Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра физики и методики преподавания физики

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

Методические указания

Составитель
В.В. Гуньков

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Оренбург
2021

УДК 531
ББК 22.31
Т33

Рецензент – доцент, канд. физ.-мат. наук Н.Ю. Кручинин

Т33 **Решение задач по теоретической механике. Часть 1**: методические указания / составитель В.В. Гуньков; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 18 с.
ISBN

Методические указания содержат рекомендации по подготовке к аудиторным занятиям по курсу теоретической механики для студентов, обучающихся по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

УДК 531
ББК 22.31

Содержание

Введение

Методические указания содержат рекомендации по подготовке занятиям по теоретической механике. Отдельно рассмотрены особенности подготовки к лекционным, практическим, экзаменационным занятиям. Особое внимание уделено самостоятельной работе с литературой.

Во второй части методических указаний приведены примеры решения задач курса теоретической механики. Задачи ранжированы по уровню сложности, что позволяет студенту контролировать собственный уровень усвоения дисциплины.

1 Рекомендации по подготовке к аудиторным занятиям

1.1 Методические указания по лекционным занятиям

Лекция является формой обучения в высшем учебном заведении. В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на формулировки, раскрывающие содержание математических терминов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. В конспекте следует применять сокращение слов, что ускоряет запись. Необходимо активно работать с конспектом лекции: после окончания лекции рекомендуется перечитать свои записи, внести поправки и дополнения на полях. Конспекты лекций следует использовать при подготовке к семинарам, при подготовке к опросу, экзамену, при выполнении самостоятельных заданий.

1.2 Методические указания по практическим занятиям

Практическое занятие – форма систематических учебных занятий, с помощью которых обучающиеся изучают тот или иной раздел определенной научной дисциплины, входящей в состав учебного плана. Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками. Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

При подготовке к практическим занятиям следует использовать основную литературу из представленного списка, а также руководствоваться приведенными указаниями и рекомендациями. Для наиболее глубокого освоения дисциплины рекомендуется изучать литературу, обозначенную как «дополнительная» в представленном списке. На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных ситуаций, способность на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике занятий.

1.3 Методические указания по самостоятельной работе

В ходе самостоятельной подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной жизнью. Выполнить домашнее задание. В случае затруднений можно обратиться к преподавателю за консультацией. Ниже приведены примеры решения задач.

1.4 Методические указания по промежуточной аттестации по дисциплине

Успешное и качественное прохождение промежуточной аттестации базируется на соблюдении настоящих рекомендаций, регулярном выполнении домашнего задания и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы.

1.5 Методические указания по подготовке к экзаменам

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. При подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом опорные конспекты лекций.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний. Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

2 Примеры решения задач

1. По заданным уравнениям движения частицы получить уравнение ее траектории. Начертить эту траекторию, указав начальную точку и направление движения.

$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

*Решение***.** Исключая из уравнений движения частицы время *t*, (например, путем умножения первого из уравнений на 2, второго – на 3 и последующего сложения уравнений), получим уравнение траектории частицы: $2x + 3y = 2$ или $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. Начальную точку определяем, подставляя в уравнения движения условие $t = 0: x_0 = -5, y_0 = 4$.

Таким образом, траекторией частицы является полупрямая. Направление движения частицы указано стрелкой.

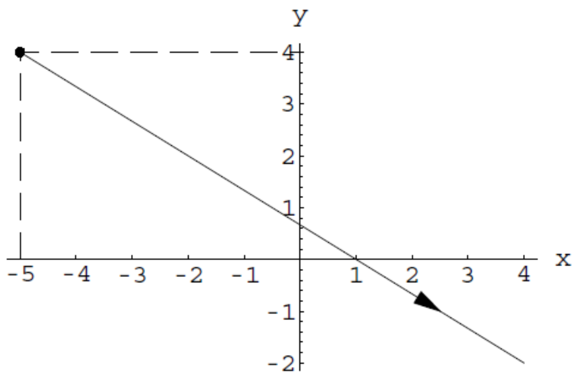

Рисунок 1

2. Частица описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 4\cos(2t) \end{cases}$$

Определить величину и направление скорости частицы в те моменты, когда она пересекает ось OY.

*Решение***.** Вначале найдем уравнение траектории частицы: $y = 2x^2 - 4$. Видно, что частица будет двигаться по параболе, ограниченной условиями: $|x| \le 2$, $|y| \le 4$ (рисунок 2). Движение будет носить характер колебаний.

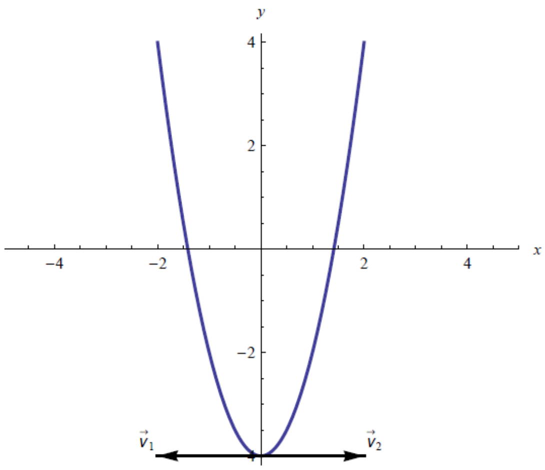

Рисунок 2

Найдем общие выражения для скорости частицы: $v_x = \dot{x} = -2\sin(t)$, $v_y = \dot{y} = -8\sin(2t)$,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{\sin^2 t + 16\sin^2 2t}$$

Определим моменты, когда частица будет пересекать ось OY:

$$\cos t = 0;\ t_n = \frac{\pi}{2} + n\pi;\ n = 0,1,2,...$$

Найдем вектор скорости частицы в момент t_1:

$$\begin{cases} v_x(t_1) = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 \\ v_y(t_1) = -8\sin(\pi) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, вектор скорости частицы горизонтален и направлен так, как показано на рисунке 2.

3. Корабль, проходящий точку A (рисунок 3), движется с постоянной по величине и направлению скоростью v_0. Под каким углом β к прямой AB должен начать двигаться катер из точки B, чтобы встретиться с кораблем, если скорость катера постоянна по величине и направлению и равна v_1? Линия АВ составляет угол ψ_0 с перпендикуляром к курсу корабля.

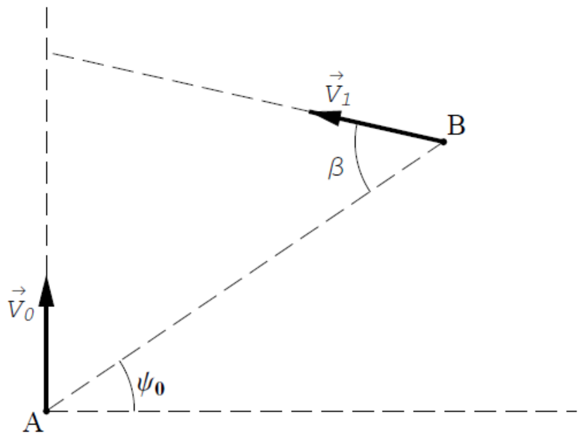

Рисунок 3

Решение. Условием встречи корабля с катером служит равенство составляющих скоростей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$, перпендикулярных линии АВ: $v_0 \cos(\psi_0) = v_1 \sin(\beta)$, откуда находим угол β: $\beta = \arcsin\left(\frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0\right)$

4. Наклонная плоскость АВ (рисунок 4), составляющая угол 45° с горизонтом, движется прямолинейно вдоль оси ОХ с постоянным ускорением 1 м/с^2. По этой плоскости спускается тело Р с постоянным относительным ускорением $\sqrt{2}$ м/с^2; начальные скорости плоскости и тела Р равны нулю, начальное положение тела определяется координатами: x_0=0, y_0=h. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.

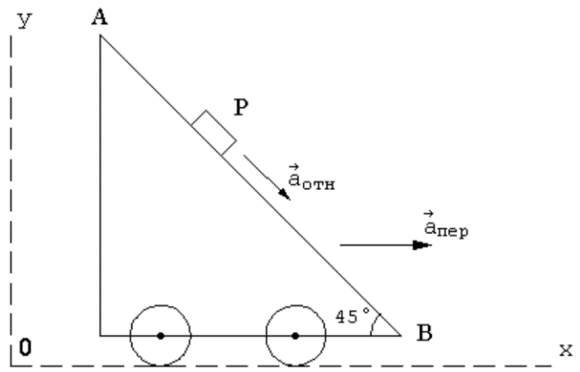

Рисунок 4

Решение. По теореме сложения ускорений $\overrightarrow{a_{абс}} = \overrightarrow{a_{пер}} + \overrightarrow{a_{отн}}$ (переносное движение здесь поступательное, поэтому кориолисово ускорение отсутствует). Имеем параллелограмм ускорений

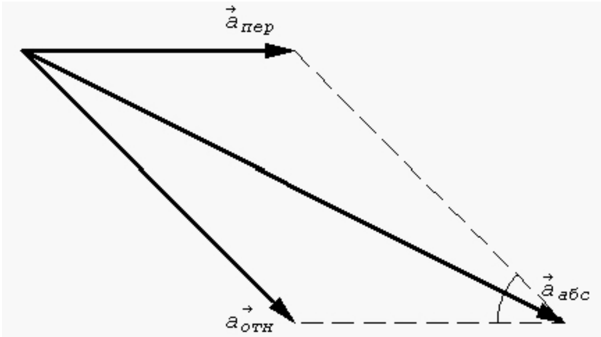

Рисунок 5

С помощью теоремы косинусов находим величину абсолютного ускорения:

$$a_{абс} = \sqrt{a_{пер}^2 + a_{отн}^2 + 2a_{пер}a_{отн}\cos 45^\circ} = \sqrt{5}\ \text{м/с}^2.$$

Так как переносное и относительное движения – равнопеременны, то скорости этих движений:

$$v_{пер} = a_{пер}t = t;\ v_{отн} = a_{отн}t = \sqrt{2}\,t$$

Абсолютную скорость также находим с помощью теоремы косинусов:

$$v_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2v_{пер}v_{пер}\cos 45^\circ} = t\sqrt{5}м/c^2$$

Для нахождения траектории тела запишем закон его движения в координатной форме, учитывая, что все ускорения постоянны:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} = \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} = h + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}$$

Из рисунка 5 находим проекции ускорений:

$$a_x = a_{пер} + a_{отн}\cos 45^\circ = 2м/c^2$$

$$a_y = -a_{отн}\sin 45^\circ = -1м/c^2$$

Откуда $\begin{cases} x = t^2 \\ y = h - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$.

Исключая *t*, получаем уравнение траектории тела: $y = h - \dfrac{x}{2}$.

5. Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с частота вращения диска $\nu = 810$ об/мин.

*Решение***.** По условию, $\varphi = k\,t^3$, где $k = const$. Частоту вращения выразим из соотношения $\omega = \dot{\varphi}$, где $\omega = 2\pi\nu$. Имеем: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}3kt^3$; для $t = 3$ с:

$$\frac{810}{60} = \frac{3}{2\pi}kg$$

откуда находим: $k = \pi c^{-3}$. Таким образом, уравнение вращения диска имеет вид: $\varphi = 3\pi t^3$.

6. В шахте опускается равноускоренно лифт массой m = 280 кг; в первые 10 с он проходит 35 м. Найти силу натяжения каната, на котором висит лифт.

Решение. Изобразим на чертеже все силы, действующие на лифт (рисунок 6).

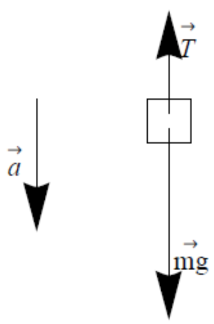

Рисунок 6

Запишем уравнение движения лифта (второй закон Ньютона) в проекциях на направление ускорения: $ma = mg - T$, откуда

$$T = m(g - a)$$

Лифт движется равноускоренно, поэтому пройденный им путь связан с ускорением по формуле

$$h = \frac{a t^2}{2}.$$

Из этих двух соотношений находим силу натяжения:

$$T = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) = 2550H$$

7. Камень весом 3 Н, привязанный к нити длиной 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость камня, при которой нить разорвется, если сила ее сопротивления разрыву составляет 9 Н.

Решение. Нетрудно видеть, что условию задачи удовлетворяет нижнее положение камня (рисунок 7).

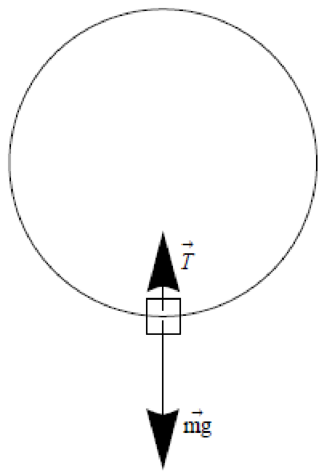

Рисунок 7

Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление центростремительного ускорения:

$$T - mg = m\omega^2 l,$$

где l – длина нити. Учитывая, что вес камня $P = mg$, получим для наименьшей угловой скорости:

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{(T-P)g}{Pl}} = 4.45 c^{-1}.$$

Задача 8. Груз весом 10 Н подвешен к тросу длиной *l* = 2 м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t,$$

где φ -- угол отклонения троса от вертикали в радианах, *t* -- время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в наинизшем и наивысшем положениях груза.

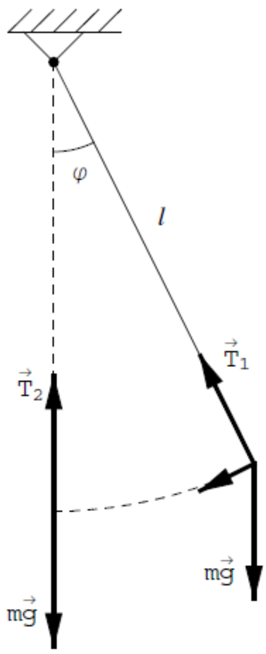

Рисунок 8

Решение. Имеем для двух показанных на рисунке 8 случаев:

1) $T_1 - mg = m\dot{\varphi}^2_{\max} l$; $\dot{\varphi} = \frac{\pi^3}{3}\cos 2\pi t$; $\dot{\varphi} = \frac{\pi^3}{3}$. Отсюда

$$T_1 = P\left(1 + \frac{\dot{\varphi}_m^2 l}{g}\right) = 32.1 H$$

2) $T_2 = mg\cos\varphi_m = 8.66 H$

Задача 9. Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6.5 с от момента начала его падения. Скорость звука u =330 м/с. Найти глубину шахты.

Решение. Направим ось OX вертикально вниз (рисунок 9).

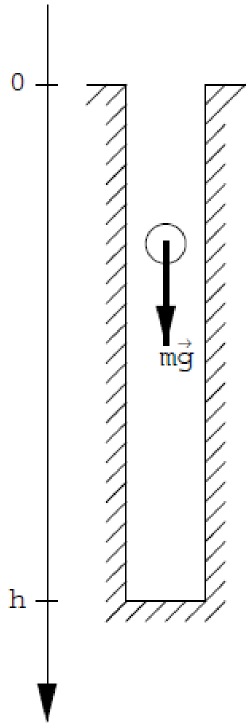

Рисунок 9

Запишем дифференциальное уравнение движения камня: $m\ddot{x} = mg$, или $\ddot{x} = g$. Проинтегрируем его:

$$v = \dot{x} = gt + C_1$$

Постоянную C_1 найдем из начального условия t = 0, v = 0: C_1=0. Таким образом, получаем новое уравнение: $\dot{x} = gt$, решение которого имеет вид:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Для нахождения постоянной C_2 воспользуемся начальным условием t = 0, x = 0: C_2 = 0.

К моменту $t = t_1$ (момент падения камня на дно шахты) будем иметь:

$$x(t_1) = h = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Время распространения звука будет равно

$$t - t_1 = \frac{h}{u}$$

Объединяя (1) и (2), получим:

$$t - \frac{h}{u} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Для решения последнего уравнения относительно h введем новую переменную $z = \sqrt{h}$; приходим к уравнению

$$z^2 + u\sqrt{\frac{2}{g}}z - ut = 0,$$

из которого находим: $z = 13.22$ м$^{1/2}$, откуда $h = z^2 = 175$ м. (Отрицательный корень квадратного уравнения был отброшен как противоречащий физическому смыслу.)

Список использованных источников

1. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский – 4-е изд. – СПб. Лань, 2009. – 576 с. – ISBN 978-5-8114-0857-3.
2. Голдстейн, Г. Классическая механика / Г. Голдстейн – М.: Наука, 1975. – 416 с.
3. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т.: учеб. пособие для вузов / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит, 2001. – Т.1: Механика – 224 с. - ISBN 5-9221-0055-6.
4. Савельев, И. В. Основы теоретической физики: в 2 т.: учеб. руководство / И.В. Савельев – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1991. – Т.1: Механика. Электродинамика – ISBN 5-02-014454-1
5. Компанеец, А.С. Курс теоретической физики: в 2 т. / А.С. Компанеец – М.: Просвещение, 1972. – Т.1: Элементарные законы. – 512с.
6. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 3-х т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон – М.: Наука, 1984. – Т.1 – 504 с.; Т.2 – 560 с.
7. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский – М.: Наука, 1970. – 448 с.
8. Коткин, Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо – М.: Наука, 1977. – 320 с.