Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Университетский колледж
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Предметно-цикловая комиссия математических дисциплин

МАТЕМАТИКА

Методические указания
Часть 1

Составители:
Н.А. Викулова,
А.А. Викулова

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по программам среднего профессионального образования по специальностям 15.02.08 Технология машиностроения, 15.02.15 Технология металлообрабатывающего производства

Оренбург
2021

УДК 51 (075.32)
ББК 22.1я723
М 34

Рецензент – кандидат технических наук С.Т. Дусакаева

М 34 **Математика** : методические указания. В 2 ч. Ч.1 / составители Н. А. Викулова, А. А. Викулова; Оренбургский гос. ун - т. – Оренбург : ОГУ, 2021. - 46 с.

Основное содержание: краткий теоретический материал, образцы решения заданий, варианты индивидуальных заданий по разделам «Элементы линейной алгебры», «Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве», «Элементы векторной алгебры», «Введение в математический анализ».

Методические указания предназначены для обучающихся колледжей 2-го курса очной формы обучения специальностей 15.02.08 Технология машиностроения, 15.02.15 Технология металлообрабатывающего производства.

УДК 51 (075.32)
ББК 22.1я723

Содержание

Введение 4
1 Элементы линейной алгебры 5
1.1 Матрицы. Основные понятия 5
1.2 Определители. Основные понятия 6
1.3 Решение систем линейных уравнений 9
1.4 Индивидуальное задание №1 10
2 Элементы аналитической геометрии на плоскости 13
2.1 Различные виды уравнения прямой на плоскости 13
2.2 Индивидуальное задание №2 14
3 Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве 18
3.1 Элементы векторной алгебры 18
3.2 Элементы аналитической геометрии в пространстве 22
3.3 Индивидуальное задание №3 23
4 Введение в математический анализ 27
4.1 Предел функции. Основные понятия 27
4.2 Индивидуальное задание № 4 29
4.3 Производная функции и её приложения 32
4.4 Индивидуальное задание № 5 35
Список использованных источников 46

Введение

Математика является фундаментальным предметом в курсе общеобразовательных дисциплин. Без базовой математической подготовки невозможна постановка образования современного человека. Математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. Она способствует развитию и формированию личности каждого человека в целом и вносит большой вклад в формирование общей культуры человека.

Учебная дисциплина относится к базовой части цикла математических и естественно-научных дисциплин, формирующей базовый уровень знаний для освоения общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Настоящие методические указания написаны с целью оказания помощи обучающимся второго курса колледжа при подготовке к практическим занятиям и выполнении индивидуальных заданий по темам разделов «Элементы линейной алгебры», «Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве», «Элементы векторной алгебры», «Введение в математический анализ».

Каждый пункт содержит варианты индивидуальных заданий, основные определения, теоремы и формулы, необходимые для выполнения индивидуального задания. Также в каждом пункте приведено решение типового примера.

Выполнение индивидуальных заданий позволяет обучающимся отработать умения и навыки по каждому разделу, определить уровень усвоения материала.

Использование заданий способствует развитию технического мышления обучающихся, стимулированию их активности и самостоятельности на аудиторных занятиях, умению применять полученные знания в профессиональной деятельности.

1 Элементы линейной алгебры

1.1 Матрицы. Основные понятия

Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Виды матриц:

Квадратной называется матрица, у которой число столбцов равно числу строк (m=n).

Единичной называется матрица вида $E = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$.

Диагональной называется матрица вида $A = \begin{matrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{matrix}$.

Матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \quad B = A^T = \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Основные действия над матрицами:

Матрицы одной и той же размерности называются *равными*, если равны их соответствующие элементы.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц. (Операции определены только для матриц одинакового размера).

Операция *умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число* сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число

$$\alpha A = \begin{matrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{matrix}$$

Произведением матриц A и B называется матрица C, элемент i-ой строки и j-го столбца которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A (первого множителя) на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B (второго множителя). Операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

1.2 Определители. Основные понятия

Определителем, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$ называется число Δ_n, которое записывается в виде квадратной таблицы $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и вычисляется согласно указанному ниже правилу:

для n=2 $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$

для n=3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых расположен этот элемент.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}; \qquad A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема Лапласа (о разложении определителя по элементам строки или столбца). Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Свойства определителей:

1) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

2) Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот.

3) Если определитель содержит нулевой столбец или нулевую строку, то определитель равен нулю.

4) Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

5) Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Обратная матрица.

Квадратная матрица n-го порядка называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В случае, когда определитель равен нулю, матрица называется *вырожденной*.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для невырожденной матрицы A, если она удовлетворяет условию: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица того же самого порядка, что матрица A.

Каждая квадратная матрица A с определителем, не равным нулю ($\Delta A \neq 0$) имеет обратную матрицу и притом только одну. Обратная матрица A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

1.3 Решение систем линейных уравнений

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля.

Пусть дана система уравнений $\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$.

Составим матрицы $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$; $B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{matrix}$; $X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{matrix}$.

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$ – матричное решение СЛУ.

Метод Крамера

Метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля.

Система из n уравнений с n неизвестными $\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам $x_i = \Delta_i/\Delta A$, где ΔA - определитель матрицы системы, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

1.4 Индивидуальное задание №1

Решить заданную систему уравнений, пользуясь формулами Крамера, методом Гаусса и матричным способом. Выполнить проверку полученного решения.

№ задачи	Система линейных уравнений	№ задачи	Система линейных уравнений
1	$y+3z=-1$ $2x+3y+5z=3$ $3x+5y+7z=6$	2	$2x+y+3z=3$ $3x-5y+z=-6$ $4x-7y+z=-9$
3	$3x+2y-z=4$ $x+y-z=0$ $x+2y-z=2$	4	$2x-3y+z=1$ $x+y+z=6$ $x-y-z=0$
5	$x+y-z=2$ $-x+y+z=0$ $-x+y+2z=2$	6	$x+y+z=6$ $-x+y-z=0$ $x+2y-3z=1$
7	$-x+2y+z=2$ $-2x+3y+z=3$ $x+y=3$	8	$3x+z=-1$ $5x+2y+3z=3$ $7x+3y+5z=6$
9	$3x+2y+z=3$ $x+3y-5z=-6$ $x+4y-7z=-9$	10	$2x+y-z=2$ $3x+y-2z=3$ $x+z=3$
11	$5x+8y-z=-7$ $x+2y+3z=1$ $2x-3y+2z=9$	12	$x+2y+z=4$ $3x-5y+3z=1$ $2x+7y-z=8$
13	$x+y+2z=-1$ $2x-y+2z=-4$ $4x+y+4z=-2$	14	$2x+y-z=1$ $x+y+z=6$ $3x-y+z=4$
15	$2x-y-3z=3$ $3x+4y-5z=8$ $2y+7z=17$	16	$x+5y+z=-7$ $2x-y-z=0$ $x-2y-z=2$
17	$3x+4y+2z=8$ $2x-y-3z=-1$ $x+5y+z=0$	18	$2x+y+4z=20$ $2x-y-3z=3$ $3x+4y-5z=-8$

19	$x - y = 4$ $2x + 3y + z = 1$ $2x + y + 3z = 11$	20	$x + 5y - z = 7$ $2x - y - z = 4$ $3x - 2y + 4z = 11$

Решение типового примера:

Решить заданную систему уравнений $\begin{matrix} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{matrix}$, пользуясь формулами Крамера, методом Гаусса и матричным способом. Выполнить проверку полученного решения.

Метод Крамера:

$$\begin{matrix} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{matrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{matrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{matrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{matrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60;$$

$$\Delta_3 = \begin{matrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{matrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90;$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Метод Гаусса:

$$\begin{matrix} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{matrix}$$

Составим расширенную матрицу системы

$$\begin{matrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{matrix}$$

Исходная система может быть представлена в виде

$\begin{matrix} x+2y+3z=14 \\ -5y-10z=40 \\ 6z=18 \end{matrix}$, откуда получаем $\begin{matrix} x=1 \\ y=2. \\ z=3 \end{matrix}$

Матричный метод:

$$\begin{matrix} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{matrix}$$

A = $\begin{matrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{matrix}$; X = $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$; B = $\begin{matrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{matrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

ΔA = $\begin{matrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{matrix}$ =5(4-9) + 1(2 – 12) – 1(3 – 8) = -25 – 10 +5 = -30;

A_{11} = $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -5$; A_{21} = $-\begin{matrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -1$; A_{31} = $\begin{matrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -1$;

A_{12} =$-\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 10$; A_{22} = $\begin{matrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 14$; A_{32} = $-\begin{matrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = -16$;

A_{13} = $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix} = -5$; A_{23} = $-\begin{matrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{matrix} = -19$; A_{33} = $\begin{matrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 11$;

A^{-1} = $-\frac{1}{30}\begin{matrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{matrix}$;

Нам матрицу X.

$$X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = A^{-1}B = \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}.$$

Итак, $\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{matrix}$

2 Элементы аналитической геометрии на плоскости

2.1 Различные виды уравнения прямой на плоскости

1 *Общее* уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

2 Уравнение прямой *с угловым коэффициентом* записывается в виде

$$y = kx + b,$$

где $k = tg\alpha$, α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси ОХ, b - ордината точки пересечения прямой с осью ОУ.

3 Уравнение прямой , проходящей через *данную точку* $M_0(x_0; y_0)$ *в данном направлении* имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = tg\alpha$, α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси ОХ.

4 Уравнение прямой, *проходящей через точки* $M_1(x_1;\ y_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2)$ записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5 Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b - длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях ОХ и ОУ соответственно.

6 *Угол между прямыми* на плоскости

Пусть даны две прямые $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ и $l_2: y_2 = k_2x + b_2$.

Тангенс угла между прямыми l_1 и l_2вычисляют по формуле

$$tg\phi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

7 *Условие параллельности* прямых на плоскости

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \ \ k_1 = k_2.$$

8 *Условие перпендикулярности* прямых на плоскости

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \ \ k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

9 *Расстояние от точки* $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\overline{A^2 + B^2}}.$$

2.2 Индивидуальное задание №2

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AB

2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты

3) внутренний угол B в радианах с точностью до 0,01

4) уравнение медианы AE; 5) уравнение и длину высоту CD

6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и точку M ее пересечения с высотой CD

1 A (1; -1), B (4; 3), C (5; 1)

2 A (0; -1), B (3; 3), C (4; 1)

3 A (1; -2), B (4; 2), C (5; 0)

4 A (2; -2), B (5; 2), C (6; 0)

5 A (0; 0), B (3; 4), C (4; 2)

6 A (0; 1), B (3; 5), C (4; 3)

7 A (3; -2), B (6; 2), C (7; 0)

8 A (3; -3), B (6; 1), C (7; -1)

9 A (-1; 1), B (2; 5), C (3; 3)

10 A (4; 0), B (7; 4), C (8; 2)

11 A (2; 2), B (5; 6), C (6; 4)

12 A (4; -2), B (7; 2), C (8; 0)

13 A (0; 2), B (3; 6), C (4; 4)

14 A (4; 1), B (7; 5), C (8; 3)

15 A (3; 2), B (6; 6), C (7; 4)

16 A (-2; 1), B (1; 5), C (2; 3)

17 A (4; -3), B (7; 1); C (8; -1)

18 A (-2; 2), B (1; 6), C (2; 4)

19 A (5; 0), B (8; 4), C (9; 2)

20 A (2; 3), B (5; 7), C (6; 5)

Решение типового примера:

Даны координаты вершин ΔABC A(-2;2), B(1;6), C(2;4).

Найти:

1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

3) внутренний угол B;

4) уравнение медианы AE;

5) уравнение и длину высоты CD;

6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и точку M, её пересечение с высотой CD.

Решение:

1) Расстояние d между точками A(x_1;y_1) и B(x_2;y_2) определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Воспользовавшись ей, находим длину стороны AB

$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $A\ \ x_1; y_1$ и $B\ \ x_2; y_2$ имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Поэтому AB: $\frac{y-2}{6-2} = \frac{x+2}{1+2}$; $\quad \frac{y-2}{4} = \frac{x+2}{3}$; $\quad 3y - 6 = 4x + 8$; $\quad 4x - 3y + 14 = 0.$

Угловой коэффициент k прямой AB найдем, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом:$y = kx + b$.

$y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$ откуда $k_{AB} = \frac{4}{3}$.

Найдем уравнение прямой BC

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $\frac{y-6}{4-6} = \frac{x-1}{2-1}$; $\quad \frac{y-6}{-2} = \frac{x-1}{1}$; $\quad y - 6 = -2x + 2$;

$2x + y - 4 = 0$ (BC).

Приведем к виду $y = kx + b$: $y = -2x + 4$; $k_{BC} = -2$.

3) Для определения $\angle$ B треугольника ABC воспользуемся формулой

$tg\ \phi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$.

$$tg\angle B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-2 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}\ -2} = \frac{-\frac{10}{3}}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{10}{5} = 2;$$

$tg\angle B = 2, \angle B = arctg\ 2.$

4) Для составления уравнения медианы AE найдем координаты точки E – середины стороны BC по формулам: $x_E = \frac{x_B + x_C}{2}$; $y_E = \frac{y_B + y_C}{2}$.

$x_E = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y_E = \frac{6+4}{2} = 5$; $E\ \ \frac{3}{2}; 5\ \ $.

Уравнение медианы AE:

A(-2;2), E $\frac{3}{2};5$.

$\frac{x-x1}{x2-x1}=\frac{y-y1}{y2-y1};\frac{x+2}{\frac{3}{2}+2}=\frac{y-2}{5-2};\ 3\ \ x+2\ \ =3\frac{1}{2}\ \ y-2\ ;6\ \ x+2\ \ =7\ \ y-2\ ;$

$$6x+12=7y-14;$$

$6x-7y+26=0$ (AE).

5) Для составления уравнения высоты CD воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку M_0 $x_0;y_0$ с заданным угловым коэффициентом k $y-y_0=k\ \ x-x_0$ и условием перпендикулярности прямых AB и CD которая выражается соотношением $k_{AB}\cdot k_{CD}=-1$, откуда $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$.

C (2; 4); $k_{CD}=-\frac{3}{4}$.

$$y-4=-\frac{3}{4}\ \ x-2\ ;$$

$$4y-16=-3x+6;$$

$$3x+4y-22=0.$$

Для вычисления длины высоты CD воспользуемся формулой отыскания расстояния d от заданной точки M_0 $x_0;y_0$ до заданной прямой с уравнением $Ax+By+C=0$, $d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\overline{A^2+B^2}}$.

$d=\frac{4\cdot 2-3\cdot 4+14}{\overline{4^2+3^2}}=\frac{10}{\overline{25}}=\frac{10}{5}=2.$

6) Искомая прямая $EF//AB$, поэтому $k_{EF}=k_{AB}=\frac{4}{3}$.

Подставив в уравнение $y-y_0=k\ \ x-x_0$ вместо x_0, y_0 координаты точкиE $\frac{15}{2};\ 1$, вместо kзначение $k_{EF}=\frac{4}{3}$получим уравнение прямой EF.

$y-5=\frac{4}{3}\ \ x-\frac{3}{2}\ \ ; y-5=\frac{4}{3}x-2; 3y-15=4x-6; 4x-3y+9=0$ (EF).

Найдем координаты точки M – пересечения прямых EF и CD. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 22 = 0 \cdot 4 \\ 4x - 3y + 9 = 0 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 16y + 88 = 0 \\ 12x - 9y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y = -115 \\ 4x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{115}{25} = \frac{23}{5} \\ 4x - 3\frac{23}{5} + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4{,}6 \\ x = 1{,}2 \end{cases}.$$

Таким образом, $M(1{,}2;\ 4{,}6)$.

3 Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве

3.1 Элементы векторной алгебры

Основные понятия:

Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Обозн. $|\overline{AB}| = |\overline{a}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Обозн. $\overline{a} \,//\, \overline{b}$.

Векторы называются *равными*, если они имеют одинаковое направление и длину. Обозн. $\overline{a} = \overline{b}$.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Проекцией вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на вектор $\overline{b}$ называется число $Pr_{\overline{b}}\,\overline{a}$, модуль которого равен расстоянию между основаниями перпендикуляров AA' и BB', которые опущены на прямую, на которой лежит вектор $\overline{b}$. Знак этого числа положителен, если векторы $\overline{A'B'}$ и $\overline{b}$ направлены в одну сторону, и отрицателен, если они направлены в противоположные стороны.

Проекция вектора a на вектор b равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между этими векторами

$$Pr_b\, a = a\ \cos\phi.$$

Действия над векторами, заданными своими координатами:

Координаты вектора, заданного координатами начала А(x_1; y_1; z_1) и конца В(x_2; y_2; z_2) вычисляются по формуле

$$AB = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

При *сложении* векторов складываются их соответствующие координаты

$$a\ = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3),\ b\ = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$$

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \alpha_3 + \beta_3).$$

При *умножении* вектора на число его координаты умножаются на это число

$$\lambda\ a\ = (\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \lambda\alpha_3).$$

Равные векторы имеют одинаковые координаты

$$a = b \Leftrightarrow\ \alpha_1 = \beta_1;\quad \alpha_2 = \beta_2;\quad \alpha_3 = \beta_3.$$

Признак коллинеарности векторов

$$a\ //\ в\ \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \lambda.$$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов a и b называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними $a \cdot b = |a||b|\cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ и $b = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ *в координатной форме* выражается равенством $a \cdot b = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3$.

Длина и направление вектора $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ находятся по формулам

$$a = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1}{a}; \quad \cos\beta = \frac{\alpha_2}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{\alpha_3}{a}.$$

Свойство направляющих косинусов: Сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Механический смысл скалярного произведения:

Если F изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора S, то работа указанной силы определяется равенством

$$A = F \quad s \quad \cos\phi \text{ или } A = F \cdot s.$$

Векторное произведение векторов.

Векторным произведением векторов a и b называется вектор c, удовлетворяющий следующим условиям:

- вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам a и b;

- c численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, как на сторонах, т.е. $c = a \cdot b \ \sin\phi$, где φ - угол между векторами a и b, $\sin\phi \geq 0$; $0 \leq \phi \leq \pi$;

- направление вектора cтаково, что если смотреть из его конца, то кратчайший поворот вектора a к вектору bвокруг полученного вектора c должен быть виден против движения часовой стрелки (a, bи c образуют правую тройку векторов).

Обозначается: $c = a \times b$

Векторное произведение векторов $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ и $b = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ в *координатной форме* выражается формулой

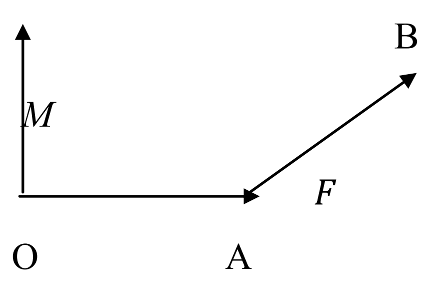
$$a\times b = \begin{matrix} \imath & \jmath & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix}.$$

Геометрический смысл векторного произведения векторов:

Площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, как на сторонах равна модулю векторного произведения векторов a и b

$$S = a \times b \ .$$

Механический смысл векторного произведения:



Пусть к точке А приложена сила F=AB и пусть точка О - некоторая точка пространства. Тогда момент силы $\vec{F}$ относительно точки О равен векторному произведению вектора OA на F

$$M = OA \times F\,.$$

Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением векторов a, b и c называется число, равное скалярному произведению вектора a на вектор, равный векторному произведению векторов b и c. Обозначается $a \cdot (b \times c)$.

Смешанное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в координатной форме

$$a \cdot (b \times c) = \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

3) Геометрический смысл смешанного произведения

Модуль смешанного произведения $a \cdot (b \times c)$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b и c, как на ребрах.

$$V_{парал-да} = \quad a \cdot (b \times c)$$

3.2 Элементы аналитической геометрии в пространстве

Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют *общему уравнению*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где n $(A; B; C)$ - вектор нормали к плоскости (нормальный вектор)

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $n\ (A; B; C)$ имеет вид

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение прямой проходящей через две заданные точки пространства $M_1\ x_1, y_1, z_1$ и $M_2\ x_2, y_2, z_2$ имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

3.3 Индивидуальное задание №3

Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется:

1) записать векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ в системе орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти модули этих векторов

2) найти угол между векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

3) найти проекцию вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$

4) найти площадь грани ABC

5) найти объем пирамиды ABCD

6) составить уравнение ребра AC

7) составить уравнение грани ABC

1 A(1; 2; 1), B(-1; 5; 1), C(-1; 2; 7), D(1; 5; 9)

2 A(2; 3; 2), B(0; 6; 2), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2)

3 A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(-2; 3; 8), D(0; 6; 10)

4 A(2; 1; 2), B(0; 4; 2), C(0; 1; 8), D(2; 4; 10)

5 A(2; 3; 0), B(0; 6; 0), C(0; 3; 6), D(2; 6; 8)

6 A(2; 2; 1), B(0; 5; 1), C(0; 2; 7), D(2; 5; 9)

7 A(1;3;1), B(-1;6;1), C(-1;3;7), D(1;6;9)

8 A(1; 2; 2), B(-1; 5; 2), C(-1; 2; 8), D(1; 5; 10)

9 A(2; 3; 1), B(0; 6; 1), C(0; 3; 7), D(2; 6; 9)

10 A(2; 2; 2), B(0; 5; 2), C(0; 2; 8), D(2; 5; 10)

11 A(1; 3; 2), B(-1; 6; 2), C(-1; 3; 8), D(1; 6; 10)

12 A(0; 1; 2), B(-2; 4; 2), C(-2; 1; 8), D(0; 4; 10)

13 A(0; 3; 0), B(-2; 6; 0), C(-2; 3; 6), D(0; 6; 8)

14 A(2; 1; 0), B(0; 4; 0), C(0; 1; 6), D(2; 4; 8)

15 A(0; 2; 1), B(-2; 5; 1), C(-2; 2; 7), D(0; 5; 9)

16 A(1; 1; 1), B(-1; 4; 1), C(-1; 1; 7), D(1; 4; 9)

17 A(1; 2; 0), B(-1; 5; 0), C(-1; 2; 6), D(1; 5; 8)

18 A(0; 1; 0), B(-2; 4; 0), C(-2; 1; 6), D(0; 4; 8)

19 A(0; 1; 1), B(-2; 4; 1), C(-2; 1; 7), D(0; 4; 9)

20 A(0; 2; 0), B(-2; 5; 0), C(-2; 2; 6), D(0; 5; 8)

Решение типового примера:

Даны координаты вершин пирамиды A(0; 3; 2), B(-2; 6; 2), C(-2; 3; 8), D(0; 6; 10). Требуется:

1) записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и найти модули этих векторов

2) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; 3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$

4) найти площадь грани ABC

5) найти объём пирамиды ABCD

6) составить уравнение ребра AC

7) составить уравнение грани ABC.

1) $A\ \ 0;3;2 \quad B\ \ -2;6;2 \quad C\ \ -2;3;8 \quad D\ \ 0;6;10$

$$\overline{AB} = \ x_B - x_A\ \bar{i} + \ y_B - y_A\ \bar{j} + \ z_B - z_A\ \bar{k} = \ -2-0\ \bar{i} + \ 6-3\ \bar{j} + \ 2-2\ \bar{k}$$

$$= -2\bar{i} + 3\bar{j}$$

$\overline{AB}\ \ -2;3;0$

$\overline{AC} = \ -2-0\ \bar{i} + \ 3-3\ \bar{j} + \ 8-2\ \bar{k} = -2\bar{i} + 6\bar{k}$

$\overline{AC}\ \ -2;0;6$

$\overline{AD} = \ 0-0\ \bar{i} + \ 6-3\ \bar{j} + \ 10-2\ \bar{k} = 3\bar{j} + 8\bar{k}$

$\overline{AD}\ \ 0;3;8$

2) Для нахождения модуля вектора $a = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ воспользуемся формулой

$a = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{-2\ ^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{-2\ ^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

2) известна формула $cos\ \ \bar{a}^\wedge\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{a}\ \cdot\ \bar{b}} = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\bar{a}\ \cdot\ \bar{b}}$

Поэтому $cos\ \ \overline{AB}^\wedge\overline{AC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}\ \cdot\ \overline{AC}} = \frac{-2\ \ -2\ \ +3\cdot 0+0\cdot 6}{\sqrt{13}\cdot 2\ \sqrt{10}} = \frac{4}{2\ \sqrt{130}} = \frac{2}{\sqrt{130}}$

3) известно, что $npba = \frac{b*a}{|b|}$

$$np_{\overline{AB}}\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{-2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 0\cdot 8}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

4) площадь грани ABC вычислим по формуле $S\ \ ABC = \frac{1}{2}\ \overline{AB}\times\overline{AC}$,

где$\overline{AB}\times\overline{AC}$- векторное произведение векторов.

$\overline{AB}\ \ -2;3;0 \qquad \overline{AC}\ \ -2;0;6$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{matrix} = \bar{i}\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{matrix} - \bar{j}\begin{matrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{matrix} + \bar{k}\begin{matrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{matrix} = 18\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$$

$$= 6\ \ 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{6^2\left(3^2+2^2+1^2\right)} = 6\sqrt{9+4+1} = 6\sqrt{14}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14}\ \textit{кв.ед}.$$

5) объём пирамиды, построенной на трёх некомпланарных векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ можно найти по формуле:

$$V = \tfrac{1}{6}\left|a\cdot(b\times c)\right|,\ a\cdot(b\times c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6}\left|AB\cdot(AC\times AD)\right|$$

$$AB\cdot(AC\times AD) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2(0-18) - 3(-16-0) + 0 = 36+48 = 84$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot 84 = 14\ \textit{куб.ед}.$$

6) известно, что

У нас $A(0;3;2)$ $C(-2;3;8)$

$$AC: \frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z-2}{8-2}\ \textit{или}\ \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{6}$$

7) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$A(x_1;y_1;z_1)$; $B(x_2;y\ ;z_2)$; $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

Подставляя в него координаты точек A, B, C, получим A(0; 3; 2), B(-2; 6; 2), C(-2; 3; 8)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-2 \\ -2-0 & 6-3 & 2-2 \\ -2-0 & 3-3 & 8-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(18-0) - (y-3)(-12-0) + (z-2)(0+6) = 0$$

$$18x + 12(y-3) + 6(z-2) = 0 \ \mid \div 6$$

$$3x + 2(y-3) + z - 2 = 0$$

$3x+2y+z-8=0$

4 Введение в математический анализ

4.1 Предел функции. Основные понятия

Число А называется пределом функции y=f(x) в точке x=a, если для любой сходящейся к а последовательности значений аргумента х, соответствующая последовательность значений функции сходится к числй А.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to$ a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x\to\alpha}\alpha(x)=0$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными в окрестности точки a, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Основные теоремы о пределах:

если $\lim_{x\to a}f(x)$ и $\lim_{x\to a}g(x)$ существуют и конечны, то

1) $\lim_{x\to a}c=c$, где c=const.

2) $\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

3) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

4) $\lim_{x\to a}f(x)*g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)*\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

5) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$, если $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$

Предел бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},f(x)\sim f_1(x),g(x)\sim g_1(x)$$

Важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов:

$$\left.\begin{aligned}
&tg\,mx\sim mx\\
&\sin mx\sim mx\\
&\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x\\
&arctg\,mx\sim mx\\
&e^x-1\sim x\\
&a^x-1\sim x\ln a\\
&\ln(1+x)\sim x\\
&\log_a(1+x)\sim x\log_a e\\
&\sqrt{x+1}-1\sim\frac{x}{2}\\
&1-\cos^2 x\sim\frac{3}{2}\sin^2 x\\
&\arcsin mx\sim mx\\
&1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}
\end{aligned}\right.\quad при\ x\to 0$$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

- сокращение на множитель, создающий неопределенность;

- деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$);

- применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

- применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Кроме того, при вычислении пределов полезно запомнить следующее:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, т.е. $\frac{c}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, т.е. $\frac{c}{0}=\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=c$, т.е. $\frac{0}{c}=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=c$, т.е. $\frac{\infty}{c}=\infty$

4.2 Индивидуальное задание № 4

Вычислить пределы

1 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+x+1}{x^2-3x-4}$ а) $x_0=2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}$

2 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$ а) $x_0=-1$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x}$

3 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$ а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot tg3x}{\sin^2 2x}$

4 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$ а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot tg3x}{x^2}$

5 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$ а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg2x}$

6 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$ а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 5x}{\sin 3x}$

7 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$ а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot tg4x}{\sin^2 6x}$

8 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$ а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot tg4x}{x^2}$

9 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$ а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{tg5x}$

10 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$ а) x_0 =-1; б) x_0=1; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x \cdot \cos x}{\sin 2x}$

11 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-5x-14}{2x^2+x-6}$ а) x_0 =2; б) x_0=-2; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x \cdot tg2x}{\sin^2 3x}$

12 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2-7x+2}{6-x-x^2}$ а) x_0 =1; б) x_0=2; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot tg2x}{x^2}$

13 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-7x-8}{2x^2+5x+3}$ а) x_0 =-2; б) x_0=-1; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{tg2x}$

14 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{4x^2-3x-1}{5x-x^2-4}$ а) x_0 =-1; б) x_0=1; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x \cdot \cos 8x}{\sin 10x}$

15 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$ а) x_0 =2; б) x_0=-2; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \cdot tg3x}{\sin^2 3x}$

16 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2-x-6}{5x-x^2-3}$ а) x_0 =1; б) x_0=2; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x \cdot tg3x}{x^2}$

17 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$ а) x_0 =-2; б) x_0=-1; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{tg3x}$

18 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2}$ а) x_0 =-1; б) x_0=1; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x \cdot \cos 5x}{\sin 3x}$

19 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$ а) x_0 =2; б) x_0=-2; в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x \cdot tg2x}{\sin^2 4x}$

20 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-x-10}{7x-x^2-10}$ а) x_0 =1; б) x_0=2; в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x\cdot tg2x}{x^2}$

Решение типового примера:

Найти указанные пределы

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}$ $\quad а) x_0=-1\quad б) x_0=1\quad в) x_0=\infty$

$$а)\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^2-3\cdot(-1)+2}{4-(-1)-3(-1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{1+3+2}{4+1-3}=\frac{6}{2}=3$$

$$б)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}=\frac{1-3+2}{4-1-3}=\frac{0}{0}\ \textit{неопределенность}$$

Для избавления от неопределённости представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись формулой $ax^2+bx+c=a\ x-x_1\quad x-x_2$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Представим числитель и знаменатель в виде произведения линейных множителей, решив уравнения:

$$x^2-3x+2=0$$

$$D=9-8=1$$

$$x_1=\frac{3+1}{2}=2$$

$$x_2=\frac{3-1}{2}=1$$

$x^2-3x+2=\ x-2\quad x-1$

$-3x^2-x+4=0$

$D=1+48=49=7^2$

$x_1-\frac{1+7}{-6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

$x_2=\frac{1-7}{-6}=1$

$-3x^2-x+4=\ -3x-4\quad x-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(-3x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{-3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{1-2}{-3-4}=\frac{1}{7}$$

$$в)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)-\textit{неопределенность}$$

Для избавления от неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе старшую степень переменной

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0+0}{0-0-3}=-\frac{1}{3}$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 0}{0\cos 0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{matrix}\sin 4x\sim 4x,\\ x\to 0\end{matrix}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos 0}=\frac{2}{1}=2$$

4.3 Производная функции и её приложения

Производной функции в точке x_0 называется число, равное пределу отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x\to 0$, т.е.

$$k_{кас}=\lim_{\Delta x\to 0}k_{сек}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y=f(x) в точке x_0 $k_{кас}=f'(x)$.

Механический смысл производной: производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0.

Таблица производных некоторых элементарных функций:

1 $C'=0;\quad (C=const)$

2 $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

3 $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5 $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

6 $\left(e^x\right)' = e^x$

7 $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

8 $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

9 $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10 $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11 $\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12 $\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13 $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14 $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15 $\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

16 $\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила нахождения производной:

$$c = const, \quad u = (x), \quad v = x(x)$$

$$1)\ c' = 0$$

$$2)\ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$3)\ (cu)' = cu'$$

$$4)\ (uv)' = u'v + uv'$$

$$5)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u* *(y=f(u))*, а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x* *(u=g(x))*. Тогда *y* называется функцией от функции или сложной функцией $y=f(g(x))$. Производная сложной функции $y=f(g(x))$ находится по правилу $y'(x) = f'(u)g'(x)$.

Исследование функции с целью построения графика

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Достаточное условие монотонности: Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f\ '(x_0)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'\ (x_0)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс — при минимуме.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f\ ''(x_0)>0$. Тогда кривая $y= f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f\ ''(x_0)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Точка с абсциссой x_0 называется точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: Если x_0 — точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

Прямая $y=кx+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

При $k=0$ имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Если не существует хотя бы один из пределов, определяющих $к$ и b, то асимптоты нет.

Если $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции.

Общая схема исследования функции и построения ее графика

1) найти область определения функции (и по возможности указать область значений функции); найти вертикальные асимптоты;

2) исследовать функцию на чётность, нечётность, периодичность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) с помощью первой производной исследовать функцию на возрастание, убывание, найти точки экстремума;

5) с помощью второй производной исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба;

6) найти горизонтальные, наклонные асимптоты;

7) по необходимости найти дополнительные точки графика функции;

8) построить график функции.

4.4 Индивидуальное задание № 5

1) Найти производные , пользуясь правилами и формулами дифференцирования:

1 а) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$ б) $y=\frac{4x+7tgx}{\sqrt{1+9x^2}}$ в) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$ г) $y=\ln arctg2x$

2 а) $y=(2x^5-3\sqrt{x^3}+1)^6$ б) $y=\frac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$ в) $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$ г) $y=\ln\arcsin 6x$

3 а) $y=(x^2-\frac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$ б) $y=\frac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$ в) $y=e^{tgx}\cdot\ln 2x$ г) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$

4 а) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ б) $y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}$ в) $y=2^{8x}\cdot tg3x$ г) $y=\arcsin\ln 4x$

5 а) $y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$ б) $y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x + tgx}$ в) $y = e^{ctgx} \cdot \sin 4x$ г) $y = sinln\,5x$

6 а) $y = (6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5)^2$ б) $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ в) $y = 3^{tgx} \cdot \arcsin(x^2)$ г) $y = lnsin\,6x$

7 а) $y = (x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + 2)^3$ б) $y = \frac{arctg7x}{2-9x^2}$ в) $y = e^{ctgx} \cdot \cos 6x$ г) $y = sinln\,2x$

8 а) $y = (x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4)^4$ б) $y = \frac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ в) $y = 4^{\cos x} \cdot arctg2x$ г) $y = lncos\,5x$

9 а) $y = (3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2)^5$ б) $y = \frac{\cos 6x}{\sin 3x}$ в) $y = e^{x^3} \cdot tg7x$ г) $y = arcsinln\,2x$

10 а) $y = (x^4 + 2\sqrt[3]{x} + 1)^2$ б) $y = \frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x - ctgx}$ в) $y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin 2x$ г) $y = lncos\,7x$

11 а) $y = (3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7)^3$ б) $y = \frac{x^4+tgx}{\sqrt{4x^2+7}}$ в) $y = e^{\arcsin x} \cdot ctg3x$ г) $y = arctg\,ln\,8x$

12 а) $y = (2x^4 + 3\sqrt[3]{x} - 1)^4$ б) $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\cos 2x}$ в) $y = 5^{arctgx} \cdot \sin 4x$ г) $y = lnarcsin\,3x$

13 а) $y = (3x^5 - 2\sqrt[4]{x} - 8)^5$ б) $y = \frac{ctgx - \cos x}{\sqrt{5x^2+1}}$ в) $y = e^{x^3} \cdot \arcsin 2x$ г) $y = arctg\,ln\,5x$

14 а) $y = (x^3 - \frac{3}{x^2} + 4)^2$ б) $y = \frac{\sqrt{2-3x^5}}{\sin 2x}$ в) $y = 4^{tgx} \cdot arctg3x$ г) $y = lncos\,4x$

15 а) $y = (5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2)^3$ б) $y = \frac{2^x + ctgx}{\sqrt{4+2x^3}}$ в) $y = e^{\sin x} \cdot \arccos 3x$ г) $y = arctg\,ln\,7x$

16 а) $y = (2x^4 + \frac{2}{x^3} - 7)^4$ б) $y = \frac{\sqrt{1-7x^5}}{\cos 4x}$ в) $y = 5^{6x} \cdot \arcsin 5x$ г) $y = lnsin\,7x$

17 а) $y = (3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5)^5$ б) $y = \frac{2x^2 - ctgx}{\sqrt{6x^2+5}}$ в) $y = e^{\arcsin x} \cdot \cos 4x$ г) $y = arctg\,ln\,5x$

18 а) $y = (x^6 + \frac{3}{x^4} - 8)^2$ б) $y = \frac{\sqrt{2-5x}}{\sin 3x}$ в) $y = 4^{arctgx} \cdot \cos 6x$ г) $y = lnarcsin\,2x$

19 а) $y = (4x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} - 7)^3$ б) $y = \frac{\cos x - 4x^3}{\sqrt{8+7x^5}}$ в) $y = e^{\sin x} \cdot arctg3x$ г) $y = sinln\,7x$

20 а) $y = (3x^2 - \frac{5}{x^3} + 1)^4$ б) $y = \frac{\sqrt{4x^5-2}}{\sin 7x}$ в) $y = 2^{arctgx} \cdot \arcsin 2x$ г) $y = lncos\,6x$

2) Задан закон S(t) изменения пути движения материальной точки. Требуется найти значение скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0

1 $S(t)=2t^4-3t^2+t-2$, $t_0=2$

2 $S(t)=3t^4-2t^2-t+1$, $t_0=1$

3 $S(t)=4t^4-3t^2-2t-1$, $t_0=2$

4 $S(t)=t^4+t^2-3t+1,\ t_0=1$

5 $S(t)=2t^4-2t^2+t-2,\ t_0=2$

6 $S(t)=3t^4-t^2+2t+1,\ t_0=1$

7 $S(t)=4t^4-3t^2-t+2,\ t_0=2$

8 $S(t)=2t^4+4t^2-5t-1,\ t_0=1$

9 $S(t)=3t^4+t^2-2t+1,\ t_0=2$

10 $S(t)=4t^4+2t^2-7t-3,\ t_0=1$

11 $S(t)=2t^4-3t^3+t^2-2,\ t_0=2$

12 $S(t)=3t^4-2t^3-t^2+1,\ t_0=1$

13 $S(t)=4t^4-3t^3-2t^2-1,\ t_0=2$

14 $S(t)=t^4+3t^3-3t^2+1,\ t_0=1$

15 $S(t)=2t^4-2t^3+t^2-2,\ t_0=2$

16 $S(t)=3t^4-t^3+2t^2+1,\ t_0=1$

17 $S(t)=4t^4-3t^3-t^2+2,\ t_0=2$

18 $S(t)=2t^4+4t^3-5t^2-1,\ t_0=1$

19 $S(t)=3t^4+t^3-2t^2+1,\ t_0=2$

20 $S(t)=4t^4+2t^3-7t^2-3,\ t_0=1$

3) Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления и начертить их графики

1 а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ б) $y = \frac{x^2+1}{x}$

2 а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ б) $y = \frac{x^2}{x-1}$

3 а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ б) $y = \frac{x^2-3}{x+2}$

4 а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ б) $y = \frac{x^2-8}{x-3}$

5 а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ б) $y = \frac{x^2+9}{x+4}$

6 а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ б) $y = \frac{x^2+4}{x}$

7 а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ б) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$

8 а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$ б) $y = \frac{x^2+5}{x+2}$

9 а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$ б) $y = \frac{x^2-5}{x-3}$

10 а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$ б) $y = \frac{x^2-15}{x+4}$

11 а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$ б) $y = \frac{x^2+9}{x}$

12 а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$ б) $y = \frac{x^2+8}{x+1}$

13 а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$ б) $y = \frac{x^2+21}{x-2}$

14 а) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$ б) $y = \frac{x^2+16}{x+3}$

15 а) $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$ б) $y = \frac{x^2-12}{x-4}$

16 а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$ б) $y = \frac{x^2+25}{x}$

17 а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ б) $y = \frac{x^2+24}{x+1}$

18 а) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$ б) $y = \frac{x^2+32}{x-2}$

19 а) $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$ б) $y = \frac{x^2+27}{x+3}$

20 а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$ б) $y = \frac{x^2-7}{x-4}$

Решение типового примера:

1) Найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

$$a)y = \left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 = U^4, U = 3x^3 - 2\sqrt[3]{x} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2U \cdot \frac{dU}{dx} = 2\left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right) \cdot \left(3x^3 - 2x^{\frac{2}{3}} - 1\right)'$$

$$= 2\left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right) \cdot \left(9x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= 2\left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right) \cdot \left(9x^2 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$б) y = \frac{arcsin\,3x}{1-8x^2} \qquad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{arcsin\,3\,x}{1-8x^2}\right)' = \frac{\left(arcsin\,3\,x\right)'\left(1-8x^2\right) - \left(1-8x^2\right)^2 arcsin\,3\,x}{\left(1-8x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\left(3x\right)'\left(1-8x^2\right) - (-16x)\,arcsin\,3\,x}{(1-8x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3(1-8x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} + 16x\,arcsin\,3\,x}{(1-8x^2)} = -\frac{3(1-8x^2) + 16x\sqrt{1-9x^2}\,arcsin\,3\,x}{(1-8x^2)^2}$$

$в) y = 2^{3x} \cdot tg2x \qquad \left(U \cdot V\right)' = U'V + UV'$

$$\frac{dy}{dx} = \left(2^{3x}\right)' \cdot tg2x + 2^{3x}\left(tg2x\right)' = 2^{3x} \cdot 3\,ln\,2 \cdot tg2x + 2^{3x} \cdot \frac{1}{cos^2\,2\,x} \cdot (2x)'$$

$$= 2^{3x} 3\,ln\,2 \cdot tg2x + \frac{2^{3x+1}}{cos^2\,2\,x}$$

$г) y = cosln\,5\,x$

$$\frac{dy}{dx} = \left(cosln\,5\,x\right)' = -sinln\,5\,x \cdot (ln\,5\,x)' = -sinln\,5\,x \cdot \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = -sinln\,5\,x \cdot \frac{5}{5x}$$

$$= -\frac{sinln\,5\,x}{x}$$

2) Задан закон S(t) изменения пути движения материальной точки. Требуется найти значение скорости и ускорения этой точки в момент времени t_0.

$$S\left(t\right) = 3t^4 - 2t^3 - t^2 + 1, \quad t_0 = 1$$

Значение скорости и ускорения материальной точки в некоторый момент времени равны соответственно значению в этот момент времени первой и второй производных функции, задающей закон изменения пути движения точки, т.е.

$$V\ \ t\ \ = S'\ \ t$$
$$a\ \ t\ \ = S''\ \ t$$
$$S'\ \ t\ \ = 12t^3 - 4t - 1$$
$$S''\ \ t\ \ - 36t^2 - 4$$
$$V\ \ 1\ \ = S'\ \ 1\ \ = 12 - 4 - 1 = 4\ \text{ед.ск.}$$
$$a\ \ 1\ \ = S''\ \ 1\ \ = 36 - 4 = 32\ \text{ед.уск.}$$

3) Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить её график

а) y=-x^3-9x^2-24x-21.

Область определения $D(y)=R$, то есть функция непрерывна на всей числовой прямой, точек разрыва нет и, следовательно, нет вертикальных асимптот.

$y(-x)=-(-x)^3-9(-x)^2-24(-x)-21=x^3-9x^2+24x-21$, так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни чётной, ни нечётной, а её график не симметричен ни относительно оси OY, ни относительно начала координат (0; 0).

$y(x)\cap OY$ в точке (0; -21), так как при $x=0 \Rightarrow y=-21$.

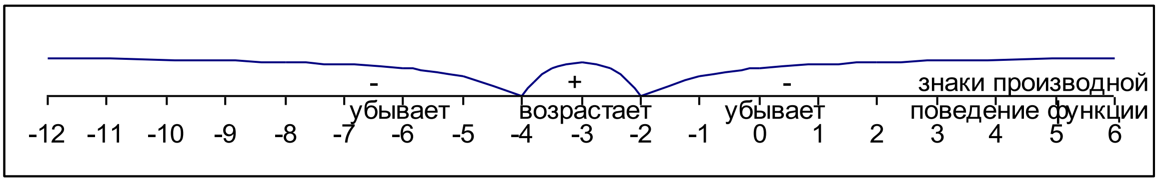
$y'(x)=(-x^3-9x^2-24x-21)'=-3x^2-18x-24$

$y'(x)=0 \Rightarrow -3x^2-18x-24=0$

$x^2+6x+8=0$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot8=4$

$$x_1 = \frac{-6-2}{2} = -4$$
$$x_1 = \frac{-6+2}{2} = -2$$



функция убывает на (-∞; -4] и на [-2; +∞);

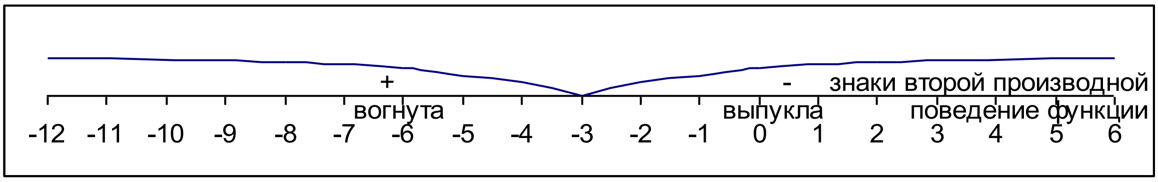
функция возрастает на [-4; -2]

x=-2 – точка max y=-1 – max, получили (-2; -1);

x=-4 – точка min y=-5 – min, получили (-4; -5).

5) $y''(x)$=-6x-18

$y''(x)=0 \Rightarrow -6x-18=0 \Rightarrow x=-3$



функция вогнута на (-∞; -3];

функция выпукла на [-3; +∞);

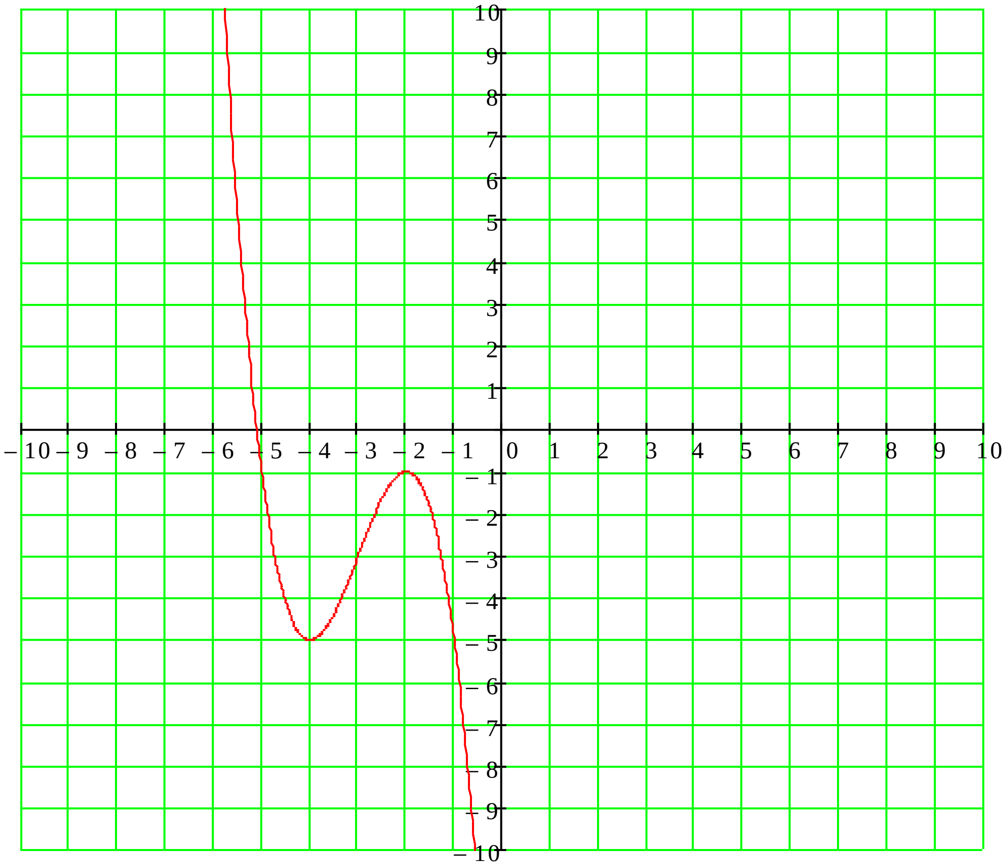
x=-3 – точка перегиба, получили (-3; -3).

$y=kx+b$ – уравнение наклонной (горизонтальной) асимптоты, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-9x^2-24x-21}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(-x^2-9x-24-\frac{21}{x}\right) = -\infty$$

так как k=-∞, то функция не имеет ни наклонных, ни горизонтальных асимптот, то есть, никаких асимптот нет.

Построение графика функции:



б) $y = \frac{x^2}{x-1\;{}^3}$

Область определения $D(y)$=(-∞; 1)∪(1; ∞), то есть функция непрерывна на своей области определения, x=1 - точка разрыва, исследуем поведение функции вокруг этой точки.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

следовательно, x=1 - вертикальная асимптота.

Так как область определения $D(y)$ не симметричное относительно нуля множество, то функция не является ни чётной, ни нечётной, а её график не симметричен ни относительно оси OY, ни относительно начала координат (0; 0).

$y(x) \cap OX$ в точке (0; 0), так как при y=0 $\Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$

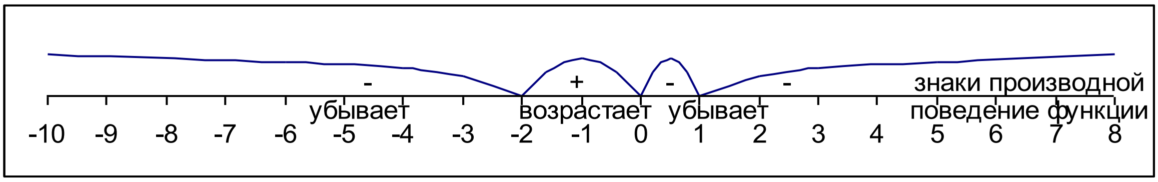
y(x) $\cap OY$ в точке (0; 0), так как при x=0 $\Rightarrow y = \frac{0^2}{(0+1)^3} = 0$

Вычислим $y'(x)$

$$y' = \left(\frac{x^2}{(x-1)^3}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1)^3 - x^2\left((x-1)^3\right)'}{(x-1)^6} = \frac{2x(x-1)^3 - x^2 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x-1)^2(2x^2-2x-3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{-x^2-2x}{(x-1)^4}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow -x^2-2x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ x = 0 \end{matrix}$$



функция убывает на (-∞; -2], [0; 1) и на [-2; +∞);

функция возрастает на [-2; 0];

x=0 – точка max y=0 – max, получили (0; 0);

x=-2 – точка min y=-$^4/_{27}$ – min, получили (-2; -$^4/_{27}$).

Вычислим $y''(x)$ $y'' = \left(\frac{-x^2-2x}{(x-1)^4}\right)' = \frac{(-x^2-2x)'(x-1)^4 - (-x^2-2x)\left((x-1)^4\right)'}{(x-1)^8} =$

$$= \frac{(-2x-2)(x-1)^4 - (-x^2-2x)4(x-1)^3}{(x-1)^8}$$

$$= \frac{(x-1)^3\left((-2x-2)(x-1) - 4(-x^2-2x)\right)}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{-2x^2+2x-2x+2+4x^2+8x}{(x-1)^5} = \frac{2(x^2+4x+1)}{(x-1)^5}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2+4x+1)}{(x-1)^5} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x^2+4x+1 = 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

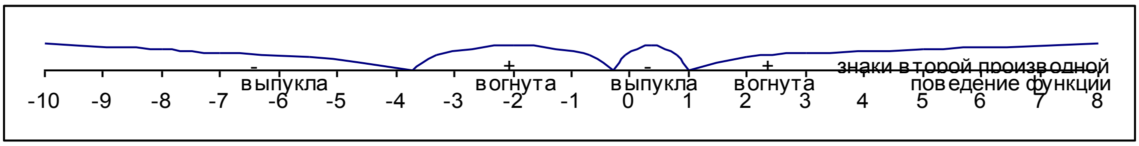
$$x^2+4x+1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 \approx -0{,}3$$

$$x_2 \approx -3{,}7$$



функция выпукла на $\left(-\infty; -2-\sqrt{3}\right) \cup \left(-2+\sqrt{3}; +\infty\right)$

функция вогнута на $\left(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$

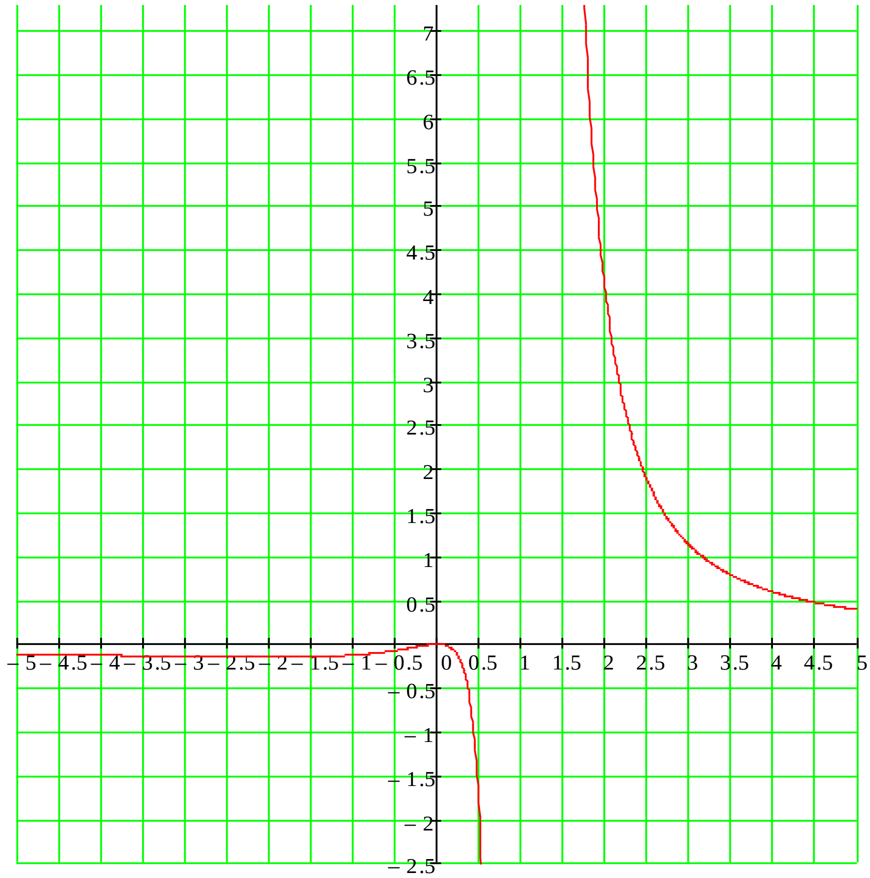
$\left(-2-\sqrt{3}; \frac{-(2+\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})^3}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3}; \frac{-(2-\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})^3}\right)$ - точки перегиба

y=kx+b – уравнение наклонной (горизонтальной) асимптоты, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow b = 0$$

итак, y=0 – уравнение горизонтальной асимптоты.



7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
− 0.5
− 1
− 1.5
− 2
− 2.5
− 5 − 4.5 − 4 − 3.5 − 3 − 2.5 − 2 − 1.5 − 1 − 0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5

Список использованных источников

1. Башмаков, М.И. Математика. [Электронный ресурс] : учебник для спо / М.И. Башмаков .- 6-е изд., стер.- Москва : Академия, 2018 .- 256 с.- ISBN 978-5-4468-7888-8 .- (ЭБС Академия) .- Режим доступа : https://www.academia-moscow.ru/reader/?id=414531
2. Башмаков, М.И. Математика. Задачник [Электронный ресурс] : учебное пособие для спо / М.Н. Башмаков .- 5-е изд., стер.- Москва : Академия, 2018 .- 416 с.- ISBN 978-5-4468-7283-1 .- (ЭБС Академия) .- Режим доступа : https://www.academia-moscow.ru/reader/?id=346687
3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями. В 2 ч. Ч.1 : учебное пособие для спо / Н. В. Богомолов .- 2-е изд., испр. и доп.- Москва : Юрайт, 2018 .- 364 с .- (Профессиональное образование) .- ISBN 978-5-534-02008-3
4. Богомолов, Н.В. Математика. Задачи с решениями. В 2 ч. Ч.2 : учебное пособие для спо / Н.В. Богомолов.- 2-е изд., испр. и доп.- Москва : Юрайт, 2018 .- 285 с.- (Профессиональное образование) . - ISBN 978-5-534-02010-6
5. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для спо / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко .- 5-е изд., пер. и доп.- Москва : Юрайт, 2018 .- 396с.- (Профессиональное образование) .- ISBN 978-5-534-02325-12.
6. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1: учебник для спо [Электронный ресурс] / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев .- Москва : ООО "КУРС", 2017 .- 304 с.- ISBN 978-5-906923-05-9 .- (ЭБС znanium) . - Режим доступа : http://znanium.com/bookread2.php?book=615108
7. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2: учебник длч спо [Электронный ресурс] / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев .- Москва : ООО "КУРС", 2017 .- 368 с.- ISBN 978-5-906923-34-9 .- (ЭБС znanium) .- Режим доступа : http://znanium.com/bookread2.php?book=872363