конъюнкции составим таблицу значений БФ и применим определения равных БФ.

Таблица 20 – Вспомогательная таблица для доказательства свойства 3)

x	y	z	$(x \cdot y)$	$(x \cdot y) \cdot z$	$(y \cdot z)$	$x \cdot (y \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Сравнивая пятый и седьмой столбцы таблицы, делаем вывод, что выполняется определение равенства БФ, следовательно, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Аналогично доказываются оставшиеся свойства БФ.

Установим связь между формулами АВ и БФ. Во-первых, установим взаимно-однозначное соответствие между пропозициональными переменными и булевыми переменными по правилу: каждой пропозициональной переменной поставим одноименную булеву переменную (таблица 21).

Таблица 21 – Соответствие пропозициональных и булевых переменных

P	Q	R	X	Y	Z	X_1	X_2	...	Y_1	Y_2	...
p	q	r	x	y	z	x_1	x_2	...	y_1	y_2	...

Во-вторых, установим связь между логическими связками формул АВ и БФ согласно таблице 22.

Таблица 22 – Соответствие логических связок и БФ

логические связки	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
булевы функции	$'$	$\cdot$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

В-третьих, скобкам ставим во взаимно однозначное соответствие скобки. Тогда каждой формуле АВ соответствует единственная БФ, а каждой булевой функции соответствует формула АВ. Действительно, например, формуле АВ $(\neg P \rightarrow R) \wedge (X_1 \leftrightarrow X_2)$ соответствует единственная БФ $(\neg p \rightarrow r) \wedge (x_1 \leftrightarrow x_2)$. При этом одна и та же БФ может быть задана разными формульными выражениями, например, $(p \leftrightarrow r) \rightarrow (x_1' \cdot y \vee x_2 \cdot y), ((p \rightarrow r) \cdot (r \rightarrow p) \rightarrow ((x_1' \vee x_2) \cdot y),$ а, следовательно, данной БФ соответствует несколько формул АВ, в приведенном случае: $(P \leftrightarrow R) \rightarrow (X_1' \cdot Y \vee X_2 \cdot Y), ((P \rightarrow R) \cdot (R \rightarrow P) \rightarrow ((X_1' \vee X_2) \cdot Y)$.

Определение 31. Говорят, что формула F представляет БФ f, если таблицы их значений совпадают.

Для литерала введем обозначение:

$$x^{\delta}=\begin{cases} x, \text{ если } \delta=1, \\ x', \text{ если } \delta=0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Теорема 18 (первая теорема Шеннона). Всякая БФ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ представима в виде разложения Шеннона:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)}} x_1^{\delta_1}\cdot x_2^{\delta_2}\cdot...\cdot x_k^{\delta_k}\cdot f(\delta_1,\delta_2,...,\delta_k,x_{k+1},...,x_n), \qquad (2.2)$$

которое называется разложением БФ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменным $(x_1,x_2,...,x_k)$.

Доказательство. Рассмотрим набор конкретных значений $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ и покажем, что левая и правая части равенства (2.2) принимают одно и то же значение. Действительно, Преобразуем правую часть равенства:

$$\bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)}} \alpha_1^{\delta_1}\cdot \alpha_2^{\delta_2}\cdot...\cdot \alpha_k^{\delta_k}\cdot f(\delta_1,\delta_2,...,\delta_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)=$$
$$=\alpha_1^{\alpha_1}\cdot \alpha_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot \alpha_k^{\alpha_k}\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)=f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

Теорема доказана.

Теорема 19 (вторая теорема Шеннона). Всякая БФ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ представима в виде разложения Шеннона:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)}} x_1^{\delta_1}\vee x_2^{\delta_2}\vee...\vee x_k^{\delta_k}\vee f(\delta_1,\delta_2,...,\delta_k,x_{k+1},...,x_n). \qquad (2.3)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству первой теоремы Шеннона.

Следствия из теорем Шеннона. Если в первой и второй теоремах Шеннона $k=1$, то разложения по одной переменной примут вид:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(x'_n\cdot f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,0))\vee(x_n\cdot f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,1)),\quad(2.4)$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(x'_n\vee f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,1))\cdot(x_n\vee f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,0)),(2.5)$$

где функции $f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,0)$ и $f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1},...,1)$ называются компонентами разложения.

Теорема 20 (о представлении БФ через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание). Для всякой БФ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ существует представляющая ее формула АВ F.

Если $f(x_1,x_2,...,x_n)$ не тождественный нуль, то существует представляющая ее формула F, находящаяся в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\substack{\text{по всем наборам}\\(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\\f(x_1,x_2,...,x_n)=1}} x_1^{\delta_1}\cdot x_2^{\delta_2}\cdot...\cdot x_n^{\delta_n},\quad(2.6)$$

причем представление (2.6) единственно с точностью до порядка следования конъюнктов.

Если $f(x_1,x_2,...,x_n)$ не тождественная единица, то существует представляющая ее формула F, находящаяся в СКНФ:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{\substack{\text{по всем наборам}\\(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\\f(x_1,x_2,...,x_n)=0}} x_1^{1-\delta_1}\vee x_2^{1-\delta_2}\vee...\vee x_n^{1-\delta_n},\quad(2.7)$$

причем представление (2.7) единственно с точностью до порядка следования дизъюнктов.

Доказательство проведем методом математической индукции по количеству *n* аргументов БФ.

БФ одного аргумента существует четыре: $f_0(x)=0=x\cdot x'$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x'$, $f_3(x)=1=x\vee x'$. То есть для $n=1$ утверждение верно.

Предположим теперь, что утверждение верно для БФ, содержащей k аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_k)$, то есть всякая БФ k аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ представима в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, относящегося непосредственно к булевой переменной. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1})$ – произвольная БФ от $(k+1)$ аргументов. На основании формулы (2.5): $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, ..., x_k, 1)) \vee (x'_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, ..., x_k, 0))$. Каждая из функций $f(x_1, x_2, ..., x_k, 1)$ и $f(x_1, x_2, ..., x_k, 0)$ является БФ k аргументов, значит, по индуктивному предположению представима в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, относящегося непосредственно к булевой переменной. Следовательно, БФ от $(k+1)$ аргументов $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1})$ представима в требуемом виде на основании выполнения равенства: $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, ..., x_k, 1)) \vee (x'_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, ..., x_k, 0))$.

Теорема доказана.

2.2 Специальные классы булевых функций

Определение 32. Полиномом Жегалкина от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется БФ вида:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} a_{i_1, i_2, ..., i_n} x_{i_1} x_{i_2} ....x_{i_n}, \tag{2.8}$$

представляющая собой сумму по модулю два (сумму Жегалкина) конъюнктивных одночленов $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n}$ от всевозможных наборов переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, причем коэффициент $a_{i_1 i_2 ..., i_n}$ может принимать значения из множества $0,1$.

Определение 33. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется линейной, если представляющий эту функцию полином Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n, \tag{2.9}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ могут образовывать любой набор из нулей и единиц.

Теорема 21. Всякая БФ обладает единственным с точностью до порядка слагаемых и сомножителей представляющим ее полиномом Жегалкина.

Доказательство данной теоремы приведено в источнике [14] на страницах 102-104.

В источниках [12, 14, 18, 20, 23] приведены различные способы построения многочлена Жегалкина. Наиболее часто используется приведенное ниже правило составления полинома Жегалкина.

Правило составления многочлена Жегалкина.

1. Выделить наборы значений переменных, на которых формула F принимает значение 1.

2. Для каждого из таких наборов составить совершенный конъюнкт, который принимает значение 1 на этом наборе и только на нем.

3. Полученные конъюнкты соединить знаком $\oplus$ и преобразовать выражение.

Пример 12. Найти полином Жегалкина для БФ $f(x, y) = x \vee y$. Проверить, является ли дизъюнкция линейной функцией.

Решение. В соответствии с приведенным выше правилом составления многочлена Жегалкина выполним первые два этапа. Для удобства и наглядности результаты представим в виде вспомогательной таблицы 23.

Таблица 23 – Вспомогательная таблица для решения примера 12

x	y	$f(x, y) = x \vee y$	совершенный конъюнкт
0	0	0	–
0	1	1	$x'y$
1	0	1	xy'
1	1	1	xy

Далее реализуем третий этап предложенного выше правила составления многочлена Жегалкина и используем свойства БФ.

$$f(x,y) = x \vee y = x'y + xy' + xy = x'y + x(y' + y) = (x+1)y + x = xy + x + y\,.$$

БФ $f(x,y) = x \vee y$ не является линейной, поскольку представляющий ее полином Жегалкина не является линейным.

Приведем другие методы нахождения многочлена Жегалкина и проиллюстрируем их применение на рассмотренном примере 12.

1) Метод неопределенных коэффициентов.

В общем случае многочлен Жегалкина для БФ двух переменных имеет вид: $f(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$. В рассматриваемом примере на основании таблицы истинности дизъюнкции получим, что коэффициенты полинома Жегалкина удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} f(0,0) = a_0 = 0, \\ f(0,1) = a_0 + a_2 = 1, \\ f(1,0) = a_0 + a_1 = 1, \\ f(1,1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_2 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты в общую формулу, получим, что многочлен Жегалкина имеет вид: $f(x,y) = x \vee y = xy + x + y$.

2) Метод равносильных преобразований.

$f(x,y) = x \vee y = (x' \cdot y')' = (x+1)(y+1) + 1 = xy + x + y + 1 + 1 = xy + x + y.$

3) Треугольник Паскаля.

Для дизъюнкции вектор значений имеет вид: $(0,1,1,1)^T$.

x	y	$f \;\; x,y$	a_i				
0	0	0	a_0	0	1	1	1
0	1	1	a_2	1	0	0	
1	0	1	a_1	1	0		
1	1	1	a_3	1			

Рисунок 3 –Треугольник Паскаля для примера 12

Значит, искомое разложение в полином Жегалкина для дизъюнкции имеет вид: $f(x,y) = x \vee y = xy + x + y$.

Примером линейной функции может служить БФ $f(x,y) = x$.

Определение 34. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется двойственной по отношению к функции $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, если выполняется условие:

$$(f(x_1, x_2, ..., x_n))' = f^*(x_1', x_2', ..., x_n'). \tag{2.10}$$

Определение 35. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется самодвойственной, если выполняется условие:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2.10}$$

С учетом доказанной в предыдущей главе леммой 2 БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является самодвойственной, если она на противоположных значениях аргументов принимает противоположные значения. Из таблицы 16 следует, что примером самодвойственной функции может служить БФ $f_{12}(x,y) = x'$, а функция $f_0(x,y) = 0$ не является самодвойственной.

Определение 36. Говорят, что набор возможных значений переменных БФ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ предшествует набору $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, если выполняется условие: $\alpha_i \le \beta_i$, $i = \overline{1,n}$.

Тот факт, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ предшествует $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ принято обозначать $\alpha < \beta$. Если использовано обозначение $\alpha \leq \beta$, то это означает, что $\alpha < \beta$ или наборы α и β совпадают.

Определение 37. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется монотонной, если по всем возможным наборам переменных $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, удовлетворяющих условию: $\alpha \leq \beta$, выполняется неравенство:

$$f(\alpha) \leq f(\beta). \qquad (2.11)$$

Из определения 37 и таблицы 16 следует, что примерами монотонных функций являются: конъюнкция, тождественная единица, дизъюнкция, а функция сумма Жегалкина не является монотонной.

Определение 38. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется сохраняющей нуль, если $f(0,0,...,0) = 0$.

Тождественный нуль, сумма Жегалкина, дизъюнкция являются примерами БФ, сохраняющих нуль. Импликация не является функцией, сохраняющей нуль.

Определение 39. БФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется сохраняющей единицу, если $f(1,1,...,1) = 1$.

Конъюнкция, стрелка Пирса, импликация удовлетворяют условиям определения 39, то есть являются примерами БФ, сохраняющих единицу. Сумма Жегалкина не является функцией, сохраняющей единицу.

2.3 Полные системы и функционально замкнутые классы булевых функций

Для удобства обозначим множество (класс) всех БФ через P_2.

Определение 40. Говорят, что БФ g является элементарной суперпозицией (суперпозицией первого ранга) системы (класса) функций $M = \ f_1, f_2,..., f_m\ $, если она получена одним из следующих способов:

а) переименованием некоторой переменной одной из указанных функций;

б) подстановкой в функцию $f_i, i = \overline{1,m}$ вместо любой ее переменной какой-либо функции из множества M.

Обозначим через M_1 класс всех суперпозиций первого ранга функций из множества M. Применим к функциям из множества M_1 операцию элементарной суперпозиции, полученное в результате множество обозначим M_2 и т.д.

Определение 41. Суперпозицией функции из множества M называется любая функция множества $\bigcup\limits_{i \ge 0} M_i$, где $M_0 = M$.

Определение 42. Класс БФ $M = \ f_1, f_2,..., f_m\ $ называется полным, если любая БФ может быть выражена через $f_1, f_2,..., f_m$ с помощью суперпозиций.

Теорема 22. Если Система БФ $M = \ f_1, f_2,..., f_m\ $ является полной и любая из функций множества M может быть выражена через функции $K = \ g_1, g_2,..., g_k\ $ с помощью суперпозиций, то система функций $K = \ g_1, g_2,..., g_k\ $ также является полной.

Доказательство. Пусть f – это любая БФ, поскольку по условию теоремы система функций $M = \ f_1, f_2,..., f_m\ $ является полной, то $f = \phi(f_1, f_2,..., f_m)$. БФ $f_1, f_2,..., f_m$ могут быть выражены с помощью суперпозиций через БФ множества $K = \ g_1, g_2,..., g_k\ $, то есть $f_1 = \phi_1(g_1, g_2,..g_k)$, $f_2 = \phi_2(g_1, g_2,..., g_k)$, ..., $f_m = \phi_m(g_1, g_2,..., g_k)$. Значит, исходная БФ представима в виде:

$f=\psi(f_1, f_2,..., f_m)=\psi(\phi_1(g_1, g_2,..., g_k), \phi_2(g_1, g_2,..., g_k),..., \phi_m(g_1, g_2,..., g_k))$, это означает, что $f=\psi(g_1,g_2,...,g_k)$. Таким образом, всякая БФ может быть выражена через функции множества $K=\ g_1,g_2,...,g_k$ с помощью суперпозиций, а это означает, что система $K=\ g_1,g_2,...,g_k$ является полной.

Теорема доказана.

Определение 43. Замыканием класса БФ M называется множество, состоящее из этих функций и их всевозможных суперпозиций.

Принято замыкание класса БФ M обозначать M или $\overline{M}$.

Определение 44. Класс БФ $M=\ f_1, f_2,..., f_m$ называется замкнутым, если он совпадает со своим замыканием, то есть в символьном виде $M\ =M$.

Определение 45. Класс БФ $M=\ f_1, f_2,..., f_m$ называется собственным, если он не пуст и не совпадает с классом всех БФ P_2.

Введем следующие обозначения: $T_0=\ f\in P_2\,\big|\,f(0,0,...,0)=0$ (класс, сохраняющий нуль); $T_1=\ f\in P_2\,\big|\,f(1,1,...,1)=1$ (класс, сохраняющий единицу); $T_S=\ f\in P_2\,\Big|\,f(x_1,x_2,...,x_n)=f^*(x_1,x_2,...,x_n)$ (класс самодвойственных функций); $T_M=\ f\in P_2\,\big|\,f(\alpha)\le f(\beta)$, если $\alpha\le\beta$ (класс монотонных функций); $T_L=\ f\in P_2\,\big|\,f=a_0+a_1x+a_2y$ (класс линейных функций).

Теорема 23. Классы БФ T_0, T_1, T_S, T_M, T_L являются собственными замкнутыми классами БФ.

Доказательство.

Все упомянутые в теореме классы являются собственными, поскольку выше для каждого класса приводились примеры БФ принадлежащих и не принадлежащих этим классам.

Покажем, что класс T_0 является замкнутым. Пусть $f_1, f_2, f_3\in T_0$, то есть $f_1(0,0)=f_2(0,0)=f_3(0,0)=0$ и $g(x_1,x_2)=f_1(f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2))..$ Найдем значение

$g(0,0) = f_1(f_2(0,0), f_3(0,0)) = f_1(0,0) = 0,$ из чего следует, что $g(x_1, x_2) \in T_0$. Аналогично, теорема доказывается для классов T_1, T_S, T_M, T_L.

Теорема доказана.

Теорема 24 (Поста, о полноте системы БФ). Система БФ M является полной тогда и только тогда, когда для каждого из классов T_0, T_1, T_S, T_M, T_L найдется не принадлежащая ему функция из множества M.

Доказательство данной теоремы приведено в источнике [10] на страницах 109-111.

При решении примеров на проверку полноты системы БФ принято составлять таблицу Поста, строками которой являются БФ из множества M, а столбцами классы T_0, T_1, T_S, T_M, T_L. Если БФ из множества M принадлежит некоторому классу, то на пересечении соответствующей строки и столбца пишут знак «+»; в противном случае пишут «–». В соответствии с теоремой Поста, если построенная таблица Поста содержит в каждом столбце хотя бы один «–», то исследуемая система БФ M является полной и не является полной в противном случае.

Пример 13. Исследуйте на полноту системы БФ: $+, \vee, 1$, $\rightarrow, \vee$.

Решение. Исследуем вопрос о принадлежности БФ систем основным замкнутым классам, используя индексы из таблицы 16.

Для суммы Жегалкина из таблицы значений функции: $f_6(0,0) = 0 \Rightarrow$ $f_6(x,y) \in T_0$; $f_6(1,1) = 1 \Rightarrow$ $f_6(x,y) \in T_1$; $f_6(0,0) = f_6(1,1) = 0 \Rightarrow$ $f_6(x,y) \notin T_S$; набор $(1,0) \le (1,1)$, но $1 = f_6(1,0) \ge f_6(1,1) = 0 \Rightarrow$ $f_6(x,y) \notin T_M$; так как $f_6(x,y) = (x + y) \Rightarrow$ $f_6(x,y) \in T_L$.

Для дизъюнкции из таблицы значений: $f_7(0,0) = 0 \Rightarrow f_7(x,y) \in T_0$; $f_7(1,1) = 1 \Rightarrow$ $f_7(x,y) \in T_1$; $f_7(1,0) = f_7(0,1) = 1 \Rightarrow$ $f_7(x,y) \notin T_S$; $f_7(x,y) \in T_M$. Многочлен Жегалкина для дизъюнкции был найден при решении примера 12, $f_7(x,y) = (xy + x + y) \Rightarrow$ $f_7(x,y) \notin T_L$.

Для тождественной единицы из таблицы значений: $f_{15}(0,0) = 1 \Rightarrow$ $f_{15}(x,y) \notin T_0$; $f_{15}(1,1) = 1 \Rightarrow$ $f_{15}(x,y) \in T_1$; $f_{15}(0,0) = f_{15}(1,1) = 1 \Rightarrow$ $f_{15}(x,y) \notin T_S$; $f_{15}(x,y) \in T_M$.

Многочлен Жегалкина для тождественной единицы имеет вид: $f_{15}(x,y)=1 \Rightarrow f_{15}(x,y) \in T_L$.

Для импликации из таблицы значений: $f_{13}(0,0)=1 \Rightarrow f_{13}(x,y) \notin T_0$; $f_{13}(1,1)=1 \Rightarrow f_{13}(x,y) \in T_1$; $f_{13}(0,0)=f_{13}(1,1)=1 \Rightarrow f_{13}(x,y) \notin T_S$. Набор $(0,0) \le (1,0)$, но $1 = f_6(0,0) \ge f_6(1,0) = 0 \Rightarrow f_{13}(x,y) \notin T_M$. Построив многочлен Жегалкина для импликации, например, с помощью треугольника Паскаля, получим: $f_{13}(x,y)=1+x+xy \Rightarrow f_{13}(x,y) \notin T_L$.

С учетом проведенного анализа построим таблицу Поста для каждой системы БФ.

Таблица 24 – Таблица Поста для системы БФ $+, \vee, 1$

	T_0	T_1	T_S	T_M	T_L
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Поскольку в каждом столбце таблицы Поста присутствует хотя бы один «–», то система БФ является полной.

Таблица 25 – Таблица Поста для системы БФ $\rightarrow, \vee$

	T_0	T_1	T_S	T_M	T_L
$\rightarrow$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

Поскольку в столбце нет ни одного «–», то система БФ не является полной.

2.4 Примеры для самостоятельного решения

2.4.1. Булевой функцией от *n* аргументов называется отображение вида:

а) $f:\{0,1,2,...,n-1\}^2 \rightarrow \{0,1,2,...,n-1\}$;

б) $f : R \to R$;

в) $f : R^n \to R$;

г) $f : N_0 \to \{0,1\}$;

д) $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

2.4.2. Таблица значений булевой функции от n аргументов содержит … строк.

а) 2;

б) n;

в) $2n$;

г) 2^n;

д) n^2.

2.4.3. Число различных булевых функций от n аргументов равно:

а) n^2;

б) n^{n^2};

в) 2^{nn};

г) 2^n;

д) 2^{2n}.

2.4.4. Таблица значений булевой функции от 3 аргументов содержит … строк.

а) 3;

б) 9;

в) 8;

г) 6;

д) 27.

2.4.5. Таблица значений булевой функции от 4 аргументов содержит … строк.

а) 4;

б) 16;

в) 8;

г) $4!$;

д) 64.

2.4.6. Число различных булевых функций от 1 аргумента равно:

а) 2;

б) 4;

в) 8;

г) 16;

д) 1.

2.4.7. Число различных булевых функций от 2 аргументов равно:

а) 5;

б) 4;

в) 8;

г) 16;

д) 32.

2.4.8. Число различных булевых функций от 3 аргументов равно:

а) 256;

б) 33;

в) 9;

г) 3^9;

д) 128.

2.4.9. Укажите таблицу значений импликации

а)

x	y	$x \to y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x	y	$x \to y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

д)

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.4.10. Укажите таблицу значений суммы Жегалкина

а)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x	y	$x \oplus y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

д)

x	y	$x \oplus y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x	y	$x \oplus y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.4.11. Укажите таблицу значений дизъюнкции

а)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x	y	$x \vee y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

д)

x	y	$x \vee y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x	y	$x \vee y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

е)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.4.12. Укажите таблицу значений штриха Шеффера

а)

x	y	$x \mid y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x	y	$x \mid y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

д)

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

е)

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2.4.13. Укажите таблицу значений стрелки Пирса

а)

x	y	$x \downarrow y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x	y	$x \downarrow y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

д)

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x	y	$x{\downarrow}y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

е)

x	y	$x{\downarrow}y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2.4.14. Укажите верные тождества:

а) $x \cdot x = x$;

б) $x \oplus y \quad \oplus z = x \oplus \quad y \oplus z \quad$;

в) $x \vee y = y \vee x$;

г) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$;

д) $(x \cdot y) \vee x = x$.

2.4.15. Укажите верные тождества:

а) $x \oplus y \;\; ' = x' - y'$;

б) $x \cdot 0 = x$;

в) $x \oplus 1 = x'$;

г) $x \oplus x' = 0$;

д) $x \to y = x' \cdot y$.

2.4.16. Функция $x \oplus y$ обладает свойством (или свойствами):

а) идемпотентности;

б) коммутативности;

в) ассоциативности;

г) инволютивности;

д) дистрибутивности относительно операции конъюнкции.

2.4.17. Функция $x \vee y$ обладает свойством (или свойствами):

а) идемпотентности;

б) коммутативности;

в) ассоциативности;

г) инволютивности;

д) дистрибутивности относительно операции конъюнкции.

2.4.18. Функция штрих Шеффера обладает свойством (или свойствами):

а) идемпотентности;

б) коммутативности;

в) ассоциативности;

г) дистрибутивности относительно суммы Жегалкина.

2.4.19. Выберите правильный вид последнего столбца таблицы значений функции $x \mid y \mid z$ (порядок значений соответствует лексикографическому порядку на наборах аргументов).

а) $(10101011)^T$;

б) $(11110001)^T$;

в) $(10101010)^T$;

г) $(10101000)^T$.

2.4.20. Выберите правильный вид последнего столбца таблицы значений функции $x \mid y \mid z$ (порядок значений соответствует лексикографическому порядку на наборах аргументов).

а) $(10101011)^T$;

б) $(11110001)^T$;

в) $(10101010)^T$;

г) $(10101000)^T$.

2.4.21. Функция $f(x) = x$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.22. Функция $f(x) = x'$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.23. Функция $f(x)=0$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.24. Функция $f(x)=1$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.25. Функция $f(x,y)=x\cdot y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.26. Функция $f(x,y)=x\vee y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.27. Функция $f(x,y) = x \to y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.28. Функция $f(x,y) = x \leftrightarrow y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.29. Функция $f(x,y) = x \oplus y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M.

2.4.30. Функция $f(x,y) = x \mid y$ принадлежит следующим замкнутым классам:

а) T_0;

б) T_1;

в) T_S;

г) T_L;

д) T_M;

е) она не принадлежит ни одному из них.

2.4.31. Многочлен Жегалкина функции $f(x,y) = x \vee y$ имеет вид:

а) $xy + x + y$;

б) $xy + x + 1$;

в) $xy + y + 1$;

г) $x + 1$;

д) $y + 1$;

е) $xy + x$.

2.4.32. Многочлен Жегалкина функции $f(x,y) = x \cdot y$ имеет вид:

а) $xy + x + y$;

б) xy;

в) $xy + y + 1$;

г) $x + 1$;

д) $y + 1$;

е) x.

2.4.33. Многочлен Жегалкина функции $f(x,y) = x \leftrightarrow y$ имеет вид:

а) $xy + x + y$;

б) $xy + x + 1$;

в) $x + y + 1$;

г) $x + y$;

д) y;

е) x.

2.4.34. Если вектор значений функции $f(x,y,z)$ имеет вид (01100110), то вектор значений двойственной ей функции $f^*(x,y,z)$ имеет вид:

а) (01100110);

б) (11111111);

в) (00000000);

г) (10011001).

2.4.35. Если вектор значений функции $f(x, y, z)$ имеет вид (01000111), то вектор значений двойственной ей функции $f^*(x, y, z)$ имеет вид:

а) (00011101);

б) (11111111);

в) (00000000);

г) (11100010).

2.4.36. Для доказательства полноты некоторой системы булевых функций *A* … указать полную систему булевых функций *B*, суперпозициями которых являются функции системы *A*.

а) необходимо;

б) необходимо и достаточно;

в) достаточно;

г) нет такого признака полноты;

д) нужно.

2.4.37. Среди приведенных систем булевых функций являются полными:

а) $x \to y,\ x'$;

б) $0,1$;

в) $x,\ x'$;

г) $x \mid y$;

д) $x \downarrow y$.

2.4.38. Среди приведенных систем булевых функций являются полными:

а) $x \vee y, x'$;

б) $0,1,x$;

в) x, x' ;

г) $x \cdot y$;

д) $x \oplus y$.

2.4.39. СДНФ функции, заданной вектором значений (01000010), имеет вид:

а) $x'y'z \vee xyz'$;

б) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z)$;

в) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z')$;

г) $x'y'z \vee xyz' \vee x'yz' \vee xyz \vee xy'z'$.

д) нет правильного ответа.

2.4.40. СКНФ функции, заданной вектором значений (011011100), имеет вид:

а) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z') \cdot (x \vee y \vee z)$;

б) $(x' \vee y' \vee z') \cdot (x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z)$;

в) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z)$;

г) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z')$.

д) нет правильного ответа.

2.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

2.5.1 Понятие БФ. Способы задания БФ. БФ одного и двух аргументов.

2.5.2 Теорема о количестве БФ от n аргументов (с доказательством).

2.5.3 Равенство БФ. Свойства БФ (с доказательством).

2.5.4 Представление БФ формулами. Разложение БФ по переменным. СДНФ, СДНФ, многочлен Жегалкина.

2.5.5 Полные и замкнутые системы БФ. Примеры полных и замкнутых систем.

2.5.6 Основные замкнутые классы БФ.

2.5.7 Критерий полноты системы БФ.

2.5.8 Применение БФ в теории релейно-контактных схем.

3 Логика предикатов

3.1 Логические и кванторные операции над предикатами

Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а логика предикатов (ЛП) представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с АВ, для изучения закономерностей процессов умозаключения и логического следования, составляющих предмет математической логики.

Определение 46. n-местным предикатом, определенным на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется повествовательное предложение, содержащее переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, которое обращается в высказывание при подстановке вместо $(x_1, x_2, ..., x_n)$ любого набора конкретных значений из множества $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

Принято n-местный предикат обозначать $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются предметными, а элементы множеств $M_1, M_2, ..., M_n$, которые эти переменные пробегают, называются конкретными предметами. Согласно определению 46 n-местным предикат представляет собой функцию n аргументов, определенную на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ и принимающую значения из множества 0,1 .

Согласно определению 46 высказывания являются нульместными предикатами.

Определение 47. Множеством истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, обращающих данный предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Принято область истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ обозначать $I(P)$. С учетом введенного обозначения определение 47 в символьном виде можно записать так:

$$I(P) = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \,|\, \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\}. \tag{3.1}$$

Множество истинности n-местного предиката является удобным основанием для классификации предикатов.

Определение 48. n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется тождественно истинным, если множество истинности данного предиката совпадает с множеством $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, то есть $I(P) = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

Определение 49. n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется тождественно ложным, если множество истинности данного предиката совпадает с пустым множеством, то есть $I(P) = \varnothing$.

Определение 50. n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется выполнимым, если множество истинности данного предиката не совпадает с пустым множеством, то есть $I(P) \neq \varnothing$.

Определение 51. n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется опровержимым, если множество истинности данного предиката не совпадает со множеством $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, то есть $I(P) \neq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

Пример 14. Найти множество истинности предиката $P(x): |x+8| \leq 15$, определенного на множестве R.

Решение. Для нахождения множества истинности одноместного предиката требуется решить неравенство с модулем: $|x+8| \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq x+8 \leq 15 \Leftrightarrow -23 \leq x \leq 7$. Следовательно, множество истинности данного предиката – $I(P) = [-23, 7]$.

Согласно принятой классификации рассматриваемый предикат является выполнимым и опровержимым.

Определение 52. Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенные на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называются равносильными, если их множества истинности совпадают, то есть $I(P) = I(Q)$.

Тот факт, что предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются равносильными принято обозначать в символьном виде так: $P \Leftrightarrow Q$.

Определение 53. Переход от предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ к равносильному предикату $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется равносильным преобразованием первого.

Определение 54. Предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ называется следствием предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, если $I(P) \subseteq I(Q)$.

Тот факт, что предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются следствием предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ принято обозначать в символьном виде так: $P \Rightarrow Q$.

Пример 15. Равносильны ли одноместные предикаты $P(x): x^2 = 0$ и $Q(x): |x| \le 0,$ определенные на множестве R?

Решение. Решив каждое уравнение, получим, что $I(P) = \ 0$, $I(Q) = \ 0$, что согласно определению 52 означает, что одноместные предикаты равносильны.

Пример 16. Выяснить, какой из одноместных предикатов $P(x): 2x \le -4$ и $Q(x): |x| > 1$, определенных на множестве R, является следствием другого .

Решение. Решив каждое уравнение, получим, что $I(P) = \ -\infty, -2$, $I(Q) = \ -\infty, -1 \ \cup \ 1, +\infty$, получим, что $I(P) \subseteq I(Q)$, согласно определению 54 означает, что предикат $Q(x): |x| > 1$ является следствием предиката $P(x): 2x \le 4$.

Определение 55. Отрицанием n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, называется предикат, обозначаемый $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ читается: «неверно, что $P(x_1, x_2, ..., x_n)$» , определенный на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, который обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех наборах предметных переменных, при которых исходный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ обращается в ложное высказывание.

Теорема 25. Для *n*-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, множество истинности его отрицания $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ совпадает с дополнением множества истинности данного предиката, то есть $I(\neg P) = (M_1 \times M_2 \times ... \times M_n) \setminus I(P)$.

Доказательство. По определению 52 и определению дополнения множества получим: $I(\neg P) = \ (a_1, a_2, ..., a_n) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \,|\, \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 0 \ =$

$= \ (a_1, a_2, ..., a_n) \notin I(P \ = (M_1 \times M_2 \times ... \times M_n) \setminus I(P)$.

Теорема доказана.

В частности, для одноместного предиката $P(x): |x+8| \leq 15$, приведенного в примере 14, отрицанием является одноместный предикат $\neg P(x): |x+8| > 15$. Решив последнее неравенство, получим, что область истинности отрицания одноместного предиката имеет вид: $I(\neg P) = (-\infty, -23) \cup (7, +\infty)$, что согласуется с доказанной теоремой.

Определение 56. Конъюнкцией *n*-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, и *m*-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множестве $N_1 \times N_2 \times ... \times N_m$, называется новый (*n*+*m*)-местный предикат, обозначаемый $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(y_1, y_2, ..., y_m))$ (читается «$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$»), который обращается в истинное высказывание при тех и только тех наборах значений предметных переменных, при которых оба исходных предиката обращаются в истинное высказывание.

Теорема 26. Для *n*-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенных на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, множество истинности конъюнкции $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n))$ совпадает с пересечением множеств истинности исходных предикатов, то есть $I(P \wedge Q) = I(P) \cap I(Q)$.

Доказательство. По определению 56 и определению пересечения множеств получим:

$$I(P \wedge Q) = \ (a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n) \wedge Q(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1 \ =$$

$$= \ (a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1 \text{ и } \lambda(Q(a_1, a_2, ..., a_n) = 1 \ =$$

$$= \ (a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1 \ \cap \ (a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(Q(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1 \ = \ .$$

$$= I(P) \cap I(Q).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

Определение 57. Дизъюнкцией n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множестве $N_1 \times N_2 \times ... \times N_m$, называется новый ($n+$ m)-местный предикат, обозначаемый $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_m))$ читается «$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$» , который обращается в истинное высказывание при тех и только тех наборах значений предметных переменных, при которых хотя бы один из исходных предикатов обращаются в истинное высказывание.

Теорема 27. Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенных на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, множество истинности дизъюнкции $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n))$ совпадает с объединением множеств истинности исходных предикатов, то есть $I(P \wedge Q) = I(P) \cup I(Q)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 26.

Из теоремы 27 следует, что дизъюнкция двух предикатов представляет собой выполнимый предикат тогда и только тогда, когда хотя бы один из данных предикатов является выполнимым. При этом дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

Определение 58. Импликацией n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множестве $N_1 \times N_2 \times ... \times N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, обозначаемый $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \to Q(y_1, y_2, ..., y_m))$, который обращается в ложное высказывание при тех и только тех наборах значений предметных переменных, при которых $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ обращается в истинное высказывание, а $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ – в ложное высказывание.

Определение 59. Эквивалентностью n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множестве $N_1 \times N_2 \times ... \times N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, обозначаемый $(P(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow Q(y_1, y_2, ..., y_m))$, который обращается в истинное высказывание при тех и только тех наборах значений предметных переменных, при которых оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Определение 60. Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M , ставится в соответствие высказывание $(\forall x)(P(x))$ (читается: «для всякого $x(P(x))$»), которое истинно в том и только том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае, то есть:

$$\lambda\ (\forall x)(P(x)) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x) \ - \text{ тождественно истинный предикат,} \\ 0, \text{ если } P(x) \ - \text{ опровержимый предикат.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Определение 61. Операцией связывания квантором общности по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному предикату $n \geq 2$ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, ставится в соответствие новый $(n$-1)-местный предикат $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$, (читается: «для всякого $x_1(P(x_1,x_2,...,x_n))$»), определенный на множестве $M_2 \times M_3 \times ... \times M_n$, который на любых наборах $(a_2,a_3,...,a_n)$ из множества $M_2 \times M_3 \times ... \times M_n$ обращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x_1,a_2,...,a_n))$, истинное в том и только том случае, когда одноместный предикат то $(P(x_1,a_2,...,a_n))$, определенный на множестве M_1, тождественно истинен, и ложное в противном случае, то есть:

$$\lambda\ (\forall x_1)(P(x_1,a_2,...,a_n)) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x_1,a_2,...,a_n) - \text{ тождественно истинный предикат,} \\ 0, \text{ если } P(x_1,a_2,...,a_n) - \text{ опровержимый предикат.} \end{cases} \qquad (3.3)$$

Определение 62. Операцией связывания квантором существования называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, ставится в соответствие высказывание $(\exists x)(P(x))$ (читается: «существует $x(P(x))$»), которое ложно в том и только том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае, то есть:

$$\lambda\ (\exists x)(P(x)) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) - \text{ тождественно ложный предикат,} \\ 1, \text{ если } P(x) - \text{ выполнимый предикат.} \end{cases} \qquad (3.4)$$

Определение 63. Операцией связывания квантором существования по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному предикату $n \geq 2$ $P(x_1,x_2,...,x_n)$, определенному на множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, ставится в соответствие новый (n-1)-местный предикат $(\exists x_1)(P(x_1,x_2,...,x_n))$, (читается: «существует $x_1(P(x_1,x_2,...,x_n))$»), определенный на множестве $M_2 \times M_3 \times ... \times M_n$, который на любых наборах $(a_2,a_3,...,a_n)$ из множества $M_2 \times M_3 \times ... \times M_n$ обращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1,a_2,...,a_n))$, ложное в том и только том случае, когда одноместный предикат $(P(x_1,a_2,...,a_n))$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае, то есть:

$$\lambda\ (\exists x_1)(P(x_1,a_2,...,a_n)) =$$
$$=\begin{cases} 0, \text{ если } P(x_1,a_2,...,a_n) - \text{ тождественно ложный предикат,} \\ 1, \text{ если } P(x_1,a_2,...,a_n) - \text{ выполнимый предикат.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Пример 17. Из двухместного предиката $P(x,y):(x^2+y^2=121)$, определенного на множестве $R\times R$, с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны.

Решение. Из данного двухместного предиката $P(x,y):(x^2+y^2=121)$, определенного на множестве $R\times R$, с помощью комбинации двух кванторов можно построить четыре высказывания: $(\forall x)(\forall y)(x^2+y^2=121)$ (читается: «любые действительные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=121$»), $(\exists x)(\forall y)(x^2+y^2=121)$ (читается: «найдется такое действительное число x, что при любом действительном значении числа y выполняется условие: $x^2+y^2=121$»), $(\forall y)(\exists x)(x^2+y^2=121)$ (читается: «для любого действительного значения переменной y найдется такое действительное значение x, удовлетворяющее условию: $x^2+y^2=121$»), $(\exists y)(\exists x)(x^2+y^2=121)$ (читается «существуют такие действительные числа x, y удовлетворяющие уравнению: $x^2+y^2=121$»).

Первые два высказывания получены из одноместного предиката $(\forall y)(x^2+y^2=121)$, определенного на множестве действительных чисел, связыванием кванторами общности и существования переменной x. Поскольку рассматриваемый одноместный предикат $(\forall y)(x^2+y^2=121)$ является тождественно ложным, то высказывания: $(\forall x)(\forall y)(x^2+y^2=121)$ и $(\exists x)(\forall y)(x^2+y^2=121)$ являются ложными.

Два последних высказывания получены из одноместного предиката $(\exists x)(x^2+y^2=121)$, определенного на множестве действительных чисел, связыванием кванторами общности и существования переменной y. Одноместный предикат $(\exists x)(x^2 + y^2 = 121)$ является выполнимым и опровержимым, поскольку высказывание: $(\forall y)(\exists x)(x^2 + y^2 = 121)$ является ложным (например, для числа $y = 25$ не найдется ни одного такого действительного значения x, чтобы выполнялось условие: $x^2 + y^2 = 121$), а высказывание: $(\exists y)(\exists x)(x^2 + y^2 = 121)$ – истинным (например, действительные числа $x = 0$, $y = 11$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 121$).

3.2 Формулы логики предикатов

Алфавит символов для формул ЛП:

– предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i $(i \in N)$;

– нульместные предикатные переменные: P, Q, R, P_i, Q_i, R_i $(i \in N)$;

– n-местные $n \geq 1$ предикатные переменные: $P(\ ,...,\ ), Q(\ ,...,\ ), R(\ ,...,\ ),$ $P_i(\ ,...,\ ), Q_i(\ ,...,\ ), R_i(\ ,...,\ )$ $(i \in N)$ с указанием числа свободных мест в них;

– символы логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

– кванторы: $\forall, \exists$;

– вспомогательные символы: $()$ – скобки и $,$ – запятая.

Определение 64 (формулы ЛП).

1) Каждая нульместная предикатная переменная есть формула;

2) если $P(\ ,...,\ )$ – n-местная предикатная переменная, то $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть формула, в которой все предметные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ свободны;

3) если F – формула, то $\neg F$ – формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg F$ те и только те, которые являются свободными (связанными) в формуле F;

4) если F_1, F_2 – формулы и есть предметные переменные, входящие одновременно в обе формулы, свободные в каждой из них, то выражения $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ также являются формулами. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F_1, F_2 называются свободными (связанными) и в новых формулах;

5) если F – формула и x – предметная переменная, входящая в формулу F свободно, то выражение $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ также являются формулами, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связно, остаются в новых формулах соответственно такими же;

6) никаких других формул ЛП нет.

Формулы, определенные в пунктах 1) – 2), называются элементарными или атомарными [9, 10, 17]. Формулы, не являющиеся элементарными, называются составными. В формулах $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ из пункта 5) формула F называется областью действия квантора.

Пример18. Определить, являются ли выражения: $Q(x, y)$, $(\exists x)(P(x, y))$, $(\exists x)(P(x)) \to ((\forall y)(P(x, y)))$ формулами ЛП. В случае положительного ответа выяснить являются ли они элементарными или составными.

Решение. Выражение $Q(x, y)$ согласно пункту 2) определения формулы ЛП является формулой, в которой две свободные переменные x, y, $Q(x, y)$ – элементарная формула ЛП. Выражение $(\exists x)(P(x, y))$ согласно пунктам 2) – 5) определения формулы ЛП является формулой, в которой переменная x связанная, а переменная y свободная, $(\exists x)(P(x, y))$ – составная формула ЛП. Выражение $(\exists x)(P(x)) \to ((\forall y)(P(x, y)))$ согласно пунктам 2), 4), 5) определения формулы ЛП является формулой, $(\exists x)(P(x)) \to ((\forall y)(P(x, y)))$ – составная формула ЛП.

Определение 65. Формула ЛП, не содержащая свободных переменных, называется замкнутой.

Определение 66. Формула ЛП, содержащая хотя бы одну свободную переменную, называется открытой.

С учетом введенных определений 65 и 66 делаем вывод, что формулы ЛП $Q(x,y)$, $(\exists x)(P(x,y))$ из примера 16 являются открытыми, а формула $(\exists x)(P(x)) \to ((\forall y)(P(x,y)))$ замкнутой.

Определение 67. Если формула ЛП G получена из формулы ЛП F связыванием всех ее свободных переменных кванторами общности, то говорят, что формула G – это замыкание общности формулы F.

Определение 68. Если формула ЛП G получена из формулы ЛП F связыванием всех ее свободных переменных кванторами существования, то говорят, что формула G – это замыкание существования формулы F.

Определение 69. Обращение формулы ЛП в конкретное высказывание за счет:

1) указания предметной области;

2) задание конкретных значений содержащихся в формуле ЛП предикатных переменных;

3) указание конкретных значений свободных переменных;

называется интерпретацией формулы ЛП.

Пример 19. Интерпретировать формулу ЛП $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$ двумя различными способами.

Решение. Пусть $(x,y) \in N \times N$, вместо предикатной переменной подставим предикат «$x \vdots y$», тогда исходная формула ЛП обратится в истинное высказывание $(\forall x)(\exists y)(x \vdots y)$ – «для всякого натурального числа существует натуральное число, являющееся его делителем».

Пусть теперь $(x,y) \in R \times R$, в качестве предикатной переменной выберем предикат $(x^2 + y^2 = 121)$ из рассмотренного выше примера 17, тогда исходная формула ЛП обратится в ложное высказывание $(\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2 = 121)$ – «для всякого действительного числа x существует действительное число y, что сумма их квадратов равна 121» .

В качестве основания для классификации формул ЛП используется понятие интерпретации.

Определение 70. Формула ЛП F называется выполнимой на множестве M, если существует ее истинная интерпретация на указанном множестве.

Согласно определению 70 формула ЛП $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$ выполнима на множестве натуральных чисел.

Определение 71. Формула ЛП F называется опровержимой на множестве M, если существует ее ложная интерпретация на указанном множестве.

Согласно определению 71 формула ЛП $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$ опровержима на множестве действительных чисел.

Определение 72. Формула ЛП F называется тождественно истинной на множестве M, если любая ее интерпретация на указанном множестве истинна.

Определение 73. Формула ЛП F называется тождественно ложной на множестве M, если любая ее интерпретация на указанном множестве ложна.

Определение 74. Формула ЛП F называется общезначимой, если ее интерпретация истинна на любом множестве M.

Определение 75. Формула ЛП F называется противоречием, если ее интерпретация ложна на любом множестве M.

Теорема 28 (Черча). Не существует алгоритма, позволяющего установить является ли общезначимой формула ЛП.

3.3 Равносильные формулы логики предикатов

Определение 76. Формулы ЛП F и H называются равносильными на множестве M, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определенных на множестве M, формулы обращаются в равносильные предикаты или, по-другому, если их интерпретации на указанном множестве имеют одинаковые логические значения при соответствующих подстановках предикатных и предметных переменных.

Определение 77. Формулы ЛП F и H, равносильные на любых множествах, называются равносильными или, по-другому, их интерпретации совпадают на любом множестве, обозначается $F \cong H$.

Определение 78. Переход от формулы ЛП F к равносильной формуле ЛП H называется равносильным преобразованием исходной формулы.

Теорема 29. Приведенные ниже формулы ЛП равносильны.

Первая группа равносильностей получается из основных равносильностей АВ заменой пропозициональных переменных на формулы ЛП.

Вторая группа равносильностей:

1) $\neg((\forall x)(P(x))) \cong (\exists x)(\neg P(x))$;

2) $\neg((\exists x)(P(x))) \cong (\forall x)(\neg P(x))$;

3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \cong (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;

4) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \cong (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;

5) $(\forall x)(P(x) \vee Q) \cong (\forall x)(P(x) \vee Q$;

6) $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \cong (\exists x)(P(x)) \wedge Q$;

7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q) \cong (\exists x)(P(x)) \rightarrow Q$;

8) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q) \cong (\forall x)(P(x)) \rightarrow Q$;

9) $(\exists x)(Q \rightarrow P(x)) \cong Q \rightarrow (\exists x)(P(x))$;

10) $(\forall x)(Q \rightarrow P(x)) \cong Q \rightarrow (\forall x)(P(x))$;

11) $(\forall x)(P(x)) \rightarrow P(y) \cong 1$;

12) $P(y) \rightarrow (\exists x)(P(x)) \cong 1$;

13) $(\forall x)(P(x)) \cong (\forall y)(P(y))$;

14) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)) \cong (\forall y)(\forall x)(P(x,y))$;

15) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)) \cong (\forall y)(\forall x)(P(x,y))$;

16) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x,y)) \cong 1$.

Доказательство. Докажем равносильность 1) из второй группы. Данная формула является замкнутой, так как не содержит свободных переменных. Поэтому, подставив в эту формулу ЛП вместо предикатной переменной $P(x)$ любой конкретный одноместный предикат $A\;x$, определенный на некотором множестве M, получим высказывание:

$$\neg((\forall x)(A(x))) \leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x)). \tag{3.6}$$

Для доказательства его истинности требуется убедиться, что логические значения правой и левой относительно эквивалентности части совпадают. Действительно, высказывание $\neg((\forall x)(A(x)))$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $(\forall x)(A(x))$ ложно, что означает, что предикат $A(x)$ опровержим, следовательно, предикат $\neg A(x)$ выполним. Из последнего утверждения вытекает истинность высказывания $(\exists x)(\neg A(x))$. Таким образом, доказано, что высказывание (3.6) истинно, то есть выполняется доказываемая равносильность.

Аналогично доказываются остальные равносильности.

Теорема доказана.

Определение 79. Приведенной формой для формулы ЛП называется такая равносильная ей формула, в которой из операций АВ содержатся только операции: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, причем знаки отрицания относятся только к предикатным переменным и к высказываниям.

Теорема 30. Для каждой формулы ЛП существует приведенная форма.

Доказательство проведем методом математической индукции по количеству логических связок в формуле, включая кванторы.

Если формула не имеет логических связок, то она сама имеет приведенную форму.

Предположим, что всякая формула ЛП, содержащая не более (k-1) логических связок, обладает приведенной формой. Покажем, используя индуктивное предположение, что утверждение теоремы верно для формулы F ЛП, содержащей k

логических связок. Согласно определению 64 формула F имеет один из видов: $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$, $(\forall \xi)(F_1)$, $(\exists \xi)(F_1)$, где каждая из формул F_1 и F_2 содержит не более (k-1) логических связок. Пусть F_1^* и F_2^* – приведенные формы формул F_1 и F_2 соответственно, тогда формулы: $F_1^* \vee F_2^*$, $F_1^* \wedge F_2^*$, $(\forall \xi)(F_1^*)$, $(\exists \xi)(F_2^*)$ являются приведенными формами для формул $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $(\forall \xi)(F_1)$, $(\exists \xi)(F_1)$ соответственно. Осталось найти приведенные формы для формул ЛП: $\neg F_1$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$. Покажем, как найти приведенную форму для формул ЛП $\neg F_1$, $F_1 \to F_2$. Для формулы $\neg F_1$ формула $\neg F_1^*$ может не являться приведенной формой для формулы $\neg F_1$. Если F_1^* не содержит логических связок, то есть F_1^* представляет собой предикатную переменную P, то $(\neg F_1)^*$ представляет собой $\neg P$ и является искомой приведенной формой. Если же F_1^* – составная формула, то задача сводится к проносу знака отрицания через кванторы и операции конъюнкцию и дизъюнкцию, поскольку других операций в формуле F_1^* быть не может. Этот пронос возможен на основании равносильностей теоремы 29. Таким образом, для формулы $\neg F_1$ можно найти приведенную форму. Для формулы $F_1 \to F_2$ на основании формулы первой группы равносильностей из теоремы 29 получим, что $F_1 \to F_2 \cong \neg F_1 \vee F_2$. Заменив формулы ЛП F_1 и F_2 на равносильные приведенные формы F_1^* и F_2^*, получим равносильную формулу ЛП $\neg F_1^* \vee F_2^*$. Выше было показано, что для формулы $(\neg F_1)^*$ существует приведенная форма, для удобства обозначим ее F_1^{**}, тогда формула ЛП $F_1^{**} \vee F_2^*$ является приведенной формой формулы $F_1 \to F_2$. Аналогично теорема доказывается для случая $F_1 \leftrightarrow F_2$.

Теорема доказана.

Определение 80. Предваренной нормальной формой (ПНФ) для формулы ЛП называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы расположены в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, то есть имеет вид:

$$K_1x_1 \ \dots \ K_mx_m \quad F \quad x_1,x_2,\dots,x_n \quad , \tag{3.7}$$

где $m \le n$.

Теорема 31. Для каждой формулы ЛП существует предваренная нормальная форма.

Доказательство проведем по индукции, следуя правилу построения формул ЛП (определение 64). Если формула не содержит логических связок, то она представляет собой ПНФ. Поскольку каждая формула F равносильна формуле, полученной из более простых формул F_1 и F_2 с помощью операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ (операции импликации и эквивалентности выражаются через операции: $\neg, \wedge, \vee$), то достаточно показать метод нахождения ПНФ для формул ЛП: $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $(\forall\xi)(F_1)$, $(\exists\xi)(F_1)$, если известны ПНФ F_1^* и F_2^* формул F_1 и F_2 соответственно. Пусть для определенности F_1^* имеет вид: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\dots(\exists x_n)(G_1(x_1,x_2,\dots,x_n))$, а F_2^* имеет вид: $(\exists y_1)(\forall y_2)\dots(\forall y_m)(G_2(y_1,y_2,\dots,y_m))$.

Рассмотрим формулу $\neg F_1$, учитывая, что $F_1 \cong F_1^*$, получим новую равносильность $\neg F_1 \cong \neg F_1^*$, тогда по теореме 29 получим $\neg F_1^* \cong$ $\cong (\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)\dots(\forall x_n)(\neg G_1(x_1,x_2,\dots,x_n))$. Далее по аналогии с доказательством теоремы 30 осуществляя пронос знака отрицания до предикатных переменных, получим $\neg G_1 \cong G_1^*$. Тогда формула ЛП $\neg F_1$ будет иметь ПНФ вида: $(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)\dots(\forall x_n)(G_1^*(x_1,x_2,\dots,x_n))$, то есть для случая формулы ЛП $\neg F_1$ теорема доказана.

Для формулы ЛП вида: $F_1 \wedge F_2$. Поскольку при переименовании связанной переменной формула ЛП переходит в равносильную, то можно считать, не нарушая общности, что переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ не входят в формулу ЛП F_2^*, а переменные $y_1,y_2,\dots,y_m$ не входят в формулу ЛП F_1^*. Понятно, что $F_1 \wedge F_2 \cong F_1^* \wedge F_2^*$, но последняя формула не является ПНФ. Покажем, как ее преобразовать к требуемому виду. На основании равносильностей теоремы 29 последняя формула равносильна формуле ЛП:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)(G_1(x_1,x_2,...,x_n))\wedge\\&\wedge(\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,y_2,...,y_m)).\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Применяя далее равносильности из теоремы 29, получим следующую формулу ЛП:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)(\forall x_2)[(\exists x_3)...(\exists x_n)(G_1(x_1,x_2,...,x_n))\wedge\\&\wedge(\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,y_2,...,y_m)].\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Продолжая процесс далее, на предпоследнем этапе получим:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)[(G_1(x_1,x_2,...,x_n))\wedge\\&\wedge(\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,y_2,...,y_m)].\end{aligned} \qquad (3.10)$$

Аналогично поступаем с кванторами, расположенными перед формулой $G_2(y_1,y_2,...,y_m)$. В итоге получим формулу ЛП:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)(\exists y_1)(\forall y_2)...,(\forall y_m)\\&[G_1(x_1,x_2,...,x_n)\wedge G_2(y_1,y_2,...,y_m)],\end{aligned} \qquad (3.11)$$

которая равносильна формуле $F_1\wedge F_2$ и является ее ПНФ. То есть для случая формулы ЛП $F_1\wedge F_2$ теорема доказана.

Аналогично теорема доказывается для случая $F_1\vee F_2$. Очевидно, что $(\forall\xi)(F_1^*)$, $(\exists\xi)(F_1^*)$ являются ПНФ для формул ЛП $(\forall\xi)(F_1)$, $(\exists\xi)(F_1)$ соответственно.

Теорема доказана.

3.4 Примеры для самостоятельного решения

3.4.1 Среди приведенных выражений выделите одноместные предикаты.

а) $x^2 + 2x + 4 \ (x \in R)$.

б) $x^2 + 2x + 4 = 6 \ (x \in R)$.

в) Любое натуральное число y не меньше единицы.

г) Число x делится на число $y \quad (x, y \in N)$.

д) Город x расположен на берегу реки Урал (переменная x «пробегает» множество названий городов).

3.4.2 Среди приведенных выражений выделите двухместные предикаты.

а) $x^2 + 2x + 4y \ (x, y \in R)$;

б) Для некоторых $x,y \in R \ \ x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

в) Любое натуральное число y не меньше единицы.

г) Число x не делится на число $y \quad (x, y \in N)$.

д) Город x расположен на берегу реки Урал (переменная x «пробегает» множество названий городов).

3.4.3 Среди следующих высказываний укажите истинные (переменные принимают значения на множестве действительных чисел).

а) $\exists y \forall x (x + y = 7)$.

б) $\forall x \exists y (x + y = 7)$.

в) $\exists y \exists x (x + y = 7)$.

г) $\forall y \forall x (x + y = 7)$.

3.4.4 Множеством истинности предиката $|x - 4| \geq 1$, определенного на множестве R, является

а) R;

б) $3;5$;

в) $(-\infty; -1 \ \cup \ 4; +\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-\infty;3 \cup 5;+\infty)$.

3.4.5 Даны предикаты $P(x): x^2 = 0$ и $Q(x): |x| \le 0$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.6 Даны предикаты $P(x)$: $\sin x = \sin y$ и $Q(x)$: $x = y$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.7 Если высказывание $\forall x P(x)$ ложно, то предикат $P(x)$:

а) выполнимый;

б) опровержимый;

в) тождественно истинный;

г) тождественно ложный;

3.4.8 Если высказывание $\exists x P(x)$ истинно, то предикат $P(x)$:

а) выполнимый;

б) опровержимый;

в) тождественно истинный;

г) тождественно ложный.

3.4.9 Пусть заданы предикат $P(x)$, его предметная область M и множество истинности $I(P)$. Тогда множеством истинности предиката $(P(x) \leftrightarrow \neg P(x)) \to P(x)$ является:

а) M;

б) $I(P)$;

в) $M \setminus I(P)$;

г) $\varnothing$.

3.4.10 Если $\forall x(P(x) \vee (Q(x) \to P(x))) = 0$, то $\forall x P(x) =$ … и $\exists x Q(x) =$ …

а) $0,0$;

б) $0,1$;

в) $1,0$;

г) $1,1$.

3.4.11 Формула ЛП $\forall x\,(Q \to P(x))$, где выражение Q не зависит от x, равносильна следующей:

а) $\exists x\, P(x) \to Q$;

б) $\forall x\, P(x) \to Q$;

в) $Q \to \exists x\, P(x)$;

г) $Q \to \forall x\, P(x)$.

3.4.12 На одноэлементном множестве формула $\forall x\, P(x) \to P(y)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тождественно истинной;

г) тождественно ложной.

3.4.13 Выберите среди предложенных тождеств верные.

а) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$;

б) $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \exists x P(x) \vee Q$;

в) $(\forall x(P(x)) \to P(y) \equiv 1$;

г) $(\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$.

3.4.14 Запишите на языке логики предикатов определение монотонно возрастающей последовательности.

3.4.15 Сформулируйте утверждение, противоположное теореме «если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма – четное число».

а) «если каждое слагаемое не является четным числом, то и сумма – нечетное число»;

б) «если одно из слагаемых является четным числом, то и сумма – четное число»;

в) «если сумма чисел – четное число, то каждое слагаемое является четным числом»;

г) «если одно из слагаемых является нечетным числом, то и сумма – нечетное число»;

д) «если сумма чисел – нечетное число, то каждое слагаемое является нечетным числом»;

е) «если сумма чисел – нечетное число, то одно из слагаемых является нечетным числом».

3.4.16 Среди следующих высказываний укажите ложные (переменные принимают значения на множестве действительных чисел).

а) $\exists y \forall x (x + y = 7)$.

б) $\forall x \exists y (x + y = 7)$.

в) $\forall y \forall x (x + y = 7)$.

г) $\exists y \exists x (x + y = 7)$.

3.4.17 Множеством истинности предиката $|x| > 2$, определенного на множестве R, является:

а) $(2;+\infty)$;

б) $(-\infty;2)$;

в) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-2;2)$;

3.4.18 Множеством истинности предиката $|x| < 2$, определенного на множестве R, является:

а) $(2;+\infty)$;

б) $(-2;2)$;

в) $(-\infty;2)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

3.4.19 Множеством истинности предиката $x^2 \leq 4$, определенного на множестве R, является;

а) $2;+\infty)$;

б) $0;2$;

в) $(-\infty;-2 \ \cup \ 2;+\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $-2;2$.

3.4.20 Множеством истинности предиката $|x-4| \geq 1$, определенного на множестве R, является:

а) $1;+\infty)$;

б) $3;5$;

в) $(-\infty;-1 \ \cup \ 4;+\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-\infty;3 \ \cup \ 5;+\infty)$.

3.4.21 Множеством истинности предиката $|x-3| \geq -3$, определенного на множестве R, является:

а) R;

б) $3;5$;

в) $(-\infty;-1 \ \cup \ 4;+\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-\infty;3 \ \cup \ 5;+\infty)$.

3.4.22 Множеством истинности предиката $|x+8| \le -3$, определенного на множестве R, является:

а) R;

б) $3;5$;

в) $(-\infty;-1 \ \cup \ 4;+\infty)$;

г) $\varnothing$;

д) $(-\infty;3 \ \cup \ 5;+\infty)$.

3.4.23 Множеством истинности предиката $2|x| = \cos x$, определенного на множестве R, является:

а) R;

б) 0;

в) 1;

г) $\varnothing$;

д) $[0;+\infty)$.

3.4.24 Множеством истинности предиката $2|x| + 1 = \cos x$, определенного на множестве R, является:

а) R;

б) 0;

в) 1;

г) $\varnothing$;

д) $[0;+\infty)$.

3.4.25 Даны предикаты $P(x)$: $x^2 = 0$ и $Q(x)$: $|x| \le 0$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.26 Даны предикаты $P(x)$: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15$ и $Q\ x$: $\sqrt{xy}=15$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.27 Даны предикаты $P(x)$: $\ln x=\ln y$ и $Q(x)$: $x=y$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$

3.4.28 Даны предикаты $P(x)$: $2|x|=\cos x$ и $Q(x)$: $x=0$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.29 Даны предикаты $P(x):x^2=y^2$ и $Q(x)$: $x=y$, определенные на множестве R. Верным является утверждение:

а) $P(x)$ – следствие $Q(x)$;

б) $Q(x)$ – следствие $P(x)$;

в) $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;

г) $P(x)$ – не следствие $Q(x)$;

д) $Q(x)$ – не следствие $P(x)$.

3.4.30 Дано высказывание «Все простые числа нечетны». Его отрицание звучит так:

а) все простые числа четны;

б) существуют нечетные простые числа;

в) существуют четные простые числа;

г) все составные числа четны.

3.4.31 Дано высказывание «Некоторые грибы несъедобны». Его отрицание звучит так:

а) все грибы несъедобны;

б) существуют несъедобные грибы;

в) существуют съедобные грибы;

г) все грибы съедобны.

3.4.32 Если высказывание $\forall x\, P(x)$ истинно, то предикат $P(x)$ является:

а) выполнимым;

б) опровержимым

в) тождественно истинным

г) тождественно ложным

3.4.33 Если высказывание $\forall x\, P(x)$ ложно, то предикат $P(x)$ является:

а) выполнимым;

б) опровержимым;

в) тождественно истинным;

г) тождественно ложным.

3.4.34 Если высказывание $\exists x\, P(x)$ ложно, то предикат $P(x)$ является:

а) выполнимым;

б) опровержимым;

в) тождественно истинным;

г) тождественно ложным.

3.4.35 Если высказывание $\exists x\, P(x)$ истинно, то предикат $P(x)$ является:

а) выполнимым;

б) опровержимым;

в) тождественно истинным;

г) тождественно ложным.

3.4.36 Предикат «x – параллелограмм» является следствием предиката «x – ромб» на множестве:

а) всех плоских фигур;

б) всех ромбов;

в) всех параллелограммов;

г) всех выпуклых многоугольников;

д) всех треугольников;

е) всех квадратов.

3.4.37 На одноэлементном множестве формула $P(y) \to \forall x\ P(x)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тождественно истинной;

г) тождественно ложной.

3.4.38 На одноэлементном множестве формула $\forall x\, P(x) \to P(y)$ является:

а) выполнимой;

б) опровержимой;

в) тождественно истинной;

г) тождественно ложной.

3.4.39 Формула ЛП $\forall x\, (Q \to P(x))$, где выражение Q не зависит от x, равносильна следующей:

а) $Q \to \exists x\, P(x)$;

б) $\forall x\, P(x) \to Q$;

в) $\exists x\, P(x) \to Q$;

г) $Q \to \forall x\, P(x)$.

3.4.40 Среди следующих высказываний укажите истинные (переменные принимают значения на множестве действительных чисел).

а) $\exists y \forall x (x^2 + y^2 = 16)$.

б) $\forall x \exists y (x^2 + y^2 = 16)$.

в) $\forall y \forall x (x^2 + y^2 = 16)$.

г) $\exists y \exists x (x^2 + y^2 = 16)$.

3.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

3.5.1 Логика предикатов. Основные понятия, области применения.

3.5.2 Понятие одно- и двухместного предиката. Предметная область, множество истинности предиката. Примеры.

3.5.3 Понятие n-местного предиката. Область определения и множество истинности предиката. Классификация предикатов.

3.5.4 Логические и кванторные операции над предикатами. Логические операции с точки зрения областей истинности. Примеры.

3.5.5 Формулы логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов (доказать две равносильности).

3.5.6 Предваренная нормальная форма. Доказать теорему о возможности представления произвольной формулы ЛП в ПНФ.

3.5.7 Формулы логики предикатов. Выполнимость и общезначимость формул логики предикатов. Теорема Черча.

3.5.8 Алгоритмы распознавания общезначимости формул логики предикатов в частных случаях.

3.5.9 Запись математических предложений в виде формул логики предикатов. Построение противоположных утверждений.

3.5.10 Прямая, обратная и противоположная теоремы на языке ЛП.

3.5.11 Необходимые и достаточные условия на языке ЛП. Доказательство методом от противного.

4 Исчисление высказываний

4.1 Построение выводов из аксиом

В этой главе рассматривается аксиоматический подход к АВ. При таком подходе из всех формул АВ выделяется некоторая часть, которая объявляется аксиомами. Далее определяется некоторое правило, по которому из одних формул АВ можно получать новые формулы АВ. Причем правило определяется так, что по нему могут быть получены все тавтологии АВ, и только они. Таким образом, тавтологии АВ оказываются теоремами аксиоматической теории, то есть реализуется аксиоматическое построение АВ.

К первоначальным, неопределяемым понятиям аксиоматической теории высказываний относятся следующие:

– пропозициональные переменные: $X_1, X_2, ..., X_n$;

– логические связки: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$;

– технические знаки: $(,)$.

К числу первоначальных понятий относится понятие формулы, которое определяется индуктивно:

1) каждая пропозициональная переменная есть формула;

2) если F_1 и F_2 – формулы, то выражения: $\neg F_1$, $\neg F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$ также являются формулами;

3) никаких других формул, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2 нет.

В качестве аксиом аксиоматической теории высказываний выбираются формулы следующих видов:

(А1): $(F \rightarrow (G \rightarrow F))$;

(А2): $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$;

(А3): $((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G))$,

где $F,\ G,\ H$ – произвольные формулы. Таким образом, каждая из аксиом (А1) – (А3) задает лишь форму аксиомы, поэтому их называют схемой аксиом. Для обращения схем аксиом в аксиомы требуется вместо F, G, H подставить конкретные формулы (например, пропозициональные переменные). Таким образом, каждое из выражений (A1) – (A3) задает бесконечное множество формул.

Заключительным шагом, закладывающим основу аксиоматического подхода теории высказываний состоит в выборе правила вывода новых формул. Единственным правилом вывода будет служить правило заключения (правило отделения или правило *modus ponens* (MP)): из формул F и $F \to G$ выводима формула G.

Принято правило MP записывать в виде:

$$\frac{F, F \to G}{G}. \tag{4.1}$$

В аксиомах (A1) – (A3) отсутствуют логические связки: $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.

Определим их следующим образом:

$$F \wedge G \text{ означает } \neg(F \to \neg G). \tag{4.2}$$

$$F \vee G \text{ означает } \neg F \to G. \tag{4.3}$$

$$F \leftrightarrow G \text{ означает } (F \to G) \wedge (G \to F). \tag{4.4}$$

Определение 81. Доказательством или выводом формулы F из множества формул Γ называется такая последовательность $B_1, B_2, ..., B_s$ формул, каждая из которых является либо аксиомой из Γ, либо получена из двух предыдущих формул этой последовательности по правилу MP, а последняя формула B_s совпадает с F ($B_s \cong F$).

Определение 82. Если имеется вывод формулы F из множества, Γ то говорят, что F выводима из Γ или что Γ выводит F, при этом элементы из Γ называются гипотезами или посылками вывода.

Тот факт, что формула F выводима из Γ, в символьном виде записывают так: $\Gamma \vdash F$.

Если множество Γ конечно, то есть $\Gamma = F_1, F_2, ..., F_m$, , то вместо $F_1, F_2, ...F_m \vdash F$ принято записывать $F_1, F_2, ...F_m \vdash F$.

Определение 83. Если имеется вывод формулы F из пустого множества гипотез, то говорят, что F выводима из аксиом (или F доказуема), а последовательность $B_1, B_2, ..., B_s$ называется доказательством этой формулы, а саму формулу F называют теоремой.

Тот факт, что формула F является теоремой, в символьном виде записывают так: $\vdash F$.

Совокупность аксиом, правил вывода и всех теорем, выводимых из аксиом, представляет собой аксиоматическую теорию высказываний или формализованное исчисление высказываний (сокращенно исчисление высказываний (ИВ)).

Пример 20. Доказать: $\vdash F \to F$.

Решение. Для доказательства того, что формула $F \to F$ является теоремой ИВ, требуется построить вывод (доказательство) этой формулы из аксиом. Примером такого вывода может являться последовательность формул:

(1): $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$;

(2): $F \to ((F \to F) \to F)$;

(3): $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$;

(4): $F \to (F \to F)$;

(5): $F \to F$.

Формула (1) получена из аксиомы (A2) подстановкой вместо формул F и H формулы F, а вместо формулы G формулы $F \to F$. Формула (2) получена из аксиомы (A1) подстановкой вместо формулы G формулы $F \to F$. Формула (3) получена из формул (1) и (2) по правилу MP. Формула (4) представляет собой аксиому (A1). Окончательно, формула (5) получена из формул (3) и (4) по правилу MP.

4.2 Построение выводов из гипотез

Теорема 32 (свойства выводимости из гипотез).

а) Если $\Gamma \vdash F$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, то $\Delta \vdash F$;

б) $\Gamma \vdash F$ тогда и только тогда, когда в Γ существует такое конечное подмножество Δ, что $\Delta \vdash F$;

в) если $\Gamma \vdash G$ для любой формулы G из множества Δ и $\Delta \vdash F$, то $\Gamma \vdash F$.

Доказательство. а) Свойство отражает очевидный факт: если формула F выводима из множества посылок Г, то она выводима из всякого множества, получающегося из Γ добавлением новых посылок.

б) Достаточность вытекает из пункта а) данной теоремы. Докажем необходимость. Если $\Gamma \vdash F$, то по определению 81, существует вывод формулы F из Г, то есть существует некоторая конечная последовательность формул, использующая конечное число посылок из Γ. . Это означает, что именно эта конечная часть формул из Γ выводит формулу F.

в) По условию $\Delta \vdash F$, тогда согласно пункту б) доказываемой теоремы в Δ существует такое конечное подмножество Δ_0, удовлетворяющее условию: $\Delta_0 \vdash F$. Пусть $\Delta_0 = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$. Из условия теоремы следует, что имеются выводы каждой из формул множества Δ_0 из гипотез Γ: $\Gamma \vdash B_1$, $\Gamma \vdash B_2$, …, $\Gamma \vdash B_k$, представляющие собой конечные последовательности формул. Выпишем все указанные последовательности формул, которые будут собой представлять вывод формулы F из гипотез Γ.

Пример 21. Выясните, является ли данная последовательность выводом из гипотез. Если да, то укажите, выводом из каких формул и какой формулы является. Если нет, то объясните почему.

(1) $G \to H$;

(2) G;

(3) H;

(4) $H \to (F \to H)$;

(5) $F \to H$.

Решение. Гипотезами в данном примере выступают формулы (1) и (2). Формула (3) получена из (2) и (1) по правилу MP. Итак, в рассматриваемом примере приведен вывод формулы $F \to H$ из гипотез G, $G \to H$.

Процесс построения доказательств для тех или иных теорем может оказаться достаточно сложным, в том числе в техническом плане. Приведенная ниже теорема дедукции призвана облегчить процесс построения доказательства за счет выявления некоторой общей закономерности построения вывода.

Теорема 33 (о дедукции). Если $F_1, F_2, ... F_{m-1}, F_m \vdash G$, то $F_1, F_2, ... F_{m-1} \vdash F_m \to G$. В частности, если $F \vdash G$, то $\vdash F \to G$.

Доказательство теоремы 33 приведено в источнике [10] на страницах 125-127.

Лемма 3. Для любых формул F, G, H имеют место следующие выводимости:

а) $F \to G, G \to H \vdash F \to H$;

б) $F \to (G \to H), G \vdash F \to H$.

Доказательство. а) Покажем сначала, что $F \to G, G \to H, H \vdash H$. Для этого построим последовательность формул: $F \to G, G \to H$, H, G, H и покажем, что она является искомым выводом. Действительно, первые три формулы представляют собой гипотезы, четвертая формула G получена из формул $F \to G$ и H по правилу MP, пятая формула H получена по правилу MP из второй и четвертой формул последовательности. На основании теоремы дедукции делаем вывод, что $F \to G, G \to H \vdash F \to H$.

б) Очевидно, что $F \to (G \to H), G, H \vdash H$, что по теореме дедукции означает, что $F \to (G \to H), G \vdash F \to H$.

Лемма доказана.

Теорема 34. Для любых формул F, G, H следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления высказываний:

а) $\neg\neg F \to F$;

б) $F \to \neg\neg F$;

в) $\neg F \to (F \to G)$;

г) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$;

д) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;

е) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$;

ж) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

Доказательство проведем для пункта е). По правилу МР имеем $F,\ F \to G \vdash G$. Отсюда по теореме дедукции получаем, что $F \vdash (F \to G) \to G$. Повторно применяя теорему дедукции, получим $\vdash F \to ((F \to G) \to G)$. Согласно пункту д) доказываемой теоремы, если в качестве формулы F формулу $F \to G$, формулу G не изменяем: $((F \to G) \to G) \to (\neg G \to \neg(F \to G))$. Из двух последних утверждений на основании леммы 3 заключаем, что $\vdash F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Теорема доказана.

4.3 Производные правила вывода и их применение

Следующим шагом построения аксиоматической теории высказываний является выявление закономерностей процесса выведения одних формул из других и формулировка получаемых закономерностей в виде вывода [26, 28]. Получаемые таким образом вторичные правила вывода носят название производных правил вывода. Разобьем их на две группы и сформулируем их в виде двух теорем. В теоремах 35 и 36 Г – некоторое множество формул, которое может оказаться и пустым.

Теорема 35 (правило введения логических связок). Имеют место следующие производные правила вывода:

а) введение импликации ($\to$-вв):

$$\frac{\Gamma,\ F \vdash G}{\Gamma \vdash F \to G}, \tag{4.5}$$

б) введение конъюнкции ($\wedge$-вв):

$$\frac{\Gamma \vdash F,\ F \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}, \tag{4.6}$$

в) введение дизъюнкции ($\vee$-вв):

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G},\ \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}, \tag{4.7}$$

г) введение отрицания ($\neg$-вв):

$$\frac{\Gamma, F \vdash G;\ \Gamma,\ F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F}, \tag{4.8}$$

Доказательство проведем для пунктов а) и в).

а) Данное правило представляет собой теорему дедукции.

в) Обоснуем первое правило. Очевидно, что $\neg F, F \vdash G$ или $F, \neg F \vdash G$. Тогда по теореме о дедукции делаем вывод, что $F \vdash \neg F \to G$, то есть на основании определения логической связки дизъюнкции $F \vdash F \vee G$. Учитывая, что $\Gamma \vdash F$, окончательно получим, что $\Gamma \vdash F \vee G$. Остальные пункты доказываются аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 36 (правила удаления логических связок). Имеют место следующие производные правила вывода:

а) удаление импликации ($\to$- уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F,\ \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G}, \tag{4.9}$$

б) удаление конъюнкции ($\wedge$- уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F},\ \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}, \tag{4.10}$$

в) удаление конъюнкции ($\wedge$- уд):

$$\frac{\Gamma,\ F,\ G \vdash H}{\Gamma,\ F \wedge G \vdash H}, \tag{4.11}$$

г) удаление дизъюнкции (Генцен):

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G;\ \Gamma,\ F \vdash H;\ \Gamma,\ G \vdash H}{\Gamma \vdash H}, \tag{4.12}$$

д) удаление дизъюнкции (Клини):

$$\frac{\Gamma,\ F \vdash H;\ \Gamma,\ G \vdash H}{\Gamma,\ F \vee G \vdash H},, \tag{4.13}$$

е) сильное удаление отрицания (сильное $\neg$ уд):

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}, \tag{4.14}$$

ж) слабое удаление отрицания (слабое $\neg$ уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F;\ \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash G}, \tag{4.15}$$

Доказательство проведем для пунктов а) – е).

а) Это правило получается непосредственно на основании правила вывода MP.

е) Пусть $\Gamma \vdash \neg\neg F$. Ввиду теоремы 34 получим, что $\vdash \neg\neg F \to F$, на основании теоремы о дедукции означает выводимость формулы $\neg\neg F \to F$. Тогда на основании теоремы 32 заключаем, что выводима формула F. Остальные правила удаления логических связок доказываются аналогично.

Теорема доказана.

4.4 Примеры для самостоятельного решения

4.4.1 Является ли следующая формула аксиомой:

$(F \to ((G \to H) \to F)) \to ((F \to (G \to H)) \to (F \to F))$.

4.4.2 Укажите недостающую формулу W так, чтобы третья из данных формул получалась из первой и второй по правилу вывода MP:

$H \to F, W,\ (H \to (F \to (H \to F)))$.

4.4.3 Докажите, что следующая формула является теоремой формализованного исчисления высказываний, построив последовательности формул, являющиеся выводами данных формул из аксиом: $F \to G \ \to \ F \to F$.

4.4.4 Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез: $G,\ G \to H,\ F \vdash H$.

4.4.5 Используя теорему о дедукции, докажите, что следующая формула являются теоремой ИВ: $F \to \ \ \neg G \to \neg F \ \to G$.

4.4.6 Используя теорему о дедукции, докажите, что справедлива следующая выводимость: $F \to G, \neg F \to G \vdash G$.

4.4.7 Используя теорему о дедукции, докажите, что справедлива следующая выводимость: $F \to G \vdash \neg G \to \neg F$.

4.4.8 Используя теорему о дедукции, докажите, что следующая формула являются теоремой ИВ: $\neg G \to \neg F \ \to \ F \to G$.

4.4.9 Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез: $G,\ G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$.

4.4.10 Докажите, что следующая формула является теоремой формализованного исчисления высказываний, построив последовательности формул, являющиеся выводами данных формул из аксиом: $G \rightarrow\ \ F \rightarrow F\ \ $.

4.4.11 Укажите недостающую формулу W так, чтобы третья из данных формул получалась из первой и второй по правилу вывода MP: $F \rightarrow (H \rightarrow F),\quad F \rightarrow (H \rightarrow F)\ \ \rightarrow (H \rightarrow (F \rightarrow (H \rightarrow F))),\ W$.

4.4.12 Является ли следующая формула аксиомой:

$$(F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F)).$$

4.4.13 Докажите, что понятие выводимости обладает свойством: $F \vdash F$.

4.4.14 Правило резолюций в общем виде записывается:

а) $\dfrac{\neg F \vee G, F}{G}$;

б) $\dfrac{\neg F \vee G, G}{F}$;

в) $\dfrac{\neg X \vee B_1, X \vee D_1}{B_1 \vee D_1}$;

г) $\dfrac{\neg X \vee B_1, X}{B_1}$.

4.4.15 Среди приведенных дизъюнктов хорновскими являются:

а) $X \vee Y$;

б) X;

в) $\neg X$;

г) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$;

д) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$.

4.4.16 Исчисление предикатов (исчисление высказываний) является … теорией

а) разрешимой и непротиворечивой;

б) неразрешимой и непротиворечивой;

в) неразрешимой и противоречивой;

г) разрешимой и противоречивой.

4.4.17 Аксиомы исчисления предикатов являются … формулами

а) опровержимыми;

б) выполнимыми;

в) общезначимыми;

г) невыполнимыми.

4.4.18 Исчисление высказываний является … теорией

а) разрешимой и непротиворечивой;

б) неразрешимой и непротиворечивой;

в) неразрешимой и противоречивой;

г) разрешимой и противоречивой.

4.4.19 Исчисление разрешимо, если:

а) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, выводима в исчислении произвольная формула F или нет;

б) не все его формулы доказуемы;

в) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, общезначима его произвольная формула F или нет;

г) все его формулы доказуемы;

д) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, выполнима в исчислении произвольная формула F или нет;

е) все его формулы недоказуемы.

4.4.20 Исчисление непротиворечиво, если:

а) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, выводима в исчислении произвольная формула F или нет;

б) не все его формулы доказуемы;

в) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, общезначима его произвольная формула F или нет;

г) все его формулы доказуемы;

д) существует алгоритм, который за конечное число шагов позволяет установить, выполнима в исчислении произвольная формула F или нет;

е) все его формулы недоказуемы.

4.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

4.5.1 Понятие формального исчисления (формальной теории). Основные компоненты. Разрешимость и непротиворечивость.

4.5.2 Исчисление высказываний. Алфавит, формулы, аксиомы, правила подстановки и вывода.

4.5.3 Получение доказуемых формул (пример).

4.5.4 Производные правила вывода.

4.5.5 Понятие выводимости формулы из совокупности формул. Понятие вывода. Правила выводимости (перечисление).

4.5.6 Правила выводимости. Теорема дедукции (с доказательством), ее следствие.

4.5.7 Проблемы аксиоматического исчисления высказываний (полнота, разрешимость и непротиворечивость ИВ).

Заключение

Подготовка к изданию настоящего пособия осуществлялась с целью формирования у обучающихся представления о математической логике как о средстве формализации человеческого мышления в контексте решения проблемы представления знаний для решения задач прикладного характера методами искусственного интеллекта. В то же время язык математической логики лишь очень приближенно имитирует человеческое мышление, не отражая всех его тонкостей и граней. Ряд дисциплин, таких как «Введение в теорию нечетких множеств и систем», «Современные математические подходы в моделировании», «Конечные автоматы и логические сети», «Системный анализ и принятие решений», «Методы машинного обучения», «Распознавание образов», «Комбинаторные алгоритмы», «Формальные грамматики и методы трансляции», «Актуальные проблемы моделирования социальных и экономических систем», «Компьютерные технологии обработки больших массивов данных», обладают более мощным инструментарием для решения задачи представления знаний. Однако практически все перечисленные учебные дисциплины в той или иной степени использует аппарат математической логики. С этой точки зрения методы математической логики можно рассматривать как пропедевтический курс для изучения профессионально-ориентированных дисциплин. В этой связи резко возрастает роль дисциплины «Математическая логика» как фундамента для многих изучаемых позднее дисциплин.

В то же время для решения очень важной задачи классификации объектов, вполне пригодны логические операции конъюнкции, дизъюнкции и сумма Жегалкина [21, 22]. На рисунках 4 и 5 показана нейронная реализация перечисленных логических операций, используемая в машинном обучении.

Функции И, ИЛИ, НЕ от бинарных переменных x^1 и x^2:

$$x^1 \wedge x^2 = \left[x^1 + x^2 - \tfrac{3}{2} > 0\right];$$
$$x^1 \vee x^2 = \left[x^1 + x^2 - \tfrac{1}{2} > 0\right];$$
$$\neg x^1 = \left[-x^1 + \tfrac{1}{2} > 0\right];$$

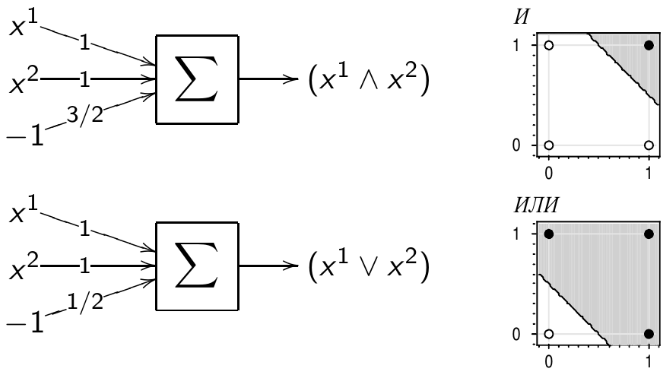

Рисунок 4 – Нейронная реализация логических функций

Функция $x^1 \oplus x^2 = [x^1 \neq x^2]$ не реализуема одним нейроном.
Два способа реализации:

- Добавлением нелинейного признака:
  $x^1 \oplus x^2 = \left[x^1 + x^2 - 2x^1x^2 - \tfrac{1}{2} > 0\right]$;
- Сетью (двухслойной суперпозицией) функций И, ИЛИ, НЕ:
  $x^1 \oplus x^2 = \left[(x^1 \vee x^2) - (x^1 \wedge x^2) - \tfrac{1}{2} > 0\right]$.

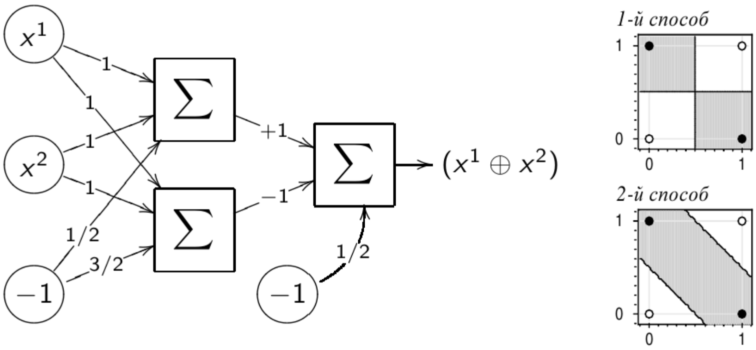

Рисунок 5 – Логическая функция XOR (исключающее ИЛИ)

Список использованных источников

1 Балюкович, Э. Л. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебно-практическое пособие / Балюкевич Э. Л., Ковалева Л. Ф. – Евразийский открытый институт, 2009. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93166.

2 Буллос, Дж. Вычислимость и логика: Пер. с англ. / Дж. Буллос, Р. Джеффри. – М., 1994.

3 Вейль, Г. Математика и логика: Пер. с англ. / Г. Вейль // Математика. Теоретическая физика. – М.,1984.

4 Гладкий, А.В. Математическая логика / А.В. Гладкий. – М., 1998.

5 Гончаров, С. С. Введение в логику и методологию науки / С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, К. Д. Самохвалов. – М., 1994.

6 Ершов, Ю. Л. Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании: Монография / Ершов Ю. Л., Целищев В. В., Самохвалов К. Ф. - Новосибирск: СО РАН, 2012. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/925016.

7 Ершов, Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 6-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Режим доступа https://znanium.com/catalog/product/395379.

8 Зыков, А. Г. Математическая логика: учебное пособие / А. Г. Зыков, В. И. Поляков, В. И. Скорубский. — Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2013. —Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/70895.

9 Игошин, В. И. Контактные схемы – элементы ЭВМ / В. И. Игошин. – Саратов, 1991.

10 Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. – 3-е изд., стер. – М.: издательский центр «Академия», 2008.

11 Игошин, В. И. Математическая логика: учебное пособие / В. И. Игошин. – Москва: ИНФРА-М, 2012. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=242738.

12 Игошин, В. И. Математическая логика: учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1043090.

13 Игошин, В. И. Математическая логика: учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва: ИНФРА-М, 2019. —Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/987006.

14 Игошин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М.: издательский центр «Академия», 2006.

15 Игошин, В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие / В. И. Игошин. – Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2019. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/986940.

16 Кравченко, В. Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. – Москва: Физматлит, 2006. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/544654.

17 Кусраев, А. Г. Булевы функции и булевозначные модели // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №9. – С.116-122.

18 Лихтарников, Л. М. Математическая логика: Курс лекций. Задачник-практикум и решения / Л. М. Литарников, Т. Г. Сукачева. – СПб., 1999.

19 Михайлов, А. В. Лекции по основам математической логики. Формальные системы нулевого порядка / А. В. Михайлов, Н. И. Рыжов, М. В. Швецкий. – СПб., 1998.

20 Михайлов, А. В. Упражнения по основам математической логики. Формальные системы нулевого порядка / А. В. Михайлов, Н. И. Рыжов, М. В. Швецкий. – СПб., 1998.

21 Непейвода, Н. Н. Прикладная логика / Н. Н. Непейвода. – Ижевск, 1997.

22 Осипов, Г. С. Методы искусственного интеллекта: монография / Г. С. Осипов. – Москва: Физматлит, 2011. – режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/544787.

23 Отрыванкина, Т. М Опорные конспекты к курсу лекций по математической логике: методические указания / Т. М. Отрыванкина. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2009.

24 Плоткин, Б. И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б. И. Плоткин. – М., 1991.

25 Пруцков, А. В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник / Пруцков А. В., Волкова Л. Л. – Москва: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/956763.

26 Рыжова, Н. И. Упражнения по основам формальной символической логики / Н. И. Рыжова, М. В. Швецкий. – СПб., 1998.

27 Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – Новосибирск: НГТУ, 2012. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=135676.

28 Титов, К. В. Компьютерная математика: Учебное пособие / К. В. Титов – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/926480.

29 Успенский, В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Б. Плиско. – М., 1991.

30 Успенский, В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. – 2-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/129565.