Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Е.Н. Рассоха, Л.М. Анциферова, О.В. Острая

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 27.03.02 Управление качеством, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 21.05.02 Прикладная геология, 20.03.01 Техносферная безопасность

Оренбург
2021

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Р24

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С.А. Герасименко
Авторы: Е.Н. Рассоха, Л.М. Анциферова, О.В. Острая

Р24 Линейная алгебра: учебное пособие / Е.Н. Рассоха, Л.М. Анциферова, О.В. Острая; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021 – 124 с.

ISBN

В учебном пособии представлены лекционные и практические занятия в соответствии с рабочими программами для указанных направлений подготовки.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 27.03.02 Управление качеством, 12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 21.05.02 Прикладная геология, 20.03.01 Техносферная безопасность, а также для других направлений и специальностей, изучающих дисциплину «Математика», «Высшая математика».

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN

Содержание

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие можно рассматривать как самоучитель к разделам «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Линейные пространства» рабочей программы дисциплины «Математика» для студентов, указанных направлений подготовки.

Комплекс методических материалов, собранных в этом издании, должен помочь студенту в самостоятельной работе над курсом «Линейная алгебра», входящим в состав дисциплины «Математика». В учебном пособии излагаются теоретические основы, указанного курса в соответствии с содержанием разделов рабочей программы дисциплины «Математика» для студентов, перечисленных направлений подготовки.

После изложения теоретических сведений в пособии представлены разработки практических занятий по каждой теме. В каждом практическом занятии рассмотрены типовые задачи с решениями, после чего, представлены задачи для самостоятельного решения, которые можно предложить в качестве домашнего задания. В конце каждого раздела предложены вопросы для самоконтроля и разработана контрольная работа.

На основе данного пособия очень легко сформировать курс в обучающей системе «Moodle» по указанным разделам дисциплины «Математика», а также проводить дистанционные занятия, причем как лекционные, так и практические, на основе любой видеоплатформы.

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

Глава 1 Матрицы и определители

§1 Матрицы. Основные понятия и определения

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого *матрицей*.

Определение 1.1 *Матрицей размера* $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел[1], содержащая m строк и n столбцов.

Числа, входящие в описание матрицы, называются ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов.

Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце, как a_{ij}. Числа i и j называют *индексами* элемента.

Число строк в матрице называют ее *порядком*. Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрицу называют *квадратной*. Остальные матрицы носят название *прямоугольных*.

Матрицы обозначают большими латинскими буквами и записывают перечислением их элементов. Например, как $A = (a_{ij});\ i = [1, m];\ j = [1, n]$ [2] или можно записать также $A = \|a_{ij}\|;\ i = [1, m];\ j = [1, n]$, или же записывают в развернутой форме в следующих обозначениях скобок:

---

[1] Элементами матрицы могут быть и другие математические объекты – функции, элементы множества, векторы и др. Главное, чтобы для этих объектов были подходящим образом определены операции сравнения, сложения, умножения и умножения на число.

[2] $i = [1, m];\ j = [1, n]$ — это обозначение принято читать: индекс i принимает значения от 1 до m, а индекс j принимает значения от 1 до n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или}$$

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1.1)$$

Если необходимо совсем коротко обозначить матрицу, то возможны обозначения - $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ или (A), (B), (C) и т.д. Самая распространенная запись матрицы в различной учебной литературе – это ее запись в круглых скобках.

Элементы матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ.* Элементы матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего правого угла, образуют *побочную диагональ.*

Пример 1.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица размера 2×4, порядок матрицы равен двум.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов, имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.2 Матрица размера $m\times 1$ называется столбцом высоты m, или m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1\times n$ называется строкой длины n, или n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Такие матрицы могут называть *вектор-строкой* и *вектор-столбцом*. В связи с этим их обозначают:

$\vec{a}^1 = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n})$ - вектор-строка длины n; (1.2)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец высоты m. (1.3)

С помощью вектор-строк и вектор-столбцов матрицу размерности $m \times n$ можно записать коротко в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vec{a}^2 \\ \vec{a}^3 \\ \dots \\ \vec{a}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Определение 1.3 Квадратная матрица, для которой $a_{ij} = a_{ji}, \forall$[1] $i, j = [1, n]$, называется *симметрической*.

Определение 1.4 Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу, в указанных обозначениях, можно записать как матрица (O).

Определение 1.5 Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Определение 1.6 Диагональная матрица $A = (a_{ij})_n$ называется *скалярной*, если все элементы главной диагонали принимают одинаковые значения.

Определение 1.7 Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой E.

Единичная матрица порядка n имеет вид:

---

[1] $\forall$ - квантор всеобщности, элемент математического языка, может означать слова «для всякого», «для любого», «для каждого» и т.д.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Определение 1.8 Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Определение 1.9 Матрица (A) называется ступенчатой (или говорят имеет ступенчатый вид), если выполняются 2 условия:

1) все нулевые строки матрицы (A) расположены ниже не нулевых;

2) если $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots a_{kj_k}$ — это ведущие элементы ненулевых строк (т.е. первые ненулевые элементы в этих строках), то должны выполняться следующие неравенства: $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Пример 1.2 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $F=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ — это все примеры ступенчатых матриц. Причем, в матрицах (A) и (B), количество ступенек равно одному, в матрице (C) - двум, в матрицах $(D),(G)$ - четырем, в матрице (F) - трем. Более того, замечаем, что матрица (D) еще является и треугольной, а матрица (G) является и диагональной.

Определение 1.10 Две матрицы (A) и (B) называются *равными*, если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$. Равные матрицы обозначают: $A=B$.

§2 Операции с матрицами

С матрицами можно производить следующие операции: сложение, умножение на число, умножение двух матриц, транспонирование.

Операции сложения и умножения на число называют *линейными операциями* с матрицами.

Определение 1.11 Матрица (C) называется *суммой матриц* (A) *и* (B) если матрицы (A), (B), (C) одинаковых размеров и элементы c_{ij} матрицы (C) находят по формулам: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = [1, m]$, $\forall j = [1, n]$. Сумма матриц обозначается: $C = A + B$.

По-другому, можно сказать, для того чтобы сложить две матрицы или вычесть одну из другой, необходимо сложить или вычесть соответствующие элементы данных матриц, стоящие на одинаковых местах. Матрицы можно складывать и вычитать только одинаковых размеров.

Пример 1.3 Пусть даны матрицы одинаковых размеров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найти сумму матриц: $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Найти разность матриц $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Определение 1.12 *Произведением числа* λ *на* матрицу (A) называется матрица (C), элементы c_{ij} которой находят по формулам: $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i = [1, m]$, $\forall j = [1, n]$.

Таким образом, можно заметить, для того чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число. Отметим, что умножать на число можно матрицу любого размера.

Пример 1.4 Пусть даны матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и число λ=3. Найти произведение $3 \cdot A$.

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 21 & 15 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции с матрицами обладают свойствами, которые можно сформулировать в виде математического предложения.

Предложение 1.1 Для любых матриц (A), (B), (C) одних и тех же размеров и любых чисел α, β выполняются равенства:

1. $A+B=B+A$ - операция сложения матриц является коммутативной операцией.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ - операция сложения матриц является ассоциативной операцией.

3. $A+O=A$.

4. $A+(-A)=O$.

5. $1 \cdot A = A$.

6. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

7. $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ - выполняется закон дистрибутивности относительно сложения матриц.

8. $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ - выполняется закон дистрибутивности относительно сложения чисел.

Доказательство данного предложения очевидно и основывается на свойствах сложения и умножения чисел, а также определении операций сложения матриц и умножения матрицы на число.

Следующая операция с матрицами не является линейной – это умножение двух матриц.

Определение 1.13 Рассмотрим две матрицы:

$A = (a_1\ a_2\ a_3\ ...\ a_n)$ - строка длины n и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ столбец высоты n.

Произведением строки длины n на столбец высоты n назовем сумму произведений вида $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n b_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot b_j = A \cdot B$.

Мы рассмотрели частный случай произведения двух матриц, когда одна из них является строкой, другая столбцом. Следует отметить, что длина строки и высота столбца совпадают. Обобщим данное определение на общий случай.

Пусть даны две матрицы: (A) размером $m \times n$ и (B) размером $n \times k$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & ... & b_{3k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.14 Произведением матрицы (A) размером $m \times n$ на матрицу (B) размером $n \times k$ называется такая матрица (C), элементы c_{ij} которой находят по формулам:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad \forall i = [1, m], \forall j = [1, k].$$

Таким образом, чтобы найти элемент матрицы (C), стоящий в i-й строке и j-м столбце – c_{ij}, необходимо i-ю строку матрицы (A) умножить на j-й столбец матрицы (B) по формуле, указанной в определении. Произведение матриц обозначается: $C = A \cdot B$

На рисунке 1 представлено схематическое правило получения элемента c_{ij}.

$$
\begin{array}{cccc}
i & \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \\ c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \\ \\ \end{pmatrix} & i \\
 & \qquad\qquad\qquad j & \qquad j &
\end{array}
$$

Рисунок 1 – Схематическое правило получения элементов матрицы произведения

Замечание 1.1 Из определения можно заметить, что умножать одну матрицу на другую можно только в случае, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй матрице. Очевидно, если поменять матрицы местами при умножении, то данная операция может иметь другой результат или не всегда будет иметь смысл.

Пример 1.5 Даны матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ размером 2Ч3 и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ размером 3Ч2.

Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если это возможно.

Решение. Замечаем, что количество столбцов в первой матрице (A) и количество строк во второй матрице (B) одинаково и равно трем, поэтому произведение матриц $A \cdot B$ возможно. Чтобы правильно определять размер матрицы, получающейся при умножении двух данных матриц, можно воспользоваться следующей записью этих матриц:

$$\left[\begin{matrix} (A)_{m \times n} \\ (B)_{n \times k} \end{matrix}\right. = (C)_{m \times k}.$$

Поэтому в нашем случае, получающаяся матрица будет иметь размер:

$$\left[\begin{matrix} (A)_{2 \times 3} \\ (B)_{3 \times 2} \end{matrix}\right. = (C)_{2 \times 2}$$

Найдем элементы матрицы $A \cdot B = C$.

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1;$

$c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 3;$

$c_{21} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -2;$

$c_{22} = (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 1.$

Запишем матрицу (C): $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Аналогично определяем, что произведение матриц $B \cdot A$ также возможно. Найдем произведение $B \cdot A = D$.

$$\left[\begin{matrix} (B)_{3\times 2} \\ (A)_{2\times 3} \end{matrix}\right. = (D)_{3\times 3};$$

$d_{11} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -8;$ $\quad d_{12} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5;$ $\quad d_{13} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6;$

$\mathrm{d}_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) = -1;$ $\mathrm{d}_{22} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -2;$ $\mathrm{d}_{23} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0;$

$d_{31} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = -14;$ $\quad d_{32} = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 7;$ $\quad d_{31} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10.$

Запишем матрицу (D): $\quad D = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \\ -14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = D = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \\ -14 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$

Итак, в примере наглядно представлено, что операция умножения двух матриц не является коммутативной операцией, т.е. при перестановке множителей местами можем получать различный результат.

Пример 1.6 Даны матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ размером 2Ч4 и матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ размером 4Ч3.

Определить, возможно ли произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$. Если возможно, то найти его.

Решение. Замечаем, что количество столбцов в первой матрице (A) и количество строк во второй матрице (B) одинаково и равно четырем, поэтому произведение матриц $A \cdot B$ возможно. Найдем произведение этих матриц. Для этого определим матрицу произведения:

$$\left[\begin{array}{l}(A)_{2\times 4} \\ (B)_{4\times 3}\end{array}\right. = (C)_{2\times 3}.$$

Найдем элементы матрицы $A \cdot B = C$.

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -3;$

$c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 4;$

$c_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 8$

$c_{21} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0;$

$c_{22} = (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 2.$

$c_{23} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 2$

Запишем матрицу (C): $\quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

Умножение матриц $B \cdot A$ не является возможным, так как количество столбцов в первой матрице (B) равно трем, а количество строк во второй матрице (A) равно двум.

Ответ: $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; умножение матриц $B \cdot A$ невозможно.

Существуют случаи, когда $A \cdot B = B \cdot A$, тогда матрицы (A) и (B) называют *перестановочными* или *коммутативными*. Из определения произведения двух матриц следует, что перестановочными матрицами могут быть только квадратные матрицы одного и того же размера.

Легко заметить, что

- $A \cdot E = E \cdot A = A;$
- $A \cdot O = O \cdot A = O.$

Следовательно, при умножении матриц единичная матрица (E) играет роль единицы, а нулевая матрица (O) - роль нуля.

Свойства умножения матриц рассмотрим без доказательства в виде следующего математического предложения.

Предложение 1.2

1. Если имеет смысл $A\cdot(B+C)$, то умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению матриц, т.е.

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

2. Если определены произведения $A\cdot B$ и $(A\cdot B)\cdot C$, то умножение матриц ассоциативно, т.е.

$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

3. Если произведение $A\cdot B$ имеет смысл, а α - произвольное число, то

$(\alpha A)\cdot B=\alpha\cdot(A\cdot B)=A\cdot(\alpha\cdot B)$.

Выделим следующую операцию, которую можно проводить с матрицей – это транспонирование матрицы.

Определение 1.15 *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования.

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы (A), обозначается $(A)^T$, при этом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то есть для элементов транспонированной матрицы $(A)^T$, $\forall i=[1,m], \quad \forall j=[1,n]$ верно равенство: $a_{ij}^T=a_{ji}$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1\times m$ в столбец размера $m\times 1$ и наоборот.

Замечание 1.2 Нетрудно заметить, что при транспонировании матриц элементы, стоящие на главной диагонали, не изменяют своего положения.

Предложение 1.3 Если определено произведение $A \cdot B$, то определено и произведение $B^T \cdot A^T$ и при этом выполняется равенство:

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство. Если по условию теоремы определено произведение $A \cdot B$, то количество столбцов в первой матрице (A) и количество строк во второй матрице (B) одинаково, т.е. имеем $(A)_{m \times n}$ и $(B)_{n \times p}$. В транспонированной матрице $(B)^T$ количество столбцов равно количеству строк матрицы (B). В транспонированной матрице $(A)^T$ количество строк равно количеству столбцов матрицы (A), т.е. имеем $(B)^T_{p \times n}$ и $(A)^T_{n \times m}$. Таким образом, произведение $B^T \cdot A^T$ определено. Чтобы доказать равенство двух матриц $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ необходимо показать, что они имеют одинаковые размеры и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны. Размер матрицы $A \cdot B$ равен $m \times p$, а матрицы $(A \cdot B)^T$ равен $p \times m$. Размер матрицы $B^T \cdot A^T$ равен $p \times m$, т.е. размеры матриц совпадают. Покажем равенство элементов. Для этого введем обозначения. Элементы матриц (A), (B), $(A \cdot B)$ обозначим буквами a, b, c с соответствующими индексами, а элементы матриц $(A)^T$, $(B)^T$, $(A \cdot B)^T$ - теми же буквами, но со штрихом, т.е. a', b', c'. Пусть c'_{ik} - элемент матрицы $(A \cdot B)^T$, стоящий в i-той строке и k-том столбце. Элемент c'_{ik} равен элементу c_{ki} матрицы $(A \cdot B)$, т.е. $c'_{ik} = c_{ki}$. В соответствии с правилом умножения матриц получаем, что $c'_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot b_{ji}$, где a_{kj}, b_{ji} - элементы матриц (A) и (B) соответственно. Поскольку $a_{kj} = a'_{jk}$, $b_{ji} = b'_{ij}$, то $c'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a'_{jk} \cdot b'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b'_{ij} \cdot a'_{jk}$. Последнее выражение, представляющее собой сумму произведений элементов i-той строки матрицы $\left(B\right)^T$ на соответствующие элементы k-того столбца матрицы $\left(A\right)^T$, является элементом матрицы $B^T \cdot A^T$, принадлежащим i-той строке и k-тому столбцу. Следовательно, соответствующие элементы матриц $\left(A \cdot B\right)^T$ и $B^T \cdot A^T$ равны между собой. Данное предложение доказано. ▲

Приведем без доказательства еще несколько свойств операции транспонирования матриц.

Свойства операции транспонирования матриц:

1) $E_n^T = E_n$, где E_n - единичная матрица порядка n;

2) $\left(A^T\right)^T = A$, для любых матриц $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$;

3) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$, где $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$;

4) $\left(\alpha A\right)^T = \alpha \cdot A^T$, для любых матриц A и любых постоянных α.

§3 Определитель матрицы

Каждой квадратной матрице $A = \left(a_{ij}\right)_n$ можно поставить в соответствие единственное число, называемое **определителем** или **детерминантом** матрицы. В развернутом виде определитель матрицы записывают следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

В этом случае перечисляются все элементы матрицы A, для которой он определяется. Элементы матрицы, строки и столбцы в этом случае называются **элементами**, **строками**, **столбцами определителя**.

В тех случаях, когда элементы матрицы A уже указаны выше или её числовые данные не имеют принципиального значения, используется более краткий вариант обозначений: $det\,A, \Delta A, |A|$.

Определение 1.16 *Определителем или детерминантом квадратной матрицы второго порядка* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ и при этом записывают:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1.7)$$

Пример 1.7 Вычислить определитель второго порядка $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления данного определителя применим формулу (1.7).

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 8 - 15 = -7$$

Ответ: -7.

Определение 1.17 *Определителем или детерминантом квадратной матрицы третьего порядка* называется число, вычисляемое по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \qquad (1.8)$$

Для запоминания данной формулы можно нарисовать следующую схему:

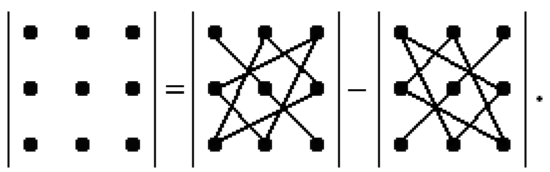

Рисунок 2 – Схема вычисления определителя матрицы третьего порядка «методом треугольника»

Подробнее эту схему представим рисунками 3 и 4.

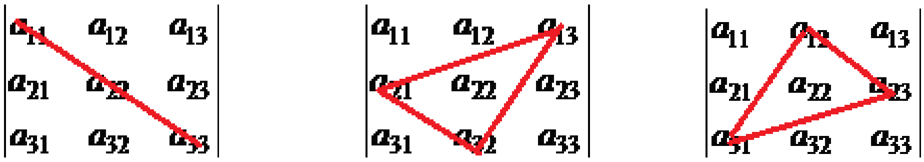

Рисунок 3 – Алгоритм, получения слагаемых, входящих в формулу (1.8) с сохранением знака

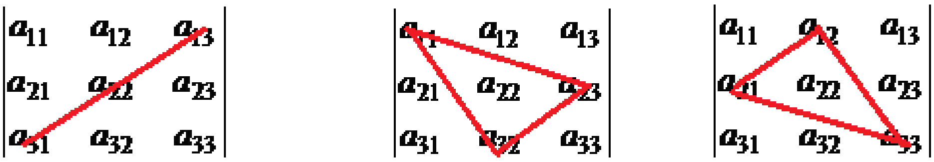

Рисунок 4 – Алгоритм, получения слагаемых, входящих в формулу (1.8) с противоположным знаком

Замечание 1.3 Этот метод вычисления определителя матрицы третьего порядка еще называют «методом треугольника».

Замечание 1.4 Определитель матрицы первого порядка $A = a_{11}$ будет равен $\det A = |a_{11}| = a_{11}$. т.е., *величина определителя первого порядка равна элементу, из которого он состоит.* Например, $|5| = 5$.

Пример 1.8 Вычислить определитель третьего порядка $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления данного определителя применим формулу (1.8) или схему вычисления определителя третьего порядка по «методу треугольника».

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 -$$

$$- 4 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) = 12 + 0 + 5 - 0 - 40 + 9 = -14.$$

Ответ: -14.

Определение 1.18 *Минором* какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, которым принадлежит данный элемент. Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Пример 1.9 Составить минор элемента a_{32} определителя третьего порядка.

Решение. Элемент a_{32} стоит в третьей строке и во втором столбце, следовательно, вычеркивая указанные строку и столбец, имеем:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Пример 1.10 Имеем определитель третьего порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Составить миноры элементов $a_{31} = 4$, $a_{23} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 0$ данного определителя третьего порядка.

Решение. Элемент $a_{31} = 4$ стоит в третьей строке и в первом столбце, следовательно, вычеркивая указанные строку и столбец, имеем:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично поступая при составлении миноров других заданных элементов, получим:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Определение 1.19 *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают через A_{ij}. В соответствии с определением запишем:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (1.9)$$

Рассмотрим понятие определителя квадратной матрицы любого порядка n, где $n > 3$.

Определение 1.20 *Определителем или детерминантом* квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам первой строки матрицы, по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} , \qquad (1.10)$$

где M_{1k} – миноры элементов первой строки определителя данной матрицы.

Следует обратить внимание, еще раз, на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Определение 1.21 *Дополнительным минором* произвольного элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца. Дополнительный минор произвольного элемента a_{ij} квадратной матрицы A обозначается также как и минор произвольного элемента определителя для соответствующей матрицы.

Поэтому для указанной матрицы A числа M_{1k} еще являются и дополнительными минорами элементов a_{1k} данной матрицы. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Формула (1.10) позволяет вычислить определитель матрицы, разложив его по элементам первой строки, но также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} . \qquad (1.11)$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k,i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik} . \qquad (1.12)$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители. Определитель единичной матрицы равен 1.

Пример 1.11 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ дважды, разложив его сначала по элементам первой строки, затем по элементам второго столбца.

Решение.

1. Вычислим определитель данной матрицы, разложив его по элементам первой строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = -5 + 18 + 6 = 19.$$

2. Вычислим определитель данной матрицы, разложив его по элементам второго столбца:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) - 2 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - (1 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = 18 + 4 - 3 = 19.$$

Ответ: 19.

Прежде чем сформулировать свойства определителей, введем понятие линейно зависимых строк и столбцов матрицы и ее определителя (это понятие для того и другого является одинаковым).

Запишем матрицу A с помощью вектор-строк или вектор-столбцов, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{a}^{1} \\ \vec{a}^{2} \\ \vec{a}^{3} \\ \dots \\ \vec{a}^{m} \end{pmatrix}=\left(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \dots \quad \vec{a}_n\right)$$

Определение 1.22 Строки матрицы A – $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3, \dots, \vec{a}^m$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, при этом хотя бы одно отлично от нуля, что выражение $\alpha_1 \cdot \vec{a}^1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}^2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}^3 + \dots + \alpha_m \cdot \vec{a}^m = 0$.

Определение 1.23 Выражение вида $\alpha_1 \cdot \vec{a}^1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}^2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}^3 + \dots + \alpha_m \cdot \vec{a}^m$ называют *линейной комбинацией* строк данной матрицы.

Определение 1.24 Строки матрицы A – $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3, \dots, \vec{a}^m$ называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация строк равна нулю, только при одном условии: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$.

Если матрицу записать с помощью вектор-столбцов, то аналогично определяется линейная зависимость и линейная независимость столбцов матрицы и ее определителя.

Сформулируем основные, достаточно очевидные, но важные свойства, которыми обладают определители в виде следующей теоремы без доказательства.

Теорема 1.1 (свойства определителей матрицы)

1. Определитель матрицы A и определитель транспонированной матрицы A^T равны, т. е. $\det A = \det A^T$.

2. Определитель произведения двух матриц A и B равен произведению определителей данных матриц, т. е. $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$.

3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

5. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

6. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

8. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы, например, третьего порядка, верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2, e = e_1 \pm e_2,\ f = f_1 \pm f_2$, то справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}.$$

Пример 1.12 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $\det(A \cdot B)$.

Решение. Используем свойство 2 определителей матриц, а именно $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

1-й способ. Вычислим отдельно определители заданных матриц. $\det A = 4 + 2 = 6$, $\det B = 3 - 0 = 3$, тогда $\det A \cdot \det B = 6 \cdot 3 = 18$.

2-й способ. Найдем произведение матриц $(A \cdot B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$, тогда определитель матрицы произведения $\det(A \cdot B) = -4 + 22 = 18$.

Замечаем, что результат получился одинаковый.

Ответ: 18.

Рассмотренные выше свойства определителей позволяют упростить расчеты.

Пример 1.13 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 14674 & 14784 \\ 19568 & 19678 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 14674 & 14784 \\ 19568 & 19678 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14674 & 14784-14674 \\ 19568 & 19678-19568 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14674 & 110 \\ 19568 & 110 \end{vmatrix} = 110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 19568 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 19568-14674 & 1-1 \end{vmatrix} = 110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 4894 & 0 \end{vmatrix} = 110\cdot(14674\cdot 0 - 4894\cdot 1) = 538340$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 14674 & 14784 \\ 19568 & 19678 \end{vmatrix} = 538340$

Кроме того, они являются основным инструментом при доказательстве тождеств.

Пример 1.14 Докажите тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1-1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1-1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1-1 & (c+a)-(b+a) \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Последнее равенство справедливо, в связи с тем, что определитель треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Это будет показано ниже в текущем параграфе.

Тождество доказано. ▲

Свойства определителей позволяют также упростить вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1.15 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

1 способ. Воспользуется методом разложения по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-5)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(7\cdot 2\cdot 2 + (-9)\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 7\cdot(-6) - (-6)\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 7\cdot 7 - (-9)\cdot(-1)\cdot 2) +$$

$$+5\cdot((-3)\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 7\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 7\cdot(-3) - 5\cdot(-1)\cdot 2) +$$

$$+((-3)\cdot(-9)\cdot 2 + 5\cdot(-6)\cdot 4 + 7\cdot 7\cdot 4 - 4\cdot(-9)\cdot 4 - (-6)\cdot 7\cdot(-3) - 5\cdot 7\cdot 2) -$$

$$-2\cdot((-3)\cdot(-9)\cdot 1 + 5\cdot(-6)\cdot(-1) + 7\cdot 2\cdot 4 - 4\cdot(-9)\cdot(-1) - (-6)\cdot 2\cdot(-3) - 5\cdot 7\cdot 1) =$$

$$= 2\cdot(28 - 36 + 42 + 48 - 49 - 18) + 5\cdot(-12 + 20 - 28 - 32 + 21 + 10) +$$

$$+(54 - 120 + 196 + 144 - 126 - 70) - 2\cdot(27 + 30 + 56 - 36 - 36 - 35) =$$

$$= 2\cdot 15 + 5\cdot(-21) + 78 - 2\cdot 6 = 30 - 105 + 78 - 12 = -9.$$

Очевидно, что выбор столбца или строки, по которым ведется разложение, в данном случае не имеет принципиального различия, так среди элементов нет нулевых, и при любом выборе расчет сведется к вычислению четырех определителей третьего порядка.

2 способ. Предварительно преобразуем исходный определитель, а точнее добьемся того, чтобы все элементы в третьем столбце за исключением одного оказались равными нулю. Для чего к элементам второй строки прибавим элементы первой строки, к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на (-2) и затем к элементам четвертой строки прибавим элементы первой строки, умноженные на (-1). Согласно теореме 3.1 пункт 7, величина определителя при этом не изменится. Запишем расчеты, выполняя указанные действия последовательно.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3+2 & 7+(-5) & -1+1 & 4+2 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 5+2\cdot(-2) & -9+(-5)\cdot(-2) & 2+1\cdot(-2) & 7+2\cdot(-2) \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4+2\cdot(-1) & -6+(-5)\cdot(-1) & 1+1\cdot(-1) & 2+2\cdot(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

В получившемся определителе $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ среди элементов третьего столбца только один отличен от нуля, поэтому для дальнейших расчетов разумно воспользоваться методом разложения по элементам третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} + a_{43}\cdot A_{43} = \left| a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0 \right| =$$

$$=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+(-6)+12-12-3-0=-9.$$

При выполнении указанных действий, замечаем, что вычисление определителя четвертого порядка, свелось к вычислению определителя третьего порядка.

Ответ: $\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9.$

Замечание 1.5 Правило вычисления определителей методом разложения по элементам строки или столбца позволяет получить особую формулу для вычисления определителей треугольного вида.

Величина определителя треугольного вида равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{n-1n-1}\cdot a_{nn}. \qquad (1.13)$$

Замечание 1.6 Из последнего утверждения замечаем, что величина определителя единичной матрицы любого порядка равна 1.

§4 Элементарные преобразования. Базисный минор. Ранг матрицы.

Элементарные преобразования матриц играют большую роль в теории матриц и широко используются в вычислениях.

Определение 1.24 Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) матрицы называют следующие преобразования:

1) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

2) прибавление одной строки (столбца) к другой строке (столбцу), умноженной на любое число;

3) перестановка строк (столбцов) местами.

Определение 1.25 Матрицы A и B, получающиеся одна из другой при помощи элементарных преобразований, называются *эквивалентными.*

Обозначают: $A \sim B$.

Теорема 1.2 Любая матрица с помощью элементарных преобразований может быть приведена к ступенчатому виду.

Выше было использовано понятие *дополнительного минора* произвольного элемента a_{ij} квадратной матрицы A, но существует еще и понятие *минора* матрицы.

Определение 1.26 Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется минором матрицы A.

Минор матрицы может быть не только у квадратной матрицы, но и у произвольной матрицы.

Если в произвольной матрице выделить s строк и s столбцов, то получим минор этой матрицы порядка s.

Пример 1.16 Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ минорами первого порядка являются: $|2|, |9|, |1|,$ …., т.е. определители первого порядка, составленные из элементов матрицы. Минорами второго порядка являются определители:

$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$, …., т.е. определители второго порядка, составленные из элементов, стоящих на пересечении двух строк и двух столбцов. Минорами третьего порядка являются: $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$. Миноров четвертого порядка у неё быть не может, так как строк всего 3.

Для практических приложений важное значение имеет порядок миноров матрицы, отличных от нуля.

Определение 1.27 В матрице A размером $m \times n$ минор порядка r называется базисным, если он отличен от нуля, а все остальные миноры $(r+1)$ порядка равны нулю или их вообще не существует.

В матрице может быть несколько разных базисных миноров, но порядок у них будет всегда один и тот же.

Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор, называют *базисными столбцами и строками.*

Определение 1.28 Рангом матрицы называют порядок базисного минора или самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры этой матрицы.

Замечание 1.7 Ранг нулевой матрицы равен нулю.

Обозначение: Rang(A) или *Rg(A).*

Замечание 1.8 На практике, для определения ранга матрицы, как правило, поступают следующим образом: смотрят, миноры каких порядков можно составить и, начиная с миноров наивысшего порядка проводят анализ: есть ли среди них ненулевые, если есть, то ранг матрицы равен числу, соответствующему порядку этих миноров; если все они – нулевые, то анализируют миноры порядка на единицу меньше.

Пример 1.17 Определите ранги матриц: а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

Решение: а) Заметим, что наивысший порядок миноров, которые можно составить для данной матрицы – это третий порядок, причем такой минор будет единственным для этой матрицы. Это минор, составленный из всех элементов матрицы. Определим его величину, используя правило вычисления определителей треугольного вида:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 7\cdot 4=28.$$

Минор отличен от нуля, следовательно, ранг матрицы равен 3.

б) В этом случае наивысший порядок миноров, которые можно образовать из элементов матрицы, также равен 3. Но величина соответствующего определителя, вычисленная, как и в предыдущем случае, с помощью правила вычисления определителей треугольного вида, равна нулю:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot 7=0.$$

Других миноров третьего порядка для данной матрицы составить нельзя, следовательно, ранг матрицы не может быть равен 3.

Проверим, есть ли у данной матрицы миноры второго порядка, отличные от нуля.

Заметим, что $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$.

Так как среди миноров второго порядка есть ненулевые миноры, то наивысший порядок миноров, отличных от нуля, для данной матрицы, – 2. Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Ответ: а) 3; б) 2.

Замечание 1.9 В тех случаях, когда число строк или столбцов матрицы не превышает трех, особых затруднений с определением ранга не возникает. Но когда приходится проводить анализ значений определителей более высоких порядков ($n \geq 4$), простой перебор миноров, начиная с миноров наивысшего порядка, может потребовать много времени и усилий. Решение задачи можно упростить, если воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.3 Если матрица *A* эквивалентна матрице *B*, то $RgA = RgB$, т.е. элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Замечание 1.10 Эта теорема дает более простой алгоритм определения ранга матрицы, используя элементарные преобразования. Для этого матрицу сначала приводят к ступенчатому виду, позволяющему легко определить ранг матрицы с помощью рассмотренного выше алгоритма.

Пример 1.18. Определите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: сначала, используя элементарные преобразования, приведем матрицу к ступенчатому виду. Для чего предварительно поменяем местами первую и вторую строки матрицы, а затем к элементам третьей сроки прибавим соответствующие элементы первой, умноженные на 3, а к элементам пятой строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Перед следующим шагом (получением нулей во втором столбце) предварительно разделим элементы второй, третьей, четвертой и пятой строк на 2, -11, 5, -5 соответственно (данная операция равносильна умножению элементов данных строк на $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{11}$, $\frac{1}{5}$, -$\frac{1}{5}$ соответственно).

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Миноры наивысшего порядка, которые можно составить для данной матрицы, – это миноры третьего порядка, но все они будут равны нулю, так как у матрицы, получившейся после элементарных преобразований только две ненулевые строки.

Нетрудно заметить, что минор $\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-4) = -1 \neq 0$.

Следовательно, ранг получившейся матрицы равен 2, а так как она эквивалентна исходной (получается из неё при помощи элементарных преобразований), то ранг исходной матрицы тоже равен 2. Можем заметить, что после приведения матрицы к ступенчатому виду, ее ранг будет равен числу ненулевых строк в ступенчатой матрице.

Замечание 1.11 Существует еще один алгоритм определения ранга матрицы, который называется «*метод окаймляющих миноров*». При желании с ним можно ознакомиться в учебнике:

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М: Наука, 1971. – С.73-74.

§5 Обратная матрица

Определение 1.29 Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы *A,* если

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\,, \tag{1.14}$$

где E – единичная матрица.

Замечаем, что матрицы A и A^{-1} являются перестановочными, а перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка. Следовательно, обратную матрицу может иметь только квадратная матрица.

Определение 1.30 Квадратную матрицу A называют *невырожденной матрицей*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае, матрицу называют *вырожденной матрицей*.

Из определения легко заметить, что невырожденной матрицей будет матрица, строки которой линейно независимы. У вырожденной матрицы строки будут линейно зависимыми.

Определение 1.31 Квадратную матрицу A^V называют присоединенной к матрице A, если ее элементами являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A^V=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$ где A_{ij} — это алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.4 Если A — это квадратная матрица порядка *n,* а A^V — это присоединенная к ней матрица, то

$$A\cdot \left(A^V\right)^T=\left(A^V\right)^T\cdot A=E\cdot\det A\,, \tag{1.15}$$

где E — единичная матрица *n-го* порядка.

Сформулируем условие существования и единственности обратной матрицы, а также способ ее нахождения.

Теорема 1.5 Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которую можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^{V}\right)^{T}. \qquad (1.16)$$

Доказательство.

Так как A — это невырожденная матрица, то ее определитель $\det A \neq 0$. Из равенств (1.15) находим $A\left(\frac{1}{\det A}\left(A^{V}\right)^{T}\right) = \left(\frac{1}{\det A}\left(A^{V}\right)^{T}\right)A = E$. Это означает, что выполняется равенство (1.14), и матрица (1.16) является обратной к матрице A.

Покажем ее единственность. Пусть существует еще одна матрица A_1^{-1}, тогда, согласно определению обратной матрицы выполняется равенство $A \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot A = E$. Следовательно, можно записать:

$A_1^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = A_1^{-1} \cdot (A \cdot A^{-1}) = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1}$ или, по-другому,

$A_1^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A^{-1}) = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$. Откуда делаем вывод, что $A^{-1} = A_1^{-1}$.

Теорема доказана. ▲

Замечание 1.11 Метод нахождения обратной матрицы по формуле (1.16) называют *«методом присоединенной матрицы»*.

Теорема 1.6 (свойства обратной матрицы)

1) $E^{-1} = E$. (1.17)

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. (1.18)

3) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$. (1.19)

4) $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, (1.20)

для невырожденных матриц *A* и *B* одного порядка.

5) $det A^{-1} = \frac{1}{det A}$. (1.21)

Замечание 1.12 Обратную матрицу можно находить и другим способом, *способом элементарных преобразований.* Опишем этот способ нахождения обратной матрицы. Он основан на следующих рассуждениях.

Если элементарными преобразованиями строк обратить матрицу A в единичную, то те же преобразования переведут единичную матрицу в матрицу A^{-1}. Тогда, чтобы найти обратную матрицу, необходимо:

1. Составить матрицу B размеров $n \times 2n$, приписав к матрице A справа, соответствующую ей единичную матрицу;

2. Элементарными преобразованиями строк преобразуем матрицу B так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу. Тогда правая половина превратится в матрицу A^{-1}.

Практические занятия к Главе 1 «Матрицы и определители»

Практическое занятие № 1

Матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы, способы его вычисления. Свойства определителя матрицы.

Задание 1. Найти сумму матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

При сложении двух матриц получаем новую матрицу, элементы которой получаются путем сложения элементов данных матриц, стоящих на одинаковых местах, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Результатом суммы матриц A и B получилась единичная матрица E.

▲

Задание 2. Даны три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $D=3A+4B-2C$.

Решение.

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 9 & -12 & 15\\ 6 & 3 & -9\end{pmatrix};\quad 4B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 8 & 12 & 16\\ 4 & -20 & 24\end{pmatrix};\quad 2C=\begin{pmatrix}6 & 8 & 10\\ 2 & -6 & 4\\ 16 & 12 & -14\end{pmatrix};$$

$$D=3A+4B-2C=\begin{pmatrix}1 & -12 & -4\\ 15 & 6 & 27\\ -6 & -29 & 29\end{pmatrix}.$$

▲

Задание 3. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$

Найти произведение данных квадратных матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

Произведением матрицы A размером $m\times n$ на матрицу B размером $n\times k$ называется такая матрица C, элементы c_{ij} которой находят по формулам:

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj},\quad \forall i=[1,m],\ \forall j=[1,k].$$

Таким образом, чтобы найти элемент матрицы C, стоящий в *i*-й строке и *j*-м столбце – c_{ij}, необходимо *i*-ю строку матрицы A умножить на *j*-й столбец матрицы B по формуле, указанной в определении. Таким образом, замечаем, что умножать одну матрицу на другую можно только в случае, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй матрице. Если поменять матрицы местами при умножении, то данная операция может иметь другой результат или не всегда будет иметь смысл.

В нашем примере даны квадратные матрицы, поэтому произведение данных квадратных матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ возможно и при этом, в обоих случаях, полученные матрицы от произведений будут иметь размеры 2×2.

Найдем элементы матрицы $A\cdot B=C$, где

$c_{11}=1\cdot 3+2\cdot 7=17;$

$c_{12}=2\cdot 8+1\cdot(-4)=12;$

$c_{21}=5\cdot 3+(-6)\cdot 7=-27;$

$c_{22} = 5 \cdot (-4) + (-6) \cdot 8 = -68;$

$$C = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ -27 & -68 \end{pmatrix};$$

Найдем элементы матрицы $B \cdot A = D$, где

$d_{11} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 = -17;$

$d_{12} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot (-6) = 30;$

$d_{21} = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 5 = 47;$

$d_{22} = 7 \cdot 2 + 8 \cdot (-6) = -34;$

$$D = \begin{pmatrix} -17 & 30 \\ 47 & -34 \end{pmatrix}.$$

▲

Задание 3. Найти произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$ двух матриц
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Замечаем, что количество столбцов в первой матрице A и количество строк во второй матрице B одинаково и равно четырем, поэтому произведение матриц $A \cdot B$ возможно. Найдем произведение этих матриц. Для этого определим матрицу произведения:

$$\left[\begin{matrix} \|A\|_{2\times 4} \\ \|B\|_{4\times 2} \end{matrix}\right. = \|C\|_{2\times 2}.$$

Найдем элементы матрицы $A \cdot B = C$.

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 4;$

$c_{12} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) = -2;$

$c_{21} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 15;$

$c_{22} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 1.$

Запишем матрицу C: $\quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}.$

Аналогично определяем, что произведение матриц $B \cdot A$ также возможно. Найдем произведение $B \cdot A = D$.

$$\left[\begin{matrix} \|B\|_{4\times 2} \\ \|A\|_{2\times 4} \end{matrix}\right. = \|D\|_{4\times 4};$$

$d_{11} = 2\cdot 1 + 1\cdot 3 = 5$; $\quad d_{12} = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$;

$d_{13} = 2\cdot 2 + 1\cdot 0 = 4$; $\quad d_{14} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 0$;

$d_{21} = 1\cdot 1 + 0\cdot 3 = 1$; $\quad d_{22} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$;

$d_{23} = 1\cdot 2 + 0\cdot 0 = 2$; $\quad d_{24} = 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 = -1$;

$d_{31} = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 3 = -3$; $\quad d_{32} = 3\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = -2$;

$d_{33} = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 0 = 6$; $\quad d_{34} = 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 = -7$;

$d_{41} = 4\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 1$; $\quad d_{42} = 4\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1$;

$d_{43} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 0 = 8$; $\quad d_{44} = 4\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = -6$.

Запишем матрицу D: $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

▲

Задание 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Решение. Данный определитель второго порядка, поэтому вычислим его по формуле (1.7), а именно: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - (-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

▲

Задание 5. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Данный определитель второго порядка, поэтому вычислим его по формуле (1.7).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5 - 3 = 2.$$

▲

Задание 6. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$ двумя способами: методом «треугольника»; разложив определитель по элементам первой строки.

Решение. 1) Вычислим определитель методом «треугольника» по формуле (1.8).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 1 \cdot 6 - ((-5) \cdot 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 +$$

$$+ (-1) \cdot 3 \cdot (-7)) = -56 - 10 + 18 - (-120 - 4 + 21) = -48 - (-103) = -48 + 103 = 55.$$

2) Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки в соответствии с формулой (1.10), а именно:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-28 - (-2)) + (-3) \cdot (7 - 6) + (-5) \cdot (2 - 24) =$$

$$= -52 - 3 + 110 = 55.$$

▲

Задание 7. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьей строки.

Решение. Вычислим определитель, разложив его по элементам третьей строки в соответствии с формулой (1.12), а именно

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k,i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik} .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 28 + 2 \cdot 4 = 0 .$$

▲

Задание 8. Решить уравнение:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

Решение.

а) Вычислим определитель по правилу треугольника и приравняем его к нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$.

$10 \cdot (x+5) - 3 + 36 - 10 - 36 + 3 \cdot (x+5) = 0$;

$x + 50 - 13 + 3x + 15 = 0$;

$73x + 52 = 0$;

$13x = -52$;

$x = -4$.

б) Вычислим определитель по правилу треугольника и приравняем его к нулю:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

$(3-x) \cdot (5+x) + 6 + 6 - 3 \cdot (3-x) - 6 - 2 \cdot (5+x) = 0$;

$15 + 3x - 5x - x^2 + 6 - 9 + 3x - 10 - 2x = 0$;

$-x^2 - x + 2 = 0$;

$x^2 + x - 2 = 0$;

$D=1^2-4\cdot(-2)=1+8=9$;

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$;

$x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$.

Ответ: а) $x=-4$; б) $x_1=1, x_2=-2$.

Задание 9. Вычислить определитель четвертого и пятого порядка:

$$\text{а) }\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&-1&-4&3\\3&-4&-1&-2\\4&3&2&-1\end{vmatrix};\ \text{б) }\begin{vmatrix}-2&3&4&-2\\1&5&3&-3\\3&4&5&3\\2&-2&-3&6\end{vmatrix};\ \text{в) }\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&5\\3&4&5&5&5\\4&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\end{vmatrix}.$$

Решение.

а) Найдем определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&-1&-4&3\\3&-4&-1&-2\\4&3&2&-1\end{vmatrix}=1\cdot\ -1^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&-4&3\\-4&-1&-2\\3&2&-1\end{vmatrix}+2\cdot\ -1^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-4&3\\3&-1&-2\\4&2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\ -1^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&-4&-2\\4&3&-1\end{vmatrix}+4\cdot\ -1^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&-4\\3&-4&-1\\4&3&2\end{vmatrix}=20-2\cdot60+3\cdot100-4\cdot\ -100\ =$$

$$=20-120+300-400=600.$$

б) Для вычисления определителя в этом пункте используем его свойства 3, 4, 7 теоремы 1.1. В этом случае получим в первом столбце кроме элемента a_{21} нули, используя элементарное преобразование над строками определителя, которое его не меняет (свойство 7 определителя):

$$\begin{vmatrix}-2&3&4&-2\\1&5&3&-3\\3&4&5&3\\2&-2&-3&6\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\text{к элементам первой, третьей и}\\\text{четвертой строки прибавим элементы}\\\text{второй строки, умноженные}\\\text{на 2,}\ \ -3\ \text{, и}\ \ -2\ \ \text{соответственно}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0&13&10&-8\\1&5&3&-3\\0&-11&-4&12\\0&-12&-9&12\end{vmatrix}=1\cdot\ -1^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}13&10&-8\\-11&-4&12\\-12&-9&12\end{vmatrix}=$$

вынесем за знак определителя общий множитель третьего столбца:

$$= -1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 10 & -2 \\ -11 & -4 & 3 \\ -12 & -9 & 3 \end{vmatrix} =$$

вынесем за знак определителя общий множитель третьей строки:

$$= -4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 10 & -2 \\ -11 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

получим в третьем столбце нули кроме элемента a_{33}, используя свойство 7 определителя. К элементам первой строки прибавим элементы третьей строки, умноженные на 2, к элементам второй строки прибавим элементы третьей строки, умноженные на -3, получим:

$$= -12 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 10 & -2 \\ -11 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$= -12 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -12 \cdot -1^{3+3} \cdot (25-4) = -252.$$

в) Для вычисления определителя в этом пункте приведем его к треугольному виду, используя элементарные преобразования над строками и свойства определителя. В соответствии с формулой 1.13, напоминаем, что *величина определителя треугольного вида равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{от элементов второй строки} \\ \text{отнимаем элементы первой строки,} \\ \text{умноженные на 2, от элементов} \\ \text{третьей строки отнимаем элементы} \\ \text{первой строки, умноженные на 3,} \\ \text{от элементов четвертой строки} \\ \text{отнимаем элементы первой строки,} \\ \text{умноженные на 4, от элементов пятой} \\ \text{строки отнимаем элементы первой} \\ \text{строки, умноженные на 5} \end{array}\right] =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4 & -7 & -10\\ 0 & -3 & -7 & -11 & -15\\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20\end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{от элементов третьей строки}\\ \text{отнимаем элементы первой строки,}\\ \text{умноженные на 2, от элементов}\\ \text{четвертой строки отнимаем}\\ \text{элементы первой строки,}\\ \text{умноженной на 3, от элементов}\\ \text{пятой строки отнимаем элементы}\\ \text{первой строки, умноженные на 5}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=$$

поменяем местами третью и четвертую строки определителя и изменим его знак, согласно формуле 1.13, получим:

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 5=5.$$

Ответ: а) 400; б) -252; в) 5.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию № 1

Задание 1. Найти $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

Задание 2. Найти произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти A^2+A+E, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Задание 4. Найти произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B_{3\times4} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти $A \cdot B^T$, если

$$A_{2\times4} = \begin{matrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 5 \end{matrix},\ B_{2\times4} = \begin{matrix} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{matrix}.$$

Задание 6. Вычислить определитель 2-го порядка: а) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

Задание 7. Решить уравнения: а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & x-10 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

Задание 8. Вычислить определитель четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Замечание. В задании 5 необходимо транспонировать матрицу, что не было сделано в практическом занятии, но в теоретическом материале, во втором параграфе после определения данной операции, приведен пример и читатель может самостоятельно его рассмотреть.

Практическое занятие № 2

Обратная матрица, способы ее вычисления. Ранг матрицы, способы нахождения ранга матрицы.

Задание 1. Найти обратную матрицу для матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение: а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, для нахождения обратной матрицы применим формулу присоединенной матрицы:

$A^{-1}=\dfrac{1}{det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, в нашем случае $n=3$.

1) Находим определитель матрицы:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot2+2\cdot1\cdot5-(2\cdot3\cdot5+3\cdot1\cdot3+1\cdot2\cdot4)=$$
$$=36+6+10-(30+9+8)=52-47=5.$$

2) Вычисляем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы по формуле (1.9) $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=9,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7.$$

3) Записываем присоединенную матрицу: $A^{*}=\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

4) Получаем обратную матрицу: $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

5) Делаем проверку. Для этого используем определение обратной матрицы $A^{-1}\cdot A=E$:

$$\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение выполняется, значит, найденная матрица является обратной к данной.

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Находим определитель матрицы:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1-8-8-4-4-4=-27.$$

2) Вычисляем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы и записываем присоединенную матрицу: $A^*=\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

3) Получаем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\left(-\frac{1}{27}\right)\cdot\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Делаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение выполняется, значит, полученная матрица, является обратной к данной.

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Находим определитель матрицы: $\det A=-3$, записываем присоединенную матрицу $A^*=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получаем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $A^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $A^{-1} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Найти матрицу, обратную к данной, методом элементарных преобразований, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Если элементарными преобразованиями строк обратить матрицу A в единичную, то те же преобразования переведут единичную матрицу в матрицу A^{-1}. Тогда, чтобы найти обратную матрицу, необходимо:

1. Составить матрицу Γ размеров $n \times 2n$, приписав к матрице A справа, соответствующую ей единичную матрицу;

2. Элементарными преобразованиями строк преобразуем матрицу Γ так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу. Тогда правая половина превратится в матрицу A^{-1}.

Таким образом, запишем расширенную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6). Преобразуем эту матрицу, как указано выше с помощью элементарных преобразований над строками этой матрицы.

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-1)\ \times(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times 1 \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) III:2 \quad \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \times(-1) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \times(-1) \quad \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2 .$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти ранг следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдем ранг матрицы, путем приведения ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, которые данную матрицу приводят к матрице эквивалентную ей. Число ненулевых строк в ступенчатой матрице равно ее рангу.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{к элементам третьей строки} \\ \text{прибавим элементы первой} \\ \text{строки умноженные на } -1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{к элементам третьей строки} \\ \text{прибавим элементы второй} \\ \text{строки умноженные на } -1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы в этом случае равен количеству не нулевых строк, в нашем случае $RgA = 3$.

▲

б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Выполним все те же действия что и в пункте а).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{к элементам второй, третьей,} \\ \text{четвертой и пятой стороки} \\ \text{прибавим элементы первой строки} \\ \text{умноженные на } -2\text{ , 2, } -6 \text{ и 1} \\ \text{соответственно} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{к элементам третьей, четвертой} \\ \text{и пятой строки прибавим элементы} \\ \text{второй строки умноженные на 3, } -4 \\ \text{и 1 соответственно} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{сложим элементы третьей и}\\ \text{четвертой строк, вычтем}\\ \text{элементы третьей и пятой строки}\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы в этом случае равен количеству не нулевых строк, в нашем случае $RgA = 3$.

▲

в) $\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, приведем матрицу к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования.

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{поменяем местами}\\ \text{первую и вторую}\\ \text{строки}\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{к элементам второй и}\\ \text{третьей строк прибавим}\\ \text{элементы первой строки}\\ \text{умноженные на } -3 \text{ и } -1\\ \text{соответсвенно}\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{к элементам третьей}\\ \text{строки прибавим}\\ \text{элементы второй строки}\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы в этом случае равен количеству не нулевых строк, в нашем случае $RgA = 2$.

▲

г) $\begin{pmatrix}3 & 2 & -5 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -3\\ 3 & 5 & -13 & 11\end{pmatrix}$, найдем ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

1) рассмотрим минор $|3| \neq 0$, значит ранг матрицы не меньше единицы;

2) рассмотрим минор $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0$, значит ранг матрицы не меньше двух;

3) рассмотрим миноры $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 39 + 18 - 75 - 15 - 45 + 78 = 0$ и $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -33 - 18 + 60 + 12 + 45 - 66 = 0$, следовательно, $RgA = 2$.

▲

Ответ: а) 3; б) 3; в) 2; г) 2.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию № 2

Задание 1. Найти матрицы, обратные к данным, двумя способами: методом присоединенной матрицы; методом элементарных преобразований.

а) $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Найти ранг следующих матриц, путем приведения их к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 6 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & -10 & 14 & 22 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 9 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля к Главе 1 «Матрицы и определители»

1. Что такое матрица?

2. Какая матрица называется квадратной?

3. Какая матрица называется диагональной?

4. Какая матрица называется треугольной?

5. Какая матрица называется ступенчатой?

6. Какая матрица называется нулевой?

7. Какая матрица называется единичной?

8. Какая матрица называется скалярной?

9. Какая матрица называется вектор-строкой или вектор-столбцом?

10. Как сложить две матрицы? Как умножить матрицу на число?

11. Какие операции над матрицами называются линейными?

12. Как умножить одну матрицу на другую? Какие матрицы можно умножать друг на друга? Является ли операция умножения матриц коммутативной?

13. Какие матрицы называются перестановочными? Приведите примеры перестановочных матриц.

14. Что такое транспонирование матриц?

15. Что такое определитель матрицы? Расскажите о способах вычисления определителей различных порядков.

16. Что такое минор элемента определителя, дополнительный минор элемента матрицы?

17. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя или матрицы?

18. Какая матрица называется невырожденной?

19. Какие свойства определителей вы знаете?

20. Какая матрица называется обратной к данной?

21. Сформулируйте условие существования обратной матрицы. Сколько обратных матриц может быть для одной и той же матрицы.

22. Расскажите о способах нахождения обратной матрицы.

23. Какая матрица называется приведенной матрицей?

24. Что такое базисный минор матрицы? Что такое базисные строки и базисные столбцы матрицы?

25. Какие строки матрицы называются линейно зависимыми или линейно независимыми?

26. Что такое ранг матрицы?

27. Какие способы нахождения ранга матрицы вы знаете?

28. Что такое элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы?

29. Как элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы влияют на ее ранг?

Контрольная работа к Главе 1 «Матрицы и определители»

Вариант 1.

Задание 1. Найти выражение вида:
$D = 2A + 4B - AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к данной.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

Задание 1. Найти выражение вида:
$D = 3A - 3B + 3BA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к данной.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 3.

Задание 1. Найти выражение вида:
$D = 2A + 4B - AB$, где

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к данной.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 9 & -12 & 15\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

Вариант 4.

Задание 1. Найти выражение вида:

$D=3A-3B+3BA$, где

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 5\\ -2 & 1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к данной.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 6 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 4\\ 7 & 8 & 9 & -7\end{pmatrix}$.

Глава 2 Системы линейных алгебраических уравнений

§1 Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия и определения

Определение 1.32 Система из m уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.22)$$

называется *системой линейных уравнений*, где a_{ij}, b_i – постоянные значения.

В данной системе матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *основной матрицей системы*, матрица $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ – *столбцом свободных членов*, а матрица $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы*.

Определение 1.33 Совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, которые при подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, превращают каждое ее уравнение в числовое тождество, называют решением данной системы.

Определение 1.34 Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если система уравнений не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Определение 1.35 Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного решения.

Определение 1.36 Если столбец свободных членов системы линейных уравнений равен нулю, то такая система называется однородной.

Замечание 1.13 Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет тривиальное решение (нулевое решение).

Определение 1.37 Две системы называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

§2 Исследование систем линейных уравнений

Пользуясь определением линейных операций со столбцами, можно заметить, что система (2.1.1) может быть переписана в виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (1.23)$$

Используя умножение матриц, систему (2.1.1) можно записать еще короче:

$$A \cdot X = B, \qquad (1.24)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Выбор обозначений системы линейных уравнений определяется решаемой задачей.

Основным средством исследования и решения систем линейных уравнений являются элементарные преобразования матриц. Причину этого показывает следующее предложение.

Предложение 1.4 Элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы системы (1.22) соответствуют преобразования системы линейных уравнений, не меняющие множества ее решений.

Действительно, если строка матрицы A^* умножается на число $\lambda \neq 0$, то преобразованная таким образом матрица, является расширенной матрицей системы линейных уравнений, которая получилась бы из первоначальной системы (1.22) путем умножения соответствующего уравнения на число $\lambda \neq 0$. Если в матрице i-тая строка прибавляется к j-той строке, умноженной на число, то в системе линейных уравнений это означает, что i-тое уравнение прибавляется к j-тому уравнению, умноженному на это число. Если в матрице строки меняются местами, то в системе линейных уравнений это означает, что поменяли местами соответствующие уравнения. В любом случае преобразованная система является следствием исходной. Но элементарные преобразования обратимы, а значит, и исходная система может быть получена из преобразованной и является ее следствием. Поэтому множества решений обеих систем совпадают.

Выражение «решить систему линейных уравнений» означает выяснить, совместна она или несовместна. В случае совместности – найти все ее решения.

Для исследования систем линейных уравнений на совместность используют теорему Кронекера-Капелли – критерий совместности системы линейных уравнений.

Теорема носит имена Леопольда Кронекера (1823-1891) – немецкого математика и Альфредо Капелли (1855-1910) – итальянского математика.

Теорема 1.7 Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $RgA = RgA^*$.

Доказательство.

Было показано выше, что система (1.22) может быть переписана в виде (1.23):

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

1) Докажем необходимость условия.

Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A, а это означает, что добавление этого столбца в матрицу A, т.е. переход $A \to A^*$, не изменит ранга, получившейся матрицы.

▲

2) Докажем достаточность условия.

Если ранги матриц A и A^* равны, т.е. $RgA = RgA^*$, то это означает, что эти матрицы имеют один и тот же базисный минор. Следовательно, столбец свободных членов – это линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верно равенство (1.23).

▲

Теорема 1.8 (Критерий определенности системы)

Система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен числу неизвестных данной системы, т.е. $RgA = RgA^* = n$.

Без доказательства.

Теорема 1.9 Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.

Без доказательства.

Последние теоремы приводим без доказательства, так как они являются достаточно очевидными. Читателю, которому доказательства не очевидны, рекомендуем посмотреть их в учебнике:

Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т. 1.: Учебник для студентов вузов. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.

Пример 1.19 Исследовать систему линейных уравнений на совместность.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу A^* заданной системы, и приведем её к ступенчатому виду, применяя элементарные преобразования только к строкам матрицы:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{умножим первую строку на} -2 \textit{ и прибавим} \\ \textit{ее ко второй и четвертой строкам, затем} \\ \textit{умножим на} -3 \textit{ и прибавим к третьей} \\ \textit{строке} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{умножим вторую строку на } 1 \textit{ и прибавим} \\ \textit{ее к четвертой строке, затем} \\ \textit{умножим на} -2 \textit{ и прибавим к третьей} \\ \textit{строке} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{умножим третью строку на } 2 \textit{ и прибавим} \\ \textit{ее к четвертой строке} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) = A'$$

Вспомним, что ступенчатый вид матрицы показывает ее ранг, а именно, число ненулевых строк в ней равно ее рангу. Таким образом, $RgA^* = 4$, $RgA = 3$.

Получили, что ранги не равны и в силу теоремы Кронекера-Капелли, заданная система линейных уравнений несовместна.

Замечание 1.14 Можно показать и с практической точки зрения что означает неравенство рангов, т.е. $RgA^* \neq RgA$. Достаточно заметить, что если выписать систему, соответствующую получившейся матрице A', то она примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ -2x_4 = 0, \\ 0 = -4. \end{cases}$$

Четвертое уравнение преобразованной системы не является верным равенством. Следовательно, вся система решений не имеет, т.е. является несовместной.

Пример 1.20 Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases} .$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \textit{первую строку умножим на } -2 \textit{ и сложим} \\ \textit{со второй строкой, затем ее умножим} \\ \textit{на } -3 \textit{ и сложим с третьей строкой} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{вторую строку умножим на } -4 \text{ и сложим} \\ \text{с третьей строкой} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, $RgA^{*} = RgA = 2$, т.е. ранги основной и расширенной матриц совпадают, поэтому заданная система совместна. Но применяя критерий определенности систем линейных уравнений, замечаем, что $RgA^{*} = RgA = 2 < 4$,т.е. получившийся ранг меньше числа неизвестных. Следовательно, наша система совместна, но не определена.

§3 Методы решения систем линейных уравнений

В данном параграфе рассмотрим наиболее распространенные методы решения систем линейных уравнений. К ним можно отнести **метод Крамера**, **матричный метод**, **метод Гаусса**.

Если система линейных уравнений является определенной, то для ее решения можно использовать все вышеперечисленные методы.

Рассмотрим **матричный метод** решения систем линейных уравнений.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка. Он основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Перепишем данную систему в виде: $A \cdot X = B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, следовательно,

$$X = A^{-1}\cdot B. \qquad (1.25)$$

Таким образом, замечаем, что для нахождения неизвестных величин необходимо найти обратную матрицу к основной матрице системы линейных уравнений и умножить ее на столбец свободных членов. Нахождение обратной матрицы – это, практически, всегда трудоемкий процесс. Поэтому решение систем высокого порядка данным методом может быть связано с вычислительными трудностями.

Пример 1.21 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Решение:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 3+1\cdot(-6)\cdot 5-$$

$$-5\cdot(-1)\cdot 3-(-6)\cdot 3\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-1)=1+18-30+15+$$

$$+18+2=24\neq 0.$$

Следовательно, у матрицы *A* существует обратная матрица A^{-1}, которая может быть найдена, например, методом присоединенной матрицы. Напомним, что этот метод основан на следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} алгебраические дополнения к элементам a_{ij} определителя матрицы *A*, определяемые по формулам:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

здесь M_{ij} - дополнительные миноры к элементам a_{ij} определителя матрицы *A*, т.е. определители получаемые из определителя матрицы *A* вычеркиванием *i*-той строки и *j*-го столбца.

Для рассматриваемой системы получаем, что

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot ((-1)(-1) - (-6) \cdot 3) = 1 + 18 = 19,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) = -(-1 - 9) = -(-10) = 10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-1)) = -6 + 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot (-1) - (-6) \cdot 5) = -(-2 + 30) = -28,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 5) = -1 - 15 = -16,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot (-6) - 3 \cdot 2) = -(-6 - 6) = -(-12) = 12,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5) = 6 + 5 = 11,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 5) = -(3 - 5) = -(-2) = 2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = -1 - 2 = -3.$$

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$, и

$$X = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 \cdot (-9) + (-28) \cdot 2 + 11 \cdot 25 \\ 10 \cdot (-9) + (-16) \cdot 2 + 2 \cdot 25 \\ (-3) \cdot (-9) + 12 \cdot 2 + (-3) \cdot 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ -72 \\ -24 \end{pmatrix},$$

Откуда следует, что $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, тогда, $x_1 = 2;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = -1.$

Ответ: $x_1 = 2;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = -1.$

Если система является определенной, т.е. имеет единственное решение, то такую систему также можно решать **методом Крамера**[1].

Метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0, т.е. $\det A \neq 0$.

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

---

[1] Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик. Самая известная из работ Крамера — изданный незадолго до кончины трактат «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликованный на французском языке («Introduction a l'analyse des lignes courbes algйbraique», 1750 год). В нём впервые доказывается, что алгебраическая кривая n-го порядка, в общем случае полностью определена, если заданы её $\frac{n(n+3)}{2}$ точек. Для доказательства Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем: метод Крамера.

Таким образом, метод Крамера опирается на следующую теорему.

Теорема 1.10

Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, когда определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad (1.26)$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемый из основной матрицы системы заменой i -ого столбца на столбец свободных членов, т.е.:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Без доказательства.

И опять замечаем, что решать системы этим методом с большим числом уравнений и неизвестных, является очень трудоемкой задачей. Это связано с вычислением большого числа определителей большого порядка.

Пример 1.22 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение:

Мы намеренно взяли ту же систему, что и в примере 2.3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot(-6)\cdot 5 -$$

$$-5\cdot(-1)\cdot 3 - (-6)\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-1) = 1 + 18 - 30 + 15 +$$

$$+18 + 2 = 24 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (-9)\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 25 + 2\cdot(-6)\cdot 5 -$$

$$-5\cdot(-1)\cdot 25 - (-6)\cdot 3\cdot(-9) - 2\cdot 2\cdot(-1) = -9 + 150 - 60 + 125 -$$

$$-162 + 4 = 48;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-1) + (-9)\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 25\cdot 5 -$$

$$-5\cdot 2\cdot 3 - 25\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot(-9)\cdot(-1) = -2 - 81 + 125 - 30 -$$

$$-75 - 9 = -72;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 25 + 2\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot(-6)\cdot(-9) -$$

$$-(-9)\cdot(-1)\cdot 3 - (-6)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 25 = -25 + 12 + 54 - 27 +$$

$$+12 - 50 = -24.$$

Применяя формулы теоремы Крамера, имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-72}{24} = -3;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{24} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 2;\quad x_2 = -3;\quad x_3 = -1.$

Наиболее универсальным методом, в отличие от матричного метода и метода Крамера, является **метод Гаусса[1] или метод исключения неизвестных**, который может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков».

Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.22)$$

Будем предполагать, что коэффициент $a_{11} \neq 0$ (если же в первом уравнении коэффициент при x_1 равен нулю, то всегда можно его поменять местами с уравнением системы, в котором этот коэффициент будет отличен от нуля). Поэтому, в силу данных рассуждений, можно выполнить следующие действия:

1) разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$;

2) умножим первое уравнение на $-a_{21}$ и прибавим его ко второму уравнению;

3) умножим первое уравнение на $-a_{31}$ и прибавим его к третьему уравнению;

…………………………………………………..

m) умножим первое уравнение на $-a_{m1}$ и прибавим его к m-му уравнению;

Путем таких преобразований получим систему эквивалентную данной, в которой все коэффициенты при x_1 будут равны нулю, за исключением первого уравнения. Получившаяся система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \qquad (1.27)$$

где $d_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 2,3,...n,n+1$; $d_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot d_{1j}$; $i = 2,3,...m$; $j = 2,3,...n,n+1$.

Предполагая, что $d_{22} \neq 0$, и оставляя неизменными первые два уравнения системы (1.27), преобразуем ее так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 обратился в ноль. Продолжая этот процесс, систему (1.27) можно привести к одной из следующих систем:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = p_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = p_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = p_n \end{cases}, \tag{1.28}$$

где $c_{kk} \neq 0\,(k = 1,2,\ldots,n)$, c_{ij} - некоторые коэффициенты, получившиеся после описанных преобразований, $p_k\,(k = 1,2,\ldots,n)$ - свободные члены после преобразований;

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = p_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = p_k \end{cases}, \tag{1.29}$$

где $k < n$;

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = p_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot x_n = p_k \end{cases}, \tag{1.30}$$

где $k \leq n$.

Система (1.28) имеет единственное решение, значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} из предпоследнего, и так до x_1, которое найдется из первого уравнения.

Система (1.29) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных ($x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$), входящих в это уравнение. Из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные т.д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

Система (1.30) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Итак, метод Гаусса применим к решению любой системы линейных уравнений. Решая систему этим методом, удобнее все преобразования над уравнениями производить не, с непосредственно, уравнениями, а с матрицей, состоящей из коэффициентов системы, т.е., с матрицей A^* - расширенной матрицей системы.

Пример 1.23 Найти решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25, \end{cases}$ используя метод Гаусса.

Решение.

Замечаем, что система линейных уравнений та же самая, что и в предыдущих примерах данного параграфа и она имеет единственное решение.

Составим расширенную матрицу системы A^* и приведем ее к ступенчатому виду – это будет означать, что из второго уравнения исключили неизвестную x_1, а из третьего неизвестные x_1, x_2. Затем перепишем систему согласно получившейся ступенчатой матрице.

Таким образом, имеем:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{умножим первую строку на } -1 \textit{ и сложим} \\ \textit{со второй строкой, затем умножим ее на } -3 \\ \textit{и прибавим к третьей} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \textit{умножим вторую строку на } -4 \textit{ и сложим} \\ \textit{с третьей строкой} \\ \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) = \overline{A}$$

Замечаем, что $RgA^* = RgA = 3 = n$, т.е. ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны числу неизвестных, поэтому заданная система совместна и определена.

Перепишем систему согласно матрице $\overline{A}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{cases}$$

Применяя «обратный ход», получаем:

$x_3 = -1,$

$x_2 = -\dfrac{11}{3} - \dfrac{2}{3} \cdot (-1) = -\dfrac{9}{3} = -3,$

$x_1 = -9 - 5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) = -9 + 5 + 6 = 2.$

Ответ: $x_1 = 2;$ $x_2 = -3;$ $x_3 = -1.$

Системы линейных уравнений с бесчисленным числом решений приведем на практических занятиях, которые будут описаны ниже.

§4 Общее решение однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

В первом параграфе данной главы было отмечено, что однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, называемое тривиальным.

Очевидно, что тривиальное решение будет единственным, если однородная система линейных уравнений имеет n уравнений с n неизвестными и $RgA = n$. В остальных случаях, когда $RgA = r < n$ система будет иметь бесчисленное множество решений. Покажем это.

Пусть ранг матрицы системы $RgA = r < n$. Предположим, что в базисный минор входят коэффициенты первых r уравнений. Тогда оставшиеся $m - r$ уравнений являются линейными комбинациями, то есть следствиями предыдущих. Поэтому можно оставить в системе только первые r уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + ... + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Оставим в левой части каждого уравнения неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор матрицы A, основной матрицы системы, а остальные неизвестные перенесем направо. В результате имеем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + ... + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (1.32)$$

Эта система будет иметь единственное решение относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ выраженные через остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, которым можно придавать любые произвольные значения. Таким образом, система (1.31) при $RgA = r < n$ является неопределенной, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Определение 1.38 Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор основной матрицы однородной системы линейных уравнений, называют *базисными неизвестными*, а остальные неизвестные системы $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ – *свободными неизвестными.*

Определение 1.39 Решения системы (1.31)

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ ... \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ ... \\ x_{n2} \end{pmatrix}, ..., X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ ... \\ x_{nk} \end{pmatrix} \qquad (1.33)$$

называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k = 0$ возможна только в одном единственном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

Теорема 1.11 Если в системе (1.31) ранг матрицы A равен r, а число неизвестных равно n, то число линейно независимых решений системы (1.31) равно $n - r$.

Доказательство.

По условию теоремы мы можем нашу систему (1.31) привести к виду (1.32). Тогда рассмотрим столбцы вида:

$$\tilde{X}_{r+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{X}_{r+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \tilde{X}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.34)$$

содержащие по $n - r$ чисел. Очевидно, что эти столбцы линейно независимы, а любой другой столбец той же размерности является их линейной комбинацией. Пусть эти столбцы задают значения свободных неизвестных системы (1.31).

Тогда базисные неизвестные будут однозначно определяться для выбранных свободных неизвестных из системы (1.32) по правилу Крамера, и все решения системы, соответствующие наборам свободных неизвестных (1.34), образуют $n - r$ линейно независимых столбцов вида (1.33), то есть $n - r$ линейно независимых решений системы (1.32), следовательно, и системы (1.31).

Теорема доказана. ▲

Определение 1.40 Любые $n-r$ линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называют ее *фундаментальной системой решений (ФСР).*

Определение 1.41 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений, в которой свободные неизвестные задаются по формулам (1.34), называется *нормальной фундаментальной системой решений.*

Замечание 1.15 Очевидно, что фундаментальная система решений определяется неоднозначно. Однородная система может иметь разные фундаментальные системы решений, состоящие из одного и того же количества $n-r$ линейно независимых решений.

Сформулируем очевидные свойства решений однородной системы линейных уравнений:

Теорема 1.12 Если X_1, X_2 — это решения системы (1.31), то их сумма X_1+X_2 также является решением этой системы.

Теорема 1.13 Если X_1 — это решение системы (1.31), а α - любое число, то $\alpha\cdot X_1$ тоже есть решение этой системы.

Теорема 1.14 Если $X_1, X_2, ..., X_k$ — это решения системы (1.31), то любая их линейная комбинация $\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_k X_k$ также является решением этой системы.

Можно доказать и обратное утверждение.

Теорема 1.15 Любое решение однородной системы линейных уравнений (1.31) является линейной комбинацией фундаментальной системы ее решений.

Без доказательства.

Определение 1.42 Если $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ — это фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений (1.31), а $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$ есть некоторые постоянные числа, то решение $X_{o.o}=C_1X_1+C_2\,X_2+...+C_{n-r}\,X_{n-r}$ называется *общим решением однородной системы линейных уравнений* (1.31).

Пример 1.24 Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$. Записать ее общее решение.

Решение.

Выписываем матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \textit{первую строку умножим на } -2 \textit{ и сложим} \\ \textit{ со второй строкой, затем ее умножим} \\ \textit{на } -3 \textit{ и сложим с третьей строкой, и умножим} \\ \textit{на } -1, \textit{ складывая с четвертой строкой} \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \textit{вторую строку умножим на } -1 \textit{ и сложим} \\ \textit{с третьей и с четвертой строкой} \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}$$

Таким образом, $RgA = 2$.

Заменим исходную систему в соответствии с преобразованной матрицей и выберем базисные и свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2 — это базисные неизвестные, x_3, x_4 — это свободные неизвестные. Тогда система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ -5x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{5} x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} x_3 \end{cases}$$

В соответствии с формулами (1.34) будем иметь:

$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$. Следовательно, $\begin{cases} x_1 = -1,4 \\ x_2 = 0,4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Итак, получена фундаментальная система решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы можно записать в виде: $X_{o.o} = C_1 X_1 + C_2\ X_2$, где C_1, C_2 – любые произвольные числа.

Ответ: $X_{o.o} = C_1 \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Рассмотрим структуру общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Для этого запишем эту систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.22)$$

Докажем следующие свойства ее решений.

Теорема 1.16 Сумма любого решения системы (1.22) и любого решения соответствующей ей однородной системы (1.31) является решением системы (1.22).

Доказательство.

Пусть $c_1, c_2, ..., c_n$ – некоторое решение системы (1.22), а $d_1, d_2, ..., d_n$ – некоторое решение, соответствующее ей однородной системы линейных уравнений. Подставим в систему (1.22) решение $x_i = c_i + d_i$:

$$\begin{cases} a_{11}(c_1 + d_1) + a_{12}(c_2 + d_2) + a_{13}(c_3 + d_3) + ... + a_{1n}(c_n + d_n) = b_1 \\ a_{21}(c_1 + d_1) + a_{22}(c_2 + d_2) + a_{23}(c_3 + d_3) + ... + a_{2n}(c_n + d_n) = b_2 \\ .... \\ a_{m1}(c_1 + d_1) + a_{m2}(c_2 + d_2) + a_{m3}(c_3 + d_3) + ... + a_{mn}(c_n + d_n) = b_m \end{cases}$$

После раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых получим:

$$\begin{cases}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \ldots + a_{1n}c_n) + (a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + a_{13}d_3 + \ldots + a_{1n}d_n) = b_1 \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + \ldots + a_{2n}c_n) + (a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + a_{23}d_3 + \ldots + a_{2n}d_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + a_{m3}c_3 + \ldots + a_{mn}c_n) + (a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + a_{m3}d_3 + \ldots + a_{mn}d_n) = b_m\end{cases}$$

Но $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 + \ldots + a_{in}c_n = b_i$, а $a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + a_{i3}d_3 + \ldots + a_{in}d_n = 0$ где $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, $x_i = c_i + d_i$ является решением системы (1.22).

Теорема доказана. ▲

Теорема 1.17 Разность любых двух решений неоднородной системы линейных уравнений (1.22) является решением соответствующей ей однородной системы.

Доказательство.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ - решения системы (1.22). Тогда кратко действия над уравнениями системы можно записать:

$$a_{i1}(c_1 - d_1) + a_{i2}(c_2 - d_2) + a_{i3}(c_3 - d_3) + \ldots + a_{in}(c_n - d_n) =$$
$$= (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 + \ldots + a_{in}c_n) - (a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + a_{i3}d_3 + \ldots + a_{in}d_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0, i = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема доказана. ▲

Теорема 1.18 (Об общем виде решения неоднородной системы линейных уравнений)

Если Y — это некоторое частное решение неоднородной системы линейных уравнений (1.22) с n неизвестными, ранг которой равен r, а $X_{o.o} = C_1X_1 + C_2\,X_2 + \ldots + C_{n-r}\,X_{n-r}$ - общее решение соответствующей однородной системы, тогда *общее решение неоднородной системы линейных уравнений* имеет вид:

$$X = X_{o.o} + Y = C_1X_1 + C_2\,X_2 + \ldots + C_{n-r}\,X_{n-r} + Y\,. \qquad (1.35)$$

Данная теорема является следствием теорем 1.16 и 1.17, поэтому предоставляем читателю возможность самостоятельно доказать теорему 1.18.

Пример 1.25 Для системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ записать ее общее решение.

Решение.

Однородную систему для данной мы решили в примере 2.4.1. Ее общее решение равно: $X_{o.o} = C_1\begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Замечаем, что одним из частных решений для заданной системы является, например, решение $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда общее решение будет иметь вид: $X = X_{o.o} + Y = C_1X_1 + C_2\ X_2 + Y$.

Ответ: $X = X_{o.o} + Y = C_1X_1 + C_2\ X_2 + Y = C_1\begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Практические занятия к Главе 2 «Системы линейных уравнений»

Практическое занятие № 1

Методы решения систем линейных уравнений. Исследование на совместность

Задание 1. Решить системы уравнений, представив их в матричном виде:

а) $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+5z=12 \\ 2x-6y+13z=29 \\ x-3y+6x=13 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 5y+6z=28 \\ x+2z=7 \end{cases}$.

Решение:

а) $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$.

Выпишем основную матрицу системы, матрицу свободных членов и матрицу, состоящую из неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнение и решим его: $A\cdot X=B,\ X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем обратную матрицу:

1) $\det A=4+8-27-12+24-3=-6$;

2) Найдем алгебраические дополнения к матрице A:

$A_{11} = 2 + 12 = 14;\ \ A_{12} = -(1+9) = -10;\ \ A_{13} = 4 - 6 = -2;$
$A_{21} = -(3-8) = 5;\ A_{22} = 2 - 6 = -4;\qquad A_{23} = -(8-9) = 1;$
$A_{31} = -9 - 4 = -13; A_{32} = -(-6-2) = 8;\ \ A_{33} = 4 - 3 = 1.$

3) Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(2; 3; -2)$.

б) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 12 \\ 2x - 6y + 13z = 29 \\ x - 3y + 6x = 13 \end{cases}.$

Выпишем основную матрицу системы, матрицу свободных членов и матрицу, состоящую из неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 13 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 13 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнение и решим его: $A \cdot X = B,\ X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу: $\det A = 1,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(1; 2; 3)$.

в) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5y + 6z = 28 \\ x + 2z = 7 \end{cases}.$

Выпишем основную матрицу системы, матрицу свободных членов и матрицу, состоящую из неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}11\\ 28\\ 7\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}10 & -8 & 24\\ 6 & 6 & -18\\ -5 & 4 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\ 28\\ 162\end{pmatrix}=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}54\\ 108\\ 162\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $(1;\ 2;\ 3)$.

Задание 2. Решить системы уравнений, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases}5x-3y=1\\ x+11y=6\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+2y+z=8\\ 3x+2y+z=10\\ 4x+3y-2z=4\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x+y+3z=-9\\ 8x+3y+5z=-13\\ 2x+5y-z=-5\end{cases}$.

Решение: а) $\begin{cases}5x-3y=1\\ x+11y=6\end{cases}$. Найдем главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & 11\end{vmatrix}=55+3=58,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 11\end{vmatrix}=11+18=29,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}=30-1=29,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{29}{58}=\frac{1}{2},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{29}{58}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

б) $\begin{cases}x+2y+z=8\\ 3x+2y+z=10\\ 4x+3y-2z=4\end{cases}$. Найдем главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&1\\4&3&-2\end{vmatrix}=14;\ \Delta_x=\begin{vmatrix}8&2&1\\10&2&1\\4&3&-2\end{vmatrix}=14;\ \Delta_y=\begin{vmatrix}1&8&1\\3&10&1\\4&4&-2\end{vmatrix}=28;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&8\\3&2&10\\4&3&4\end{vmatrix}=42.$$

$$x=\frac{14}{14}=1;\ y=\frac{28}{14}=2;\ \text{z}=\frac{42}{14}=3.$$

Ответ: $(1;\ 2;\ 3)$.

в) $\begin{cases}2x+y+3z=-9\\8x+3y+5z=-13\\2x+5y-z=-5\end{cases}$. Найдем главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\8&3&5\\2&5&-1\end{vmatrix}=64;\ \Delta_x=\begin{vmatrix}9&1&3\\-13&3&5\\-5&5&-1\end{vmatrix}=64;\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2&-9&3\\8&-13&5\\2&-5&-1\end{vmatrix}=-128;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&1&-9\\8&3&-13\\2&5&-5\end{vmatrix}=-192.$$

$$x=\frac{64}{64}=1;\ y=-\frac{128}{64}=-2;\ z=-3.$$

Ответ: $1;-2;-3$.

Задание 3. Исследовать систему на совместность и, если она совместна, то решить методом Гаусса. В случае неопределенности системы выделить общий вид решения и какое-нибудь частное решение.

а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\x_1+x_2-x_3=0\\4x_1-x_2+5x_3=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20\\x_1+3x_2+3x_3+x_4=11\\2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40\\3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37\end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$.

Решение: а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{поменяем местами} \\ \text{первую и вторую} \\ \text{строки матрицы} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{элементы первой} \\ \text{строки матрицы} \\ \text{прибавим к элементам} \\ \text{второй строки} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{элементы первой строки} \\ \text{матрицы умножим на } -4 \\ \text{и прибавим к элементам} \\ \text{второй и третьей строки} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы и ранг основной матрицы системы равны 3 и равен количеству неизвестных значит, система совместна и имеет единственное решение: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 5 \\ -11x_3 = -22 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = 2 \\ -x_2 = 5 - 4x_3 \\ x_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_1 = -1 \end{cases}$.

Ответ: $(-1;\ 3;\ 2)$.

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{переставим в матрице} \\ \text{первую и вторую строки} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы первой строки матрицы} \\ \text{умножим на } -2 \text{ и прибавим к} \\ \text{элементам второй и третьей строки,} \\ \text{элементы первой строки матрицы} \\ \text{умножим на } -3 \text{ и прибавим к элементам} \\ \text{четвертой строки матрицы} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы второй строки матрицы} \\ \text{умножим на 4 и прибавим к} \\ \text{элементам третьей строки матрицы,} \\ \text{элементы второй строки матрицы} \\ \text{умножим на (-1) и прибамим к элементам} \\ \text{четвертой строки матрицы} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы четвертой строки} \\ \text{матрицы разделим на 3 и} \\ \text{поменяем местами третью и} \\ \text{четвертую строки матрицы} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы третьей строки} \\ \text{матрицы умножим на } -5 \text{ и} \\ \text{прибавим к элементам} \\ \text{четвертой строки матрицы} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы и ранг основной матрицы системы равны 4 и равны количеству неизвестных, значит, система совместна и имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ -x_2 - x_4 = -2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $1; 2; 2; 0$.

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы первой строки матрицы} \\ \text{умножим на 2 и вычтем их из} \\ \text{элементов третьей строки матрицы} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{поменяем местами} \\ \text{перую и третью} \\ \text{строки матрицы} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы первой строки} \\ \text{матрицы умножим на } -2 \text{ и} \\ (-4) \text{ и прибавим к элементам} \\ \text{второй и третьей строки} \\ \text{соответственно} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & -5 & -18 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{элементы второй строки} \\ \text{матрицы умножим на } -1 \\ \text{и прибавим к элементам} \\ \text{третьей строки матрицы} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы системы равен 3, а ранг основой матрицы – 2, так как они не совпадают, система не совместна и решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l}\text{элементы первой строки матрицы} \\ \text{умножим на } -6 \text{ , 7 и 3, и} \\ \text{прибавим к элементам второй,} \\ \text{третьей и четвертой строки} \\ \text{матрицы соответственно}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l}\text{элементы второй строки} \\ \text{матрицы прибавим к} \\ \text{соответствующим элементам} \\ \text{третьей и четвертой строки} \\ \text{матрицы}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы и ранг основной матрицы системы равны 2, но не равны количеству неизвестных значит, система совместна, но не определена и имеет бесчисленное множество решений. Найдем общий вид решения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -15x_2 - 15x_3 - 19x_4 = -15 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ 15x_2 = 15 - 15x_3 - 19x_4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2 + 2x_3 + 2 \cdot \dfrac{19}{15} x_4 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 - \dfrac{19}{15} x_4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = -1 - \dfrac{7}{15} x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 - \dfrac{19}{15} x_4 \end{cases}.$$

Придадим неизвестным x_3 и x_4 значения произвольных параметров C_1, C_2 соответственно. Тогда общий вид решения данной системы будет следующим:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \dfrac{7}{15} C_2 \\ x_2 = 1 - C_1 - \dfrac{19}{15} C_2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}.$$

Придавая произвольным параметрам C_1, C_2 конкретные значения, будем получать частные решения данной системы. В силу произвольности этих параметров, таких значений им придать можно бесчисленное множество. Поэтому и решений будет у такой системы бесчисленно много. В нашем случае выделим одно какое-нибудь частное решение. Пусть, например, $C_1 = 1, C_2 = 0$, тогда частное решение будет следующим:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: общий вид решения - $\left(-1 - \dfrac{7}{15}C_2; 1 - C_1 - \dfrac{19}{15}C_2; C_1; C_2\right)$; частное решение $(-1;0;1;0)$.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию № 1

Задание 1. Решить систему, представив ее в виде матричного уравнения:

а) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = -6 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$.

Задание 3. Исследовать систему на совместность и, если она совместна, то решить систему методом Гаусса. В случае неопределенности системы выделить общий вид решения и какое-нибудь частное решение.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Практическое занятие № 2

Общее решение однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений

Задание 1. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы уравнений: а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$.

Решение.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Замечаем из ступенчатого вида матрицы, что ее ранг $RgA = 3$, а $n = 5$. Тогда фундаментальная система решений данной однородной системы линейных уравнений состоит из $n - r = 5 - 3 = 2$ линейно независимых решений.

Заменим исходную систему в соответствии с преобразованной матрицей и выберем главные и свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_2 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ -5x_3 + 4x_2 + 10x_5 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — это главные неизвестные, а x_4, x_5 — это свободные (базисные) неизвестные. Тогда система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} -5x_3 = -4x_4 - 10x_5 \\ -2x_2 = x_4 + 3x_5 \\ x_1 = -4x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4}{5}x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_1 = -4(-\frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5) - 3(\frac{4}{5}x_4 + 2x_5) - x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

Таким образом, после приведения подобных слагаемых в последнем уравнении имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{5}x_4 - 2x_5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{3}{2}x_5 \\ x_3 = \dfrac{4}{5}x_4 - 2x_5 \end{cases}.$$

В соответствии с формулами (1.34) будем иметь:

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} x_1 = -1,4 \\ x_2 = -0,5 \\ x_3 = 0,8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1,5 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

Итак, получена фундаментальная система решений, состоящая из двух линейно независимых решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1,4 \\ -0,5 \\ 0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Более того, можем заметить, что данная ФСР является нормальной фундаментальной системой решений.

Теперь общее решение однородной системы в соответствии с определением 1.42 можно записать в виде: $X_{o.o} = C_1 X_1 + C_2 X_2$, где C_1, C_2 – любые произвольные числа.

Ответ: $X_{o.o} = C_1 \begin{pmatrix} -1,4 \\ -0,5 \\ 0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & -34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases};.$$

Ранг матрицы системы $RgA = 2$, количество неизвестных $n = 5$, $n - r = 5 - 2 = 3$ – количество свободных (базисных) переменных и следовательно, ФСР состоит из трех линейно независимых решений.

Найдем общее решение системы. Для этого выделим главные переменные и свободные. Выразим главные переменные через свободные. Этот выбор осуществляется в зависимости от удобства выражения одних переменных через другие. В нашем случае выразим переменные x_1 и x_2 через остальные переменные x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 8x_2 = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5 \\ x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_1 = \frac{35}{8}x_3 - \frac{125}{8}x_4 + \frac{5}{2}x_5 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{8}x_3 + \dfrac{3}{8}x_4 - \dfrac{1}{2}x_5 \\ x_2 = \dfrac{7}{8}x_3 - \dfrac{25}{8}x_4 + \dfrac{1}{2}x_5 \end{cases}.$$

Запишем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение имеет вид: $X_{o.o} = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$.

Ответ: $X_{o.o} = C_1\begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}.$

Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы $RgA = 2$, количество неизвестных $n = 4$, $n - r = 4 - 2 = 2$ – количество свободных переменных.

Найдем общее решение системы. Для этого выделим главные переменные и свободные. Выразим главные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 \\ 2x_2 = -x_3 - 4x_4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 - x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 - x_3 + x_4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

Запишем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение однородной системы можно записать в виде: $X_{o.o} = C_1X_1 + C_2\, X_2$, где C_1, C_2 – любые произвольные числа.

Ответ: $X_{o.o} = C_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}.$

Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы $RgA = 3$, количество неизвестных $n = 6$, $n - r = 6 - 3 = 3$ – количество свободных переменных.

Найдем общее решение системы. Для этого выделим главные переменные и свободные. Выразим главные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_6 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \\ x_2 = -4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 \\ x_3 = -2x_4 + x_6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 11x_4 - 3x_5 + 2x_4 - x_6 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 14x_4 - 4x_5 + x_6 \\ x_2 = 8x_4 - 4x_6 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 11x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + x_6 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 14x_4 - 4x_5 + x_6 \\ x_2 = 11x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + x_6 \end{cases}$$

.

Запишем ФСР для данной системы.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение имеет вид: $X_{o.o} = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$.

Ответ: $X_{o.o} = C_1\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Для системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$ записать ее общее решение.

Решение.

В соответствии с теоремой 1.18 (Об общем виде решения неоднородной системы линейных уравнений) имеем:

Если Y — это некоторое частное решение неоднородной системы линейных уравнений (1.22) с n неизвестными, ранг которой равен r, а $X_{o.o} = C_1X_1 + C_2\,X_2 + \ldots + C_{n-r}\,X_{n-r}$ - общее решение соответствующей однородной системы, тогда *общее решение неоднородной системы линейных уравнений* имеет вид:

$$X = X_{o.o} + Y = C_1X_1 + C_2\,X_2 + \ldots + C_{n-r}\,X_{n-r} + Y\,. \qquad (1.35)$$

Найдем общее решение однородной системы для данной неоднородной системы линейных уравнений и какое-нибудь частное решение заданной СЛУ.

Замечаем, что эти решения можно находить одновременно, выписав расширенную матрицу системы. После этого привести ее к ступенчатому виду.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \times(-2)\times(-3)\times(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \end{array}\right) \times(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

По данной матрице сначала найдем общее решение однородной системы, учитывая, что $RgA = 3$, количество неизвестных $n = 4$, $n - r = 4 - 3 = 1$ – количество свободных переменных.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 \\ 9x_2 = -2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{9}x_3 + x_3 \\ x_2 = -\dfrac{2}{9}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{9}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{2}{9}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, свободная переменная одна и ФСР состоит из одного решения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} \\ -\dfrac{2}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение однородной системы будет иметь вид:

$$X_{o.o} = C_1X_1 = C_1\begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} \\ -\dfrac{2}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение заданной неоднородной системы. Для этого перепишем систему согласно расширенной матрице, приведенной к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 9x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -5 \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 + x_3 \\ 9x_2 = -5 - 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{10}{9} - \dfrac{4}{9}x_3 + x_3 \\ x_2 = -\dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{9}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Итак, окончательно имеем общий вид решения неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{9} + \frac{5}{9}a \\ x_2 = -\frac{5}{9} - \frac{2}{9}a \\ x_3 = a \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

При $a = 1$ частное решение для заданной системы является $Y = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$X = X_{o.o} + Y = C_1 X_1 + Y = C_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{14}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = X_{o.o} + Y = C_1 X_1 + Y = C_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{14}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию № 2

Задание 1. Найти общее решение однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_4 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

Задание 2. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$.

Вопросы для самоконтроля к Главе 2 «Системы линейных уравнений»

1. Что такое система линейных уравнений (СЛУ)?
2. Назовите виды матриц, соответствующих СЛУ.
3. Какая СЛУ называется однородной и какая неоднородной?
4. Какая СЛУ называется совместной и какая несовместной?
5. Какая СЛУ называется определенной и какая неопределенной?
6. Что такое решение СЛУ?
7. Какие СЛУ называются равносильными?
8. Как элементарные преобразования над уравнениями СЛУ влияют на решения этой СЛУ?
9. Сформулируйте критерий совместности СЛУ.
10. Сформулируйте критерий определенности СЛУ.
11. Сформулируйте условие неопределенности СЛУ.

12. В чем заключается метод Крамера решения СЛУ?

13. В чем заключается матричный метод решения СЛУ?

14. В чем заключается метод Гаусса решения СЛУ?

15. Что такое фундаментальная система решений однородной СЛУ и сколько линейно независимых решений в нее входит?

16. Свойства решений однородной СЛУ, перечислите их.

17. Каким образом находим общее решение однородной СЛУ?

18. Свойства решений неоднородной СЛУ, перечислите их.

19. Структура общего решения неоднородной СЛУ, в чем она заключается?

Контрольная работа к Главе 2 «Системы линейных уравнений»

Вариант 1

Задание 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ 2x - 5y - 3z = -17 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и, если она совместна, решить ее методом Гаусса, при возможности построить общее решение.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Вариант 2

Задание 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}.$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и, если она совместна, решить ее методом Гаусса, при возможности построить общее решение.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

Вариант 3

Задание 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}.$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и, если она совместна, решить ее методом Гаусса, при возможности построить общее решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}.$$

Вариант 4

Задание 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}.$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и если она совместна, решить ее методом Гаусса, при возможности построить общее решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}.$$

Вариант 5

Задание 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и, если она совместна, решить ее методом Гаусса, при возможности построить общее решение.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 13, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1; \end{cases}.$$

Раздел 2 Элементы векторной алгебры

Глава 1 Линейное (векторное) пространство

§ 1 Понятие n-мерного вектора. Линейные операции над векторами

Определение 2.1 *Вектором* называется упорядоченный набор из n действительных чисел, записываемый в виде $x=(x_1;\, x_2;\, ...,\, x_n)$, где x_i – i-й элемент (или i-я координата) вектора x.

Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Например, $(2;\,5)$ - двумерный вектор, $(2;\,-3;\,0)$ - трехмерный, $(1;\,3;\,-2;\,-4;\,7)$ - пятимерный, $(x_1;\, x_2;\, ...,\, x_n)$ - n-мерный вектор.

Векторы равны только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность и равные соответствующие координаты. Отсюда следует, что координаты вектора нельзя менять местами: так, $(0;\,5;\,-3)\neq(-3;\,0;\,5)$.

Определение 2.2 *Нулевым вектором* называется вектор, все координаты которого равны нулю: $0=(0;\,0;\,...,\,0)$.

Определение 2.3 *Произведением вектора* $x=(x_1;\, x_2;\, ...,\, x_n)$ на действительное число λ называется *вектор* $\lambda x=(\lambda x_1;\, \lambda x_2;\, ...,\, \lambda x_n)$.

Из определения следует, что при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Определение 2.4 *Вектор* $-x$ называют *противоположным вектором* к вектору x.

Замечаем, что противоположный вектор можно получить путем умножения данного на -1. А именно, $-x=-1\cdot x=(-x_1;\, -x_2;\, ...,\, -x_n)$.

Определение 2.5 *Суммой двух векторов* $x=(x_1;\, x_2;\, ...,\, x_n)$ и $y=(y_1;\, y_2;\, ...,\, y_n)$ называется *вектор* $x+y=(x_1+y_1;\, x_2+y_2;\, ...,\, x_n+y_n)$.

Таким образом, складывать можно только векторы одной и той же размерности. При сложении таких векторов необходимо сложить их соответствующие координаты.

Из определения 2.5 следует, что, складывая вектор и противоположный к нему, будем иметь нулевой вектор.

$$x+(-x)=(x_1;\,x_2;\,...;\,x_n)+(-x_1;\,-x_2;\,...;\,-x_n)=(0;\,0;\,...,\,0).$$

Операцию вычитания векторов, в силу определения 2.3 и 2.5, можно определить следующим образом:

$$x-y=x+(-y)=(x_1+(-y_1);x_2+(-y_2);...;x_n+(-y_n))=(x_1-y_1;x_2-y_2;...;x_n-y_n)$$

Итак, при вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты вычитаются.

Определение 2.6 Операции умножения вектора на число и сложение векторов называют *линейными операциями*.

Свойства линейных операций над векторами сформулируем в следующем предложении.

Предложение 2.1 Для любых векторов x, y, z одной и той же размерности и любых чисел α, β будут выполняться следующие равенства:

1. $x+y=y+x$.
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$.
3. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.
4. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.
5. $\alpha(\beta x)=\alpha\beta x$.
6. $x+0=x$.
7. $x+(-x)=0$.
8. $1\cdot x=x$.

Данное предложение является очевидным и его доказательство вытекает из определений линейных операций над векторами.

§ 2 Понятие линейного пространства (векторного) V^n. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты вектора при замене базиса

Определение 2.7 Множество V^n называют *линейным пространством*, а его элементы – *векторами* если:

- задан закон (*операция сложения*), по которому любым двум элементам $x \in V^n$ и $y \in V^n$ сопоставлен элемент $(x+y) \in V^n$, называемый их суммой;

- задан закон (*операция умножения на число*), по которому элементу $x \in V^n$ и числу λ сопоставлен элемент $\lambda x \in V^n$, называемый произведением x на число λ;

- для любых элементов $x, y, z \in V^n$ и любых чисел α, β выполнены следующие требования (или аксиомы):

1. $x + y = y + x$;

2. $(x+y)+z = x+(y+z)$;

3. существует элемент 0 такой, что для каждого $x \in V^n$ выполняется равенство $x + 0 = 0 + x$;

4. для любого $x \in V^n$ существует $-x \in V^n$ такой, что $x+(-x)=0$;

5. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;

6. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

8. произведение x на число 1 равно x, т.е. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Если ограничиваться действительными числами, то V^n называют *действительным линейным пространством*, если же определено умножение на любое комплексное число, то линейное пространство V^n называют *комплексным*.

Пример 2.1 Пусть V^n — это множество всех многочленов от одной переменной, степень которых не превосходит заданного числа n. Сумма двух многочленов из V^n — многочлен степени не выше n и, следовательно, принадлежит V^n. Аксиомы линейного пространства выполнены и в этом случае. Роль нуля играет многочлен, все коэффициенты которого равны нулю. V^n будет действительным или комплексным пространством, смотря по тому, рассматриваем многочлены с действительными или комплексными коэффициентами.

Замечание 2.1 Из аксиом, входящих в определение 2.7, следует, что может быть только один нулевой вектор и для каждого вектора только один противоположный.

По аналогии с матрицами и их строками можно дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов в линейном пространстве.

Определение 2.8 Сумма вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m$ называется *линейной комбинацией* векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ из V^n, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — это числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Замечание 2.2 Линейная комбинация векторов является вектором.

Определение 2.9 Система векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ называется *линейно зависимой*, если их линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0$ равна нулевому вектору и при этом хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации отличен от нуля.

Определение 2.10 Система векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0$ равна нулевому вектору только при одном условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.

Теорема 2.1 Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

Доказательство. (Необходимость)

Пусть система векторов линейно зависима, т.е. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0$ и при этом хотя бы один из $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, ..., m)$. Для определенности пусть этим коэффициентом будет λ_1. Тогда выразим вектор a_1 и получим, что $a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda_1} a_m$. Таким образом, вектор a_1 является линейной комбинацией остальных векторов. Что и требовалось доказать. ▲

(Достаточность)

Пусть теперь имеем обратную ситуацию. Например, вектор a_1 разложен по остальным векторам $a_1 = \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_m$, т.е. представляет из себя линейную комбинацию остальных векторов. Тогда перенесем этот вектор в правую часть равенства: $-a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_m = 0$. Замечаем, что коэффициент при векторе a_1 отличен от нуля, так как равен -1. Что и требовалось доказать. ▲

Остальные простейшие свойства линейной зависимости и линейной независимости векторов приведем в виде следующих теорем, без доказательства.

Теорема 2.2 Если в систему векторов входит нулевой вектор, то такая система линейно зависима.

Теорема 2.3 Если некоторые из векторов системы $a_1, a_2, ..., a_m$ составляют сами по себе линейно зависимую систему, то вся система $a_1, a_2, ..., a_m$ линейно зависима.

Теорема 2.4 Любые векторы, входящие в линейно независимую систему векторов, сами по себе линейно независимы.

Теорема 2.5 Если вектор раскладывается по линейно независимой системе векторов, то коэффициенты разложения определены однозначно.

Следующим важным понятием в данной теме является понятие *базиса*.

Определение 2.11 *Базисом* в линейном пространстве V^n называют упорядоченную конечную систему векторов, если:

1) она линейно независима;

2) каждый вектор из V^n, раскладывается в линейную комбинацию векторов этой системы.

Замечание 2.3 В определении говорится, что базис – это упорядоченная система векторов. Это означает, что из одного и того же множества векторов можно составить разные базисы, по-разному нумеруя векторы.

Коэффициенты линейной комбинации, о которой идет речь в определении базиса, называют ***компонентами*** или ***координатами*** вектора в данном базисе.

Векторы базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ записывают в виде строки $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$, а координаты вектора x в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ – в столбец: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Разложение вектора x по базису можно записать:

$$x = (e_1, e_2, ..., e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

Замечание 2.4 Координаты вектора в выбранном базисе определены однозначно. Это утверждение следует из теоремы 2.5.

Приведем без доказательства следующие утверждения.

Теорема 2.6 Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов всегда линейно зависима.

Теорема 2.7 Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то и любой другой базис состоит из n векторов.

Определение 2.12 Линейное пространство, в котором существует базис из n векторов, называется n-*мерным*, а число n - *размерностью пространства*.

В нашем параграфе мы, забегая вперед, обозначали линейное пространство как V^n, где число n в этом обозначении определяет его размерность.

Поскольку мы говорили, что в одном и том же пространстве может быть множество базисов, а координаты вектора в каждом базисе определяются однозначно, следовательно, координаты вектора в различных базисах линейного пространства будут различны. Далее покажем, как меняются координаты вектора при замене базиса. Для этого введем следующие понятия.

Если в n-мерном пространстве даны два базиса $e=(e_1,e_2,...,e_n)$ и $e'=(e'_1,e'_2,...,e'_n)$, то мы можем разложить каждый вектор второго базиса по первому базису:

$$e'_i = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ji} e_j . \tag{2.1}$$

Компоненты β_{ji} можно записать в виде квадратной матрицы, порядка n:

$$S = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы — это координатные столбцы векторов базиса $e'=(e'_1,e'_2,...,e'_n)$ в базисе $e=(e_1,e_2,...,e_n)$. Поэтому столбцы линейно независимы, и определитель отличен от нуля, а именно, $\det S \neq 0$.

Определение 2.13 Матрицу, j-тый столбец которой, есть координатный столбец вектора e'_j в базисе e, называют *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Равенство (2.1) можно переписать в матричных обозначениях:

$$(e'_1,e'_2,...,e'_n)=(e_1,e_2,...,e_n)\cdot S \text{, или } e'=e\cdot S \tag{2.2}$$

Предложение 2.2 Пусть задан базис e . Каждая матрица S с $\det S \neq 0$ есть матрица перехода от базиса e к некоторому базису e'.

Доказательство.

Действительно, при $\det S \neq 0$ столбцы S линейно независимы и являются координатными столбцами n линейно независимых векторов, которые и составляют базис e'.

Что и требовалось доказать. ▲

Выясним как связаны координаты одного и того же вектора x в двух разных базисах e и e'. Для этого запишем вектор x в одном базисе и в другом.

$\begin{cases} x = e' \cdot X' \\ x = e \cdot X \end{cases} \Rightarrow e' \cdot X' = e \cdot X$, где X, X' есть координатные столбцы нашего вектора x в базисах e и e' соответственно. Базисные векторы связаны между собой матрицами перехода следующим образом:

$e' = e \cdot S$, с другой стороны, $e = e' \cdot S'$, где S, S' — это матрицы перехода, в первом случае, от базиса e к базису e', во втором случае, наоборот. Соединяя все изложенные равенства, получим:

$$e' \cdot X' = e \cdot X$$

$$e \cdot S \cdot X' = e \cdot X \Rightarrow S \cdot X' = X \Rightarrow X' = S^{-1} \cdot X$$

Таким образом, координаты вектора x при переходе от базиса e к e' будут находиться по формуле:

$$X' = S^{-1} \cdot X \,. \qquad (2.3)$$

Среди линейных векторных пространств особую роль играют Евклидовы пространства.

§ 3 Евклидово пространство

Определение 2.14 *Скалярным произведением* на пространстве V^n называется функция, которая каждой паре векторов $(x, y) \in V^n$ ставит в соответствие действительное число и эта функция удовлетворяет следующим аксиомам, каковы бы ни были векторы $x, y, z \in V^n$ и число α:

1) $(x,y)=(y,x)$;

2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

3) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

4) $(x,x)>0$ для всех $x\neq 0$ ($(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$).

Определение 2.15 Действительное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется е*вклидовым пространством*.

Определение 2.16 *Нормой* (*длиной*) вектора x в евклидовом пространстве, обозначаемое как $|x|$, называется число $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Определение 2.17 *Углом* φ между векторами x и y в евклидовом пространстве Е называют значение φ на отрезке от 0 до π, определяемое равенством:

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}=\frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}. \qquad (2.4)$$

Определение 2.18 Два вектора в евклидовом пространстве называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 2.19 Систему векторов евклидова пространства называют *ортогональной,* если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Определение 2.20 Ортогональный базис называют *ортонормированным*, если каждый вектор этого базиса имеет *норму* (*длину*), равную единице.

Теорема 2.8 (Неравенство Коши-Буняковского) Для любых векторов $x,\ y$ евклидова пространства E справедливо неравенство:

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y) \text{ или } |(x,y)|\le\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}. \qquad (2.5)$$

Данное неравенство называют неравенством Коши-Буняковского.

Теорема 2.9 (Теорема Пифагора) Если векторы x и y из евклидова пространства ортогональны, то

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2. \qquad (2.6)$$

Доказательство.

$|x+y|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=|x|^2+|y|^2$, так как векторы x и y по условию теоремы ортогональны, то $2(x,y)=0$. Следовательно, $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$.

Что и требовалось доказать. ▲

Предложение 2.3 Пусть имеем евклидово пространство со скалярным произведением (x,y) и пусть в этом пространстве $e=(e_1,e_2,...,e_n)$ - это ортонормированный базис, а координаты векторов x,y в этом базисе соответственно равны $(x_1,x_2,...,x_n)$, $(y_1,y_2,...,y_n)$, тогда скалярное произведение векторов x,y в этом базисе будет равно:

$$(x,y)=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+...+x_n\cdot y_n. \qquad (2.7)$$

Без доказательства.

Практические занятия к Главе 1 «Линейное (векторное) пространство»

Практическое занятие № 1

Линейное (векторное) пространство. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис. Замена координат вектора при переходе из одного базиса в другой

Задание 1 Приведите примеры линейных пространств.

Решение.

1) Из школьного курса математики известны понятия геометрических векторов на плоскости и в пространстве, линейных операций над ними.

Какое-то множество образует линейное пространство, а каждый элемент является вектором в этом множестве, если заданы линейные операции над элементами множества и выполняются следующие аксиомы:

1. $x+y=y+x$;

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3. существует элемент 0 такой, что для каждого $x\in V^n$ выполняется равенство $x+0=0+x$;

4. для любого $x\in V^n$ существует $-x\in V^n$ такой, что $x+(-x)=0$;

5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

8. произведение x на число 1 равно x, т.е. $1\cdot x=x\cdot 1=x$.

Таким образом, замечаем, что множество геометрических векторов на плоскости и в пространстве с линейными операциями над ними образуют линейное пространство, так как выполняются все указанные аксиомы.

2) Множество матриц размера $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами также образуют линейное пространство, так как это множество в этом случае удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства;

3) Множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) образуют линейное пространство. В этом случае решения системы можно представить как матрицы-столбцы и соответственно, необходимо смотреть пункт 2 данного задания.

4) Множество элементарных функций, непрерывных на отрезке, с операциями сложения функций и умножения функции на число образуют линейное пространство. Так как линейные операции над непрерывными функциями на отрезке дают вновь непрерывную функцию на отрезке и для непрерывных на отрезке функций выполняются аксиомы линейного пространства.

Задание 2. Являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $i = \ 1;0;0\ ;\ j = \ 0;1;0\ ;k = \ 0;0;1\ ;$

б) $a = \ 2;3;0\ ;b = \ 1;0;0\ ;$

з) $a = \ 2;4;-1\ ;b = \ -1;-3;0\ ;c = \ 2;2;-2\ .$

Решение.

1) Так как координаты векторов i, j, k даны, то составим линейную комбинацию из этих векторов с произвольными числами α, β, γ и приравняем ее к нулю.

$$\alpha i + \beta j + \gamma k = 0$$

По определению система векторов линейно независима, если линейная комбинация из этих векторов равна нулю только в одном случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю.

Составим линейную комбинацию в матричной форме и найдем числа α, β, γ.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=0,\\ \gamma=0.\end{cases}$$

Так как все числа α, β, γ равны 0, то система векторов i, j, k линейно независима.

2) $a = \ 2;3;0\ ;b = \ 1;0;0\ $.

Составим линейную комбинацию векторов a и b с произвольными числами α, β, то есть $\alpha a+\beta b=0$.

В матричной форме имеем:

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=0,\\ 3\alpha=0,\\ \beta=0,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=0.\end{cases}$$

Следовательно, система векторов a и b линейно независима.

3) $a = \ 2;4;-1\ ;b = \ -1;-3;0\ ;c = \ 2;2;-2\ $.

$$\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=0\Rightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ 4\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ -\alpha_1-2\alpha_3=0,\end{cases}\begin{cases}-4\alpha_3-\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ -8\alpha_3-3\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ \alpha_1=-2\alpha_3,\end{cases}\begin{cases}-\alpha_2-2\alpha_3=0,\\ -3\alpha_2-6\alpha_3=0,\ /:(3)\\ \alpha_1=-2\alpha_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_2=-2\alpha_3,\\ \alpha_2=-2\alpha_3,\\ \alpha_1=-2\alpha_3,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1=-2\alpha_3,\\ \alpha_2=-2\alpha_3.\end{cases}$$

Пусть $\alpha_3=p,\quad p\neq 0,\quad p\in R$, тогда $\alpha_1=-2p,\ \ \alpha_2=-2p,\ \ \alpha_3=p$.

Замечаем, что найденные коэффициенты линейной комбинации отличны от нуля, но сама линейная комбинация равна нулю. По определению линейной зависимости системы векторов, такая система должна иметь нулевую комбинацию этих векторов при хотя бы одном ненулевом коэффициенте линейной комбинации. Таким образом, мы доказали, что заданная система векторов $a=(2;4;-1);b=(-1;-3;0);c=(2;2;-2)$ линейно зависима.

Поскольку векторы линейно зависимы, то в силу теоремы 2.1 любой вектор этой системы есть линейная комбинация остальных векторов. Покажем, что данный критерий выполняется в нашем случае.

$$\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=0$$
$$-2pa-2pb+pc=0 \quad |:p$$
$$-2a-2b+c=0$$

Таким образом, $c=2a+2b;\ a=-b+\frac{1}{2}c;\ b=-a+\frac{1}{2}c$.

Ответ: 1) нет; 2) нет; 3) да.

Задание 3. Выяснить, образуют ли базис векторы $a=(2;1;-1);b=(-6;2;0);c=(2;-4;2)$?

Решение. По определению 2.11 базисом в линейном пространстве V^n называют упорядоченную конечную систему векторов, если:

1) она линейно независима;

2) каждый вектор из V^n, раскладывается в линейную комбинацию векторов этой системы.

Поэтому сначала докажем, что векторы a,b,c линейно независимы.

Для этого составим линейную комбинацию векторов a,b,c и приравняем ее к нулю. Найдем коэффициенты линейной комбинации. Если они равны нулю, то система этих векторов линейно независима.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0;$$

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}2\alpha-6\beta+2\gamma=0\\ \alpha+2\beta-4\gamma=0\\ -\alpha+2\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\beta\\ 4\beta-4\gamma=0\\ -2\beta+2\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\beta\\ \beta=\gamma\\ \beta=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\gamma\\ \beta=\gamma\end{cases}.$$

Замечаем, что последняя система линейных уравнений относительно неизвестных α, β, γ имеет бесчисленное множество решений и, следовательно, векторы a, b, c линейно зависимы и не могут образовывать базис.

Ответ: векторы a, b, c не образуют базис.

Задание 4. В базисе (i, j, k) даны векторы:

$a_1 = \ -2;1;0\ , a_2 = \ 3;-1;1\ , a_3 = \ 2;0;-1\ , a_4 = \ 1;1;1$. Известно, что векторы a_1, a_2, a_3 могут образовывать базис. Найти координаты вектора a_4 в базисе (a_1, a_2, a_3).

Решение.

Поскольку векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис, то вектор a_4 можно представить через линейную комбинацию базисных векторов. Следовательно, $a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$.

В матричной форме эта комбинация будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 3 = 3.$$

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 + 3 = 8.$$

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 0 + 1 = 5.$$

$$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 - 3 = 2.$$

$$\alpha_1 = \frac{8}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $a_4 = \frac{8}{3}a_1 + \frac{5}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3$.

Ответ: координаты вектора $a_4 = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$ в базисе (a_1, a_2, a_3).

Задание 5. Задано четырехмерное евклидово пространство, то есть размерность этого пространства $n = 4$. Определить косинус угла между векторами $x = (4; 1; 2; 2)$ и $y = (1; 3; 3; -9)$, которые заданны в ортонормированном базисе.

Решение.

Поскольку задано евклидово пространство, то в нем определено скалярное произведение и, следовательно, справедлива формула (2.4):

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}.$$

Тогда, согласно определению 2.16 имеем:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = 5; \ |y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1 + 9 + 9 + 81} = 10.$$

Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно: $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$.

В нашем случае имеем:

$$(x, y) = 4 + 3 + 6 - 18 = -5.$$

Подставляем все составляющие формулы (2.4) и получаем:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{-5}{5 \cdot 10} = -0{,}1.$$

Ответ: $\cos\varphi = -0{,}1$.

Задачи для самостоятельного решения к практическому занятию№ 1

Задание 1. Будут ли следующие системы векторов линейно зависимыми.

а) $a_1 = (2;3;5)$, $a_2 = (-4;5;-7)$, $a_3 = (10;-7;-9)$;

б) $a_1 = (1;2;3;0)$, $a_2 = (-1;0;3;-2)$, $a_3 = (-1;3;12;-5)$.

Ответ: а) да; б) да.

Задание 2. Выяснить, образуют ли векторы $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (0;1;-1)$, $a_3 = (2;4;5)$ базис?

Задание 3. В базисе (i, j, k) даны векторы:

$a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (0;1;-1)$, $a_3 = (2;4;5)$, $a_4 = (5;13;9)$. Убедиться, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис трехмерного линейного пространства и найти координаты вектора a_4 относительно нового базиса.

Задание 4. Найдите угол между векторами $a_1 = (2;-1;3;-2)$, $a_2 = (3;1;5;1)$, которые заданы в ортонормированном базисе евклидова четырехмерного пространства.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Задание 5. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел $(x_1; x_2; 0; 0)$, $(y_1; y_2; 0; 0)$, $(z_1; z_2; 0; 0)$, где

$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ - всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены обычно.

Ответ. Да.

Задание 6. Образует ли линейное пространство множество элементов $(x_1; x_2; 1; 1)$, $(y_1; y_2; 1; 1)$, $(z_1; z_2; 1; 1)$? Сложение элементов и умножение на действительное число определены обычно.

Ответ. Нет, т.к. сумма двух элементов множества не является элементом данного множества.

Вопросы для самоконтроля к Главе 1 «Линейное (векторное) пространство»

1. Дайте определение линейного пространства.
2. Приведите примеры множеств, образующих линейное пространство.
3. Что называют линейной комбинацией векторов?
4. Какие векторы называются линейно зависимыми?
5. Какие векторы называются линейно независимыми?
6. Какая система векторов образует базис?
7. Как определить размерность пространства?
8. Как изменить координаты вектора при замене базиса?
9. Дайте определение евклидова пространства.
10. Что такое норма вектора евклидова пространства?
11. Сформулируйте неравенство Коши-Буняковского.
12. Сформулируйте теорему Пифагора в евклидовом пространстве.
13. Какие векторы называют ортогональными?
14. Какой базис называют ортонормированным?
15. Как находится скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе евклидова пространства?

Список использованных источников

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов / Д.В. Беклемишев. – 12 изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 – 312 с.

2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с.

3. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.

4. Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т. 1.: Учебник для студентов вузов. / А.А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.

5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий па высшей математике. Типовые расчеты: учебное пособие / Кузнецов, Л. А. 6-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 240 с

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учеб. для вузов / А.Г. Курош – 17-е изд. — СПб.: Лань, 2008. — 432 с.

7. Шипачев, В. С. Высшая математика: Учебник / В. С. Шипачев.- М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

8. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. – 10-е изд., стер. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 304 с.