Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

ФИНАНСОВЫЕ ОПЕРАЦИИ ПО СХЕМАМ ПРОСТЫХ, СЛОЖНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Методические указания

Составитель О.С. Чудинова

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2021

УДК 336.1(076.5)
ББК 65.261я7
Ф59

Рецензент – доцент, кандидат экономических наук О.Н. Яркова

Ф59 **Финансовые операции по схемам простых, сложных и непрерывных процентных ставок**: методические указания / составитель О.С. Чудинова; Оренбургский гос. ун-т.– Оренбург: ОГУ, 2021. – 36 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, теоретические вопросы и задания, примеры решения задач, задачи для самостоятельного выполнения на тему «Финансовые операции по схемам простых, сложных и непрерывных процентных ставок» по дисциплине «Основы финансовой и страховой математики».

Методические указания предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика очной формы обучения.

УДК 336.1(076.5)
ББК 65.261я7

Содержание

Введение

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, теоретические вопросы и задания, примеры решения задач, задачи для самостоятельного выполнения по темам «Расчеты с использованием простой процентной ставки», «Расчеты с использованием сложной процентной ставки» и «Расчеты с использованием непрерывной процентной ставки. Эквивалентность процентных ставок». Предназначены для подготовки и проведения практических занятий по дисциплине «Основы финансовой и страховой математики».

Выполнение заданий на темы «Расчеты с использованием простой процентной ставки», «Расчеты с использованием сложной процентной ставки» и «Расчеты с использованием непрерывной процентной ставки. Эквивалентность процентных ставок» по дисциплине «Основы финансовой и страховой математики», относящейся к обязательным дисциплинам вариативной части блока Д «Дисциплины (модули)», способствует формированию у обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика профессиональных компетенций ПК*-2 (способен осуществлять математическое моделирование для анализа рисков и выработки решений в области экономики финансов и страхования) и ПК*-5 (способен использовать знания современных языков программирования, стандартных пакетов прикладных программ, информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", инструментальных средств анализа данных при решении практических задач управления информацией).

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Основные понятия, используемые в финансовых расчетах

Любой финансовой операции в течение заданного срока соответствуют две основные денежные суммы: первоначальная и наращенная. Первоначальная сумма (P) – это денежная сумма, отнесенная на начало финансовой операции. Наращенная сумма (S) – это денежная сумма, отнесенная на конец финансовой операции [3].

Участники финансовой сделки выступают либо в роли кредитора, либо в роли заемщика. Кредитором называется лицо, дающее деньги в долг, а заемщиком – лицо, берущее деньги в долг.

Для определения эффективности финансовой сделки используют два показателя: проценты и процентная ставка. Проценты – это абсолютная величина дохода, полученная от предоставления денег в долг. Процентная ставка – это относительная величина дохода за определенный отрезок времени, определяемая как отношение процентов к сумме долга [4].

Интервал времени, к которому приурочена процентная ставка, называется периодом начисления. По периоду начисления проценты делятся на дискретные и непрерывные. Дискретные проценты начисляются за фиксированные моменты времени. Непрерывные проценты начисляются непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени.

Интервал времени, в течение которого начисляются проценты, называется сроком финансовой операции. Проценты могут начисляться как в конце периода начисления, так и в его начале. В первом случае говорят о декурсивном способе начисления, во втором случае – об антисипативном (предварительном). Декурсивные проценты называются обычными. Процентная ставка, применяемая при декурсивном способе, называется ставкой наращения (i) и определяется по формуле:

$$i = \frac{S - P}{P}. \quad (1)$$

При антисипативном способе проценты начисляются в начале каждого периода начисления и проценты определяются исходя из наращенной суммы. Процентная ставка за период, которая при этом применяется, называется учетной (d) и определяется по формуле:

$$d = \frac{S - P}{S}. \quad (2)$$

В зависимости от базы начисления различают простые процентные ставки (база для начисления процентов для каждого периода постоянная) и сложные процентные ставки (база начисления процентов в каждом периоде является переменной величиной, равной наращенной сумме, полученной в предыдущем периоде). Процентные ставки могут быть фиксированными (размер ставки не меняется в течение всего времени финансовой операции) и переменные или плавающие.

В зависимости от того, какая денежная сумма задана и какую требуется найти (первоначальная или наращенная), выделяют два метода финансовых расчетов: наращение и дисконтирование [3, 4]. Наращение – это определение итоговой денежной суммы по первоначальной. Под наращенной суммой S понимается первоначальная сумма с начисленными к концу срока процентами. Дисконтирование – это определение текущей стоимости денег по итоговой. Величину P, найденную дисконтированием, называют современной или текущей стоимостью суммы S. Величина дохода такой операции определяется по формуле $D = S - P$ и называется дисконтом или скидкой с суммы S.

1.2 Финансовые операции по схеме простых процентных ставок

Простые процентные ставки применяются в краткосрочных финансовых операциях или в сделках, договор по которым предусматривает периодическую выплату процентов.

Введем следующие обозначения:

P – первоначальная сумма (ден. ед.);

i – годовая простая процентная ставка (десятичная дробь);

n – срок операции (количество лет);

S – наращенная сумма (ден. ед.).

Тогда наращенная за n лет сумма определяется по формуле, называемой формулой простых процентов [1-4]:

$$S = P(1 + n \cdot i). \tag{3}$$

Если время выражено в днях t, то наращенная сумма рассчитывается по формуле:

$$S = P(1 + \frac{t}{K} \cdot i), \tag{4}$$

где K – временная база (расчетное число дней в году).

Реинвестирование по простым процентным ставкам представляет собой процесс наращения, в котором в конце первого промежутка времени начисленные проценты вместе с исходной суммой вновь инвестируются как новый капитал на следующий промежуток времени, в конце которого вновь начисляются проценты. Наращенная сумма за весь срок n рассчитывается по формуле:

$$S = P\prod_{s=1}^{k}(1 + n_s \cdot i_s), \tag{5}$$

где k – количество периодов начисления;

i_s – простая процентная ставка в s-ом периоде;

n_s – продолжительность s-го периода реинвестирования, $s = \overline{1,k}$, $\sum_{s=1}^{k} n_s = n$.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования: математическое дисконтирование (по ставке наращения i) и банковский учет (по учетной ставке d) [4]. Согласно математическому дисконтированию из формулы (3) находят P:

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot i}. \tag{6}$$

Банковский (коммерческий) учет используют при операциях с векселями и другими платежными обязательствами. Если владелец векселя обращается в банк с просьбой погасить вексель досрочно, то банк может согласиться приобрести его, но по цене ниже суммы, указанной в векселе, т.е. учитывает его с дисконтом. Дисконтированная величина векселя с использованием простой годовой учетной ставки d определяется по формуле банковского учета [1-4]:

$$P = S \cdot (1 - n \cdot d), \tag{7}$$

где n – срок от момента учета до даты погашения векселя (лет).

Если срок задан в днях t, то современная (погасительная) стоимость векселя P рассчитывается по формуле:

$$P = S \cdot (1 - \frac{t}{K} \cdot d), \tag{8}$$

где t, как правило, рассчитывается точно, а в качестве базы K берут 360 дней.

Погашение краткосрочных обязательств может происходить с помощью частичных промежуточных платежей. Для решения этой задачи применяются два метода: актуарный метод и правило торговца [3, 4].

Актуарный методы применяется в финансовых операциях сроком более года. Согласно этому методу проценты начисляются на фактическую сумму долга. При наступлении частичного платежа в первую очередь погашаются проценты, начисленные на дату внесения этого платежа. Если платеж превышает сумму начисленных процентов, то погашаются проценты и часть основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период. Если частичный платеж меньше начисленных процентов, то в сумме долга ничего не меняется, а поступление суммируется со следующим платежом.

Согласно правилу торговца сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами. Последний платеж равен разности этих сумм. В случае, когда срок ссуды больше года, описанные расчеты осуществляются для годового периода задолженности, остаток долга погашается в следующем году.

1.3 Финансовые операции по схеме сложных процентных ставок

При наращении с использование сложной процентной ставки i база для начисления процентов постоянно увеличивается за счет присоединения суммы начисленных процентов к базовой сумме предыдущего периода. Присоединение начисленных процентов называется капитализацией процентов. В этом случае наращенная за n лет сумма определяется по формуле, называемой формулой сложных процентов [1-4]:

$$S = P(1+i)^n . \tag{9}$$

В финансовых расчетах по схеме сложных процентных ставок, как правило, используется схема 365/365.

Если срок финансовой операции представляет собой дробное количество лет, то начисление процентов может осуществляться двумя способами:

1) общий (точный метод): для расчета наращенной суммы используется формула (9);

2) смешанный метод: за целое количество лет начисление процентов производится по формуле сложных процентов, а за дробную часть срока – по формуле простых процентов:

$$S = P(1+i)^{n_a} \cdot (1+n_b \cdot i), \qquad (10)$$

где n_a - целое число лет;

n_b - дробная часть года, $n = n_a + n_b$.

Начисление сложных процентов может происходить несколько раз в году. При этом в контрактах используется не ставка за период, а годовая процентная ставка, называемая номинальной, а также указывается период начисления. Если годовая номинальная ставка равна j, а количество начислений процентов в год – m, то начисление процентов за период осуществляется по ставке $\frac{j}{m}$, а количество периодов начисления за n лет составляет $m \cdot n$. Тогда формула наращения по номинальной процентной ставке имеет вид [1-4]:

$$S = P \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}. \qquad (11)$$

С помощью номинальной процентной ставки невозможно оценить эффективность финансовой операции, т.к. ставка наращения за период зависит от количества начислений процентов в год. Для сопоставления различных финансовых операций и оценки реальной доходности операции используется эффективная годовая процентная ставка $i_{эф}$. Чем выше эффективная ставка финансовой операции, тем, при прочих равных условиях, она выгоднее для кредитора. Для определения реального относительного дохода в год при *m*-разовом начислении процентов необходимо приравнять множители наращения при ежегодном начислении по сложной процентной ставке $i_{эф}$ и при *m*-разовом начислении процентов по номинальной ставке *j* [1-2].

Формула математического дисконтирования по сложной процентной ставке получается путем нахождения первоначальной суммы *P* из формулы (9):

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot \nu^{(n)}, \qquad (12)$$

где $\nu^{(n)} = \frac{1}{(1+i)^n}$ – дисконтный множитель.

Из формулы (11) можно получить формулу математического дисконтирования по номинальной процентной ставке *j*:

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}} = S \cdot \nu^{(m\cdot n)}, \qquad (13)$$

где $\nu^{(m\cdot n)} = \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}}$ – дисконтный множитель.

Погасительная стоимость векселя *P* при использовании сложной годовой учетной ставки *d* определяется по формуле:

$$P = S \cdot (1-d)^n, \qquad (14)$$

где *S* – номинал векселя.

Если дисконтирование осуществляется m раз в год, то используется номинальная учетная ставка f и процесс дисконтирования описывается формулой:

$$P = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}. \qquad (15)$$

Сложная годовая учетная ставка, эквивалентная номинальной учетной ставке при дисконтировании m раз в году, называется эффективной учетной ставкой $d_{эф}$. Для её определения необходимо приравнять соответствующие дисконтные множители при ежегодном начислении по сложной учетной ставке $d'_{эф}$ и при m-разовом дисконтировании по номинальной учетной ставке f.

1.4 Наращение и дисконтирование с использованием непрерывных процентных ставок

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки – силу роста δ. Она характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени [4, 5]. Сила роста может быть постоянной во времени и переменной (зависеть от времени t).

При постоянной силе роста из формулы (11) при $m \to \infty$, используя второй замечательный предел, получаем:

$$S = \lim_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = P \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right)^{jn} = P \cdot e^{jn} = P \cdot e^{\delta n}. \qquad (16)$$

По формуле (16) можно определить современную стоимость P: $P = S \cdot e^{-\delta n}$.

Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону в виде непрерывной функции $\delta_t = f(t)$. Согласно идеологии начисления сложных процентов, проценты за малый промежуток времени Δt пропорциональны длине этого промежутка и денежной сумме на его начало с коэффициентом пропорциональности δ_t: $S(t+\Delta t)-S(t)=\delta_t S(t)\Delta t$ [2]. При $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение $\frac{dS(t)}{dt}=\delta_t S(t)$ или $\frac{dS(t)}{S(t)}=\delta_t dt$ с начальным условием $S(0)=P$. Интегрируя обе части последнего уравнения получаем: $\int\limits_0^n \frac{dS(t)}{S(t)}=\int\limits_0^n \delta_t dt$.

Решая это уравнение приходим к тому, наращенная сумма и современная стоимость при непрерывном начислении процентов определяются по формулам [2, 4]:

$$S=P\cdot e^{\int\limits_0^n \delta_t dt}; \quad P=S\cdot e^{-\int\limits_0^n \delta_t dt}. \tag{17}$$

Таким образом, в финансовых операциях используются различные процентные ставки, при этом одну из них можно заменить на другую, учитывая принцип эквивалентности. Процентные ставки называются эквивалентными, если начисление процентов с их использованием приводит к одинаковым финансовым результатам. Эквивалентные преобразования проводятся на основе равенства множителей наращения.

2 Теоретические вопросы и задания для подготовки к практическим занятиям

2.1 Вопросы и задания на тему «Расчеты с использованием простой процентной ставки»

1) Дайте определение первоначальной и наращенной сумм
2) Дайте определение процентов и процентной ставки
3) Дайте определение периода начисления процентов и срока финансовой операции
4) Дайте определение обычным процентам и учетной ставке
5) Приведите классификацию процентных ставок
6) Дайте определение наращению и дисконтированию
7) Выведите формулу определения наращенной суммы с использованием простой процентной ставки
8) Дайте определение реинвестированию по простым процентным ставкам
9) Выведите формулы для определения срока ссуды при использовании простой ставки наращения и простой учетной ставки (рассмотреть три случая: срок ссуды измеряется в годах, в месяцах, в днях)
10) Постройке график зависимости наращенной суммы от срока операции при использовании простой процентной ставки
11) Постройте и проанализируйте графики зависимости современной стоимости от срока при математическом дисконтировании и банковском учете
12) Выведите формулы для определения простой процентной ставки наращения и простой учетной ставки (рассмотреть три случая: срок ссуды измеряется в годах, в месяцах, в днях)
13) Охарактеризуйте, в чем суть актуарного метода погашения задолженности частями
14) Охарактеризуйте, в чем суть правила торговца
15) Какой метод погашения задолженности частями выгоднее: актуарный или правило торговца (рассмотреть с позиции банка и с позиции заемщика)

2.2 Вопросы и задания на тему «Расчеты с использованием сложной процентной ставки»

1) Выведите формулу определения наращенной суммы с использованием сложной процентной ставки

2) Постройке график зависимости наращенной суммы от срока операции при использовании сложной процентной ставки. Сравните результаты наращения по простой и сложной процентным ставкам

3) Сравните наращенные суммы, получаемые по общему и смешанному методам начисления сложных процентов

4) Выведите формулы для определения срока, необходимого для удвоения первоначальной суммы с использование простой и сложной процентных ставок

5) Выведите формулу наращения по номинальной процентной ставке

6) Как количество начисления процентов в год влияет на наращенную сумму?

7) Выведите выражения, связывающие эффективную и номинальную процентные ставки

8) Выведите формулу для расчета эффективной процентной ставки, зная первоначальную и наращенную суммы вклада

9) Выведите формулу математического дисконтирования по сложной процентной ставке

10) Выведите формулу математического дисконтирования по номинальной процентной ставке

11) Выведите формулу расчета погасительной стоимости векселя при использовании сложной учетной ставки

12) Постройте графики зависимости множителей дисконтирования по простой и сложной учетным ставкам. Какую ставку выгоднее применять банку при учете векселей?

13) Выведите формулу дисконтирования по номинальной учетной ставке

14) Как количество дисконтирований в год влияет на погасительную стоимость обязательства?

15) Выведите выражения, связывающие эффективную и номинальную учетные ставки

16) Выведите формулы для расчета срока ссуды и процентной ставки при наращении по схеме сложных процентов

17) Выведите формулы для расчета срока ссуды и номинальной процентной ставки при наращении по схеме сложных процентов и m-разовом начислении процентов

18) Выведите формулы для расчета срока ссуды и учетной ставки при дисконтировании по схеме сложных процентов

19) Выведите формулы для расчета срока ссуды и номинальной учетной ставки при дисконтировании по схеме сложных процентов m раз в год

2.3 Вопросы и задания на тему «Расчеты с использованием непрерывной процентной ставки. Эквивалентность процентных ставок»

1) Выведите формулу определения наращенной суммы с использованием непрерывной процентной ставки (силы роста)

2) Выведите формулу определения современной стоимости с использованием непрерывной процентной ставки (силы роста)

3) Выведите формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости для случая $\delta_t = \delta + at$

4) Выведите формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости для случая $\delta_t = \delta \cdot a^t$

5) Выведите формулы для расчета срока ссуды и силы роста

6) Запишите уравнение эквивалентности простой процентной ставки наращения и простой учетной ставки (срок ссуды измеряется в годах), выведите формулы для их нахождения

7) Запишите уравнение эквивалентности простой процентной ставки наращения и простой учетной ставки (срок ссуды измеряется в днях при одинаковой временной базе), выведите формулы для их нахождения

8) Запишите уравнение эквивалентности простой процентной ставки наращения и простой учетной ставки (срок ссуды измеряется в днях при разной временной базе), выведите формулы для их нахождения

9) Запишите уравнение эквивалентности простой и сложной процентных ставок, выведите формулы для их нахождения

10) Запишите уравнение эквивалентности простой и номинальной процентных ставок, выведите формулы для их нахождения

11) Запишите уравнение эквивалентности простой учетной ставки и сложной ставки наращения, выведите формулы для их нахождения

12) Запишите уравнение эквивалентности простой учетной ставки и номинальной ставки, выведите формулы для их нахождения

13) Запишите уравнение эквивалентности сложной и номинальной процентных ставок, выведите формулы для их нахождения

14) Запишите уравнение эквивалентности сложной процентной ставки наращения и сложной учетной ставки, выведите формулы для их нахождения

15) Запишите уравнение эквивалентности сложной учетной ставки и номинальной ставки наращения, выведите формулы для их нахождения

16) Запишите уравнение эквивалентности силы роста и сложной процентной ставки, выведите формулы для их нахождения

17) Запишите уравнение эквивалентности силы роста и номинальной процентной ставки, выведите формулы для их нахождения

18) Запишите уравнение эквивалентности силы роста и сложной учетной ставки, выведите формулы для их нахождения

3 Примеры решения задач по видам процентных ставок

3.1 Примеры решения задач на расчеты с использованием простой процентной ставки

1) Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана 20 января 2021 года под 18% годовых. Какую сумму необходимо заплатить 5 октября 2021 года при использовании «английской практики», «французской практики» и «германской практики». Проверить полученные результаты с помощью встроенных функций Excel.

Решение

Дано: первоначальная суммы P=1000 тыс. руб., годовая простая процентная ставка i=0,18.

Согласно «английской практике» (метод 365/365) число дней ссуды рассчитывается точно по календарю, а продолжительность года равна 365 или 366 дней. Порядковый номер 20 января в 2021 года №20, порядковый номер 5 октября в 2021 году №278. Тогда срок операции t=278-20=258 дней, временная база K=365 дней (2021 год не високосный) и наращенная сумма к концу срока операции по формуле (4) составит: $S_{365/365} = 1000 \cdot (1 + \frac{258}{365} \cdot 0{,}18) = 1127{,}233$ (тыс. руб.).

Согласно «французской практике» (метод 365/360) число дней ссуды рассчитывается точно по календарю, а продолжительность года равна 360 дней (обыкновенные проценты). Тогда наращенная сумма к концу срока операции составит: $S_{365/360} = 1000 \cdot (1 + \frac{258}{360} \cdot 0{,}18) = 1129$ (тыс. руб.).

Согласно «германской практике» (метод 360/360) число дней ссуды рассчитывается приближенно, исходя из 30 дней в году, а продолжительность года равна 360 дней. Тогда срок операции $t = 10 + 30 \cdot 8 + 5 = 255$ дней, наращенная сумма к концу срока операции составит: $S_{360/360} = 1000 \cdot (1 + \frac{255}{360} \cdot 0{,}18) = 1127{,}500$ (тыс. руб.).

Решение задачи с помощью встроенных функций пакета Excel представлено на рисунках 1-2.

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2	Дата начала	44216			
3	Дата окончания	44474			
4	Первоначальная сумма, тыс.руб.	1000			
5	Процентная ставка	0,18			
6					
7	**Название метода**	**Обозначение**	**Значение параметра "Базис"**	**Срок операции, лет**	**Наращенная сумма, тыс.руб.**
8	Английская практика	365/365	1	=ДОЛЯГОДА(B2;B3;C8)	=БС(B5*D8;1;0;-B4)
9	Французская практика	365/360	2	=ДОЛЯГОДА(B2;B3;C9)	=БС(B5*D9;1;0;-B4)
10	Германская практика	360/360	4	=ДОЛЯГОДА(B2;B3;C10)	=БС(B5*D10;1;0;-B4)

Рисунок 1 – Решение задачи на простые проценты в режиме вывода формул

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2	Дата начала	20.01.2021			
3	Дата окончания	05.10.2021			
4	Первоначальная сумма, тыс.руб.	1000			
5	Процентная ставка	18%			
6					
7	**Название метода**	**Обозначение**	**Значение параметра "Базис"**	**Срок операции, лет**	**Наращенная сумма, тыс.руб.**
8	Английская практика	365/365	1	0,706849315	1 127,23р.
9	Французская практика	365/360	2	0,716666667	1 129,00р.
10	Германская практика	360/360	4	0,708333333	1 127,50р.

Рисунок 2 – Решение задачи на простые проценты в режиме вывода результатов

2) Заемщик получил ссуду в размере 5 млн. руб. на 6 лет. Договор предусматривает следующий порядок начисления простых процентов: первые три года – по ставке 12%, следующие два года – по ставке 13%, последний год – по ставке 14%. Чему равна сумма, подлежащая возврату через 6 лет?

Решение

Дано: первоначальная суммы P=5000 тыс. руб.; первые три года $(n_1 = 3)$ годовая простая процентная ставка $i_1 = 0{,}12$, следующие два года $(n_2 = 2)$ годовая простая процентная ставка $i_2 = 0{,}13$, последний год $(n_3 = 1)$ годовая простая процентная ставка $i_3 = 0{,}14$. Так как процентная ставка дискретно меняется на протяжении срока операции, то наращенная сумма будет рассчитываться по формуле:

$$S = P \cdot (1 + \sum_{s=1}^{3} n_s \cdot i_s) = 5000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}13 + 1 \cdot 0{,}14) = 8800 \text{ (тыс. руб.).}$$

3) Банк принимает вклады населения сроком на 1 год под 5% годовых и на 3 месяца под 4,5% годовых. Какой вариант выгоднее вкладчику: а) разместить 250 тыс. руб. на годовой депозит; б) разместить 250 тыс. на трехмесячный депозит с реинвестированием каждые 3 месяца по ставке 4,5%?

<u>Решение</u>

а) Дано: первоначальная сумма P=250 тыс. руб.; годовая простая процентная ставка i=0,05; срок вклада n=1. Наращенная сумма через год составит:

$$S = 250 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}05) = 262{,}5 \text{ (тыс. руб.).}$$

б) Дано: первоначальная сумма P=250 тыс. руб.; в течение года трехмесячный депозит будут открываться 4 раза (k=4) по ставке 0,045, потому $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ лет, процентная ставка $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0{,}045$. Тогда наращенная сумма через год по формуле (5) составит:

$$S = 250 \cdot (1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}045)^4 = 261{,}441 \text{ (тыс. руб.).}$$

Таким образом, выгоднее положить деньги на годовой депозит.

4) Вкладчик 10 мая открыл счет в банке на сумму 100 тыс. руб. под годовую простую процентную ставку 5%. Далее 5 июля он добавил на счет 50 тыс. руб., 1 сентября снял со счета 75 тыс. руб., а 23 ноября закрыл счет. Какую сумму получил клиент при закрытии счета при использовании банком схемы 365/360?

<u>Решение</u>

При изменении суммы депозита во времени общая сумма процентов, начисленная за весь срок, определяется путем суммирования процентов, начисленных на каждую из постоянных на некотором промежутке времени сумм. Решение задачи оформим в виде таблицы.

Период		Количество дней	Сумма депозита, тыс. руб.	Начисленные за период проценты, тыс. руб.
Дата начала	Дата конца			
10.05	05.07	186-130=56	100	$100\cdot\frac{56}{360}\cdot 0{,}05=0{,}778$
05.07	01.09	244-186=58	150	$150\cdot\frac{58}{360}\cdot 0{,}05=1{,}208$
01.09	23.11	327-244=83	75	$75\cdot\frac{83}{360}\cdot 0{,}05=0{,}865$

Таким образом, сумма процентов за рассматриваемый период составила $I=0{,}778+1{,}208+0{,}865=2{,}851$ (тыс. руб.), наращенная сумма равна $S=75+2{,}851=77{,}851$ (тыс. руб.).

5) Определить, какую сумму инвестору необходимо положить сегодня на депозит под годовую простую процентную ставку 7%, чтобы через 240 дней накопить 550 тыс. руб.?

Решение

Дано: наращенная сумма S=550 тыс. руб., годовая простая процентная ставка i=0,07, срок наращения t=240 дней. По формуле математического дисконтирования (6), используя обыкновенные проценты, получаем современную стоимость вклада:

$$P=\frac{550}{1+\frac{240}{360}\cdot 0{,}07}=525{,}478 \text{ (тыс.руб.).}$$

6) Вексель номиналом 300 тыс. руб. и сроком погашения через 3 месяца предъявлен в банк для учета. Банк согласился учесть вексель по простой учетной ставке 18% годовых. Какую сумму получил предъявитель векселя? Чему равен доход банка?

Решение

Дано: стоимость векселя S=300 тыс. руб.; простая учетная ставка d=0,18; срок от момента учета до даты погашения векселя $n=\frac{3}{12}$ лет. Тогда современная (погасительная) стоимость векселя по формуле (8) составляет:

$$P = 300 \cdot \left(1 - \frac{3}{12} \cdot 0{,}18\right) = 286{,}5 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Доход банка составляет: $D = 300 - 286{,}5 = 13{,}5$ (тыс. руб.).

7) Долговое обязательство на сумму 200 тыс. руб. предусматривает погашение через 90 дней по простой процентной ставке 10% годовых. За 30 дней до срока погашения вексель учли в банке по простой учетной ставке 11% годовых. Какую сумму получил векселедержатель?

Решение

В рассматриваемой задаче на долговое обязательство предусматривается начисление процентов, поэтому сначала необходимо найти стоимость векселя на момент его погашения. Используя формулу наращения, получаем:

$$S = 200 \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}1\right) = 205 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Сумма, получаемая при учете векселя, составляет:

$$P = 205 \cdot \left(1 - \frac{30}{360} \cdot 0{,}11\right) = 203{,}121 \text{ (тыс. руб.)}.$$

3.2 Примеры решения задач на расчеты с использованием сложной процентной ставки

1) Клиент получил в банке ссуду в размере 2 млн. руб. на два года: с 1 мая 2019 года по 1 мая 2021 года. Применяя схему 365/365, распределите начисленные проценты по ставке 16% по календарным годам.

Решение

Дано: первоначальная сумма P=2 млн. руб., сложная процентная ставка i=0,16, n=2 года.

а) Найдем проценты, начисленные за 2019 год (период с 1 мая до 31 декабря 2019 года включает $t_1 = 365 - 121 = 244$ дня, $n_1 = \frac{t_1}{365}$):

$$I_1 = S_1 - P = P(1+i)^{n_1} - P = P((1+i)^{n_1} - 1) = 2 \cdot \left((1+0{,}16)^{\frac{244}{365}} - 1 \right) = 0{,}2086 \text{ (млн. руб.)}.$$

б) Найдем проценты, начисленные за 2020 год ($n_2 = 1$):

$$I_2 = S_2 - S_1 = S_1(1+i)^{n_2} - S_1 = S_1((1+i)^{n_2} - 1) = P(1+i)^{n_1}((1+i)^{n_2} - 1) =$$

$$= 2 \cdot (1+0{,}16)^{\frac{244}{365}} \cdot ((1+0{,}16) - 1) = 0{,}3534(\textit{млн.руб.}).$$

в) Найдем проценты, начисленные за 2021 год (период с 1 января до 1 мая 2021 года включает $t_3 = 121$ день):

$$I_3 = S_3 - S_2 = S_2(1+i)^{n_3} - S_2 = S_2((1+i)^{n_3} - 1) = P(1+i)^{n_1} \cdot (1+i)^{n_2} \cdot ((1+i)^{n_3} - 1) =$$

$$= 2 \cdot (1+0{,}16)^{\frac{244}{365}} \cdot (1+0{,}16) \cdot \left((1+0{,}16)^{\frac{121}{365}} - 1 \right) = 0{,}1292(\textit{млн.руб.}).$$

Проценты, начисленные за весь срок, составляют:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}2086 + 0{,}3534 + 0{,}1292 = 0{,}6912 \text{ (млн. руб.)}.$$

Такой же результат можно получить по формуле:

$$I = P((1+i)^n - 1) = 2 \cdot \left((1+0{,}16)^2 - 1 \right) = 0{,}6912 \text{ (млн. руб.)}.$$

2) Ссуда в размере 450 тыс. руб. выдана сроком на 5 лет под сложную процентную савку на следующих условиях: для первого и второго года ставка составит 12% годовых, на следующие три года предусмотрена маржа в размере 2 процентных пунктов. Найти сумму долга на конец срока договора.

Решение

Дано: первоначальная сумма P=450 тыс. руб.; первые два года $(n_1 = 2)$ годовая простая процентная ставка $i_1 = 0{,}12$, следующие три года $(n_2 = 3)$ годовая простая процентная ставка $i_2 = 0{,}14$. Так как процентная ставка дискретно меняется на протяжении срока операции, то наращенная сумма будет рассчитываться по формуле:

$$S = P \cdot \prod_{s=1}^{2} (1+i_s)^{n_s} = 450 \cdot (1+0{,}12)^2 \cdot (1+0{,}14)^3 = 836{,}302 \text{ (тыс. руб.)}.$$

3) Кредит в размере 250 тыс. руб. выдан на 2 года и 9 месяцев под сложную процентную ставку 9,5% годовых. Определите сумму возврата займа общим (точным) и смешанным методами. Какой вариант выгоднее банку?

Решение

Дано: первоначальная сумма P=250 тыс. руб., годовая сложная процентная ставка i=0,095.

а) общий (точный) метод: n=2,75 лет. Наращенная сумма составит:

$$S = P \cdot (1+i)^n = 250 \cdot (1+0{,}095)^{2{,}75} = 320{,}870 \text{ (тыс. руб.)}.$$

б) смешанный метод: $n = n_a + n_b$, где $n_a = 2$, $n_b = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Наращенная сумма составит:

$$S = P \cdot (1+i)^{n_a} \cdot (1 + n_b \cdot i) = 250 \cdot (1+0{,}095)^2 \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot 0{,}095) = 321{,}114 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Так как по второму методу наращенная сумма больше, то банку выгоднее использовать смешанный метод.

4) За сколько лет долг удвоится, если процентная ставка равна 8% годовых. Рассмотреть два случая: используется простая процентная ставка и сложная.

Решение

а) для определения срока, необходимого для удвоения первоначальной суммы P, при использовании простой процентной ставки i=0,08 необходимо решить уравнение: $2P = P(1 + n \cdot i)$. Получаем: $n = \frac{1}{i} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$ (лет).

б) для определения срока, необходимого для удвоения первоначальной суммы P, при использовании сложной процентной ставки i=0,08 необходимо решить уравнение: $2P = P(1+i)^n$. Получаем: $n = \frac{\ln n}{\ln(1+i)} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}08} = 9{,}006$ (лет).

5) Вклад в размере 500 тыс. руб. открыт в банке на 3 года под сложную процентную ставку 10% годовых. Определить наращенную суму при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов. Какой

вариант выгоднее вкладчику? Проверить полученные результаты с помощью встроенных функций Excel.

Решение

а) при ежегодном начислении процентов наращенная сумма по формуле (9) составит: $S = P \cdot (1+i)^n = 500 \cdot (1+0{,}1)^3 = 665{,}5$ (тыс. руб.).

б) при полугодовом начислении процентов (m=2) наращенная сумма по формуле (11) составит: $S = P \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = 500 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 3} = 670{,}048$ (тыс. руб.).

в) при ежеквартальном начислении процентов (m=4) наращенная сумма составит: $S = 500 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 672{,}444$ (тыс. руб.).

г) при ежемесячном начислении процентов (m=12) наращенная сумма составит: $S = 500 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 674{,}091$ (тыс. руб.).

Таким образом, для вкладчика наиболее выгодным является вариант с ежемесячным начислением процентов. Решение задачи с помощью встроенных функций пакета Excel представлено на рисунках 3-4.

	A	B
1	**Исходные данные**	
2	Первоначальная сумма, P, тыс.руб.	500
3	Срок, n, лет	3
4	Процентная ставка, i	0,1
5		
6	Количество начислений процентов в году, m	Наращенная сумма, S
7	1	=БС(B4;B3;0;-B2)
8	2	=БС(B4/A8;A8*B3;0;-B2)
9	4	=БС(B4/A9;A9*B3;0;-B2)
10	12	=БС(B4/A10;A10*B3;0;-B2)

Рисунок 3 – Решение задачи на сложные проценты в режиме вывода формул

	A	B
1	**Исходные данные**	
2	Первоначальная сумма, P, тыс.руб.	500
3	Срок, n, лет	3
4	Процентная ставка, i	10%
5		
6	Количество начислений процентов в году, m	Наращенная сумма, S
7	1	665,50р.
8	2	670,05р.
9	4	672,44р.
10	12	674,09р.

Рисунок 4 – Решение задачи на сложные проценты в режиме вывода результатов

6) Банк предлагает населению кредиты на следующих условиях: а) под 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов; б) под 26% годовых с полугодовым начислением процентов; в) под 20% годовых с ежемесячным начислением процентов. Какой вариант кредитования наиболее выгоден для банка?

Решение

Для сравнения различных условий кредитования необходимо рассчитать для каждого случая эффективную процентную ставку, характеризующую реальный относительный доход в год:

$$P(1+i_{эф})^n = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n};$$

$$(1+i_{эф})^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n};$$

$$1+i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m};$$

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1.$$

Эффективная процентная ставка для различных условий кредитования составляет:

а) j=0,24; m=4: $i_{эф} = \left(1+\frac{0,24}{4}\right)^{4} - 1 = 0,262$;

б) j=0,26; m=2: $i_{эф} = \left(1+\frac{0,26}{2}\right)^{2} - 1 = 0,277$;

в) j=0,20; m=12: $i_{эф} = \left(1+\frac{0,20}{12}\right)^{12} - 1 = 0,219$.

Таким образом, для банка наиболее выгодным является второй вариант кредитования.

Для вычисления эффективной процентной ставки можно воспользоваться встроенной финансовой функцией пакета Excel ЭФФЕКТ(Номинальная_ставка; Кол_пер). Первый параметр – это номинальная процентная ставка, второй параметр – количество начислений процентов в году). Решение обратной задачи: нахождение годовой номинальной процентной ставки при m-разовом начислении процентов, эквивалентной заданной сложной процентной ставке, можно осуществить с помощью функции НОМИНАЛ(Эффект_ставка; Кол_пер).

7) Через 4 года потребуется сумма 20 тыс. руб. Определить величину первоначального вклада, если проценты начисляются по сложной ставке 8% годовых: а) ежегодно; б) ежеквартально.

Решение

а) при начислении процентов 1 раз в год первоначальная сумма вклада по формуле (12) составляет $P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{20}{(1+0,08)^4} = 14,7$ (тыс. руб.);

б) при начислении процентов ежеквартально первоначальная сумма вклада по формуле (13) составляет $P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{20}{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{4\cdot 4}} = 14,569$ (тыс. руб.).

8) Вексель номиналом 5 млн. руб. со сроком погашения через 5 лет учтен банком по учетной ставке 15% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя, и величину дисконта, если применяется: а) простая учетная ставка; б) сложная учетная ставка; в) номинальная учетная ставка и помесячное дисконтирование. В последнем случае найти эффективную учетную ставку.

а) погасительная стоимость векселя при использовании простой учетной ставки по формуле (7) составляет $P = S \cdot (1 - n \cdot d) = 5 \cdot (1 - 5 \cdot 0,15) = 1,25$ (млн. руб.), сумма дисконта равна $D = S - P = 5 - 1,25 = 3,75$ (млн. руб.);

б) погасительная стоимость векселя при использовании сложной учетной ставки по формуле (14) составляет $P = S \cdot (1-d)^n = 5 \cdot (1-0{,}15)^5 = 2{,}218$ (млн. руб.), сумма дисконта равна $D = S - P = 5 - 2{,}218 = 2{,}782$ (млн. руб.);

в) погасительная стоимость векселя при использовании номинальной учетной ставки и помесячном дисконтировании по формуле (15) составляет: $P = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m \cdot n} = \left(1 - \frac{0{,}15}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 2{,}351$ (млн. руб.), сумма дисконта равна $D = S - P = 5 - 2{,}351 = 2{,}649$ (млн. руб.). Эффективную учетную ставку найдем из уравнения: $\left(1 - d_{эф}\right)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}$.

Получаем: $d_{эф} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0{,}15}{12}\right)^{12} = 0{,}14$.

9) Клиент банка получил кредит на сумму 1 млн. руб. при условии возврата суммы в размере 1,2 млн. руб. Кредит взят под 15% годовых, начисляемых по сложной учетной ставке. На какой срок выдавался кредит?

Решение

Из формулы дисконтирования по сложной годовой учетной ставке (14) получаем: $n = \dfrac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{\ln(1-d)} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{1{,}2}\right)}{\ln(1-0{,}15)} = 1{,}12$ года или 410 дней.

3.3 Примеры решения задач на расчеты с использованием непрерывной процентной ставки и эквивалентность процентных ставок

1) Кредит на сумму 10 тыс. долл. Получен на 10 лет под 7,5% годовых. Определить наращенную сумму долга, если проценты начисляются непрерывно.

Решение

По формуле (16) получаем: $S = P \cdot e^{\delta n} = 10 \cdot e^{0{,}075 \cdot 10} = 21{,}17$ (тыс. долл.).

2) Вексель учтен в банке за 100 дней до его погашения. Операция учета векселя должна принести 20% годовых в виде простых точных процентов. Определить величину учетной ставки, которую следует назначить.

Решение

Определим значение простой учетной ставки, эквивалентной простой процентной ставке 20%, полагая, что при наращении по простой процентной ставке временная база равна 365 дней ($K_1 = 365$), а при осуществлении вексельной операции – 360 дней ($K_2 = 360$). Из уравнения эквивалентности $P\left(1 + \frac{t}{K_1} \cdot i\right) = \frac{P}{1 - \frac{t}{K_2} \cdot d}$ получаем: $d = \frac{K_2 \cdot i}{K_1 + t \cdot i} = \frac{360 \cdot 0,2}{365 + 100 \cdot 0,2} = 0,187$ или 18,7%.

3) Предприниматель поместил в банк денежные средства на 2 года под 15% годовых с условием начисления простых процентов на всю сумму в конце второго года. В целях унификации схем расчетов банк решил начислять сложные проценты ежемесячно. Какую минимальную ставку банк долен предложить, чтобы не потерять клиента?

Решение

Для того, чтобы клиент получил предусмотренную договором сумму в конце второго года, банк должен предложить ставку по сложным процентам, не меньше эквивалентной ставке по простым процентам. Из уравнения эквивалентности $P(1 + n \cdot i_{np}) = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$ получаем:

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot n]{1 + n \cdot i_{np}} - 1\right) = 12 \cdot \left(\sqrt[12 \cdot 2]{1 + 2 \cdot 0,15} - 1\right) = 0,1319 \text{ или } 13,19\%.$$

Таким образом, минимальная номинальная процентная ставка банка при ежемесячном начислении процентов должна быть 13,19%.

3 Задачи для самостоятельного решения

3.1 Задачи на расчеты с использованием простой процентной ставки

1) Индивидуальный предприниматель 1 марта получил кредит на развитие бизнеса в размере 500 тыс. руб. под простую процентную ставку 7,5% годовых при условии выплаты долга 1 декабря. Найти наращенную сумму долга тремя способами (год не високосный). Какой из способов начисления процентов выгоднее для кредитора? Проверить полученные результаты, выполнив расчеты с помощью функций Excel.

2) Определите размер процентной ставки, при которой вкладчик получит 200 тыс. руб., если счет на сумму 195 тыс. руб. был открыт сроком на 9 месяцев по схеме начисления процентов 360/360.

3) Банк предлагает депозиты для населения с различными условиями начисления простых процентов: сроком на 3 месяца по ставке 4,2% годовых и сроком на 1 год по ставке 4,6% годовых. Предусмотрена пролонгация по вкладам с начисленными процентами без явки вкладчика. Определите наиболее выгодную схему размещения денег сроком на 2 года для вкладчика, имеющего 800 тыс. руб.

4) Сберегательный вклад открыт 28 марта на сумму 650 тыс. руб., 2 июня того же года на счет внесли еще 150 тыс. руб., 20 августа со счета сняли 750 тыс. руб., а 12 ноября счет закрыли. Определите сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета, если процентная ставка по вкладу составила 5,5% и используется схема 365/360.

5) Через полтора года после выдачи кредита должник обязан выплатить 565 тыс. руб. Определите первоначальную сумму кредита, выданного под простую процентную ставку 16% годовых.

6) Два векселя стоимостью по 25 тыс. руб. каждый были учтены 15 марта по простой учетной ставке 10% годовых. Срок погашения первого векселя 18 августа, а второго – 23 ноября того же года. Определите учтенные стоимости векселей и дисконт банка.

7) При выдаче займа банк удерживает проценты по простой учетной ставке 14% годовых. Какова запрашиваемая сумма займа, если на руки получена сумма 450 тыс. руб. при условии, что долг требуется вернуть через 2 года?

8) Вкладчик внес в банк под определенный процент 20 тыс. руб. Через год он снял со счета половину суммы начисленных процентов, а основной вклад и оставшуюся сумму процентов оставил в банке. Еще через год у вкладчика на счете оказалось 26400 руб. Чему равна годовая простая процентная ставка?

9) Иванов занял у Петрова 9800 руб. и выдал ему вексель, по которому обязался выплатить через три месяца 10 тыс. руб. Определить доходность операции для Петрова в виде простой учетной ставки процентов.

10) Администрация региона получила кредит в банке на сумму 6 млн. руб. сроком на 5 лет. Простая процентная ставка по кредиту составила 10,5% для 1-го года, для 2-го года предусматривается надбавка к процентной ставке в размере 1,5 п.п., для 3-го года и последующих лет – в размере 0,75 п.п. ежегодно. Определить сумму долга, подлежащую погашению по истечении срока займа.

11) Какая сумма предпочтительнее при простой ставке 6%: 100 тыс. руб. сегодня или 150 тыс. руб. через 6 лет?

12) Контракт предусматривает следующий порядок начисления простых процентов: первый год – по ставке 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1 п.п. Определить множитель наращения за 2,5 года.

13) Что выгоднее: вложить 15 тыс. руб. на годовой депозит под 12,5% или на 3-х месячный депозит с пролонгацией под годовую ставку 12%?

14) На какой срок выдан кредит в 3 млн. руб. под процентную ставку 10,5% годовых, если банк получил сумму от кредитора 3,8 млн.руб. Проценты точные, год не височосный.

15) При открытии сберегательного счета по ставке 11% годовых 16 апреля на счет была положена сумма 200 тыс. руб. Затем 5 мая на счет было добавлена сумма 140 тыс. руб., 15 августа со счета была снята сумма 120 тыс. руб., а 10 сентября счет был закрыт. Определите сумму на счете на дату закрытия (365/365, високосный год).

3.2 Задачи на расчеты с использованием сложной процентной ставки

1) Вклад на сумму 150 тыс. руб. был размещен в банке под 12% годовых сроком на 4 года. Определите наращенную сумму, если начисление процентов проходило по схеме: а) простых процентов; б) сложных процентов.

2) Ссуда в размере ссуды 15 млн. руб. была выдана на 3 года – с 1 апреля 2018 г. по 1 апреля 2021 г. по сложной процентной ставке 12% (схема 365/365). Распределите начисленные проценты календарным годам.

3) Банк выдал ссуду в размере 25 тыс. руб. сроком на 5 лет. Контракт предусматривает использование сложных переменных процентных ставок: для 1-го года – 15% годовых, для 2-го и 3-го годов – 15,5%, для 4-го и 5-го годов – 16%. Найдите сумму, подлежащую возврату.

4) Банк предоставил ссуду в размере 100 тыс. руб. на 30 месяцев под 22% годовых. Определите сумму долга, подлежащую возврату, точным и смешанным методами. Сравните результаты, сделайте выводы.

5) Ссуда в размере 300 тыс. руб. предоставлена на 19 месяцев под сложную процентную ставку 9% годовых. Определите наращенную сумму долга двумя способами (точным и смешанным), если проценты начисляются ежемесячно.

6) Вкладчик, имея на руках некоторую сумму денег, хотел бы за пять лет ее удвоить, помещая в банк на депозит. Банк начисляет проценты по полугодиям. Определите процентную ставку, которую банк должен предложить такому клиенту.

7) На вклад ежемесячно начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 16%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в 3 раза? Чему будет равна эффективная ставка эквивалентная номинальной?

8) Банк предлагает долгосрочные кредиты на следующих условиях: а) 15% годовых с ежегодным начислением процентов; б) 16% годовых с полугодовым начислением процентов; в) 14,5% годовых с ежемесячным начислением процентов. Определите наиболее выгодный вариант кредитования для заемщика.

9) При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность банка должна составлять 24% годовых. Какую номинальную

процентную ставку должен установить банк, если проценты будут начисляться: а) ежемесячно; б) поквартально?

10) Предприниматель взял ссуду на 3 года в размере 12 млн. руб. с условием возврата 16 млн. руб. Определите доходность банка в виде сложной процентной ставки, если проценты начислялись ежеквартально.

11) Какую сумму необходимо иметь, чтобы через 6 лет можно получить 400 тыс. руб., если наращение осуществлять по сложным процентам 12%: а) ежемесячно; б) ежеквартально?

12) Вексель стоимостью 800 тыс. руб. предъявлен в банк за 2 года до его погашения. Определите сумму, полученную векселедержателем, и доход банка, если операция учета проводилась по сложной учетной ставке 9% годовых.

13) Вексель номиналом 150 тыс. руб. был учтен банком за 120 дней до его погашения. Какую сумму получил предъявитель векселя, если дисконтирование осуществлялось по сложным обыкновенным процентам 12 раз в год. Дисконтная ставка равнялась 15%.

14) Вексель на сумму 300 тыс. руб. учтен банком за 3 года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Определите приведенную стоимость векселя и дисконт при условии, что дисконтирование проводилось: а) ежегодно; б) ежемесячно.

15) Определить, какое размещение денег на срок 6 месяцев выгоднее: а) под простую процентную ставку 30% годовых; б) под сложную процентную ставку 29% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

16) Долговое обязательство на сумму 5 млн. руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Определить размер полученной за долг суммы и величину дисконта при дисконтировании 1 раз в год и ежеквартальном учете. Чему равна эффективная учетная ставка при ежеквартальном учете?

17) При выдаче кредита на 1 год 3 месяца под 10% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Какова доходность операции для кредитора?

18) Сравнить сроки удвоения суммы 1000 тыс. руб. при начислении сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 10%: а) по полугодиям; б) ежеквартально.

3.3 Задачи на расчеты с использованием непрерывной процентной ставки и эквивалентность процентных ставок

1) На вклад 200 тыс. руб. начисляются проценты по ставке 9% годовых. Определите сумму вклада через 5 лет, если начисление процентов происходит: а) непрерывно; б) ежемесячно.

2) Сравнить сроки удвоения суммы 1000 тыс. руб. при начислении сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 10% ежеквартально и при непрерывном начислении процентов при силе роста 10%.

3) Предположим, что сила роста меняется линейно: а) растет со скоростью 2% за год; б) падает с той же скоростью (-2%). Начальное значение силы роста составляет 8%, а срок наращения – 5 лет. Найти множитель наращения для случая положительной и отрицательной динамики.

4) Определить годовую сложную процентную ставку, эквивалентную силе роста, равной 8%.

5) На сумму долга в течение 8 лет начисляются проценты по ставке 11% годовых. Насколько возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться ежемесячно, ежеквартально, непрерывно?

6) В банк положена сума 70 тыс. руб. сроком на 4 года по ставе 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового; б) ежеквартального; в) ежемесячного; г) непрерывного.

7) Каковы будут эквивалентные номинальные годовые процентные ставки с начислениями по полугодиям и ежеквартально, если соответствующая им эффективная ставка равна 20%?

8) Финансовая операция сроком 65 дней должна принести 14% дохода в виде простых точных процентов (в расчете на год). Какую простую обыкновенную учетную ставку для этого необходимо назначить?

9) Какой сложной годовой процентной ставкой можно заменить в контракте простую годовую точную процентную ставку 21%, не изменяя финансовых отношений сторон? Срок операции – 710 дней.

10) Требуется определить доходность векселя в пересчете на простую точную процентную ставку, если учетная ставка равна 15% при временной базе 360 дней, а срок уплаты по векселю наступит через 80 дней.

Список использованных источников

1 Капитоненко, В.В. Финансовая математика и ее приложения: Учебн.-практ. пособие для вузов / В.В. Капитоненко. - М.: "Издательство ПРИОР", 1999. - 144 с.

2 Капитоненко, В.В. Задачи и тесты по финансовой математике: учеб. Пособие / В.В. Капитоненко. - М.: Финансы и статистика, 2007. - 256 с.

3 Математические методы финансового анализа: учебное пособие / Е.Г. Носова, С.А. Акимова, Е.Ю. Высочанская, О.В. Мещерякова, Л.В. Малышева. - Саратов: Саратовский социально-экономический институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2019. – 188 с.

4 Четыркин, Е. М. Финансовая математика: учебник / Е. М. Четыркин; Акад. нар. хоз-ва при Правительстве Рос. Федерации. - М.: Дело, 2004. - 400 с.

5 Малыхин В.И. Финансовая математика : учебное пособие для вузов / Малыхин В.И. - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 235 с. - ISBN 5-238-00559-8. - Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71239.html (дата обращения: 11.05.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей