Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра электро- и теплоэнергетики

Л.А. Влацкая, Н.Г. Семенова

ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2018

УДК 621.311.001.57
ББК 31.27-05
В 58

Рецензент – кандидат технических наук, доцент С. В. Митрофанов

Влацкая, Л. А.
В 58 Исследование и моделирование электроэнергетических систем : методические указания / Л. А. Влацкая, Н. Г. Семенова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург; 2018. – 40 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Исследование и моделирование электроэнергетических систем» студентами направления подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника очной и заочной форм обучения.

УДК 621.311.001.57
ББК 31.27-05

Содержание

Введение 4
1 Лабораторная работа № 1. Математические модели линейного программирования 5
1.1 Постановка задачи № 1. Выбор оптимального количества трансформаторов, устанавливаемых на территории предприятия 5
1.2 Методические указания к выполнению задания № 1 7
1.3 Пример решения линейной оптимизационной задачи средствами MathCad и Excel 8
2 Лабораторная работа № 2. Математические модели нелинейного программирования. Методы одномерной безусловной оптимизации 15
2.1 Постановка задачи №2. Нелинейные задачи безусловной оптимизации 15
2.2 Методические указания к выполнению задания № 2 16
2.3 Пример решения нелинейной задачи безусловной оптимизации методом покоординатного спуска с минимизацией шага 17
3 Лабораторная работа № 3. Математические модели нелинейного программирования. Методы одномерной условной оптимизации 21
3.1 Постановка задачи № 3. Выбор оптимальной мощности компенсирующих устройств в схемах электроснабжения 21
3.2 Методические указания к выполнению задания № 3 24
3.3 Пример решения оптимизационной задачи выбора мощности и мест установки компенсирующих устройств 25
4 Лабораторная работа № 4. Математические модели оптимизационных задач с недетерминированной исходной информацией 31
4.1 Постановка задачи № 4. Выбор варианта развития энергосистемы в условиях неопределенности 31
4.2 Методические указания к выполнению задания № 4 32
5 Лабораторная работа № 5. Математические модели многокритериальных оптимизационных задач 34
5.1 Постановка задачи № 5. Выбор стратегии развития энергосистемы по многокритериальной модели 34
5.2 Методические указания к выполнению задания № 5 35
5.3 Пример решения многокритериальной оптимизационной задачи выбора стратегии развития сети 37
Список использованных источников 40

Введение

Успешное изучение дисциплины «Исследование и моделирование электроэнергетических систем» (ИиМЭС), является основой для выполнения теоретического и экспериментального разделов выпускной квалификационной работы студентами магистерской программы «Автоматизированные энергетические системы и комплексы».

Целью освоения дисциплины является: формирование систематических знаний основ современных методов математического, имитационного моделирования и искусственного интеллекта и их реализация посредством прикладных программных продуктов в решении задач по развитию и функционированию электроэнергетических систем.

Основные задачи освоения дисциплины включают в себя: изучить методы математического моделирования электроэнергетических систем и процессов, протекающих в них; научить использовать методы математического моделирования посредством программ имитационного моделирования; изучить основные методы искусственного интеллекта в решении задач по развитию и функционированию электроэнергетических систем.

Лабораторные работы являются одним из основных видов занятий по дисциплине ИиМЭС. Выполнение заданий по лабораторным работам направлено на формирование у студента следующих профессиональных компетенций:

– способность планировать и ставить задачи исследования, выбирать методы экспериментальной работы, интерпретировать и представлять результаты научных исследований;

– способность самостоятельно выполнять исследования.

Методические указания по выполнению лабораторных работ в первом семестре включают в себя следующие разделы: Основы математического моделирования; математическое моделирование оптимизационных задач и их применение в электроэнергетике; математические модели элементов и объектов электроэнергетических систем.

1 Лабораторная работа № 1. Математические модели линейного программирования

Цель работы: Разработка математических моделей линейного программирования и их решение средствами MathCad и Excel.

1.1 Постановка задачи № 1. Выбор оптимального количества трансформаторов, устанавливаемых на территории предприятия

От шин 10 кВ главной понизительной подстанции (ГПП) предприятия через линию W и трансформаторы T осуществляется электроснабжение цехов с суммарными расчетными нагрузками $P_ц$ и $Q_ц$. (рисунок 1.1).

Определить оптимальное количество цеховых трансформаторов напряжением 10/0,4 кВ с заданными номинальной мощностью $S_{тр}$ и коэффициентом загрузки $k_з$ при условии, что со стороны питания потребляемая реактивная мощность не должна превышать значения $Q_э$. Устройства для компенсации реактивной мощности могут быть установлены как на шинах 10 кВ ГПП Q_{10}, так и на шинах 0,4 кВ цеховых трансформаторов Q_{04}. Количество цеховых трансформаторов определить по критерию минимума затрат на установку трансформаторов и компенсирующих устройств Q_{10} и Q_{04}.

Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 1.1. Затраты на единицу мощности трансформаторов и компенсирующих устройств обозначены через $Z_{тр}$, Z_{10} и Z_{04}, соответственно.

Задачу решить с помощью MathCad и Excel. Сравнить полученные результаты решения.

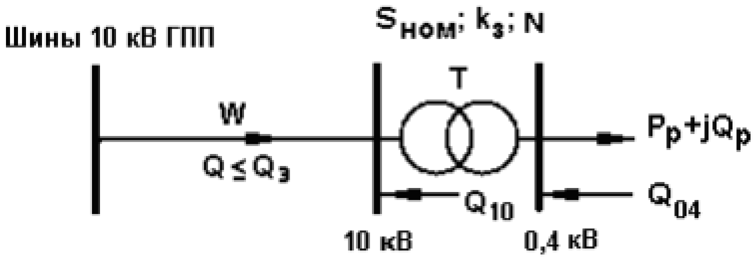


Рисунок 1.1 – Расчетная схема электроснабжения предприятия

Таблица 1.1 – Исходные данные

№ вар	$P_ц$, МВА	$Q_ц$, Мвар	$k_з$	$S_{тр}$, кВА	$Z_{тр}$, у.е./кВА	Z_{10}, у.е./квар	Z_{04}, у.е./квар	$Q_э$, квар
1	20,1	18,3	0,7	1000	9	4	10	5700
2	25,4	20	0,75	1600	10	4,5	9	4200
3	30,6	25,1	0,8	2500	9	4	8	10050
4	33,7	29	0,85	1000	10	5	8,5	15000
5	35,9	30,4	0,9	1600	9	5	10	12700
6	28	24,5	0,75	2500	11	4,5	9	13150
7	33,3	25,6	0,8	1000	10	3,8	8	10800
8	30,9	28	0,7	1600	12	5	9	8900
9	32	27,7	0,75	2500	11	4	10	11100
10	26,8	22,8	0,8	630	12	3,8	9	9650
11	28,4	25,2	0,7	1000	10	5	10	13600
12	24,1	20	0,75	630	10	4	9	9400
13	30,7	25,4	0,8	1600	9	3,5	8	16300
14	25,2	20,4	0,7	630	10	5	9	10250
15	23,9	19,7	0,8	1000	9	5,5	9	9900
16	32,1	22	0,7	630	8	4,5	9	13400
17	31,3	24,6	0,75	1000	9,5	4,2	7	17400
18	37	21	0,8	630	10,5	5,2	9,5	12900
19	26,9	18,2	0,7	2500	8	6,5	7,5	12050
20	25,9	19,2	0,75	630	12	5,5	10	11450
21	36,6	28,7	0,8	1000	14	7,8	12	18200
22	31	27,5	0,75	630	9	4,5	6,5	19300
23	34,2	16,1	0,75	630	11	7	10	8400
24	20	13,5	0,8	1600	8	6,5	9	9350
25	26,7	19,4	0,75	630	11,5	8	7,5	11200
26	22,1	16,3	0,7	2500	12,5	6,3	8,5	9100
27	31,7	21,1	0,8	630	9,8	4,75	8,2	8700
28	29,2	23,8	0,7	1000	12	7,5	11	11150
29	25,6	20,5	0,75	1600	8,5	6,5	8	9950
30	19,9	15,1	0,8	630	10,5	6	8,7	10050

1.2 Методические указания к выполнению задания № 1

По заданным расчетным активной ($P_ц$) и реактивной ($Q_ц$) нагрузкам цеха определить полную расчетную нагрузку:

$$S_ц = \sqrt{P_ц^2 + Q_ц^2}\,. \tag{1.1}$$

При полной компенсации реактивной мощности на шинах 0,4 кВ ($Q_{04} = Q_ц$) мощность, передаваемая через трансформаторы T, будет определяться:

$$S_ц = \sqrt{P_ц^2 + (Q_ц - Q_{04})^2}\,. \tag{1.2}$$

По величине мощности, передаваемой через трансформаторы T, номинальной мощности $S_{тр}$ и их коэффициенту загрузки $k_з$ определить максимальное и минимальное количество трансформаторов:

$$N_{\min} = \frac{P_ц}{S_{тр} \cdot k_з}, \qquad N_{\max} = \frac{S_ц}{S_{тр} \cdot k_з}\,. \tag{1.3}$$

Значения $N_{\min}$ и $N_{\max}$ следует округлить до ближайших бóльших целых чисел (при решении задачи средствами MathCad для округления воспользоваться встроенной функцией ***ceil*(*x*)**). Очевидно, что оптимальное количество цеховых трансформаторов N будет находится в интервале $N_{\min} \le N \le N_{\max}$.

Определить величину мощности компенсирующих устройств на шинах 0,4 кВ, позволяющую сократить количество трансформаторов:

$$Q_{04}{}' = \frac{Q_ц}{N_{\max} - N_{\min}}\,. \tag{1.4}$$

Для определения оптимального количества трансформаторов необходимо найти минимум целевой функции, представляющей собой суммарные затраты на цеховые трансформаторы и компенсирующие устройства на шинах 0,4 и 10 кВ.

Минимум целевой функции ищется при следующих ограничениях:

1) Потребляемая реактивная мощность с учетом возможной установки компенсирующих на шинах 0,4 и 10 кВ не должна превышать значения $Q_э$.

2) Искомое количество трансформаторов, уменьшаемое за счет установки компенсирующих устройств на шинах 0,4 кВ, определяется условием:

$$N \geq N_{\max} - \frac{Q_{04}}{Q_{04}'}. \tag{1.5}$$

Решение задачи должно выполняться с учетом граничных условий (неотрицательность искомых переменных [1]).

При решении задачи использовать единицы мощности – кВА и квар.

1.3 Пример решения линейной оптимизационной задачи средствами MathCad и Excel

Решение оптимизационной задачи линейного программирования в средах MathCad и Excel рассмотрим на следующем примере.

Цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов: А, В, С и не менее 20 штук изделий каждого типа. На изделия уходит 4, 3.4 и 2 кг металла соответственно, при его общем запасе 340 кг, а также расходуются по 4.75, 11 и 2 кг пластмассы, при ее общем запасе 700 кг. Прибыль, полученная от каждого изделия равна 4, 3 и 2 рублей.

Определить сколько изделий каждого типа необходимо выпустить, для получения максимальной прибыли в рамках установленных запасов металла и пластмассы. Определить максимальную прибыль.

1.3.1 Решение задачи средствами MathCad

Для решения поставленной задачи с помощью MathCad можно воспользоваться технологией решения систем нелинейных уравнений и задач оптимизации.

Решение задачи организуется следующим образом:

1) Задать начальные приближения для всех неизвестных, входящих в систему уравнений (поскольку в MathCad будем использовать решение системы уравнений итерационным методом).

2) Указать начало блока решения с помощью ключевого слова ***Given***.

3) Записать уравнения и неравенства в любом порядке. Уравнения и неравенства составляются с использованием логических операций: =, <, >, ≤, ≥ на панели инструментов «**Boolean**».

4) Завершить блок решения функцией ***Find***, ***Minner***, ***Minimize*** или ***Maximize***.

Find*/*Minner*(*x*1, *x*2, ...)** – возвращает вектор значений неизвестных, удовлетворяющий системе уравнений, объявленным в блоке решения (Find*** – поиск точного решения; ***Minner*** – поиск приближенного решения).

***Minimize*/*Maximize*(*f*, *x*1, *x*2, ...) –** возвращает вектор значений неизвестных, удовлетворяющий ограничениям, объявленным в блоке решения и соответствующий минимальному(максимальному) значению функции ***f*(*x*1, *x*2, ...)**. Функцию ***f*(*x*1, *x*2,...)** и все параметры задачи необходимо определить перед блоком решения.

Пример решения рассматриваемой задачи в MathCad приведен на рисунке 1.2.

$$f(x1, x2, x3) := 4 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 2 \cdot x3$$

$$x1 := 1 \qquad x2 := 1 \qquad x3 := 1$$

Given

$$x1 \geq 20 \qquad x2 \geq 20 \qquad x3 \geq 20$$

$$4 \cdot x1 + 3.4 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \leq 340$$

$$4.75 \cdot x1 + 11 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \leq 700$$

$$x1 + x2 + x3 = 100$$

$$x := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3) \qquad x = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = 332$$

Рисунок 1.2 – Решение в MathCad

1.3.2 Решение задачи средствами Excel

Одной из надстроек, имеющихся в стандартной конфигурации Excel, является «Поиск решения», предназначенный для решения разнообразных задач оптимизации.

Для активации надстройки «Поиск решения» необходимо выполнить: вкладка **Файл** → группу **Параметры**. → В появившемся диалоговом окне **Параметры Excel** выбрать **Надстройки** → **Управление: Надстройки Excel** → нажать кнопку **Перейти**. → В открывшемся окне **Надстройки** (рисунок 1.3) установить галочку напротив поля **Поиск решения** → нажать кнопку **ОК**. → Во вкладке **Данные** появится новая группа **Анализ** с кнопкой **Поиск решения** (рисунок 1.4).

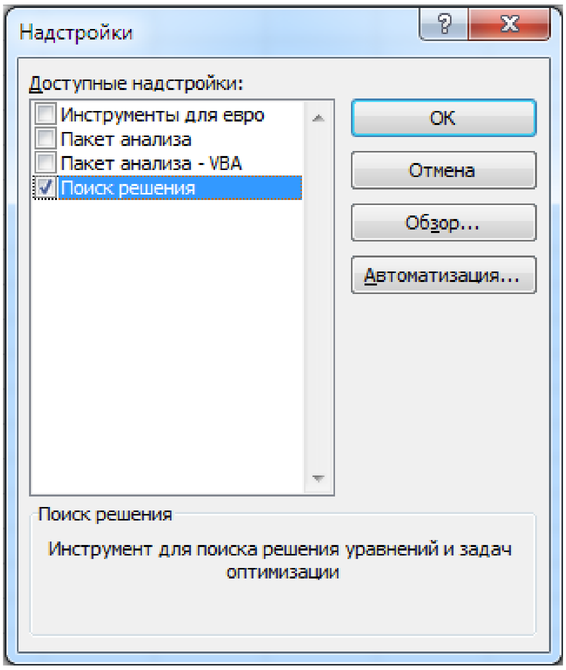


Рисунок 1.3 – Активация надстройки «Поиск решения»

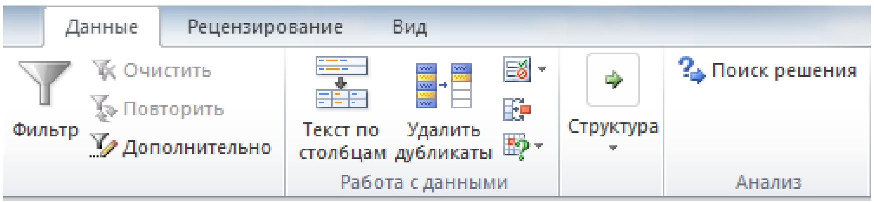


Рисунок 1.4 – «Поиск решения» во вкладке Данные

1.3.2.1 Размещение комментариев и исходной информации в рабочем поле

Один из вариантов ввода исходной информации для решения задачи приведен на рисунке 1.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль Z1=	4					x1=	0
3	Z2=	3					x2=	0
4	Z3=	2					x3=	0
5	**Ресурсы:**							
6	металл =	340						
7	пластмасса =	700					**Целевая функция Z=**	0
8	план выпуска =	100						
9	Нормы расхода:							
10	металла a11 =	4	a12 =	3,4	a13 =	2		
11	пластмассы a21 =	4,75	a22 =	11	a23 =	2		
12	**Левые части ограничений**							
13	a11x1+a12x2+a13x3=	0						
14	a21x1+a22x2+a23x3=	0						
15	x1+x2+x3 =	0						

Рисунок 1.5 – Ввод данных

В ячейки B2…B4, B6…B8, B10…B11, D10…D11, F10…F11 помещена цифровая информация, соответствующая тексту слева.

В ячейках H2…H4 помещены начальные значения искомых переменных x1, x2, x3, принятые равными нулю. В ячейку H7 введено *выражение* для вычисления целевой функции:

=B2*H2+B3*H3+B4*H4 (1.6)

начальное значение которой равно нулю при начальных нулевых значениях искомых переменных.

В ячейки B13…B15 помещены выражения для вычисления левых частей ограничений-неравенств:

=B10*H2+D10*H3+F10*H4 (1.7)

=B11*H2+D11*H3+F11*H4 (1.8)

(или в другой форме записи (1.8) =СУММ(B11*H2;D11*H3;D12*H4)

=СУММ(H2:H4), (1.9)

значения которых равны нулю при начальных нулевых значениях переменных.

1.3.2.2 Ввод информации в диалоговое окно «Поиск решения»

В главном меню активировать вкладку **Данные** → **Поиск решения** → на рабочем поле появится диалоговое окно «Параметры поиска решения» (рисунок 1.6).

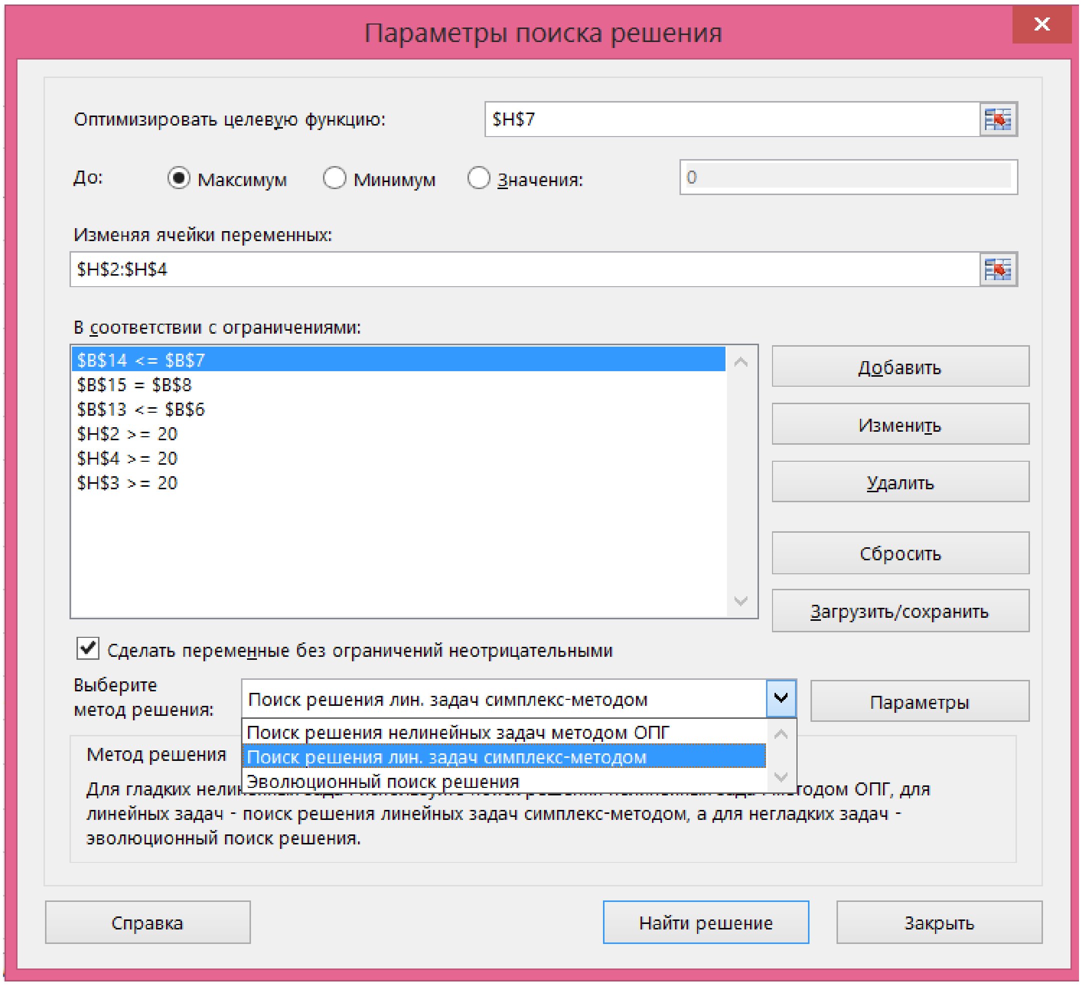


Рисунок 1.6 – Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

В этом окне устанавливается адрес ячейки с выражением целевой функции H7. В перечне «*До*» выбрать «*Максимум*», поскольку требуется найти максимум целевой функции.

В окно «***Изменяя ячейки переменных***» ввести адреса ячеек с искомыми переменными H2…H4. Массив адресов ячеек вводится, как правило, через знак «;» (точка с запятой). С целью сокращения процедуры ввода массива адресов ячеек, идущих по порядку, вводятся адреса начальной и конечной ячеек через знак «:» (двоеточие) или указывается диапазон ячеек курсором мыши в рабочем поле.

Для ввода ограничений в диалоговом окне «**Параметры поиска решения**» активировать кнопку «***Добавить***», после чего откроется диалоговое окно «**Добав-**

ление ограничения» (рисунок 1.7). В поле «***Ссылка на ячейку***» ввести адрес ячейки, содержащей левую часть ограничения (или указать ячейку курсором мыши в рабочем поле). В среднем поле окна «***Добавление ограничения***» в выпадающем списке выбрать вид ограничения (<=, >=, = и др.). В поле «***Ограничение***» ввести число или адрес ячейки, содержащей правую часть ограничения. Рисунок 1.7 иллюстрирует ввод ограничений по количеству всех выпускаемых изделий.

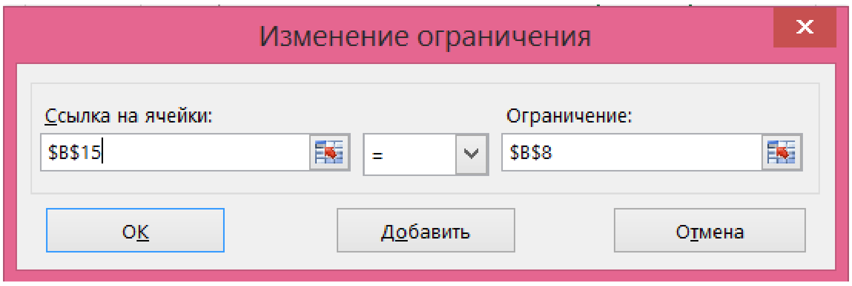


Рисунок 1.7 – Ввод ограничений по количеству всех выпускаемых изделий

После ввода очередного ограничения активировать кнопку «***Добавить***» и ввести следующее ограничение. После ввода всех ограничений нажать кнопку **ОК**, в результате чего автоматически осуществляется переход к диалоговому окну «**Параметры поиска решений**» (рисунок 1.6). В поле ограничения будут находиться все ограничения решаемой задачи. Граничные условия по выпуску изделий каждого вида (не менее 20 штук) учитываются в виде ограничений:
H2 >= 20
H4 >= 20
H3 >= 20.

После ввода исходных данных в диалоговое окно «**Параметры поиска решения активируется**» из выпадающего списка «***Выберите метод решения***» выбрать «*Поиск решения линейных задач симплекс-методом*».

1.3.2.3 Получение решения

Нажать кнопку «***Найти решений***». → На рабочем поле появятся результаты вычислений (рисунок 1.8):

– значения искомых переменных x1, x2, x3 в ячейках H2, H3 и H4;

– максимальное значение целевой функции в ячейке H7;

– левые части ограничений в ячейках B13, B14, B15.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль Z1=	4					x1=	56
3	Z2=	3					x2=	20
4	Z3=	2					x3=	24
5	**Ресурсы:**							
6	металл =	340						
7	пластмасса =	700					**Целевая функция Z=**	332
8	план выпуска =	100						
9	Нормы расхода:							
10	металла a11 =	4	a12 =	3,4	a13 =	2		
11	пластмассы a21 =	4,75	a22 =	11	a23 =	2		
12	**Левые части ограничений**							
13	a11x1+a12x2+a13x3=	340						
14	a21x1+a22x2+a23x3=	534						
15	x1+x2+x3 =	100						

Рисунок 1.8 – Результаты решения

2 Лабораторная работа № 2. Математические модели нелинейного программирования. Методы одномерной безусловной оптимизации

Цель работы: Реализация в MathCad алгоритмов решения задач нелинейного программирования методами одномерной безусловной оптимизации

2.1 Постановка задачи №2. Нелинейные задачи безусловной оптимизации

Найти экстремум функции $f(x)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$. Найденное решение проверить с использованием блока решений в MathCad.

Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Исходные данные

№ вар	Вид функции $f(x)$	x_1^0	x_2^0	Экстремум
1	$x_1^2 + x_2^2 - 0{,}5x_1 - 1{,}6x_2 + 2$	1	1	min
2	$x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 + 3$	0	2	min
3	$1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$	1	1	min
4	$\left(x_1^2 + x_2 - 8\right)^2 + \left(x_1 + x_2^2 - 18\right)^2 + 3$	3	3	min
5	$x_1x_2 + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$	2	2	min
6	$(x_1 - 2{,}4)^2 + x_2^2 - 3$	1	-2	min
7	$x_1^3 + 8x_2^3 + 6x_1x_2 + 1$	2	1	min
8	$4 - \left(x_1^2 + x_2 - 18\right)^2 - \left(x_1 + x_2^2\right)^2$	-2	1	max
9	$x_1\sqrt{x_2} - x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 3$	0	5	max
10	$x_1^2 + x_2^2 - 2\left(x_1 + 2x_2\right) + 7{,}35$	0	3	min
11	$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 9x_2$	2	2	min
12	$6 - \left(x_1^2 + x_2 - 11\right)^2 - \left(x_1 + x_2^2 - 7\right)^2$	1	1	max
13	$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2 + 2$	0	3	min

Продолжение таблицы 2.1

№ вар	*Вид функции* $f(x)$	x_1^0	x_2^0	Экстремум
14	$(x_1-2)^2+2x_2^2+5{,}5$	0	2	min
15	$x_1^3+x_1x_2^2+6x_1x_2-2$	-1	-1	max
16	$x_2\sqrt{x_1}-x_2^2-x_1+6x_2$	3	5	max
17	$2x_1^2+3(x_2-1{,}5)^2+1$	-1	2	min
18	$x_1^2+x_2^2-2x_1-4\sqrt{x_1x_2}-2x_2+8$	1	4	min
19	$\left(x_1^2+x_2\right)^2+\left(x_1+x_2^2-18\right)^2+4$	1	-2	min
20	$\left(x_1^2+x_2-7\right)^2+\left(x_1+x_2^2-11\right)^2+3$	5	1	min
21	$x_1^2x_2+x_2^3+6x_1x_2+1$	0	-1	max
22	$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2$	-2	1	min
23	$6x_1x_2-8x_1^3+x_2^3-3$	1	2	max
24	$x_1^2+x_2^3-15x_1x_2$	3	6	min
25	$2\left(x_1+x_2-x_1^2\right)+4x_1x_2-10x_2^2-5$	-1	1	max
26	$6x_1-x_2-x_1^2+x_1\sqrt{x_2}$	6	1	max
27	$x_1^3+x_1x_2^2+6x_1x_2$	1	-1	min
28	$x_1^3+x_2^2-3x_1-2x_2+4$	0	2	min
29	$(x_1-1)^2+2x_2^2+3$	-1	2	min
30	$2x_1+3x_2-x_1^2-x_2^3-2$	3	4	max

2.2 Методические указания к выполнению задания № 2

Рассмотрим метод покоординатного спуска [2], сущность которого состоит в поочередном движении по каждой из координат: изменение одного из параметров при фиксированных значениях других до тех пор, пока происходит обнаружение лучшего значения целевой функции. После этого значение изменяемого параметра фиксируется и осуществляется переход к изменению следующего.

Наиболее простым способом определения направления спуска является выбор в качестве $\bar{p}_k$ одного из координатных векторов $\pm\bar{e}_1,\pm\bar{e}_2,\ldots,\pm\bar{e}_n$. Это позволяет поочередно изменять все независимые переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ так, чтобы на каждой из них достигалось улучшение значения целевой функции. Очередность варьирования независимых переменных при этом устанавливается произвольно и не меняется в процессе поиска.

Метод эффективен для малого числа параметров и поиска единственного экстремума функции. Для уменьшения числа вычислений величину шага λ меняют при каждом переходе от поиска экстремума по одной переменной к поиску экстремума по другой переменной.

Обобщенный алгоритм метода покоординатного спуска рассмотрим на примере поиска минимума целевой функции [2].

1. Задается исходная точка поиска $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

2. Определяется направление поиска; если варьируется переменная x_1, то $\overline{p}_1 = \{1,0,0\ldots,0\}$.

3. Осуществляется первый шаг в направлении $\overline{p}_1 : x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 e_1$.

Значение λ_1, выбирается способом удвоения или минимизацией функции $f(x_1^0 + \lambda_1 e_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ по λ_1. Если аналитическое выражение целевой функции достаточно простое, для выбора λ_1^0 можно использовать условие: $\dfrac{df}{d\lambda_1} = 0$.

4. После определения положения минимума по координате x_1 выполняется шаг в направлении $\overline{p}_2 = \{0,1,0,\ldots,0\}$: $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 e_2$. Значение λ_2, определяется посредством минимизации функции $f(x_1^1, x_2^0 + \lambda_2 e_2, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ по λ_2 и т. д.

5. Поиск заканчивается при выполнении условия: $\max\limits_i \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon$.

2.3 Пример решения нелинейной задачи безусловной оптимизации методом покоординатного спуска с минимизацией шага

Алгоритм метода покоординатного спуска с минимизацией шага λ рассмотрим на примере.

Пусть целевая функция имеет вид $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$. Требуется найти ее минимум с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

2.3.1 Нулевая итерация ($k = 0$).

Примем в качестве исходной точку $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Значение целевой функции в этой точке $f(X^0) = 7$.

2.3.2 Первая итерация ($k = 1$).

Зададимся направлением спуска параллельно координатной оси ox_1, $\bar{p}_1 = \{1{,}0\}$. Изменим переменную x_1. Значение λ^1 на первой итерации найдем из условия: $\dfrac{df}{d\lambda^1} = 0$:

$$f(x_1 + \lambda^1 e_1, x_2) = 2(x_1 + \lambda^1 e_1)^2 + x_2^2 - x_2(x_1 + \lambda^1 e_1),$$
$$\frac{df}{d\lambda^1} = 4(x_1 + \lambda^1 e_1)e_1 - x_2 e_1 = 0,$$
$$\lambda^1 = 0{,}25x_2^0 - x_1^0 = 0{,}25 \cdot 1 - 2 = -1{,}75.$$

Тогда $x_1^1 = x_1^0 + \lambda^1 e_1 = 2 + (-1{,}75) \cdot 1 = 0{,}25$.

Таким образом, определена точка $X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$, в которой значение целевой функции $f(X^1) = 0{,}875$.

Условие окончания поиска:

$$\varepsilon = \max_i \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right| = \max \left| x_1^1 - x_1^0 \right| = 1{,}75.$$

2.3.3 Вторая итерация ($k = 2$).

Изменим переменную x_2. Значение λ^2 на второй итерации, найдем из условия: $\dfrac{df}{d\lambda^2} = 0$:

$$f(x_1, x_2 + \lambda^2 e_2) = 2{x_1}^2 + (x_2 + \lambda^2 e_2)^2 - x_1(x_2 + \lambda^2 e_2),$$
$$\frac{df}{d\lambda^2} = 2(x_2 + \lambda^2 e_2)e_2 - x_1 e_2 = 0,$$
$$\lambda^2 = 0{,}5x_1^1 - x_2^0 = 0{,}25 \cdot 0{,}5 - 1 = -0{,}875.$$

Тогда $x_2^2 = x_2^1 + \lambda^2 e_2 = 1 + (-0{,}875) \cdot 1 = 0{,}125$.

Таким образом, определена точка $X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$, в которой значение целевой функции $f(X^2) = 0{,}109$.

Условие окончания поиска:

$$\varepsilon = \max_i \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right| = \max\left| x_1^1 - x_1^0 ; x_2^1 - x_2^0 \right| = 1{,}75.$$

2.3.4 От точки X^2 вновь изменим направление поиска. Дальнейшие вычисления сведены в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Результаты итерационного расчета

Номер итерации k	$\overline{p}_k$	λ	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	ε
0			2	1	7	
1	{1,0}	-1,750	0,250	1,000	0,875	1,75
2	{0,1}	-0,875	0,250	0,125	0,109	1,75
3	{1,0}	-0,219	0,031	0,125	0,014	0,875
4	{0,1}	-0,109	0,031	0,016	$1{,}709 \cdot 10^{-3}$	0,219
5	{1,0}	-0,027	$3{,}906 \cdot 10^{-3}$	0,016	$2{,}136 \cdot 10^{-4}$	0,109
6	{0,1}	-0,014	$3{,}906 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}766 \cdot 10^{-3}$	$1{,}64 \cdot 10^{-4}$	0,027
7	{1,0}	$-6{,}348 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}441 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}766 \cdot 10^{-3}$	$8{,}345 \cdot 10^{-5}$	0,025
8	{0,1}	$8{,}545 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}441 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}221 \cdot 10^{-3}$	$1{,}043 \cdot 10^{-5}$	$8{,}545 \cdot 10^{-5}$

После восьмой итерации выполняется условие окончания поиска:

$$\varepsilon = \max\left(\left| x_1^8 - x_1^7 \right| ; \left| x_2^8 - x_2^7 \right| \right) = \max(6{,}348 \cdot 10^{-3} ; 8{,}545 \cdot 10^{-3}) = 8{,}545 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, минимум целевой функции при заданной точности решения ($\varepsilon = 0{,}01$) находится в точке $X_{\min}{}' = \begin{pmatrix} -2{,}441 \cdot 10^{-3} \\ -1{,}221 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$, значение функции $f(X_{\min}{}') = 8{,}545 \cdot 10^{-5}$. Отметим, что точный минимум целевой функции находится в точке $X_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(X_{\min}) = 0$.

Фрагменты решения и проверки рассмотренного примера в MathCad приведены на рисунках 2.1, 2.2.

Целевая функция $f(x1,x2) := 2\cdot x1^2 + x2^2 - x1\cdot x2$

Начальные приближения $x1_0 := 2$ $\quad x2_0 := 1$

Точность $\varepsilon := 0.01$

Закон изменения переменных с шагом λ $X(x,\lambda,E) := x + \lambda\cdot E$

Выражение для поиска λ $Dif(F,x1,x2,\lambda,E) := \frac{d}{d\lambda}F(x1,x2,\lambda,E)$

Нулевая итерация

Примем в качестве исходной точку $A0 := \begin{pmatrix} x1_0 \\ x2_0 \end{pmatrix}$ Значение ЦФ в этой точке $f0 := f(A0_0, A0_1) = 7$

Первая итерация

Изменим переменную x_1 Значение λ найдем из условия $\frac{df}{d\lambda} = 0$ $\qquad p1 := (1 \;\; 0)$

$a(x1,\lambda,E) := X(x1_0,\lambda,E) \qquad b(x2,\lambda,E) := x2_0$

$f1(x1,x2,\lambda,E) := f(x1,x2)$ substitute, $x1 = a(x1,\lambda,E), x2 = b(x2,\lambda,E) \;\rightarrow 2\cdot E^2\cdot\lambda^2 + 4\cdot E\cdot\lambda\cdot x1_0 - E\cdot\lambda\cdot x2_0 + 2\cdot(x1_0)^2 - x1_0\cdot x2_0 + (x2_0)^2$

$Dif(f1,X1,X2,\lambda,E) \rightarrow 4\cdot E^2\cdot\lambda + 4\cdot E\cdot X1_0 - E\cdot X2_0$

$E := 1$

$\lambda1(x1,x2) := Dif(f1,x1,x2,\lambda,E) = 0$ solve, $\lambda \;\rightarrow \frac{x2_0}{4} - x1_0$

$\Lambda_1 := \lambda1(x1,x2) = -1.75$

$x1_1 := X(x1_0,\Lambda_1,E) = 0.25$

Точка $A1 := \begin{pmatrix} x1_1 \\ x2_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}$ значение целевой функции $f1(x1,x2) := f(A1_0, A1_1) \rightarrow 0.875$

Проверка условия окончания поиска

$\max(|x1_1 - x1_0|, |x2_0 - x2_0|) \le \varepsilon = 0 \qquad \max(|x1_1 - x1_0|, |x2_0 - x2_0|) = 1.75$

Рисунок 2.1 – Фрагмент решения

$f(x1,x2) := 2\cdot x1^2 + x2^2 - x1\cdot x2$

$x1 := 2 \qquad x2 := 1$

Given

$x := \text{Minimize}(f,x1,x2) \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x_0,x_1) = 0$

Рисунок 2.2 – Проверка решения

3 Лабораторная работа № 3. Математические модели нелинейного программирования. Методы одномерной условной оптимизации

Цель работы: Разработка математических моделей нелинейного программирования задач одномерной условной оптимизации и их решение средствами MathCad и Excel.

3.1 Постановка задачи № 3. Выбор оптимальной мощности компенсирующих устройств в схемах электроснабжения

Питание группы потребителей осуществляется от шин ГПП напряжениям U, кВ (рисунок 3.1). Необходимо:

1) вычертить схему электроснабжения в соответствии с вариантом таблицы 3.1;

2) найти оптимальный вариант распределения компенсирующих устройств заданной суммарной мощности Q_K между узлами нагрузки по условию минимума потерь активной мощности в линиях. Значения активных сопротивлений кабельных линий R_i, реактивные нагрузки потребителей Q_i, величины U и Q_K приведены в таблице 3.1.

3) определить теоретически возможный и практический минимум потерь активной мощности в системе электроснабжения. Технические данные нерегулируемых конденсаторных установок приведены в таблице 3.2.

Задачу решить с использованием надстройки «Поиск решений» в Excel. Корректность полученного результата проверить, реализовав математическую модель в MathCad.

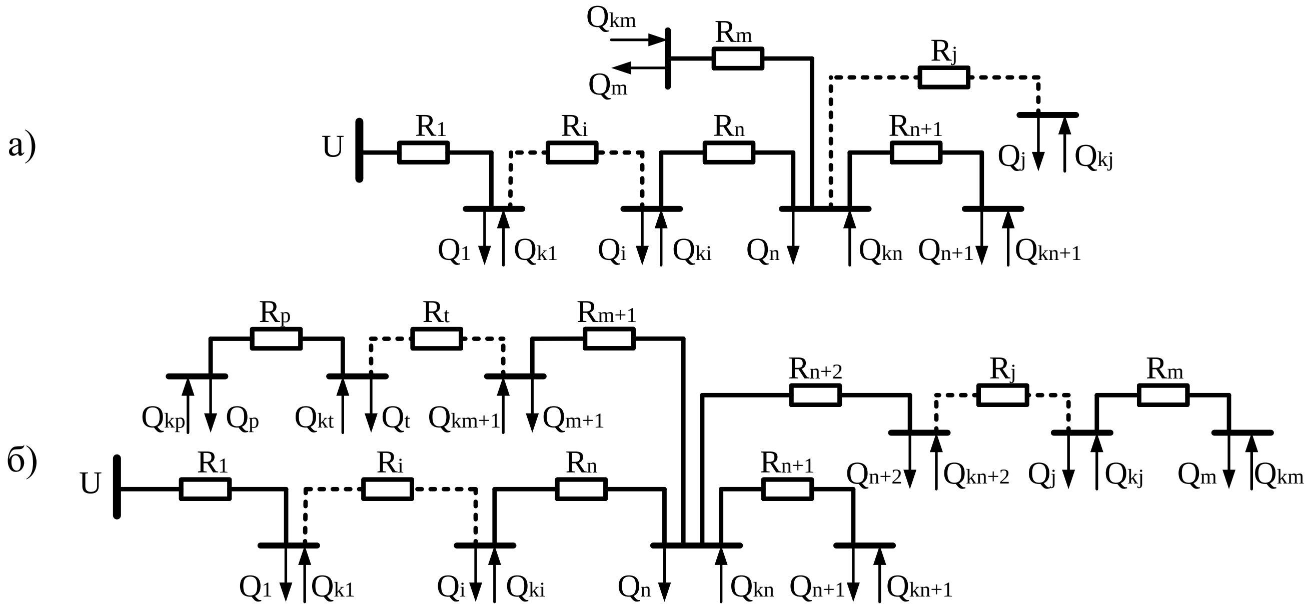


Рисунок 3.1 – Схемы электроснабжения

Таблица 3.2 – Технические данные конденсаторных установок

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Шкала номинальных мощностей, квар
КРМ-6,3/10,5-300	10, 6	300, 600, 900, 1200, 1500, 1800 и т.д. (шаг изменения 300 квар)

Таблица 3.1 – Варианты схем электроснабжения и их параметры

№ вар	*схема*	***n***	***m***	***p***	***U***, кВ	***R***$_i$, Ом								***Q***$_i$, квар								***Q***$_K$
						R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	
1.	а)	1	4	–	10,5	0,2	0,3	0,8	0,4	0,2	0,5	0,25	0,3	2000	3050	2100	1350	1000	3000	1450	970	11000
2.	б)	1	4	5	6,3	0,2	0,4	0,2	0,5	0,6	0,4	0,4	0,5	3000	2000	3200	500	1500	1250	1020	1150	10500
3.	а)	2	4	–	6,3	0,6	0,9	0,3	0,3	0,5	0,45	0,25	0,6	900	1200	3600	2500	2750	3100	970	1090	13500
4.	б)	1	5	6	10,5	0,3	0,2	0,4	0,25	0,6	0,5	0,7	0,25	3000	1300	850	1000	3500	2800	2100	750	11400
5.	б)	2	4	5	10,5	0,7	0,5	0,5	0,3	0,4	0,6	0,35	0,15	3100	2200	1000	4050	1700	1400	1250	1000	12700
6.	а)	4	5	–	6,3	0,25	0,6	0,5	0,4	0,55	0,4	0,4	0,3	1000	950	2700	3000	1400	1800	3100	850	10050
7.	б)	1	4	6	6,3	0,5	0,6	0,4	0,7	0,6	0,2	–	–	1500	1300	3000	2450	3600	1150	–	–	12750
8.	б)	2	6	7	10,5	0,5	0,6	0,3	0,95	0,2	0,4	0,2	–	1200	700	2300	1450	750	3000	4150	–	13050
9.	а)	1	5	–	6,3	0,6	0,7	0,2	0,45	0,7	0,5	0,35	0,6	2800	650	3600	2350	2900	3400	3100	1100	15900
10.	б)	2	4	6	10,5	0,7	0,7	0,5	0,8	0,4	0,6	0,55	0,7	1150	1000	1050	1800	2650	1900	750	3300	11200
11.	б)	2	5	7	6,3	0,1	0,2	0,4	0,3	0,85	0,5	0,2	0,65	2550	3000	1000	3700	900	1650	3800	600	15650
12.	а)	2	3	–	10,5	0,1	0,3	0,25	0,7	0,2	0,65	0,15	0,9	2000	2100	950	900	2750	3000	2200	4000	13800
13.	б)	2	4	7	10,5	0,35	0,25	0,1	0,4	0,75	0,3	0,85	0,1	2500	3500	2000	3300	2050	1900	4200	700	16750
14.	б)	3	5	7	10,5	0,25	0,25	0,1	0,55	0,8	0,9	0,45	–	1550	3500	3500	2550	700	2100	950	–	13600
15.	а)	3	5	–	6,3	0,25	0,1	0,1	0,4	0,15	0,6	0,15	0,75	850	1500	650	2800	3000	3050	700	3000	13250
16.	а)	4	6	–	10,5	0,45	0,2	0,25	0,87	0,6	0,5	0,4	0,55	4000	1750	2500	1350	1500	4250	2950	500	16300
17.	б)	3	5	8	6,3	0,9	0,15	0,25	0,3	0,35	0,5	0,25	0,2	2550	2000	2500	1850	1900	1700	3350	450	13500
18.	а)	3	6	–	6,3	0,15	0,4	0,4	0,35	0,9	0,6	0,2	0,65	2050	3000	1200	3450	1560	1550	3800	100	15050
19.	а)	4	8	–	10,5	0,75	0,15	0,25	0,4	0,45	0,5	0,6	0,8	1150	1100	750	1950	2650	1800	3350	750	10800
20.	б)	1	6	7	10,5	0,55	0,65	0,95	0,5	0,3	0,45	0,7	0,6	300	1450	3100	1100	750	2300	4150	1050	12050
21.	б)	2	7	8	6,3	0,5	0,15	0,2	0,6	0,75	0,8	0,15	0,5	1050	1750	950	2850	2750	3050	700	3100	13250
22.	а)	4	6	–	10,5	0,2	0,65	0,55	0,25	0,4	0,45	0,65	0,3	1100	850	2650	2900	1400	1950	3100	950	10150
23.	б)	1	6	8	6,3	0,7	0,5	0,5	0,3	0,4	0,6	0,35	0,15	2100	3350	850	4050	16500	1550	1250	1000	11750
24.	а)	1	6	–	6,3	0,25	0,35	0,6	0,9	0,25	0,55	0,5	0,3	1850	3150	2100	1350	950	2850	1450	950	10950
25.	а)	3	7	–	10,5	0,2	0,7	0,9	0,5	0,55	0,2	0,4	0,35	1100	1950	2700	3050	1450	1950	3100	850	11050
26.	б)	2	5	6	6,3	0,9	0,7	0,1	0,5	0,65	0,97	0,45	0,6	1550	3500	2500	3550	900	2150	950	1150	14600
27.	а)	4	8	–	10,5	0,6	0,95	0,35	0,3	0,55	0,4	0,25	0,7	950	1200	3550	2500	2800	3150	1050	1090	13550
28.	б)	2	5	8	6,3	0,3	0,25	0,45	0,5	0,65	0,5	0,75	0,8	3050	1250	1050	950	2950	2800	2100	950	11500
29.	б)	3	6	7	6,3	0,7	0,5	0,5	0,3	0,4	0,6	0,35	0,15	2950	2350	1100	4050	1700	1450	1250	2100	13700
30.	а)	2	5	–	10,5	0,75	0,55	0,85	0,25	0,9	0,7	0,25	0,1	3100	2200	1000	3950	1600	1700	1350	1000	12500

П р и м е ч а н и е : для схемы рисунка 3.1,а: $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{n+2,m}$; для схемы рисунка 3.1,б: $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{n+2,m}$; $t=\overline{m+1,p}$

3.2 Методические указания к выполнению задания № 3

Суммарные потери активной мощности в радиальной схеме от реактивных нагрузок Q_i при установке у каждой i-й нагрузки компенсирующего устройства мощностью Q_{ki} определяются выражением:

$$\Delta P = \frac{1}{U^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - Q_{ki}\right)^2 R_i \qquad (3.1)$$

Суммарные потери активной мощности в магистральной схеме при установке у каждой i-й нагрузки компенсирующего устройства мощностью Q_{ki} определяются выражением:

$$\Delta P = \frac{R_1}{U^2}\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i - \sum_{i=1}^{n}Q_{ki}\right)^2 + \frac{R_2}{U^2}\left(\sum_{i=2}^{n}Q_i - \sum_{i=2}^{n}Q_{ki}\right)^2 + \ldots + \frac{R_i}{U^2}\left(\sum_{i}^{n}Q_i - \sum_{i}^{n}Q_{ki}\right)^2 + \\ + \ldots + \frac{R_n}{U^2}\left(Q_n - Q_{kn}\right)^2 \qquad (3.2)$$

Необходимо составить целевую функцию и найти ее минимум при ограничении:

$$\sum_{i=1}^{n}Q_{ki} = Q_K \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n}Q_{ki} - Q_K = 0 \qquad (3.3)$$

и граничном условии:

$$Q_{ki} \geq 0, \; i = 1, 2 \ldots n \qquad (3.4)$$

Выражения целевой функции, ограничение (3.3) и граничные условия (3.4) являются нелинейной математической моделью задачи одномерной условной оптимизации с непрерывными переменными. Для ее решения [3] необходимо записать функцию Лагранжа (3.5), определить частные производные этой функции по всем переменным и приравнять их к нулю (3.6).

Функция Лагранжа:

$$L = \Delta P + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}Q_{ki} - Q_K\right) \rightarrow \min, \qquad (3.5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = \ldots = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_{ki}} = \ldots = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_{ki} - Q_K = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Решение системы линейных уравнений (3.6) даст искомые значения мощностей компенсирующих устройств Q_{ki}, размещенных вдоль линии.

Решение системы (3.6) с непрерывными переменными позволит рассчитать теоретический минимум потерь активной мощности. Для определения практического минимума потерь можно воспользоваться методом подбора [4] – подобрать варианты, близкие к вариантам решения задачи с непрерывными переменными при соблюдении ограничения (3.3).

3.3 Пример решения оптимизационной задачи выбора мощности и мест установки компенсирующих устройств

Решение задачи выбора оптимальной мощности компенсирующих устройств в средах MathCad и Excel рассмотрим для варианта, исходные данные которого приведены в таблице 3.3. Необходимо:

1) вычертить схему электроснабжения в соответствии с исходными данными таблицы 3.3;

2) найти оптимальный вариант распределения компенсирующих устройств заданной суммарной мощности Q_K между узлами нагрузки по условию минимума потерь активной мощности в линиях;

3) определить теоретически и практически возможный минимум потерь активной мощности в системе электроснабжения, полагая, что на предприятии используются нерегулируемые конденсаторные установки КРМ – 6,3/10,5 – 300 квар (шаг изменения 300 квар).

Таблица 3.3 – Исходные данные для решения задачи

<table>
<tr><td colspan="2">вариант схемы</td><td colspan="2">U, кВ</td><td colspan="2">n</td><td colspan="2">m</td><td colspan="2">p</td></tr>
<tr><td colspan="2">а)
$i=\overline{1,n}$; $j=\overline{n+2,m}$</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">–</td></tr>
<tr><td colspan="10">$\boldsymbol{R_i}$, Ом</td></tr>
<tr><td>R_1</td><td>R_2</td><td>R_3</td><td>R_4</td><td>R_5</td><td>R_6</td><td>R_7</td><td>R_8</td><td>R_9</td><td>R_{10}</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,25</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,6</td><td>0,7</td><td>0,9</td></tr>
<tr><td colspan="10">$\boldsymbol{Q_i}$, квар</td></tr>
<tr><td>Q_1</td><td>Q_2</td><td>Q_3</td><td>Q_4</td><td>Q_5</td><td>Q_6</td><td>Q_7</td><td>Q_8</td><td>Q_9</td><td>Q_{10}</td></tr>
<tr><td>4500</td><td>3100</td><td>2050</td><td>1350</td><td>1000</td><td>3000</td><td>1120</td><td>1350</td><td>1240</td><td>1950</td></tr>
<tr><td colspan="10">$\boldsymbol{Q_K}$, квар</td></tr>
<tr><td colspan="10">8900</td></tr>
</table>

В соответствии с условиями задачи схема электроснабжения будет иметь структуру, приведенную на рисунке 3.2.

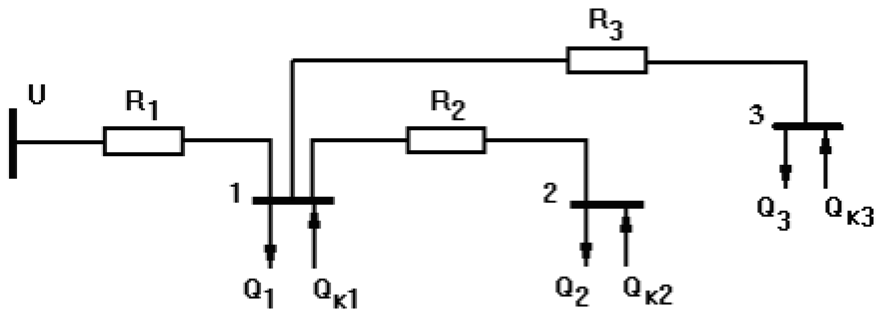


Рисунок 3.2 – Схема электроснабжения

Суммарные потери активной мощности в рассматриваемой схеме будут определяться выражением:

$$\Delta P=\frac{1}{U^2}\left[(Q_1+Q_2+Q_3-Qk_1-Qk_2-Qk_3)^2R_1+(Q_2-Qk_2)^2R_2+(Q_3-Qk_3)^2R_3\right] \quad (3.7)$$

Минимум функции ΔP ищется при ограничении:

$$\sum_{i=1}^{3}Q_{ki}=Q_K \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3}Q_{ki}-Q_K=0 \quad (3.8)$$

и граничных условиях:

$$Q_{ki}\geq 0,\ i=1,2,3 \quad (3.9)$$

Функция Лагранжа:

$$L=\frac{1}{U^2}\Big[(Q_1+Q_2+Q_3-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})^2R_1+(Q_2-Q_{k2})^2R_2+(Q_3-Q_{k3})^2R_3\Big]+ \qquad (3.10)$$
$$+\lambda(Q_{k1}+Q_{k2}+Q_{k3}-Q_K)\rightarrow \min$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

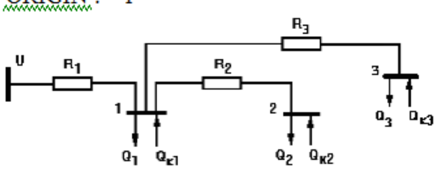
Частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_{k1}}=-\dfrac{2}{U^2}R_1(Q_1+Q_2+Q_3-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_{k2}}=-\dfrac{2}{U^2}R_1(Q_1+Q_2+Q_3-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})-\dfrac{2}{U^2}R_2(Q_2-Q_{k2})+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_{k3}}=-\dfrac{2}{U^2}R_1(Q_1+Q_2+Q_3-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})-\dfrac{2}{U^2}R_3(Q_3-Q_{k3})+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=Q_{k1}+Q_{k2}+Q_{k3}-Q_K=0 \end{cases} \qquad (3.11)$$

3.3.1 Решение задачи средствами MathCad

Решение задачи в MathCad приведено на рисунках 3.3 – 3.5.

ORIGIN := 1



Исходные данные

U := 10 кВ QK := 8900 кВар

R1 := 0.2 Ом R2 := 0.4 Ом R3 := 0.25 Ом

Q1 := 4500 кВар Q2 := 3100 кВар Q3 := 2050 кВар

Целевая функция

$$\Delta P(Qk1,Qk2,Qk3) := \frac{(Q1+Q2+Q3-Qk1-Qk2-Qk3)^2\cdot R1}{U^2}+\frac{(Q2-Qk2)^2\cdot R2}{U^2}+\frac{(Q3-Qk3)^2\cdot R3}{U^2} \quad \text{Вт}$$

Функция Лагранжа

$$L(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) := \frac{(Q1+Q2+Q3-Qk1-Qk2-Qk3)^2\cdot R1}{U^2}+\frac{(Q2-Qk2)^2\cdot R2}{U^2}+\frac{(Q3-Qk3)^2\cdot R3}{U^2}+\lambda\cdot(Qk1+Qk2+Qk3-QK)$$

Рисунок 3.3 – Исходные данные

Поскольку на рабочем поле листа MathCad функция Лагранжа определена (рисунок 3.3), то в блоке решений Given … Find частные производные можно определить с использованием панели «Математический анализ» (рисунок 3.4).

Given

$$\frac{d}{dQk1}L(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{dQk3}L(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) = 0$$

$$\frac{d}{dQk2}L(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{d\lambda}L(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) = 0$$

$$Qk1 \geq 0 \qquad Qk2 \geq 0 \qquad Qk3 \geq 0$$

$$Qk := Find(Qk1,Qk2,Qk3,\lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 3750.0 \\ 3100.0 \\ 2050.0 \\ 3.0 \end{pmatrix} \begin{matrix} кВар \\ кВар \\ кВар \\ \end{matrix}$$

искомые переменные: мощности КУ и неопределенный множитель Лагранжа

Рисунок 3.4 – Поиск оптимального распределения мощности КУ по узлам с использованием блока решений Given … Find

Теоретический минимум потерь активной мощности в линиях:

$\Delta P(Qk_1,Qk_2,Qk_3) = 1.125 \times 10^3$ Вт

С учетом установки нерегулируемых конденсаторных установок подбираем варианты их мощностей, близкие к найденным переменным (перекомпенсация не допускается)

Практически возможный минимум потерь активной мощности в линиях:

1 вариант: $Qk1 := 3600$ кВар $Qk2 := 3000$ кВар $Qk3 := 2100$ кВар

Проверка условия: $Qk1 + Qk2 + Qk3 \leq QK$ $Qk1 + Qk2 + Qk3 = 8.7 \times 10^3$ кВар $QK = 8.9 \times 10^3$ кВар

$\Delta P(Qk1,Qk2,Qk3) = 1.851 \times 10^3$ Вт

2 вариант: $Qk1 := 3900$ кВар $Qk2 := 3000$ кВар $Qk3 := 1800$ кВар

Проверка условия: $Qk1 + Qk2 + Qk3 \leq QK$ $Qk1 + Qk2 + Qk3 = 8.7 \times 10^3$ кВар $QK = 8.9 \times 10^3$ кВар

$\Delta P(Qk1,Qk2,Qk3) = 2.001 \times 10^3$ Вт

3 вариант: $Qk1 := 3600$ кВар $Qk2 := 2700$ кВар $Qk3 := 2400$ кВар

Проверка условия: $Qk1 + Qk2 + Qk3 \leq QK$ $Qk1 + Qk2 + Qk3 = 8.7 \times 10^3$ кВар $QK = 8.9 \times 10^3$ кВар

$\Delta P(Qk1,Qk2,Qk3) = 2.751 \times 10^3$ Вт

Вывод: теоретический минимум потерь активной мощности в линиях (ΔP=1,125 кВт) достигается установкой компенсирующих устройств с мощностями: Qk1 = 3750 кВар; Qk2 = 3100 кВар; Qk3 = 2050 кВар.
практический минимум потерь активной мощности в линиях (ΔP=1,851 кВт) достигается установкой нерегулируемых конденсаторных установок с мощностями: Qk1 = 3600 кВар; Qk2 = 3000 кВар; Qk3 = 2100 кВар.

Рисунок 3.5 – Определение теоретического и практического минимума потерь актовной мощности

3.3.2 Решение задачи средствами Excel

Возможный вариант ввода исходной информации для решения задачи приведен на рисунке 3.6.

В ячейки B2…B9 помещена исходная информация для решения задачи.

В ячейках F2…F4 помещены начальные значения искомых переменных (мощностей КУ) Qk1, Qk2, Qk3, принятые равными нулю.

В ячейку H7 введено *выражение* для вычисления целевой функции:

=1/B2^2*((СУММ(B6:B8)-F2-F3-F4)^2*B3+(B7-F3)^2*B4+(B8-F4)^2*B5) (3.12)

начальное значение которой равно 235191 при начальных нулевых значениях искомых переменных (т.е. без установки компенсирующих устройств потери составят 235,191 кВт).

В ячейку B12 помещено выражение для вычисления левой части ограничения (суммарная мощность установленных компенсирующих устройств):

=СУММ(F2:F4). (3.13)

Значение ячейки B12 при нулевых начальных значениях переменных равно нулю.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Исходные данные**				**Мощности КУ Qk**		
2	U =	10			Qk1 =	0	
3	R1 =	0,2			Qk2 =	0	
4	R2 =	0,4			Qk3 =	0	
5	R3 =	0,25					
6	Q1 =	4500					
7	Q2 =	3100			**Целевая функция**		
8	Q3 =	2050			ΔP =	235191	
9	QK =	8900					
10							
11	**Ограничения**						
12	ΣQki<=QK	0					

Рисунок 3.6 – Ввод данных

Заполнение полей диалогового окно «Параметры поиска решения» приведено на рисунке 3.7.

Три граничных условия: F2>=0; F3>=0 и F4>=0 можно не вводить в поле «В соответствии с ограничениями» при условии простановки маркера «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

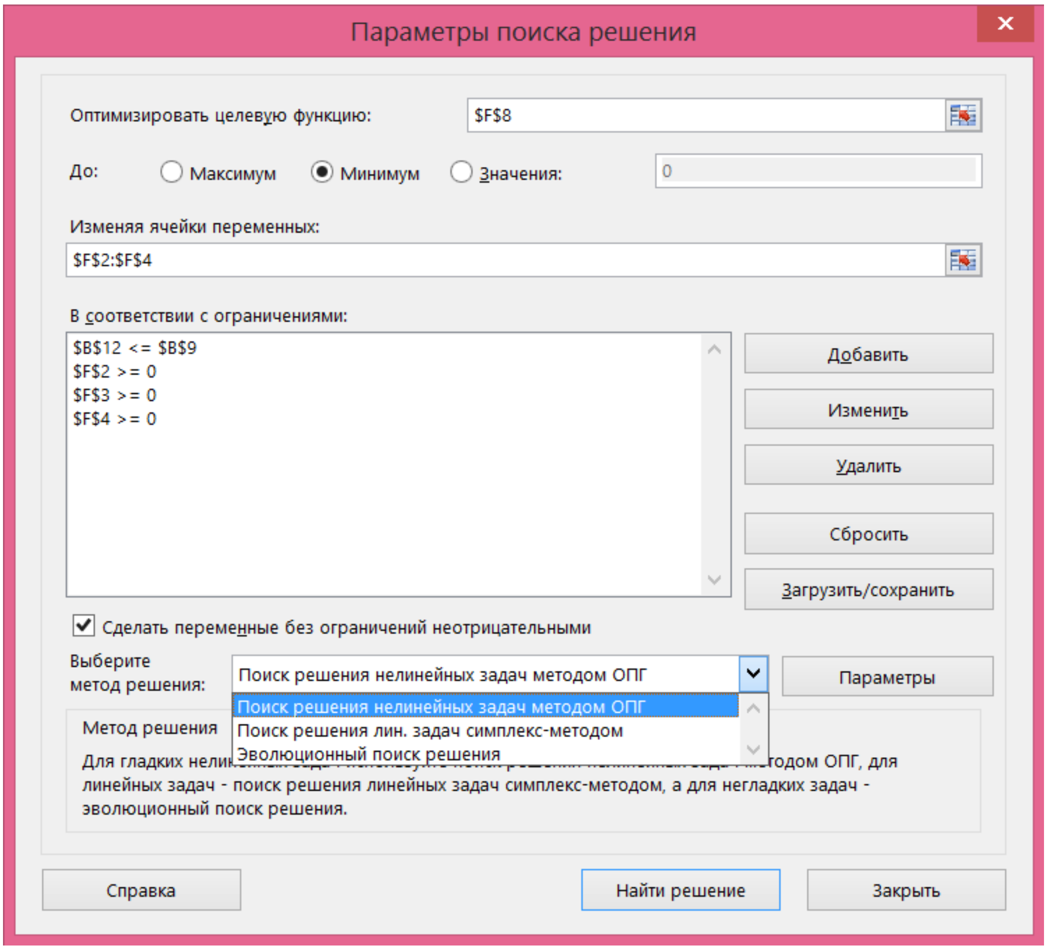


Рисунок 3.7 – Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

Результаты решения задачи приведены на рисунке 3.8.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Исходные данные**				**Мощности КУ Qk**		
2	U =	10			Qk1 =	3750	
3	R1 =	0,2			Qk2 =	3100	
4	R2 =	0,4			Qk3 =	2050	
5	R3 =	0,25					
6	Q1 =	4500					
7	Q2 =	3100			**Целевая функция**		
8	Q3 =	2050			ΔP =	1125	
9	QK =	8900					
10							
11	**Ограничения**						
12	ΣQki<=QK	8900					

Рисунок 3.8 – Результаты решения

4 Лабораторная работа № 4. Математические модели оптимизационных задач с недетерминированной исходной информацией

Цель работы: Разработка математических моделей оптимизационных задач при недетерминированной исходной информации (в условиях неопределенности).

4.1 Постановка задачи № 4. Выбор варианта развития энергосистемы в условиях неопределенности

В развивающейся энергосистеме требуется определить оптимальный объем ввода генерирующих мощностей электростанций. Перспективный рост энергопотребления в системе недостаточно определен. Известно лишь, что суммарная мощность потребителей энергосистемы в будущем может иметь значения W_1, W_2, W_3, W_4 или W_5 МВт.

На момент принятия решения мощность собственных электростанций энергосистемы составляет X, МВт. Затраты на ввод каждой новой единицы мощности составляют $z_н$ у.е./МВт.

В перспективе энергосистема может оказаться на самобалансе (будет обеспечивать потребителей за счет собственных электростанций) или при дефиците мощности. Во втором случае недостающую мощность можно получить из соседней энергосистемы. При этом за каждую единицу мощности, взятую из соседней системы, необходимо платить $z_п$ у.е./МВт.

Исходные данные выбрать в соответствии с вариантом из таблицы 4.1.

Выбор оптимального объема ввода генерирующих мощностей электростанций осуществить с использованием критериев анализа ситуаций: Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица. При принятии решения по критерию Гурвица расчет провести при коэффициентах $\alpha = 0; 0,2;…; 0,8; 1,0$.

Таблица 4.1 – Исходные данные

№ вар	**W_1**, МВт	**W_2**, МВт	**W_3**, МВт	**W_4**, МВт	**W_5**, МВт	**X**, МВт	**$z_н$**, у.е./МВт	**$z_п$**, у.е./МВт
1.	50	70	100	110	130	40	5	7
2.	160	200	220	–	–	140	4	8
3.	130	140	150	180	–	100	2	5
4.	60	80	100	120	130	55	3	4
5.	20	25	30	35	40	10	4	6
6.	10	15	20	–	–	0	5	6
7.	80	85	90	100	–	50	10	12
8.	60	70	80	90	100	30	7	12
9.	90	110	130	–	–	60	20	30
10.	50	65	80	95	–	25	5	10
11.	120	150	180	210	240	100	2	3
12.	100	200	300	400	–	70	5	9
13.	190	200	210	–	–	160	10	13
14.	30	40	50	60	70	25	4	9
15.	25	30	35	40	–	0	2	8
16.	60	65	70	–	–	30	9	15
17.	300	320	340	360	380	220	5	8
18.	100	150	200	250	–	90	3	9
19.	170	180	190	200	210	150	10	15
20.	45	60	75	90	–	25	3	5
21.	5	10	15	20	25	0	6	9
22.	50	100	150	–	–	40	7	8
23.	15	30	45	60	75	10	4	7
24.	140	150	160	170	180	120	2	5
25.	40	60	80	100	–	35	7	10
26.	55	65	75	–	–	50	11	15
27.	115	120	125	130	–	90	3	6
28.	70	90	110	–	–	60	15	20
29.	250	270	290	310	320	240	7	9
30.	100	150	160	200	110	120	130	90

4.2 Методические указания к выполнению задания № 4

Рассмотрим основные критерии выбора при решении задачи *минимизации* [5, 6].

4.2.1 Критерий минимума средних затрат – критерий недостаточного основания (критерий Лапласа)

$$a^* = \min_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_n f_{ni} \right\} \tag{4.1}$$

4.2.2 Минимаксный критерий (критерий Вальда)

$$a^* = \min_{a_i} \max_{\theta_n} \{ f_{ni} \} \tag{4.3}$$

4.2.3 Критерий Гурвица

$$a^* = \min_{a_i} \left[\alpha \max_{\theta_n} f_{ni} + (1-\alpha) \min_{\theta_n} f_{ni} \right] \tag{4.4}$$

где α – коэффициент пессимизма-оптимизма Гурвица, показывающий, с каким весовым показателем принимается в расчет наиболее неблагоприятная ситуация.

Значение коэффициента Гурвица ограничивается диапазоном $0 \le \alpha \le 1$.

Учитывая большие экономические потери от неверных решений по развитию систем энергетики и их объектов и высокую инерционность инвестиционного комплекса энергетики, рекомендуется выбирать значения коэффициента Гурвица в диапазоне $0{,}5 < \alpha < 1$.

4.2.5 Критерий минимаксного риска (критерий Сэвиджа)

$$a^* = \min_{a_i} R_i^{\max} = \min_{a_i} \max_{\theta_n} \{ R_{ni} \} \tag{4.5}$$

где R_i – матрица риска (риск от принятия неверного решения).

$$R_{ni} = \begin{cases} f_{ni} - \min\limits_k \{ f_{nk} \}, & \textit{если} \quad f \to \min \\ \max\limits_k \{ f_{nk} \} - f_{ni}, & \textit{если} \quad f \to \max \end{cases} \tag{4.6}$$

5 Лабораторная работа № 5. Математические модели многокритериальных оптимизационных задач

Цель работы: Разработка математических моделей многокритериальных оптимизационных задач.

5.1 Постановка задачи № 5. Выбор стратегии развития энергосистемы по многокритериальной модели

Требуется выбрать стратегию развития энергосистемы, решив многокритериальную задачу. В качестве локальных критериев принять:

1) капитальные затраты на развитие энергосистемы:

$$f_1(A) = K(A) \to \min;$$

2) ущерб от перерывов и ограничений в электроснабжении из-за аварийных и плановых простоев оборудования:

$$f_2(A) = У(A) \to \min;$$

3) годовые эксплуатационные расходы:

$$f_3(A) = З_\Sigma(A) \to \min;$$

4) потери электроэнергии в электрических сетях:

$$f_4(A) = \Delta W(A) \to \min;$$

5) площадь территории, отчуждаемой под новые линии электропередачи и подстанции:

$$f_5(A) = S(A) \to \min.$$

Пусть разработаны три варианта развития энергосистемы A_1, A_2, A_3 для каждого из которых вычислены значения всех локальных критериев, в результате чего получена матрица локальных критериев (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Матрица локальных критериев

Вариант	**К, тыс.руб**	**У, тыс.руб**	**$З_{\sum}$, тыс.руб**	**$\Delta W \cdot 10^5$, МВт·ч**	**S, м2**
$А_1$	3552	2874	272	7,97	8602
$А_2$	3862	1200	238	0,12	9046
$А_2$	7439	1224	151	0,075	13603

Осуществить выбор варианта развития электрической сети на основе следующих методов:

– выделения главного критерия. В качестве главного критерия рассмотреть критерий капитальных затрат. Для остальных критериев задать ограничения в о.е.: $f_2 \le 1{,}8$; $f_3 \le 2{,}5$; $f_4 \le 1{,}5$; $f_5 \le 2$.

– последовательной уступки. Установить следующий ряд приоритета критериев: $I = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5)$. Величину уступок принять равными: $\Delta f_1 = 0{,}1$; $\Delta f_2 = 0{,}15$.

– аддитивной свертки (весовых коэффициентов). Принять следующие весовые коэффициенты: $\lambda_1 = 0{,}38$; $\lambda_2 = 0{,}25$; $\lambda_3 = 0{,}15$; $\lambda_4 = 0{,}12$; $\lambda_5 = 0{,}1/$

– мультипликативной свертки.

5.2 Методические указания к выполнению задания № 5

Рассмотрим наиболее распространенные методы решения задач многокритериальной оптимизации [7]. Алгоритмы решения приведены для случая, когда все критерии должны быть минимизируемы.

5.2.1 Выделение главного критерия

Алгоритм решения многокритериальной оптимизационной задачи методом выделения главного критерия состоит из следующих шагов:

1) Выбирается главный критерий, например f_1.

2) Устанавливаются допустимые значения остальных критериев f_k'.

Таким образом, многоцелевая оптимизационная задача сводится к решению следующей одноцелевой:

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to \min, \tag{5.1}$$

$$g_m(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le, \ge, = b_m, \quad m = \overline{1 \ldots G} \tag{5.2}$$

$$f_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le f_k{}', \tag{5.3}$$

где $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ – множество ограничений.

5.2.2 Метод последовательной уступки

Алгоритм решения многокритериальной оптимизационной задачи методом последовательной уступки состоит из следующих шагов:

1) Локальные критерии располагают в порядке убывания важности, например $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

2) Находится оптимальное решение f^*, соответствующее наилучшему значению наиболее важного критерия:

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to \min, \tag{5.4}$$

$$g_m(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le, \ge, = b_m, \; m = \overline{1 \ldots G} \tag{5.5}$$

3) Назначается некоторая уступка Δf относительно f^*.

4) Решается задача для следующего по важности критерия: (5.6)

$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to \min,$$

$$g_m(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le, \ge, = b_m, \; m = \overline{1 \ldots G} \tag{5.7}$$

$$f_1(a_1, a_2, \ldots a_n) \le f_1^*(a_1, a_2, \ldots a_n) + \Delta f_1 \text{ и т.д.} \tag{5.8}$$

5.2.3 Метод аддитивной свертки

При наличии весовых коэффициентов для каждого локального критерия метод аддитивной свертки называют методом весовых коэффициентов:

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = \sum_k \lambda_k f_k(a_1, a_2, \ldots a_n) \to \min \tag{5.9}$$

где λ_k – весовые коэффициенты, $\sum_k \lambda_k = 1$.

Задача определения весовых коэффициентов решается методами экспертных оценок.

При решении многокритериальных задач методом аддитивной свертки локальные критерии предварительно должны быть нормализованы.

5.2.4 Метод мультипликативной свертки

Для каждого решения определяется функция:

$$F_i = F_i(a_i) = \prod_k f_i(a_i). \tag{5.10}$$

Решение многокритериальной задачи имеет вид

$$F^* = \min_i \{F_i\} = \min_i \prod_k f_k(a_i). \tag{5.11}$$

Если локальные критерии неравнозначны и характеризуются весовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, то оптимальное решение имеет вид:

$$F^* = \min_i \{F_i\} = \min_i \prod_k f_k{}^{\lambda_k}(f_i). \tag{5.12}$$

При решении многокритериальных задач методом мультипликативной свертки локальные критерии должны быть нормализованы.

5.3 Пример решения многокритериальной оптимизационной задачи выбора стратегии развития сети

Решение многокритериальной задачи рассмотрим на следующем примере.

Необходимо выбрать оптимальную стратегию развития энергосистемы, с учетом пяти критериев:

1) рентабельность инвестиций (РИ):

$$f_1(A) = R(A) \to \max;$$

2) чистый доход (ЧД):

$$f_2(A) = ЧД(A) \to \max;$$

3) прибыль от реализации электрической энергии (ПрЭ):

$$f_3(A) = П(A) \to \max;$$

4) индекс доходности (Ид):

$$f_4(A) = ИД(A) \to \max;$$

5) чистый дисконтированный доход (ЧДД):

$$f_5(A) = ЧДД(A) \to \max.$$

Пусть разработаны три стратегии (варианта) развития энергосистемы A_1, A_2, A_3, для каждой из которых вычислены значения всех локальных критериев. Поскольку локальные критерии имеют различные размерности, то выполнено их нормирование. Результаты сведены в таблицу 5.2.

Таблица 5.2 – Нормированные значения локальных критериев

	РИ	**ЧД**	**ПрЭ**	**Ид**	**ЧДД**
$\mathbf{A_1}$	2,086	1,283	0,75	1,991	1,28
$\mathbf{A_2}$	2,006	2,283	1,026	2,985	1,19
$\mathbf{A_2}$	1,086	2,269	1,75	2,991	0,28

5.3.1 Метод выделения главного критерия

В качестве главного критерия выберем, например, критерий f_1. Для остальных критериев зададим ограничения: $f_2 > 1{,}2$; $f_3 > 0{,}5$; $f_4 > 1$; $f_5 > 1$.

Получим $f_1^* = \max\{2{,}086;\ 2{,}006;\ 1{,}086\} = 2{,}086$.

Следовательно, предпочтительной является стратегия A_1. При этом введенные ограничения по остальным критериям соблюдаются.

5.3.2 Метод последовательной уступки

Установим ряд приоритета критериев $I = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5)$. Решим одноцелевую задачу по критерию f_1: $f_1^* = \max\{2{,}086;\ 2{,}006;\ 1{,}086\} = 2{,}086$.

Предпочтительная стратегия A_1.

Зададимся величиной уступки $\Delta f_1 = 0{,}1$. Далее решим одноцелевую задачу по критерию f_2: $f_2^* = \max\{1{,}283;\ 2{,}283;\ 2{,}269\} = 2{,}283$ при ограничении $f_1 \geq f_1^* - \Delta f_1$.

Поскольку $f_1^* - \Delta f_1 = 2{,}086 - 0{,}1 = 1{,}986$, то $f_1 \geq 1{,}986$.

По критерию f_2 предпочтительна стратегия A_2. При этом ограничение по f_1 выполняется (2,006 > 1,986).

Зададимся величиной уступок по f_1 и f_2 в виде $\Delta f_1 = 0{,}1$; $\Delta f_2 = 0{,}15$ и решим одноцелевую задачу по критерию f_3: $f_3^* = \max\{0{,}75;\ 1{,}026;\ 1{,}75\} = 1{,}75$ при ограничениях: $f_1 \geq f_1^* - \Delta f_1$, то есть $f_1 \geq 1{,}986$ и $f_2 \geq f_2^* - \Delta f_2$, то есть $f_2^* - \Delta f_2 = 2{,}283 - 0{,}15 = 2{,}133$, $f_2 \geq 2{,}133$.

По критерию f_3 предпочтительна стратегия A_3. При этом ограничение по f_2 выполняется (2,269 > 2,133), а по f_1 – не выполняется (1,086 < 1,986).

Следовательно, при заданных уступках предпочтительной остается стратегия A_2.

Если задаться другими значениями уступок Δf, то можно определить, ценой какой уступки можно предпочесть стратегию A_3 по критерию f_3.

5.3.3 Метод аддитивной свертки

Зададимся весовыми коэффициентами: $\lambda_1 = 0{,}38$; $\lambda_2 = 0{,}25$; $\lambda_3 = 0{,}15$; $\lambda_4 = 0{,}12$; $\lambda_5 = 0{,}1$.

Найдем значения $F(A)$ для каждой стратегии:

$F_1(A_1) = 0{,}38 \cdot 2{,}086 + 0{,}25 \cdot 1{,}283 + 0{,}15 \cdot 0{,}75 + 0{,}12 \cdot 1{,}991 + 0{,}1 \cdot 1{,}28 = 1{,}593$;

$F_2(A_2) = 0{,}38 \cdot 2{,}006 + 0{,}25 \cdot 2{,}283 + 0{,}15 \cdot 1{,}026 + 0{,}12 \cdot 2{,}985 + 0{,}1 \cdot 1{,}19 = 1{,}964$;

$F_3(A_3) = 0{,}38 \cdot 1{,}086 + 0{,}25 \cdot 2{,}269 + 0{,}15 \cdot 1{,}75 + 0{,}12 \cdot 2{,}991 + 0{,}1 \cdot 0{,}28 = 1{,}629$.

Теперь решим задачу вида:

$$F(A) = \max\{F_1; F_2; F_3\} = \max\{1{,}593;\ 1{,}964;\ 1{,}629\} = 1{,}964.$$

Отсюда следует, что по данному принципу при заданных значениях весовых коэффициентов наиболее предпочтительной является стратегия A_2.

5.3.4 Метод мультипликативной свертки

Полагая важность всех локальных критериев одинаковой, вычислим значения $F(A)$ для каждой стратегии:

$$F_1(A_1) = 2{,}086 \cdot 1{,}283 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}991 \cdot 1{,}28 = 5{,}12;$$

$$F_2(A_2) = 2{,}006 \cdot 2{,}283 \cdot 1{,}026 \cdot 2{,}985 \cdot 1{,}19 = 16{,}69;$$

$$F_3(A_3) = 1{,}086 \cdot 2{,}269 \cdot 1{,}75 \cdot 2{,}991 \cdot 0{,}28 = 3{,}61.$$

Определим:

$$F(A) = \max\{F_1; F_2; F_3\} = \max\{5{,}12;\ 16{,}69;\ 3{,}61\} = 16{,}69.$$

По данному принципу оптимальности при одинаковой важности локальных критериев предпочтительной является стратегия A_2.

Список использованных источников

1 Аттетков, А. В. Методы оптимизации / Аттетков А. В., Канатников А. Н., Зарубин В. С. – М. : ИЦ РИОР : НИЦ Инфра-М, 2013. – 270 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=350985

2 Балдин, К.В. Математические методы и модели в экономике : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рокосуев ; ред. К.В. Балдин. – 2-е изд., стер. – Москва : Издательство «Флинта», 2017. – 328 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=103331

3 Костин, В. Н. Оптимизационные задачи в электроэнергетике : учеб. пособие / В. Н. Костин. – СПб. : СЗТУ, 2003. – 120 с.

4 Семенова, Л. А. Анализ применения метода Лагранжа в выборе мощности компенсирующих устройств / Л. А. Семенова // Эффективное и качественное снабжение и использование электроэнергии: сборник докладов 6-й международной научно-практической конференции в рамках специализированного форума «Expo Build Russia». – Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2017. – С. 241-244.

5 Ананичева, С. С. Модели развития электроэнергетических систем : учебное пособие / С. С. Ананичева, П. Е. Мезенцев, А. Л. Мызин. – Екатеринбург : УрФУ, 2014. – 148 с.

6 Семенова, Л. А. Методика выбора оптимального варианта развития электрической сети по однокритериальной модели в условиях неопределенности / Л. А. Семенова, Д. В. Сазонов, И. Д. Вороньжев // Автоматизация, энерго- и ресурсосбережение в промышленном производстве : сборник материалов I Международной научно – технической конференции. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2016. – С. 375-378.

7 Федин, В. Т. Принятие решений при проектировании развития электроэнергетических систем : учеб. метод. пособие по дисциплине «Основы проектирования энергосистем» / В. Т. Федин. – Минск : УП «Технопрпинт», 2000. – 105 с.