Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Методические указания

Составители:
Н.А. Гамова, С.В. Колесник

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.04 Авиастроение, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика

Оренбург
2021

УДК 517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7
П71

Рецензент – кандидат педагогических наук И.П. Томина

П71 **Предел и непрерывность**: методические указания / составители Н.А. Гамова, С.В. Колесник; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 65 с.

Методические указания предназначены для использования в процессе аудиторной и самостоятельной работы для подготовки по изучаемому разделу, как при очной, так и при дистанционной форме обучения.

Содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для аудиторной работы, вопросы для самопроверки, 20 вариантов индивидуальных домашних заданий, примерный вариант тестовых заданий.

Методические указания предназначены для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.04 Авиастроение, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика.

УДК 517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7

© Гамова Н.А.,
Колесник С. В.,
составление, 2021
© ОГУ, 2021

Содержание

Введение

Методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Математический анализ» для обучающихся первого курса очного отделения и предназначены в помощь при изучении раздела «Введение в математический анализ».

Методические указания содержат теоретический материал по основным понятиям теории пределов, непрерывности функции одной переменной и позволяют обучающимся сформировать правильный научный подход к решению различных задач по данному разделу.

Теория пределов позволяет обучающимся овладеть фундаментальными понятиями и методами современной математики, без знания которых невозможна дальнейшая профессиональная подготовка. При освоении данного раздела у обучающихся формируются навыки грамотной постановки научных задач, решения задач с применением математического аппарата, систематизации полученных знаний.

1 Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

1.1 Справочный материал по теме

Определение. ***Числовой последовательностью*** называется отображение

$$f : N \to R.$$

Это отображение каждому натуральному числу ставит в соответствие по заданному правилу f единственное число $x_n = f(n) \in R$, $n \in N$.

Обозначают последовательность $\{x_n\}$ или перечисляют ее члены по возрастанию номера x_1, x_2, x_3,...; x_n называют ***общим членом*** последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)***, если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$). Если $x_{n+1} \ge x_n$ ($x_{n+1} \le x_n$), то последовательность – ***неубывающая (невозрастающая***).

Такие последовательности называются ***монотонными последовательностями***.

Определение. Число $a \in R$ называют ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$ и обозначают $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно найти натуральное число n_0 (зависящее от ε) такое, что для всех членов последовательности, номера которых больше этого номера, выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Из определения следует, что если $a \in R$ - предел последовательности, то в любой её окрестности содержится бесконечное число членов последовательности, а вне окрестности, лишь конечное число.

Определение. Последовательность, имеющую конечный предел, называют ***сходящейся***, в противном случае ***расходящейся***.

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$

2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b;$

3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0.$

Следствие. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\lambda \cdot x_n\right) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda \cdot a.$

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Сходящуюся последовательность, предел которой равен нулю, называют ***бесконечной малой последовательностью***.

Определение. Бесконечно большой последовательностью называется последовательность, предел которой равен бесконечности.

$$\beta_n \ -\text{б.б.п.} \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow \left|\beta_n\right| > M.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty.$

Основные свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 3. Сумма и произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Следствие. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 5. Если β_n - бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность $\left\{\dfrac{1}{\beta_n}\right\}$, которая является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 6. Если α_n – бесконечно малая последовательность и $\forall n$: $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой последовательностью.

При вычислении пределов будем применять приведенные выше свойства и теоремы и вместо переменной n в функцию подставлять знак ∞.

1.2 Методические рекомендации для решения типовых примеров

Пример 1.2.1. Найти x_1, x_4, x_{n-1}, если $x_n = \;-1\;^{n}\dfrac{n-1}{n}$.

Решение. $x_1 = -\dfrac{1-1}{1} = 0$; $x_4 = \dfrac{4-1}{4} = \dfrac{3}{4}$; $x_{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{n-1-1}{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{n-2}{n-1}$.

Пример 1.2.2. Является ли последовательность $x_n = \cos n$ ограниченной?

Решение. $x_n = \cos n$ – ограниченная последовательность, т.к. $|\cos n| \leq 1$.

Пример 1.2.3. Определить, какие последовательности являются возрастающими, а какие убывающими: а) 2, 5, 8,…, $3n-1$; б) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...$?

Решение. а) Последовательность 2, 5, 8,…, $3n-1$,… – возрастающая, т.к. $x_{n+1} = 3n+2$, $x_n = 3n-1$ и $3n+2 > 3n-1$.

б) Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ - убывающая, т.к. $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $x_n = \frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Пример 1.2.4. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ является убывающей.

Решение. Выпишем n-й и $n+1$ -й члены последовательности:

$$x_n = \frac{n+1}{2n-1},\ x_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)-1} = \frac{n+2}{2n+1}.$$

Составим разность и оценим ее знак: $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = \frac{-3}{4n^2-1} < 0$.

Итак, для любых натуральных значений n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$, т.е. последовательность $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ - убывающая.

Пример 1.2.5. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, ...$, $a = 1$.

Решение. По определению предела числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$: $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$

Рассмотрим модуль разности: $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, т.е. при $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

В качестве n_0 возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющие условию: $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, т.е. $\frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$ (например, $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где a – целая часть числа a).

Тогда для $\forall n \in N$ выполнены неравенства: $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$.

Это и означает, что $a = 1$ есть предел последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

При вычислении пределов будем применять приведенные выше свойства и теоремы и вместо переменной n в функцию подставлять знак ∞.

Пример 1.2.6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^4 + 5n - 1$.

Решение. Т.к. последовательности $3n^4$ и $5n$ – бесконечно большие, их сумма также является бесконечно большой и при сложении с постоянной величиной остается бесконечно большой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} 3n^4 + 5n - 1 = 3\lim_{n\to\infty} n^4 + 5\lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} 1 = \infty + \infty - 1 = \infty.$$

Пример 1.2.7. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n \cdot \frac{1}{n^2+1}\right)$.

Решение. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ является бесконечно малой, а последовательность $\sin n$ является ограниченной $|\sin n| \le 1$, значит, по теореме 4 произведение бесконечно малой последовательность на ограниченную есть бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n\cdot\dfrac{1}{n^2+1}\right)=0.$

Пример 1.2.8. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$.

Решение. Преобразуем формулу общего члена к виду:

$$a_n=\frac{n^3+15n^2+75n+125-n(n^2+14n+49)}{n^2}=$$

$$=\frac{n^3+15n^2+75n+125-n^3-14n^2-49n}{n^2}=\frac{n^2-26n+125}{n^2}=\frac{1-\dfrac{26}{n}+\dfrac{125}{n^2}}{1}$$

(разделили числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень многочлена).

Учитывая, что $\left\{\dfrac{26}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{125}{n^2}\right\}$ – бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{26}{n}+\frac{125}{n^2}\right)=1+0+0=1.$$

Пример 1.2.9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Решение. Символом $n!$ обозначают факториал, равный произведению n-первых чисел натурального ряда, т.е. $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Очевидно, что $(n+1)!=n!(n+1)$.

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Иногда подстановка предельного значения переменной не приводит к нахождению значения предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностью. Неопределенности бывают следующих видов:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\infty^{0}\right],\ \left[0^{0}\right].$$

Устранить неопределенность часто удается с помощью алгебраических преобразований.

Рассмотрим примеры с неопределённостью $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пусть функция, стоящая под знаком предела, имеет вид $\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$. Здесь $P_k(n)=a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1 n+a_0$ - многочлен степени k (бесконечно большая последовательность порядка n^k), $Q_m(n)=b_m n^m+b_{m-1}n^{m-1}+...+b_1 n+b_0$ - многочлен степени m (бесконечно большая последовательность порядка n^m).

В числителе и знаменателе вынесем за скобку n^s,где $s=\max\ k,m$, и сократим дробь на эту величину (разделим числитель и знаменатель дроби на n^s).

Используя тот же прием, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1 n+a_0}{b_m n^m+b_{m-1}n^{m-1}+...+b_1 n+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0 & k<m;\\ \frac{a_k}{b_m}, & k=m;\\ \infty, & k>m.\end{cases}$$

Пользуясь этим правилом можно быстро вычислить следующие пределы:

Пример 1.2.10. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^8+6}}{n^2+\sqrt{n}}$.

Решение. Здесь выражению в числителе можно условно приписать степень $\frac{8}{3}$, а в знаменателе степень 2, так как степень числителя выше степени знаменателя, то предел равен бесконечности.

Пример 1.2.11. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+4)(n^3+7n^5)}{4+\sqrt[4]{n^{28}}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4)(n^3+7n^5)}{4+\sqrt[4]{n^{28}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+21n^7+4n^3+28n^5}{4+\sqrt[4]{n^{28}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{21n^7+31n^5+4n^3}{4+n^7}=21.$$

т.к. степень числителя равна степени знаменателя и равна семи, то предел равен отношению коэффициентов при наивысших степенях.

Пример 1.2.12. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

Решение. Попытка вычислить предел приводит к неопределенности вида $\infty-\infty$. Для устранения неопределенности умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}$, затем воспользуемся формулой разности квадратов $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Далее вынесем за скобку в знаменателе n в наибольшей степени и выполним преобразования:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1.$$

1.3 Задания для аудиторной работы

Задача 1.3.1. Написать пять первых членов последовательности, заданной формулой общего члена:

1. $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$; 2. $x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$; 3. $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$;

4. $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; 5. $x_n = \dfrac{5^n}{n^2}$; 6. $x_n = \dfrac{\sin\ n\pi/2}{n}$.

Задача 1.3.2. Зная несколько первых членов последовательности, написать формулу общего члена последовательности:

1. $1; \dfrac{1}{3^2}; \dfrac{1}{5^2}; \dfrac{1}{7^2}; ...$ 2. $1; \dfrac{1}{1\cdot 2}; \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; ...$ 3. $1; 2\dfrac{1}{4}; 2\dfrac{7}{9}; 3\dfrac{1}{16}; ...$

4. $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}; ...$ 5. 2; 10; 26; 82; 242;… 6. -1; 1; -1; 1; -1; ...

Задача 1.3.3. Определить, являются ли ограниченными последовательности:

1. $\left\{\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}\right\}$; 2. $(-1)^n \cdot n$; 3. $\left\{\dfrac{1-n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$;

4. $\left\{\dfrac{(-1)^n+n}{3n-1}\right\}$; 5. $\left\{\dfrac{n-1}{\sqrt{n}}\right\}$; 6. $\left\{(-1)^{\sin\frac{\pi n}{2}}\right\}$.

Задача 1.3.4. Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

1. $\left\{\dfrac{n+1}{3n-1}\right\}$; 2. $\left\{\dfrac{4+3n}{2+n}\right\}$; 3. $\left\{\dfrac{100^n}{n!}\right\}$;

4. $\left\{\dfrac{n^3}{n^2-4}\right\}$; 5. n^3-5n ; 6. $\ln\ n+1\ -\ln n$.

Задача 1.3.5. Используя определение предела, доказать, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{4n^2-2n+1}=\dfrac{1}{4}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3}=0$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0;$ 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n-7}{n^3-n^2-n-2} = 1;$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n} = 1.$

Задача 1.3.6. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1};$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4}{n^2+5};$ 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+5n^2-3}{10n^3-3n+2};$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n-2};$ 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n^2}{6-n^2};$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2\ \ ^3-\ \ n-1\ \ ^3}{n^2-1};$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \ \sqrt{n+3}-\sqrt{n}\ ;$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-1}{5^n+1};$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty} \ \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2-1}\ .$

2 Понятие функции. Предел функции

2.1 Справочный материал по теме

Пусть A и B множества произвольной природы.

Определение. Если каждому элементу множества A поставить в соответствие один элемент из множества B, то говорят, что задано ***отображение*** из A в B и пишут $f: A \to B$.

Определение. Если A и B - числовые множества, то отображение $f: A \to B$ называют ***числовой функцией***.

Определение. Отображение $D\ \ f\ \ \to R,$ где $D\ \ f\ \ \subset R,$ называется ***действительной функцией одной действительной переменной*** и обозначается $y = f\ \ x\ \ .$

Переменная x называется ***аргументом*** или независимой переменной, а y - ***функцией*** или зависимой переменной (от x).

Множество $D\ \ f$ называют ***областью определения***.

Определение. Если при отображении f числу $x_0 \in D(f)$ соответствует число y_0, т.е. $f: x_0 \mapsto y_0$, тогда y_0 называют ***значением функции*** в точке x_0 и обозначают $y_0 = f(x_0)$.

Определение. Множество $E(f) = \{y \in R \,|\, y = f(x), x \in D(f)\}$ называют ***множеством значений*** функции f.

Свойства функции

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***ограниченной***, если ограничено множество её значений.

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***неограниченной***, если $E(f)$ неограниченное множество.

Определение. Множество D называется ***симметричным*** относительно 0, если с каждым числом $x \in D$ и число $-x \in D$.

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***четной*** (***нечетной***), если:

1. $D(f)$ – симметричное множество относительно нуля.
2. $\forall x \in D(f)$, $f(-x) = f(x)$, ($\forall x \in D(f)$, $f(-x) = -f(x)$).

Замечания:

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной - относительно начала координат.
2. Существуют функции, которые не обладают ни свойством четности, ни свойством нечетности.
3. Функция $f(x) \equiv 0$ на R является и четной, и нечетной.

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на множестве $X \subset D(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение. Функция называется ***строго монотонной***, если она возрастает или убывает на всей области определения.

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на множестве $X \subset D(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Определение. Функция называется ***монотонной***, если она неубывающая или невозрастающая на всей области определения.

Определение. Функция называется ***кусочно-монотонной***, если ее область определения можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых, она монотонна.

Определение. Функция f, заданная на множестве $D(f)$, называется ***периодической***, если $\exists T \ne 0$:

1. $\forall x \in D(f) \Rightarrow (x \pm T) \in D(f)$,
2. $\forall x \in D(f), f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции.

Замечание: периодическая функция имеет бесконечное множество периодов вида $n \cdot T$.

Определение. Наименьший положительный период функции называют ***основным периодом***.

Сложная функция

Пусть заданы функции $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$, и пусть $E(\varphi) \subset D(f)$.

Определение. Функцию $y = f(\varphi(x))$, $x \in D(f)$ называют сложной функцией или композицией функций φ и f, и обозначают $f \circ \varphi$.

Переменную $z = \varphi(x)$ называют ***промежуточным аргументом*** сложной функции.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется ***предельной точкой*** множества X, если в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0. Предполагается, что x_0 есть предельная точка множества X – области определения функции $f(x)$.

Определение (по Коши). Число a называется ***пределом*** функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющего условиям $x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta,$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ или

$$a \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела функции: $a \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки a, найдется такая δ-окрестность точки x_0, что $\forall x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε- окрестности точки a (рисунок 2.1).

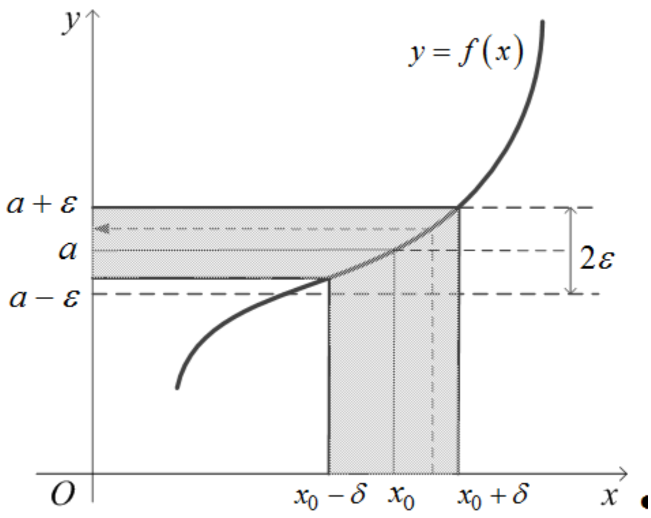

Рисунок 2.1 – Предел функции в точке

Замечание. Функция может быть и не определена в точке x_0

В определении предела функции $a \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Определение. Число A_1 называется пределом функции $f(x)$ слева в точке x_0, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Определение. Число A_2 называется пределом функции $f(x)$ справа в точке x_0, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Предел справа записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы слева и справа называются ***односторонними*** пределами.

Теорема 1. Если существуют оба предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, и они равны одному и тому же числу *A*, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема 2. Если существует предел функции в точке x_0, то существуют и оба односторонних предела в этой точке и они равны между собой.

Теорема 3. Если односторонние пределы функции в точке различны, то предел этой функции в точке x_0 не существует.

Теоремы о пределах

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и удовлетворяют неравенствам $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

Теорема 6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки , кроме, быть может, самой точки , и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = a + b$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x) \right] = a - b$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = a \cdot b$;
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, при условии $b \ne 0$.

Следствия.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot a .$$

2. Предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n = a^n,\ n \in N.$$

3. Для предела степенно-показательной функции справедливо равенство:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = a^b,\ a > 0.$$

Замечание. Аналогично, как и для последовательностей, вводятся определения бесконечно малых и бесконечно больших функций. Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций аналогичны свойствам бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.

Неопределенные выражения

Даны выражения $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Рассмотрим сначала частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и предположим, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно стремятся к нулю. Здесь мы впервые сталкиваемся с совсем особым обстоятельством: хотя нам известны пределы $f(x)$ и $g(x)$, но о пределе их отношения, не зная самих этих функций – никакого общего утверждения мы сделать не можем. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих функций, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать. Следующие примеры поясняют это.

Пусть, скажем, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$; обе функции стремятся к нулю. Их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$ также стремится к нулю. Если же, наоборот, положить $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, то хотя они стремятся к нулю, на этот раз их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$ стремится к $+\infty$. Взяв же любое отличное от нуля число a, и рассмотрев две бесконечно малые функции $f(x) = \dfrac{a}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$, видим, что их отношение имеет предел равный a.

Наконец, если $f(x) = \dfrac{(-1)^{x+1}}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (обе функции имеют предел равный нулю), то отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = (-1)^{x+1}$ оказывается вовсе не имеющим предела.

Знание пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ в данном случае не позволяет еще судить о поведении их отношения: необходимо знать сами функции, т.е. закон их изменения вместе с x, и непосредственно исследовать отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$. Для того чтобы характеризовать эту особенность, говорят, что когда $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$, выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Рассмотрим случай, когда одновременно $f(x)\to\pm\infty$ и $g(x)\to\pm\infty$. Не зная самих функций, общего утверждения о поведении их отношения сделать нельзя.

$$f(x)=x\to\infty,\ g(x)=x^2\to\infty,\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}\to 0;$$

$$f(x)=x^2\to\infty,\ g(x)=x\to\infty,\ \frac{f(x)}{g(x)}=x\to\infty;$$

$$f(x)=ax\to\pm\infty\ (a\neq 0),\ g(x)=x\to\infty,\ \frac{f(x)}{g(x)}=a\to a;$$

$f(x)=\left[2+(-1)^{x+1}\right]x\to\infty,\ \ g(x)=x\to\infty,\ \ \frac{f(x)}{g(x)}=2+(-1)^{x+1}$ вовсе не имеет предела. В этом случае говорят, что выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Рассмотрим произведение $f(x)\cdot g(x)$.

Если $f(x)$ стремится к нулю, в то время как $g(x)$ стремится к $\pm\infty$, то, исследуя поведение произведения $f(x)\cdot g(x)$, мы сталкиваемся с такой же особенностью, как и в предыдущем случае.

При $f(x)\to 0$ и $g(x)\to\infty$, говорят, что выражение $f(x)\cdot g(x)$ представляет неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

Рассмотрим сумму $f(x)+g(x)$.

Здесь оказывается особым случай, когда $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме $f(x)+g(x)$ ничего определенного сказать нельзя, не зная самих функций $f(x)$ и $g(x)$.

Ввиду этого, при $f(x)\to+\infty$ и $g(x)\to-\infty$, говорят, что выражение $f(x)+g(x)$ представляет неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

Таким образом, определить пределы арифметических выражений по пределам функций $f(x)$ и $g(x)$, из которых они составлены, не всегда возможно. Мы нашли четыре случая, когда этого заведомо сделать нельзя: неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$.

В этих случаях приходится, учитывать закон изменения $f(x)$ и $g(x)$, непосредственно исследовать интересующие нас выражения. Подробное исследование получило название раскрытия неопределенности.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. График функции изображен на рисунке 2.2.

Однако можно найти предел этой функции при $x\to0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

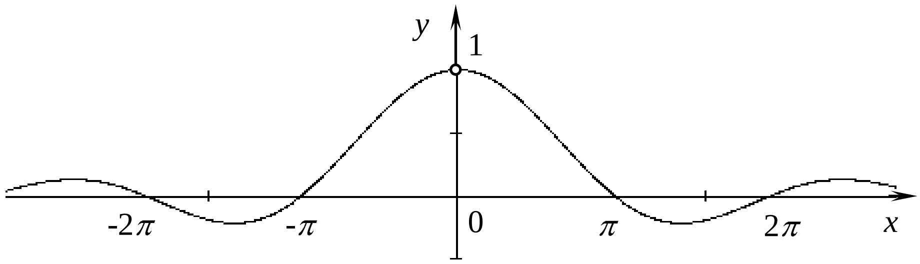

Рисунок 2.2 – График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Таким образом, первый замечательный предел служит для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Второй замечательный предел служит для раскрытия неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$ и выглядит следующим образом:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \lim_{u\to 0}\,(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

Обратим внимание на то, что в формуле для второго замечательного предела в показателе степени должно стоять выражение, обратное тому, которое прибавляется к единице в основании (так как в этом случае можно ввести замену переменных и свести искомый предел ко второму замечательному пределу).

Сравнение бесконечно малых функций

Определение. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке x_0.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая ***более высокого порядка*** чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые ***одного и того же порядка*** при $x \to x_0$.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***эквивалентными*** бесконечно малыми при $x \to x_0$ и пишут $\alpha \sim \beta$.

Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов функций

Теорема. Если при $x \to x_0$ $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ бесконечно малые функции, причем $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = a$ то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a.$

Таким образом, при нахождении предела отношения бесконечно малых, функции можно заменить эквивалентными бесконечно малыми. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций приведена в приложении А.

2.2 Методические рекомендации для решения типовых примеров

Пример 2.2.1. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-7)^{12}}{x^{13}+5}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-7)^{12}}{x^{13}+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0,$ т.к. степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример 2.2.2. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{7x^3+2}{10x^3-1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x^3+2}{10x^3-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{7}{10}\right)^{+\infty}=0,$, т.к. $\dfrac{7}{10}<1,$ следовательно, при возрастании показателя степени дробь уменьшается (стремится к нулю).

Пример 2.2.3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-5x}+2x^2}{2x-3+\sqrt[3]{14x^6+2}}$.

Решение. Видно, что числитель и знаменатель можно условно считать многочленами второй степени. Но так как числитель содержит два слагаемых этой степени, во избежание ошибки, будем выполнять вычисление последовательно. Сначала вынесем x с наибольшим показателем степени в выражениях под знаком радикала:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1-\dfrac{5}{x^3}\right)}+2x^2}{2x-3+\sqrt[3]{x^6\left(14+\dfrac{2}{x^6}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1-\dfrac{5}{x^3}}+2x^2}{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)+x^2\sqrt[3]{14+\dfrac{2}{x^6}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1-\dfrac{5}{x^3}}+2\right)}{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt[3]{14+\dfrac{2}{x^6}}\right)}=\frac{\sqrt{1-0}+2}{0-0+\sqrt[3]{14+0}}=\frac{3}{\sqrt[3]{14}}.$$

Пример 2.2.4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\ \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\ $.

Решение. Имеем неопределенность $\ \infty-\infty\ $. Выполним следующие действия: умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему, свернем числитель по формуле разности квадратов и приведем подобные слагаемые.

$$\lim_{x\to+\infty}\ \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\ =\ \infty-\infty\ =\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\quad\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1-x^2-5}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вынесем в числителе за скобку x, в знаменателе $|x|$. Так как $x\to+\infty$, то $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\frac{6}{x}\right)}{\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=+\infty.$$

Можно было записать ответ после фразы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, т.к. степень числителя $k=2$, а степень знаменателя условно $m=1$. По правилу сравнения степеней предел равен ∞ ($k>m$).

Пример 2.2.5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+12x-3}{x-5}$.

Решение. Применим теорему о пределе частного. Заменим в числителе и знаменателе x на 1, тем самым определим их пределы:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+12x-3}{x-5}=\frac{1^2+12\cdot1-3}{1-5}=-\frac{10}{4}=-2{,}5.$$

Пример 2.2.6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Здесь применить теорему о пределе частного нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю при $x\to2$. Кроме того, предел числителя тоже равен нулю.

В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, один из которых имеет вид $x-2$, и сократим дробь на этот множитель, т.к. $x-2\neq 0$ $\;x\to 2$, но $x\neq 2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\;\;x+16}{x-2\;\;x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Пример 2.2.7. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left(\dfrac{1}{\cos^3 x}\right)$.

Решение. Решение: Так как при $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ функция $\cos x\to +0,$ а при $x\to\dfrac{\pi}{2}+0$ функция $\cos x\to -0,$ найдем сначала односторонние пределы:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln\left(\frac{1}{+0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln\;+\infty\;=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\ln\left(\frac{1}{-0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\ln\;-\infty\;\text{ - не существует,}$$

т.к. функция $y=\ln u$ не определена для $u<0$.

А это означает, что для функции $y=\ln\left(\dfrac{1}{\cos^3 x}\right)$ существует только левый бесконечный предел.

Пример 2.2.8. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$. Еще один способ преобразования скобки – это прибавить и отнять единицу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^3-2}{5x^3+1}-1\right)^{-6x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^3-2-5x^3-1}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{5x^3+1}\right)^{\frac{5x^3+1}{-3}\cdot\frac{-3}{5x^3+1}\cdot\ -6x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{5x^3+1}\right)^{\frac{5x^3+1}{-3}}\right)^{\frac{18x^3}{5x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{18x^3}{5x^3+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x^3}{5x^3+1}}=e^{\frac{18}{5}}.$$

Пример 2.2.9. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\ 1+\operatorname{tg}x\ ^{\operatorname{ctg}x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\ 1+\operatorname{tg}x\ ^{\operatorname{ctg}3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\ 1+\operatorname{tg}x\ ^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\right)^{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}3x}=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}3x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

Пример 2.2.10. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln x-\ln 4}{2x-8}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, преобразуем ее в неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, пользуясь свойствами логарифмов: $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$ и $n\log_a x=\log_a x^n$, положив $y=\ x-4\ \to 0$ при $x\to 4$. Получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\ln x-\ln 4}{2x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\ y+4\ -\ln 4}{2y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2y}\ln\frac{y+4}{4}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\ln\left(\frac{y+4}{4}\right)^{\frac{1}{2y}}=\lim_{y\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{y}}\right)^{\frac{y}{4}\cdot\frac{1}{2y}}=\lim_{y\to 0}\ln e^{\frac{1}{8}}=\ln e^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}.$$

Пример 2.2.11. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg7x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg7x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7x}=\dfrac{5}{7}$, т.к. $\sin 5x\sim 5x$, а $tg7x\sim 7x$.

Пример 2.2.12. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+x)}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 3}{x}=\ln 3$, т.к. $3^x-1\sim x\cdot\ln 3$, а $\ln(1+x)\sim x$;

Пример 2.2.13. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\sin\pi x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\sin\pi x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c} y=x-1 \\ x=y+1 \\ x\to 1\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-(y+1)^3}{\sin\pi(1+y)}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\left((1+y)^3-1\right)}{\sin\pi(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y}{\pi(1+y)}=\frac{0}{\pi}=0.$$

Пример 2.2.14. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{10x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{10x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\cdot\operatorname{tg}5x}{10x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot 5x}{10x^2}=\dfrac{25}{10}=2{,}5.$

Пример 2.2.15. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x^3}}{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x^3}}{3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3}=\dfrac{0}{3}=0.$

2.3 Задания для аудиторной работы

Задача 2.3.1. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$;
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$;
3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2-3x+7}{x^2-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3-(3x+1)^3}{x+x^5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$;

11. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x-7}-3}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x^3}{1-3x+6x^3}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-2x^3+x^5-8}{5x^8+3x+6x^3}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-2x^4+6}{1+3x^7+x^4}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7-x^{11}+5x^2}{(6x^3-2)(5x^4+x^8)}$.

Задача 2.3.2. Используя 1-ый замечательный предел найти:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}(2x\cdot\operatorname{ctg}3x)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 8x}{4x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x}{\arcsin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$;

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\arcsin^2 3x}$.

Задача 2.3.3. Используя 2-ой замечательный предел найти:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-3}\right)^{2x-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-3}\right)^{2x-1}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)^{x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 2.3.4. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{4x}}{6x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{5x^2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{4x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{4x^2}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+1)}{5x}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{10}-1}{6x}$; 11. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$.

3 Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке

3.1 Справочный материал по теме

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и в некоторой окрестности содержащей x_0 и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Таким образом, можно сказать, что функция непрерывна в точке x_0, если выполнены три условия:

1) она определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности;
2) имеет предел при $x \to x_0$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Формулу (1) можно записать в виде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. Это означает, что для того, чтобы найти предел непрерывной функции при $x \to x_0$, $x \to x_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами:

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ также есть непрерывная функция в точке x_0.

Теорема 2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

Если функцию можно представить в виде $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т.е. если функция y зависит от переменной x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией переменной x.

Теорема 4. Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и принимает в этой точке значение $u_0=\varphi(x_0)$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Используя эти теоремы можно доказать следующий результат.

Теорема 5. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Заметим, что если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и её значение в этой точке отлично от нуля $f(x_0)\neq 0$, то значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют тот же знак, что и $f(x_0)$, т.е. если $f(x_0)>0$, то найдётся такое $\delta>0$, что на интервале $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ $f(x)>0$ (в этой окрестности значения функции $f(x)$ очень мало отличаются от своего предела).

Точки разрыва и их классификация

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y=f(x)$, если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности.

В этом случае говорят, что при $x=x_0$ функция разрывная. Это может произойти, если в точке x_0 функция не определена или не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или если предел существует, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Различают следующие типы разрывов:

а) Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но функция $f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но так что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то разрыв в этом случае называется устранимым.

Для устранения разрыва функцию доопределяют:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0,\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x=x_0.\end{cases}$$

б) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существуют оба односторонних предела и они не равны между собой, то точка x_0 называется разрывом первого рода или скачком функции.

в) Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, следовательно, не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 называется точкой разрыва второго рода.

3.2 Методические рекомендации для решения типовых примеров

Пример 3.2.1. Доказать, что функции $f(x)$ непрерывна в точке $x_0>0$ и непрерывна справа в точке $x_0=0$ $f(x)=\sqrt{x}$.

Решение. Докажем непрерывность $\sqrt{x}$ в точке $x_0>0$, пользуясь определением: $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0, если $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in D(f):\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Преобразуем и оценим модуль разности: $0<\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leq\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}.$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}=const,$ то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}=0$ и поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$

Значит, функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0>0.$

Докажем, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0=0$ справа. Пусть ε – произвольное положительное число. Неравенство $\left|\sqrt{x}-0\right|<\varepsilon$ равносильно неравенству $0 \le x \le \varepsilon^2$, пусть $\delta = \varepsilon^2$, тогда из $0 \le x < \delta \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x \to 0+0} \sqrt{x} = 0$, и поэтому функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

Пример 3.2.2. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, установить их характер: $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Решение. В точках $x = \pm 3$ функция не определена и поэтому разрывная.

а) исследуем точку $x = -3$: $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{x}{x^2 - 9} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x}{x^2 - 9} = +\infty$.

б) исследуем точку $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{x}{x^2 - 9} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x}{x^2 - 9} = +\infty$.

Следовательно, $x = \pm 3$ точки разрыва второго рода (рисунок 3.1)

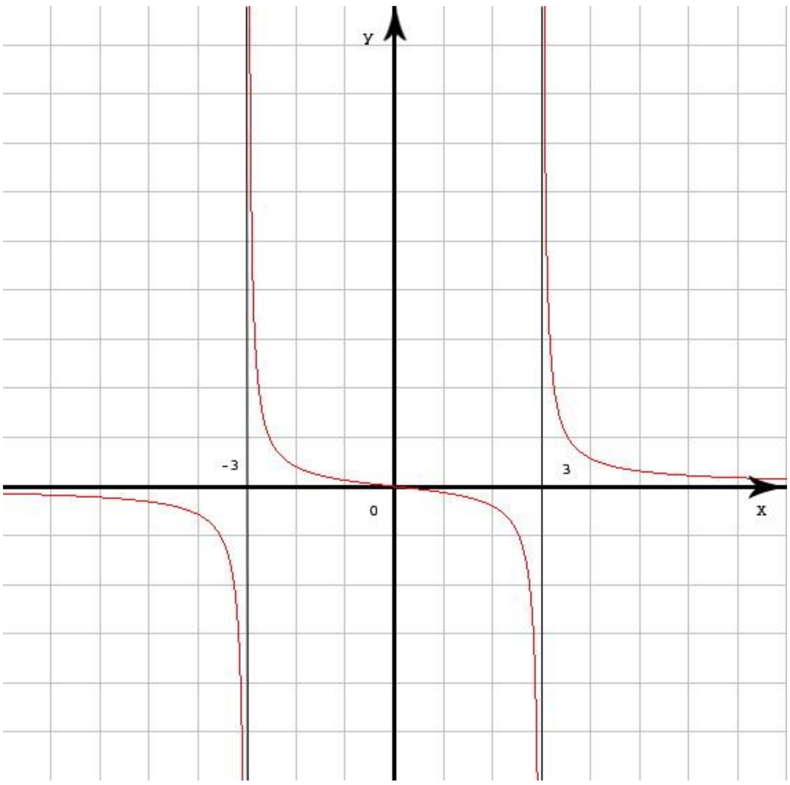

Рисунок 3.1 – График функции из примера 3.2.2

Пример 3.2.3. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. Данная сложная функция непрерывна при всех x, кроме $x \neq 1$. Исследуем точку $x=1$ на характер разрыва. Построим рассуждения следующим образом:

Пусть $x \to 1-0$ (слева) $\Rightarrow x-1<0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow 3^{\frac{1}{x-1}} \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} = 1.$

Пусть $x \to 1+0$ (справа) $\Rightarrow x-1>0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow 3^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$, поэтому $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$

Таким образом, пределы справа и слева существуют, но они не равны между собой. Точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода – точка скачка функции (рисунок 3.2).

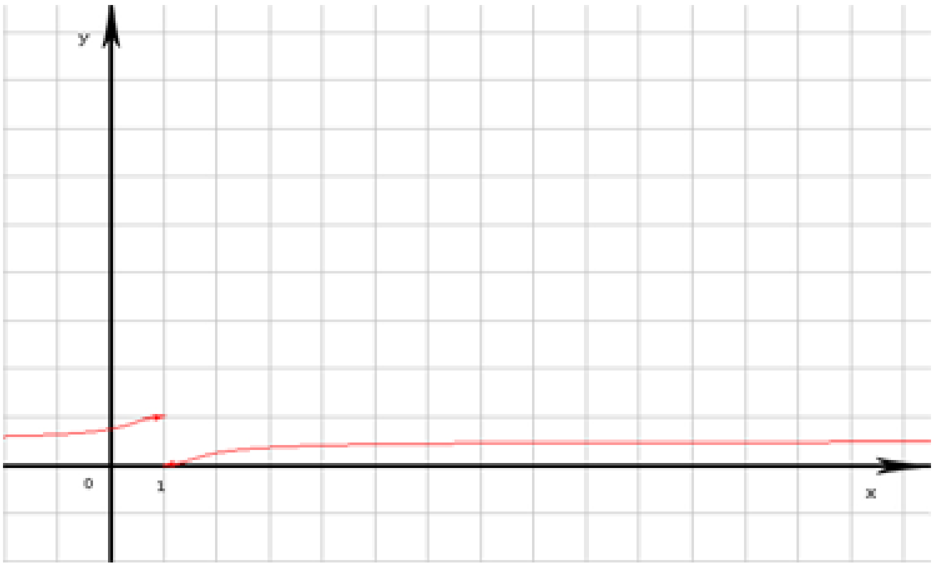

Рисунок 3.2 - График функции из примера 3.2.3

Пример 3.2.4. Исследовать на непрерывность функцию $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$. Определить характер разрыва точки $x=0$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} = \pi, \ \lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} = 0.$

Следовательно, $x = 0$ точка разрыва первого рода.

Пример 3.2.5. Исследовать на непрерывность функцию:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} \cdot x - 2, & \text{если } x \neq -2, \\ 2, & \text{если } x = -2. \end{cases}$$

Решение. Данная функция определена при всех значениях x. Если $x < -2,$ то $x + 2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x + 2.$ В этом случае $f(x) = -x - 2.$

Вычисляем односторонние пределы: если $x \to -2 - 0$ (слева), то $\lim\limits_{x \to -2-0}(-x-2) = 0;$ если $x \to -2 + 0$ (справа), $\lim\limits_{x \to -2+0}(x-2) = -4.$

Следовательно, в точке $x = -2$ разрыв первого рода (рисунок 3.3).

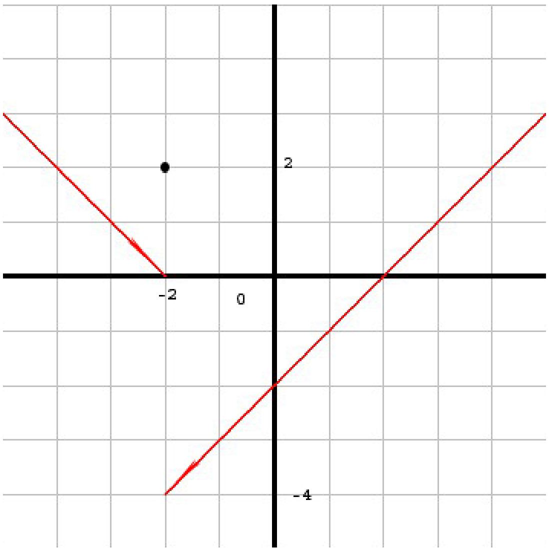

Рисунок 3.3 – График функции из примера 3.2.5

Пример 3.2.6. Исследовать на непрерывность $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}.$ Исследовать точки $x = 2, \ x = -2.$

Решение. Функция при $x = 2$ не определена. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{16}.$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{16}$..

Следовательно, данная функция имеет в $x=2$ - точку устранимого разрыва.

Устранить разрыв в точке можно, придав ей значение, равное $\dfrac{1}{16}$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}, & \text{если } x\neq 2,\\[2mm] \dfrac{1}{16}, & \text{если } x=2.\end{cases}$$

Исследуем точку $x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=+\infty.$

Точка $x=-2$ - точка разрыва второго рода (точку разрыва $x=-2$ слева не исследуем, так как она не входит в область определения). График функции изображен на рисунке 3.4.

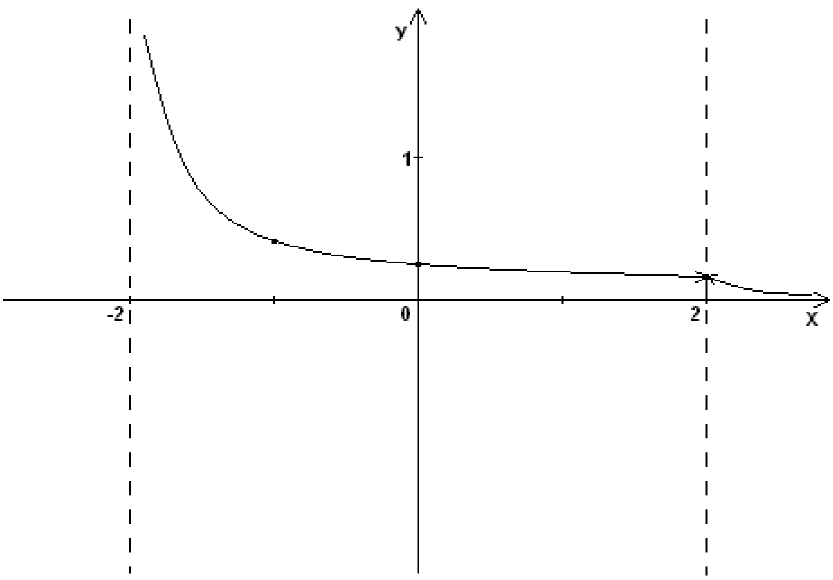

Рисунок 3.4 – График функции из примера 3.2.6

3.3 Задания для аудиторной работы

Задача 3.3.1. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Установите тип точек разрыва.

1. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{при } x<0; \\ x^3, & \text{при } 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{2-x}, & \text{при } x>2. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & x<0; \\ 3e^x, & 0<x\le 3; \\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+4}, & x<-4; \\ x+4, & -4\le x\le 0; \\ x^2, & x>0. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2; \\ x^2-6x+12, & 2<x<5; \\ 2x-3, & x>5. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1; \\ \dfrac{1}{x}, & -1<x<0; \\ -2x^2+x, & x\ge 0. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 3, & x<-3; \\ |x|, & -3\le x\le 3; \\ 6-x, & x>3. \end{cases}$

Задача 3.3.2. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность в заданных точках. Установите тип точек разрыва.

1. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, $x=0$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $x_1=2, x_2=-2$.

3. $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$, $x=0$.

4. $f(x)=\dfrac{3x}{\sin x}$, $x=0$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{6+3^{\frac{1}{x}}}$, $x=0$.

6. $f(x)=4^{\frac{1}{x+1}}$, $x=-1$

7. $f(x)=\dfrac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$, $x=0$.

8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$, $x_1=-3,\ x_2=3$.

4 Задания для самостоятельной работы и самопроверки

4.1 Варианты индивидуальных домашних заданий

Для формирования навыков решения задач по изучаемому разделу обучающимся необходимо выполнить индивидуальное домашнее задание. Номер варианта выбирается в соответствии со списком из журнала. Ответы к индивидуальным домашним заданиям приведены в приложении Б.

Вариант №1

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n-2}{2n-1},\ a = \frac{3}{2}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\ln\frac{x}{x-2}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №2

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\frac{4n-1}{2n+1}$, $a=2$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4+(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(10x+\pi)}{e^{x^2}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

5.Исследовать функцию $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$ на непрерывность.

Вариант №3

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\frac{7n+4}{2n+1}$, $a=\frac{7}{2}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^2-5}\right)n\sqrt{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{\frac{2}{x+2}}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases} x\operatorname{ctg}2x, & x\neq 0,\quad |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^x-x}{2-x}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №4

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{2n-5}{3n+1}$, $a=\dfrac{2}{3}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}(\pi+2x)\operatorname{tg}x, & x\neq-\dfrac{\pi}{2}, -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №5

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{7n-1}{n+1}$, $a=7$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}+\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[3]{n}-n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}\ \pi\ \ 2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x\ \ ^{x+3}$.

4. При каком значении a функция $y=f\ \ x$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}x+1, & x\le 1,\\ 3-ax^2, & x>1.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №6

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2},\ a=\frac{4}{3}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1\ \ ^3-\ \ n+1\ \ ^2}{n-1\ \ ^3-\ \ n+1\ \ ^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}+\sqrt[3]{125n^3+n}}{n+\sqrt[4]{n}\ \ \sqrt{9+n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt{n^2-3n+2}-n\ $; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1\ \ \ x+1}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

4. При каком значении a функция $y=f\ \ x$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}2x+1, & \text{при } x\le 1,\\ x^2+a, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{x-1}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №7

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n=\frac{9-n^3}{1+2n^3},\ a=-\frac{1}{2}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n\ {}^{3}-8n^3}{1+2n\ {}^{2}+4n^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\ n+\sqrt[3]{4-n^3}\ \ $;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^3\ -\ 1+3x}{x+x^5}$;

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x-\pi\ {}^{4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\ 1-\ln\ 1+\sqrt[3]{x}\ \ {}^{\frac{x}{\sin^4\sqrt[3]{x}}}$.

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\ 1+x}{6x}\right)^{\frac{x}{x+2}}$.

4. При каком значении a функция $y=f\ \ x$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}x+a, & \text{при } x\ge 5,\\ x^2-3x, & \text{при } x<5.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x\ne 1,\\ 2, & \text{если } x=1.\end{cases}.$$

При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №8

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2-e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$.

4. При каком значении a функция $y = f(x)$ непрерывна?

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}, & \text{при } x \neq 1, \\ a, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2-1}{1-x}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №9

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\sin^2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{\frac{8x+3}{1+x}}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}1+e^{-\frac{1}{x^4}}, & \text{при } x\neq0,\\ a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=2^{\frac{1}{x}}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №10

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=-\dfrac{5n}{n+1}$, $a=-5$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[5]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin(2\pi(x+10))}$; г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\ln(1+3x^2)}, & \text{при } x\neq 0,\\ a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №11

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{n+1}{1-2n}$, $a=-\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2+(n-2)^3}{n^2+2n-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}, & \text{при } x\neq 0,\\ x^2+a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{8x+2}{16x^2-1}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №12

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{2n+1}{3n-5}$, $a=\dfrac{2}{3}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{1+x}}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+5x)}, & \text{при } x\neq 0,\\ a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №13

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a=-2$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{1}{x\sin^2 x}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2x-1}, & \text{при } x\neq\dfrac{1}{2},\\ a, & \text{при } x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{при } x\neq 0,\\ 2, & \text{при } x=0.\end{cases}$

При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №14

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n^2}{2-n^2},\ a = -3.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^n$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\left(\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0} (2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$;

е) $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

4. При каком значении a функция $y = f(x)$ непрерывна?

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(1+6x)}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ a, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$ При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №15

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{n}{3n-1},\ a = \frac{1}{3}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3 - 2n}{n+1^{\ 4} - \ n-1^{\ 4}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \ \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3}\ $; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0} \ 2 - e^{\sin x} \ ^{\operatorname{ctg} \pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10} \right)^{x+2}$.

4. При каком значении a функция $y = f \ \ x$ непрерывна?

$$y = \begin{cases} a - x^3, & \text{при } x < 4, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}, & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x+2}}}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №16

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n^3}{n^3-1},\ a = 3.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{\frac{3}{3+x}}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{x}, & \text{при } x\neq 0,\\ a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\dfrac{3x+9}{x^2-9}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №17

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$a_n=\dfrac{4+2n}{1-3n}$, $a=-\dfrac{2}{3}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln(2x)-\ln\pi}{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases} x-1, & \text{если } x\le 1,\\ 3-ax^2, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №18

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n=\frac{5n+15}{6-n},\ a=-5.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2\cos x\right)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{\frac{4}{x+2}}$.

4. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases} e^x, & \text{если } x<0, \\ a-x^2, & \text{если } x\ge 0. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №19

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n=\frac{3-n^2}{4+2n^2},\ a=-\frac{1}{2}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\left(\pi(x+2)\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.

4. При каком значении a функция $f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}, & \text{при } x\neq 3,\\ a, & \text{при } x=3.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

Вариант №20

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n=\frac{2n-1}{2-3n},\ a=-\frac{2}{3}.$$

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+7\;^{3}-\;n+2\;^{3}}{3n+2\;^{2}+\;4n+1\;^{2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1\;\;n^2+3}-\sqrt{n\;\;n^4+2}}{2\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}}-\dfrac{1}{3}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\;5\;\;x+\pi}{e^{3x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\;9-2x^2}{\sin 2\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{\frac{2}{x+1}}$.

4. При каком значении a функция $f\;\;x$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}x^3, & \text{при } x\neq 0,\\ 2x+a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

5. Исследовать функцию $y = 9^{\frac{1}{x+3}}$ на непрерывность. При наличии точек разрыва определить их тип.

4.2 Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение числовой последовательности и ее предела.
2. Сформулируйте определение функции.
3. Что называется областью определения и множеством значений функции?
4. Какие функции называются возрастающими, убывающими?
5. Какие функции называются четными и нечетными, в чем состоит геометрический смысл четности и нечетности функций?
6. Сформулируйте определение периодической функции. Что называется периодом функции?
7. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?
8. Приведите определение сложной функции?
9. Сформулируйте определения предела функции при $x \to x_0$, при $x \to \infty$, односторонних пределов.
10. Как связаны между собой понятия предела функции с понятиями пределов слева и справа?
11. Какая функция называется бесконечно малой? Каковы её основные свойства?
12. Какая функция называется бесконечно большой? Какова её связь с бесконечно малой?
13. Что такое неопределённость при вычислении предела? Перечислите виды неопределённостей, которые могут возникать при вычислении пределов
14. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и на отрезке.
15. Что называется точкой разрыва функции?

16. Какие типы точек разрыва существуют?

4.3 Тестирование в системе АИССТ

Контроль усвоения знаний по разделу проводится с использованием Автоматизированной Интерактивной Системы Сетевого Тестирования (АИССТ). Тест содержит 20 вопросов, на прохождение которого обучающемуся дается 60 минут. По итогам выставляется оценка в соответствии с пороговыми значениями: 0-49% правильных ответов – «неудовлетворительно», 50-69% - «удовлетворительно», 70-89% - «хорошо», 90-100% - «отлично».

Ниже приведен примерный вариант теста в системе АИССТ.

1. Указать пятый член последовательности $x_n = n \cdot \left(1 - (-1)^n\right)$.

а) 10; б) 0; в) 5; г) -5.

2. Указать формулу общего члена последовательности $\{0, 7, 26, \ldots\}$.

а) $1 - n^3$; б) $(n-1)^3$; в) $7n + 26$; г) $n^3 - 1$.

3. Вычислить предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^6 - n + 5}{n^6 + 3n^2 + 1}$.

а) 0; б) ∞; в) 5; г) 4.

4. Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} - \frac{2+n^2}{3n}\right).$$

а) 0; б) ∞; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

5. Чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$?

а) 0; б) ∞; в) $\nexists$; г) -1.

6. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x}$.

а) 0; б) ∞; в) $\frac{1}{2}$; г) -2.

7. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{3x^2+4}$.

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) ∞; г) 0.

8. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

а) 1; б) ∞; в) 0; г) -4.

9. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1\ ^2}$.

а) -1; б) ∞; в) 0; г) 2.

10. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

а) 2; б) ∞; в) 0; г) 3.

11. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

а) ∞; б) 0; в) 2; г) 4.

12. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4x}$.

а) e^{28}; б) e^{3}; в) e^{11}; г) e^{4}.

13. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\ \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

а) 0; б) ∞; в) e; г) 2.

14. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

а) $\frac{1}{2}$; б) ∞; в) 1; г) 0.

15. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+x-12}$.

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{27}{7}$; в) ∞; г) 0.

16. Найти точки разрыва функции $y=\frac{3-2x}{4x-4}$.

а) $x=1$; б) $x=0$; в) их нет; г) $x=-2$.

17. Указать промежутки непрерывности функции $y=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

а) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

б) $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $(0;2\pi k)$;

г) $\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

18. Указать промежутки непрерывности функции $y=\ln\frac{x}{x+2}$.

а) $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$;

б) $(-2;+\infty)$;

в) $(0;+\infty)$;

г) $(-2;0)$.

19. При каком значении a функция $y=f(x)$ непрерывна?

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+x)}, & \text{при } x\neq 0,\\ a, & \text{при } x=0.\end{cases}$$

а) $a=\frac{1}{2}$; б) $a=1$; в) $a=0$; г) $a=\infty$.

20. Установить характер точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

а) устранимый; б) 1-го рода; в) скачок; г) 2-го рода.

Ответы:

1. а	2. г	3. г	4. б	5. в
6. в	7. а	8. г	9. б	10. г
11. г	12. а	13. а	14. в	15. б
16. а	17. г	18. а	19. б	20. а

Список использованных источников

1 Геворкян, Э. А. Математика. Математический анализ : учебное пособие / Э. А. Геворкян, А. Н. Малахов. – Москва : Евразийский открытый институт, 2010. – 344 с. – ISBN 978-5-374-00369-7. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/10715.html.

2 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч.: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Оникс 21 векМир и образование, 2003. Ч.2. – 2003. – 416 с.

3 Ильин, В. А. Основы математического анализа : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2009. – Ч. I. – 647 с. – – ISBN 978-5-9221-0902-4. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686.

4 Каракулина, Е. О. Элементы теории множеств. Теория пределов. Непрерывность и точки разрыва функций : методические указания для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 270800.62 Строительство / Е. О. Каракулина, Н. А. Гамова; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования «Оренбург. гос. ун-т». – Оренбург : ОГУ. – 2014. – 68 с.

5 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник / Кудрявцев Л. Д., - 4-е изд. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 444 с.: ISBN 978-5-9221-1585-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/854332.

6 Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике : типовые расчеты: учебное пособие / Л. А. Кузнецов .- 11-е изд., стер. – М. : Лань, 2008. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Прил.: с. 235. – ISBN 978-5-8114-0574-9.

7 Максименко, В. Н. Практикум по математическому анализу. Часть 1 : учебное пособие / В. Н. Максименко, А. В. Гобыш. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 116 с. — ISBN 978-5-7782-2474-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/45425.html.

8 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 604 с. - ISBN 978-5-8112-2374-9.

9 Родина, Т.В. Курс лекций по математическому анализу – I (для направления “Прикладная математика и информатика”) : учебное пособие / Т. В. Родина, Е. С. Трифанова ; под редакцией И. Ю. Попов. – Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2010. – 184 с. – ISBN 2227-8397. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/67233.

10 Специальный курс по математическому анализу : учебное пособие / Н. Н. Газизова, С. Р. Еникеева, Г. А. Никонова, Н. В. Никонова. – Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2018. – 116с. – ISBN 978-5-7882-2418-3. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/95030.

11 Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / Шипачев В.С., - 3-е изд. - Москва :НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с. (Высшее образование) ISBN 978-5-16-010073-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/469727.

12 Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учеб. пособие / В.С. Шипачев. — 10-е изд., стереотип. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 304 с. — (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-010071-5. – Текст : электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/986760.

Приложение А

(обязательное)

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$

1. а) $\sin x \sim x$;   б) $\sin ax \sim ax$.
2. а) $\operatorname{tg} x \sim x$;   б) $\operatorname{tg} ax \sim ax$.
3. а) $\arcsin x \sim x$;   б) $\arcsin ax \sim ax$.
4. а) $\operatorname{arctg} x \sim x$;   б) $\operatorname{arctg} ax \sim ax$.
5. а) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;   б) $1-\cos ax \sim \dfrac{(ax)^2}{2}$.
6. а) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$;   б) $\operatorname{tg} ax - \sin ax \sim \dfrac{(ax)^3}{2}$.
7. а) $\ln(1+x) \sim x$;   б) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$.
8. а) $e^x - 1 \sim x$;   б) $a^x - 1 \sim x \ln a$.
9. $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

Приложение Б

(справочное)

Ответы к индивидуальным домашним заданиям

Таблица Б.1

	2а	2б	2в	2г	3а	3б	3в	3г	3д	3е	4	5
1	$-\infty$	$^{4}\ \overline{9}$	∞	e^{2}	0	$4\ \ 3$	$1/4$	2	$1\ \ e^{3}$	2	$1/2$	$x=0, x=2$, 2-го рода
2	5	1	$-\infty$	e	0	-2	0	$1/2$	$1\ \ \overline{e}$	1	0	$x=3$, 2-го рода
3	2	∞	0	0	0	0	$-5\ \ 3$	$9\ \ 98$	$2\ \ 3$	4	$1/2$	$x=2$, 2-го рода
4	-4	7	$-3\ \ 2$	e^{-4}	0	$-1\ \ 16$	$-1\ \ 10$	$1\ \ 8$	$1\ \ 9$	$\overline{3}$	-2	$x=0$, 2-го рода
5	$-12\ \ 7$	-125	$-5\ \ 2$	$e^{1\ \ 2}$	0	$1\ \ 144$	$4\ \ \pi$	$1\ \ 2$	$e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$	1	1	$x=1$, 1-го рода
6	$-\infty$	$-\infty$	$-3\ \ 2$	$e^{26\ \ 3}$	0	$1\ \ 4$	$1\ \ \pi$	$1\ \ 3$	$e^{-2\ \ 9}$	8	2	$x=1$, 2-го рода
7	$3\ \ 2$	0	0	e^{-4}	0	$24\ \ 10$	$3\ \ 8$	-1	e^{-1}	1	5	функция непрерывна
8	$-8\ \ 9$	$+\infty$	2	e^{-33}	0	-2	$6\ \ \overline{2}$	$1\ \ 2\pi$	e^{-3}	16	$2/3$	$x=1$, устранимый
9	1	3	$1\ \ 2$	$e^{-11\ \ 2}$	0	$1\ \ 4$	$\ln 2\ \ 2$	30	$e^{-\pi\ \ 2}$	0	1	$x=0$, 2-го рода
10	1	2	$-\infty$	$e^{4\ \ 3}$	2	$2\ \ 27$	$1\ \ \pi$	$1\ \ \pi$	$1\ \ e^{18}$	$1\ \ 2$	$1/3$	$x=0$, 1-го рода
11	$+\infty$	9	0	e^{-2}	$3/2$	$-2\ \ \overline{2}\ \ 3$	$7\ \ \pi$	$7\ \ 8$	e^{-2}	9	$1/4$	$x=-1/4$, устранимый $x=1/4$, 2-го рода
12	1	0	$2/3$	1	2	$3/2$	$1/2$	$8/3$	$e^{-1\ \ \pi}$	1	$1/5$	$x=2$, устранимый
13	$-1/2$	$+\infty$	0	0	$-1\ \ 3$	$-4\ \ 3$	$-3/2$	$1\ \ 2\pi$	$1\ \ 5$	1	$-1/2$	$x=0$, устранимый
14	4	$3\ \ \overline{3}$	$7\ \ 2$	$4\ \ 3$	$2\ \ 3$	$1\ \ 4$	$3\ \ \pi$	$-2\,\pi$	$e^{9\ \ 2}$	3	6	$x=0$, 1-го рода
15	1	0	$3\ \ 2$	$e^{4\ \ 3}$	$1\ \ 3$	$-2\ \ \overline{6}\ \ 3$	$7\ \ \pi$	$9\ln 3\ \ \pi$	$e^{-1\ \ \pi}$	0.64	65	$x=-2$, 1-го рода
16	3	-3	$5\ \ 2$	0	$1\ \ 3$	$1\ \ 12$	$1\ \ 12$	$16\ln 2\ \ \pi$	$e^{-1\ \ 2}$	$\sin 2$	$\ln 2$	$x=-3$, устранимый $x=3$, 2-го рода
17	$1\ \ 5$	0	$+\infty$	e^{-2}	0	$-4\ \ \overline{2}\ \ 3$	$-\pi$	$-2\ \ \overline{2}\ \ \pi$	$e^{-9\ \ \pi^2}$	$2\ln 2$	3	$x=0$, 2-го рода
18	$2/3$	$+\infty$	$5/2$	e^{-2}	-1	$3\ /\ 5$	-3	-1	e^{-1}	$1/4$	1	$x=0$, 1-го рода
19	5	4	$3/2$	e^{3}	$-1/3$	$-2\ /\ 3$	$1/2\pi$	$e^{\pi}\ \ 2$	9	8	$1/3$	$x=1$, 1-го рода
20	$3/5$	2	$3/4$	e^{-1}	9	$-2\ \ \overline{2}\ \ 3\ \ \overline{3}$	$-5/3$	$-4/\pi$	$\overline{e}$	$1/64$	0	$x=-3$, 2-го рода