Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

О.Н. Казакова, Г.В. Теплякова, Т.А. Фомина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Практикум

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания, 35.03.08 Водные биоресурсы и аквакультура

Оренбург
2021

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73
К 14

Рецензент – кандидат технических наук, доцент А.Н. Колобов

Казакова, О.Н.
К 14 Математический анализ. Элементы теории вероятностей и математической статистики: практикум / О.Н. Казакова, Г.В. Теплякова, Т.А. Фомина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 157 с. ISBN

Практикум содержит примеры решения типовых задач, индивидуальные задания, вопросы для самоконтроля, списки используемой и рекомендуемой литературы, приложения.

Издание предназначено для обучающихся очной формы обучения, но может также быть использовано для организации аудиторной, самостоятельной и индивидуальной работ студентов заочной формы обучения различных направлений и специальностей подготовки, в том числе для обучающихся по индивидуальным образовательным программам.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN

Содержание

Введение

Современный подход к организации учебного процесса в высшем учебном заведении предполагает большую долю самостоятельности обучающегося в освоении учебного материала. В связи с чем и возникает необходимость учебно-методического сопровождения данного вида учебной деятельности.

Предлагаемый практикум призван помочь обучающимся в изучении дисциплины «Математика» или соответствующего раздела в рамках другой дисциплины. Он дает возможность детальной проработки необходимых понятий и формул, позволяет активизировать самостоятельную работу обучающихся, приучает их планировать и рационально использовать личное время.

Набор задач достаточно многообразен и позволяет скомпоновать: индивидуальные задания для выполнения типовых расчетов обучающимися очной формы обучения различных специальностей и направлений в зависимости от содержания рабочей программы по математике; аудиторные самостоятельные и контрольные работы; контрольные работы для студентов заочной формы обучения. Вопросы для самоконтроля призваны помочь обучающемуся определить уровень теоретической подготовки по дисциплине.

Практикум содержит темы, изучаемые, как правило, во втором и третьем семестрах. Конкретная тематика и содержание дисциплины определяется рабочей программой по соответствующему направлению подготовки; детальные требования к объему и содержанию теоретической и практической подготовки отражены в фонде оценочных средств по дисциплине. Ознакомиться с ними можно в личном кабинете обучающегося. Режим доступа https://osu.ru/iss/lks/. Там же имеются методические указания по освоению дисциплины.

Список рекомендуемой основной и дополнительной литературы не является исчерпывающим. Он может быть дополнен любыми другими учебниками и учебными пособиями, содержащими соответствующие разделы.

1 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1.1 Примеры решения типовых задач

Задача 1.1

Найти дифференциал функции трех переменных $U = z e^{x^2 y}$.

Решение.

Дифференциал функции трех переменных имеет вид: $dU = U'_x\, dx + U'_y\, dy + U'_z\, dz$.

Найдем частные производные первого порядка. При нахождении U'_x мы будем считать, что y и z – постоянные величины; при нахождении U'_y $-x$ и z постоянные величины; при нахождении U'_z $-x$ и y постоянные величины.

$U'_x = (z e^{x^2 y})'_x = z e^{x^2 y}\,(x^2 y)'_x = z e^{x^2 y}\, 2xy = 2xyze^{x^2 y}$;

$U'_y = (z e^{x^2 y})'_y = z e^{x^2 y}\,(x^2 y)'_y = z e^{x^2 y}\, x^2 = x^2 ze^{x^2 y}$;

$U'_z = (z e^{x^2 y})'_z = e^{x^2 y}$.

Тогда $dU = 2xyze^{x^2 y}dx + x^2 ze^{x^2 y}dy + e^{x^2 y}dz$.

Ответ: $dU = 2xyze^{x^2 y}dx + x^2 ze^{x^2 y}dy + e^{x^2 y}dz$.

Задача 1.2

Исследовать функцию на экстремум:

а) $z = -x^2 - xy - y^2 + x + y$;

б) $z = 4x^2 y + 24xy + y^2 + 32y - 6$.

Решение.

а) Найдём стационарные точки, используя необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-x^2-xy-y^2+x+y\right)'_x=-2x-y+1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(-x^2-xy-y^2+x+y\right)'_y=-x-2y+1.$$

$$\begin{cases}-2x-y+1=0,\\ -x-2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=1,\\ x+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Получили одну стационарную точку $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Исследуем функцию на экстремум в точке *M,* используя достаточные условия экстремума.

Обозначим: $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M)$, $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M)$, $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-2x-y+1\right)'_x=-2, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(-2x-y+1\right)'_y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-x-2y+1\right)'_y=-2.$$

Тогда для нашей точки $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$: $A=-2,\ B=-1,\ C=-2$.

Вычислим $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}:\Delta=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3.$

Так как $\Delta=3>0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ экстремум есть. Так как $A=-2<0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ функция имеет строгий локальный максимум.

$$z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: максимум в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $z_{\max}=\frac{1}{3}$.

б) Найдем стационарные точки, используя необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(4x^2y+24xy+y^2+32y-6\right)'_x=8xy+24y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(4x^2y+24xy+y^2+32y-6\right)'_y=4x^2+24x+2y+32.$$

$$\begin{cases}8xy+24y=0,\\4x^2+24x+2y+32=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y\,(x+3)=0,\\2y=-4x^2-24x-32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(x+3)=0,\\y=-2x^2-12x-16.\end{cases}$$

Отсюда: если $y=0$, то $-2x^2-12x-16=0\Leftrightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow x_1=-4, x_2=-2$; если $x=-3$, то $y=2$.

Получили три стационарные точки: $M_1(-4;0), M_2(-2;0)$ и $M_3(-3;2)$. Исследуем функцию на экстремум в этих точках, используя достаточные условия экстремума.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(8xy+24y\right)'_x=8y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(8xy+24y\right)'_y=8x+24;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4x^2+24x+2y+32\right)'_y=2.$$

Для точки $M_1(-4;0)$ получаем:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1)=0,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_1)=-32+24=-8,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1)=2.$$

Тогда $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -8\\ -8 & 2\end{vmatrix}=-64$. Так как $\Delta=-64<0$, то в точке $M_1(-4;0)$ экстремума нет.

Для точки $M_2(-2;0)$ получаем:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2)=0,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_2)=-16+24=8,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2)=2.$$

Тогда $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 8\\ 8 & 2\end{vmatrix}=-64$. Так как $\Delta=-64<0$, то в точке $M_2(-2;0)$ экстремума нет.

Для точки $M_3(-3;2)$ получаем:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_3)=16,\; B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_3)=-24+24=0,\; C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_3)=2.$$

Тогда $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=32$. Так как $\Delta=32>0$, то в точке $M_3(-3;2)$ экстремум есть.

Так как $A=16>0$, то в точке $M_3(-3;2)$ функция имеет строгий локальный минимум.

$z_{\min}(-3;2)=4\cdot(-3)^2\cdot 2+24\cdot(-3)\cdot 2+2^2+32\cdot 2-6=-10$.

Ответ: $z_{\min}(-3;2)=-10$.

Задача 1.3

Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ и $v=zx+xy+yz-18x-6z-y$ в точке $M(3;5;4)$.

Решение.

Найдём градиенты скалярных полей:

$$\overline{grad}\,U=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\},\quad \overline{grad}\,V=\left\{\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial z}\right\};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_x'=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_y'=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_z'=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_y'=z+y-18,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_y'=x+z-1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_z'=x+y-6.$$

Градиенты скалярных полей в произвольной точке равны:

$$\overline{grad}\,U=\left\{-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\},$$

$$\overline{grad}\,V=\{z+y-18;\ x+z-1;\ x+y-6\}.$$

Найдем значения частных производных в точке $M(3;5;4)$: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6}{50}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{10}{50}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{8}{50}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-9$, $\frac{\partial v}{\partial y}=6$, $\frac{\partial v}{\partial z}=2$.

Получили, что градиенты скалярных полей в точке $M(3;5;4)$ равны: $\overline{grad}\,U(M)=\left\{\frac{6}{50};\frac{10}{50};\frac{8}{50}\right\}$, $\overline{grad}\,V(M)=\{-9;6;2\}$.

Обозначим угол между градиентами скалярных полей через α. Найдём угол между градиентами скалярных полей, используя скалярное произведение векторов:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{grad}\,U(M)\cdot\overline{grad}\,V(M)}{\left|\overline{grad}\,U(M)\right|\cdot\left|\overline{grad}\,V(M)\right|};$$

$$\overline{grad}\,U(M)\cdot\overline{grad}\,V(M)=\frac{6}{50}\cdot(-9)+\frac{10}{50}\cdot 6+\frac{8}{50}\cdot 2=\frac{22}{50};$$

$$\left|\overline{grad}\,U(M)\right|=\sqrt{\left(\frac{6}{50}\right)^2+\left(\frac{10}{50}\right)^2+\left(\frac{8}{50}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{5},$$

$$\left|\overline{grad}\,V(M)\right|=\sqrt{(-9)^2+6^2+2^2}=11;$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{22}{50}}{\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot 11}=\frac{\sqrt{2}}{10},\quad \alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.

1.2 Индивидуальные задания

Задача 1.1

Найти дифференциал функции трех переменных.

1) $U=\dfrac{x^2}{y-2z}$ 2) $U=xe^{yz}$ 3) $U=x^2\sin\sqrt{y+z}$

4) $U=\ln(x^2+y-2z)$ 5) $U=\dfrac{x+y^2}{2z}$ 6) $U=xye^z$

7) $U=xz\,tg\sqrt{y}$ 8) $U=x^{yz}$ 9) $U=\dfrac{2x^2+y}{x+z}$

10) $U=yze^{x^2}$ 11) $U=xy\cos\sqrt{z}$ 12) $U=x\ln(y+z)$

13) $U=\dfrac{y^2}{x+z}$ 14) $U=x^2ze^y$ 15) $U=xarctg(yz)$

16) $U=y^{zx^2}$ 17) $U=\dfrac{x}{y^2-2z}$ 18) $U=y^2xz^2$

19) $U=z\sin x\cos y$ 20) $U=\dfrac{x^2+z}{y^2}$

Задача 1.2

Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум.

1) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

2) $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y+2$;

3) $z=3xy-x^2-y^2-10x+5y+3$;

4) $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y+1$;

5) $z=3xy-x^2-3y^2+x+3$;

6) $z=5+4x+10y-4xy-2x^2-3y^2$;

7) $z=1-x+y-5xy-3x^2-3y^2$;

8) $z=xy-2x^2-y^2+7x-7y-10$;

9) $z=x^2+3xy-2y^2+2x+3y+1$;

10) $z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y+5$;

11) $z=x^2+3xy+y^2-x-4y+3$;

12) $z=x^2-xy+y^2+x+y+4$;

13) $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+17$;

14) $z=x^2+xy+y^2+4x-y+5$;

15) $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-6$;

16) $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+7$;

17) $z=x^2-xy+2y^2+2x-8y+3$;

18) $z=2x^2+3xy+2y^2-4x-10y+12$;

19) $z=2x^2-3xy+2y^2-9x+12y+10$;   20) $z=x^2+xy-y^2-5x+5y-2$.

Задача 1.3

Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ и $V(x,y,z)$ в точке M.

1) $u=\dfrac{1}{xyz}$, $v=x^2+9y^2+6z^2$, $M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

2) $u=\dfrac{x}{yz^2}$, $v=x^2-y^2-3z^2$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $u=\dfrac{x^2z}{y^3}$, $v=\dfrac{-3x^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}y^3}{3}+8\sqrt{3}z^3$, $M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{1}{2}\right)$;

4) $u=\dfrac{x}{y^2z^3}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $u=x^2yz$, $v=\dfrac{-4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$, $M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

6) $u=\dfrac{y^2z^3}{x^2}$, $v=\dfrac{x^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

7) $u=x^2y\cdot z^3$, $v=\dfrac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$, $M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

8) $u=\dfrac{xy^2}{z^3}$, $v=9\sqrt{2}\cdot x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$;

9) $u=\dfrac{1}{xy^2z}$, $v=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}\cdot z^2$, $M\left(1;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

10) $u=\dfrac{z^2}{x^2y^2}$, $v=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot z^2$, $M\left(\dfrac{2}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

11) $u=\dfrac{yz^2}{x}$, $v=x^2-y^2-3z^2$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

12) $u=\dfrac{y}{xz^2},\quad v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3,\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};0\right);$

13) $u=\dfrac{y^2z^3}{x},\quad v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z},\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

14) $u=\dfrac{x^2}{y^2z^3},\quad v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z},\quad M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

15) $u=xyz,\quad v=x^2+9y^2+6z^2,\quad M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

16) $u=\dfrac{y^3}{x^2z},\quad v=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}-\dfrac{\sqrt{6}}{4z},\quad M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{1}{2}\right);$

17) $u=\dfrac{x^3y^2}{z},\quad v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z},\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

18) $u=\dfrac{z^2}{xy^2},\quad v=3\sqrt{2}\cdot x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2,\quad M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right);$

19) $u=\dfrac{z}{x^3y^2},\quad v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z},\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

20) $u=x^2yz^3,\quad v=\dfrac{4\sqrt{6}}{x}-\dfrac{\sqrt{6}}{9y}+\dfrac{3}{z},\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

1.3 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение функции многих переменных. Приведите примеры таких функций.

2) Дайте определение области определения функции 2-х переменных?

3) Какие способы задания функции нескольких переменных вы знаете?

4) Что такое предел функции 2-х переменных?

5) Приведите примеры функций двух переменных, непрерывных на своей области определения; имеющих одну точку разрыва; имеющих линию разрыва.

6) Перечислите свойства функций, непрерывных в замкнутой ограниченной области.

7) Дайте определение непрерывности функции 2-х переменных.

8) В чем заключается геометрический смысл частных производных функции двух переменных?

9) Сколько частных производных 1 порядка имеет функция 2-х переменных? Трех переменных?

10) Как найти частные приращения и полное приращение функции 2-х переменных?

11) Как вычисляются частные производные высших порядков?

12) Зависит ли вычисление смешанных частных производных второго порядка от порядка дифференцирования?

13) Что такое полный дифференциал функции 2-х переменных.

14) Дайте определение дифференцируемой функции двух переменных.

15) Является ли дифференцируемая функция непрерывной?

16) При каком условии функция двух переменных будет являться дифференцируемой. Является ли это условие необходимым или достаточным?

17) Какая плоскость является касательной к графику функции двух переменных?

18) В чем заключается свойство инвариантности дифференциала функции двух переменных?

19) В чем заключается геометрический смысл полного дифференциала функции 2-х переменных?

20) Что такое линия уровня, поверхность уровня? Приведите пример.

21) Дайте определение производной по направлению вектора.

22) Дайте определение градиента функции двух переменных.

23) Перечислите свойства градиента.

24) Что представляют собой координаты вектора градиента?

25) Как связаны частные производные первого порядка с производной по направлению?

26) Как вычислить частные производные неявно заданной функции 2-х переменных?

27) Как связаны вектор градиент и производная по направлению?

28) Запишите уравнение нормали к поверхности в данной точке.

29) Дайте определение точки локального экстремума функции двух переменных.

30) Сформулируйте необходимое и достаточные условия экстремума функции 2-х переменных.

31) В каком случае при нахождении экстремума функции двух переменных необходимы дополнительные исследования?

2 Интегральное исчисление функции одной переменной

2.1 Примеры решения типовых задач

Задача 2.1

Записать дробь в виде, удобном для интегрирования.

а) $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2+4\right)}$; б) $\dfrac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}$.

Решение.

а) $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2+4\right)}$ – дробь правильная. Разложим знаменатель на множители.

Так как $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$

$$=\frac{A(x-4)\left(x^2+4\right)+B(x-2)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)((x-2)(x-4))}{(x-2)(x-4)\left(x^2+4\right)}.$$

$$9x^3-30x^2+28x-88=A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8).$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$9x^3-30x^2+28x-88=$$

$$=(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3:\ \ A+B+C=9;$

$x^2:\ \ -4A-2B-6C+D=-30;$

$x^1: \;\; 4A + 4B + 8C - 6D = 28;$

$x^0: \;\; -16A - 8B + 8D = -88.$

Получаем систему: $\begin{cases} A + B + C = 9, \\ -4A - 2B - 6C + D = -30, \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28, \\ -16A - 8B + 8D = -88, \end{cases}$ которую решаем любым известным

способом:

$$\begin{cases} C = 9 - A - B, \\ D = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B, \\ 2A + 2B + 4C - 3D = 14, \\ 2A + B - D = 11. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9 - A - B, \\ D = 24 - 2A - 4B, \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14, \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B, \\ D = 24 - 2A - 4B, \\ 4A + 10B = 50, \\ 4A + 5B = 35. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9 - A - B, \\ D = 24 - 2A - 4B, \\ 4A + 10B = 50, \\ 50 - 10B + 5B = 35. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9 - A - B, \\ D = 24 - 2A - 4B, \\ 4A + 10B = 50, \\ B = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5, \\ B = 3, \\ C = 1, \\ D = 2. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} = \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x+2}{x^2+4}$.

б) $\dfrac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}$. Так как дробь неправильная, то предварительно следует выделить целую часть:

$$\begin{array}{rl|l} - & 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \cline{3-3} & 6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 & 2x^2 + 3 \\ \cline{1-2} - & 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\ & 9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 & \\ \cline{2-2} & 20x^2 - 25x - 25 & \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} = 2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} =$$

$= 2x^2 + 3 + 5 \cdot \dfrac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}$ – сумма целой части и правильной дроби.

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Если многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет рациональные корни, то это могут быть только числа вида $\pm \dfrac{t}{k}$, где t – делитель свободного члена d, k – делитель коэффициента a.

Для нашего знаменателя d=6, $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$; a=6, $k = \pm 1, \pm 3$, тогда корнями могут быть числа $\pm \dfrac{1}{1} = \pm 1,\ \pm \dfrac{1}{3},\ \pm \dfrac{2}{1} = \pm 2,\ \pm \dfrac{2}{3},\ \pm \dfrac{3}{1} = \pm 3, \pm \dfrac{3}{3} = \pm 1, \pm \dfrac{6}{1} = \pm 6, \pm \dfrac{6}{3} = \pm 2$.

Замечаем, что при x = 3 многочлен $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$ обращается в ноль, то есть x = 3 – корень многочлена. Тогда мы без остатка можем поделить этот многочлен на (x – 3):

$$
\begin{array}{r|l}
- \ 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\
\cline{2-2}
3x^3 - 9x^2 & 3x^2 + 5x - 2 \\
\cline{1-1}
- \ 5x^2 - 17x & \\
5x^2 - 15x & \\
\cline{1-1}
- \ 2x + 6 & \\
2x + 6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Продолжим разложение знаменателя: $3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$.

Таким образом, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$.

Тогда: $\dfrac{4x^2 - 5x - 5}{(x - 3)(x + 2)(3x - 1)} = \dfrac{A}{x - 3} + \dfrac{B}{x + 2} + \dfrac{C}{3x - 1}$.

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем соответствующие числители:

$$4x^2 - 5x - 5 = A(x + 2)(3x - 1) + B(x - 3)(3x - 1) + C(x - 3)(x + 2).$$

Чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (в некоторых случаях она может оказаться достаточно большой) применяют метод произвольных значений. Идея метода заключается в том, что в полученное выражение поочередно подставляют несколько (по количеству неопределенных коэффициентов) произвольных значений

x. Для упрощения вычислений в качестве произвольных значений можно взять значения переменной, при которых знаменатель дроби обращается в ноль, то есть в нашем случае подставляем в последнее равенство числа 3, -2, 1/3.

Получаем: $\begin{cases} 40A = 16, \\ 35B = 21, \\ C = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{5}, \\ B = \dfrac{3}{5}, \\ C = 1. \end{cases}$

Окончательно получаем:

$$\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} = 2x^2 + 3 + 5 \cdot \left(\frac{3/5}{x+2} + \frac{2/5}{x-3} + \frac{1}{3x-1} \right) =$$

$$= 2x^2 + 3 + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-3} + \frac{5}{3x-1}.$$

Ответ: а) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x+2}{x^2+4}$; б) $2x^2 + 3 + \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{5}{3x-1}$.

Задача 2.2

Найти неопределенные интегралы, используя таблицу интегралов. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

а) $\int \dfrac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}$; в) $\int \dfrac{dx}{6-7x}$;

г) $\int e^{5-4x} dx$; д) $\int \cos(2-5x) dx$; е) $\int \dfrac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$; ж) $\int \dfrac{3dx}{7+4x^2}$.

Решение.

При решении будем использовать таблицу интегралов и правило $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C$.

а) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$ – разделим почленно числитель на знаменатель, затем проинтегрируем:

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2x^4}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}\right)dx = \int\left(3\cdot x^{-\frac{1}{4}} - 2x^4\cdot x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}\right)dx =$$

$$= \int\left(3\cdot x^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{15}{4}} + x^{\frac{5}{12}}\right)dx = 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} - 2\cdot\frac{x^{\frac{15}{4}+1}}{\frac{15}{4}+1} + \frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + C =$$

$$= 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} - 2\cdot\frac{x^{\frac{15}{4}+1}}{\frac{15}{4}+1} + \frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + C = 3\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{3}{4}} - 2\cdot\frac{4}{19}\cdot x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}} + C =$$

$$= 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19}\cdot x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}} + C.$$

Проверка: $\left(4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19}\cdot x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}} + C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{3}{4}-1} - \frac{8}{19}\cdot\frac{19}{4}\cdot x^{\frac{19}{4}-1} + \frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}\cdot x^{\frac{17}{12}-1} + 0 =$

$$3x^{-\frac{1}{4}} - 2\cdot x^{\frac{15}{4}} + x^{\frac{5}{12}} = x^{-\frac{1}{4}}\left(3 - 2\cdot x^{\frac{16}{4}} + x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int(4-8x)^{-\frac{2}{5}}dx = -\frac{1}{8}\cdot\frac{(4-8x)^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} + C = -\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{3}(4-8x)^{\frac{3}{5}} + C =$

$$= -\frac{5}{24}(4-8x)^{\frac{3}{5}} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C.$$

Проверка: $\left(-\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C\right)' = \left(-\frac{5}{24}(4-8x)^{\frac{3}{5}} + C\right)' = -\frac{5}{24}\cdot\frac{3}{5}(4-8x)^{\frac{3}{5}-1}\cdot(-8) = \frac{1}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}$

в) $\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\cdot\ln|6-7x| + C.$

Проверка: $\left(-\frac{1}{7}\cdot\ln|6-7x|+C\right)'=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6-7x}(-7)=\frac{1}{6-7x}$.

г) $\int e^{5-4x}dx=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C$.

Проверка: $\left(-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C\right)'=-\frac{1}{4}e^{5-4x}\cdot(-4)+0=e^{5-4x}$.

д) $\int\cos(2-5x)dx=-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C$.

Проверка: $\left(-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C\right)'=-\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5)=\cos(2-5x)$.

е) $\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-3}}=\frac{3}{2}\cdot\ln(2x+\sqrt{4x^2-3})+C$.

Проверка: $\left(\frac{3}{2}\cdot\ln(2x+\sqrt{4x^2-3})+C\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2-3}}\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2-3}\right)'+0=$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2-3}}\cdot\left(2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}\right)==\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2-3}}\cdot\left(\frac{4\sqrt{4x^2-3}+8x}{2\sqrt{4x^2-3}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4(\sqrt{4x^2-3}+2x)}{(2x+\sqrt{4x^2+3})\cdot 2\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}.$$

ж) $\int\frac{3dx}{7+4x^2}=3\int\frac{dx}{(\sqrt{7})^2+(2x)^2}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{2x}{\sqrt{7}}+C=\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x}{\sqrt{7}}+C$.

Проверка: $\left(\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x}{\sqrt{7}}+C\right)'=\frac{3}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}+0=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{7}}=$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{7}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{7+4x^2}=\frac{3}{7+4x^2}.$$

Ответ: а) $4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19} \cdot x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17} \cdot x^{\frac{17}{12}} + C$; б) $-\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C$;

в) $-\frac{1}{7} \cdot \ln|6-7x| + C$; г) $-\frac{1}{4}e^{5-4x} + C$; д) $-\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C$;

е) $\frac{3}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2-3}) + C$; ж) $\frac{3}{2\sqrt{7}} arctg \frac{2x}{\sqrt{7}} + C$.

Задача 2.3

Найти неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием:

а) (1) $\int \frac{6x + arctg 4x}{1+16x^2} dx$, (2) $\int \frac{x + \sqrt{arctg x}}{1+x^2} dx$;

б) (1) $\int x \cdot arctg\, x\, dx$, (2) $\int x \cdot e^{2x}\, dx$, (3) $\int x^5 \cdot \ln x\, dx$;

в) (1) $\int \frac{3x^2 - x + 2}{(1+x^2)\cdot(x-1)} dx$, (2) $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x} dx$, (3) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$;

г) (1) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$, (2) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$;

д) (1) $\int \frac{dx}{\sin 3x + 3}$, (2) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Решение.

а.1) Замечаем, что необходимо разделить почленно числитель на знаменатель, затем интегрировать: $\int \frac{6x + arctg 4x}{1+16x^2} dx = \int \frac{6x}{1+16x^2} dx + \int \frac{arctg 4x}{1+(4x)^2} dx = Y_1 + Y_2$.

Найдем эти интегралы отдельно.

$$Y_1 = \int \frac{6x}{1+16x^2} dx = \frac{6}{32}\int \frac{32x}{1+16x^2} dx = \frac{6}{32} \cdot \ln\left|1+16x^2\right| + C_1 = \frac{3}{16} \cdot \ln\left|1+16x^2\right| + C_1.$$

При решении использовали правило $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)| + C.$

$$Y_2=\int\frac{arctg\,4x}{1+16x^2}dx=\left|\begin{matrix} arctg\,4x=t & \dfrac{4}{1+(4x)^2}dx=dt \\ d(arctg\,4x)=dt & \dfrac{dx}{1+16x^2}=\dfrac{dt}{4}\end{matrix}\right|=\int t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{2}+C_2=\frac{t^2}{8}+C_2=$$

$=\dfrac{(arctg\,4x)^2}{8}+C_2$. При решении использован метод подстановки (замены переменной).

Окончательно получаем $\int\dfrac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}dx=\dfrac{3}{16}\cdot\ln\left|1+16x^2\right|+\dfrac{1}{8}(arctg\,4x)^2+C.$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{16}\cdot\ln\left|1+16x^2\right|+\frac{1}{8}(arctg\,4x)^2+C\right)'=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{1+16x^2}\cdot 32x+\frac{1}{8}\cdot 2arctg\,4x\frac{1}{1+16x^2}\cdot 4+0=$$

$$=\frac{6x}{1+16x^2}+\frac{arctg\,4x}{1+16x^2}=\frac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}.$$

а.2) Решаем аналогично а.1: $\int\dfrac{x+\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=\int\dfrac{x}{1+x^2}dx+\int\dfrac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=Y_1+Y_2$.

Найдем эти интегралы отдельно.

$$Y_1=\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1+x^2\right|+C_1.$$

При решении использовали правило: $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx=\ln\left|f(x)\right|+C.$

$$Y_2=\int\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix} arctgx=t \\ d(arctgx)=dt \\ \dfrac{1}{1+x^2}dx=dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}dt=\frac{t^{3/2}}{3/2}+C_2=$$

$=\dfrac{2}{3}(arctg\,x)^{3/2}+C_2$. При решении использован метод подстановки (замены переменной).

Окончательно получаем: $\int \frac{x+\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{3}(arctg\,x)^{3/2}+C.$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{3}(arctg\,x)^{3/2}+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(arctg\,x)^{1/2}\cdot(arctg\,x)'+C' =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+(arctg\,x)^{1/2}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+\sqrt{arctg\,x}}{1+x^2}.$$

Замечание: не всегда требуется исходный интеграл представлять в виде суммы интегралов. Например, при нахождении интеграла $\int\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$ сразу применяется метод подстановки (замена $t = x^2+2\sin x$).

Ответ: а.1) $\frac{3}{16}\cdot\ln\left|1+16x^2\right|+\frac{1}{8}\left(arctg4x\right)^2+C$;

а.2) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{2}{3}(arctg\,x)^{3/2}+C.$

б.1) $$\int x\cdot arctg\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u = arctg\,x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = arctgx\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$=arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}arctg\,x = arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctg\,x+C.$$

При решении использован метод интегрирования по частям: $\int u\cdot dv = uv-\int v\cdot du.$

Проверка:

$$\left(arctg\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot arctg\,x+C\right)'=\left(arctg\,x\right)'\cdot\frac{x^2}{2}+arctg\,x\left(\frac{x^2}{2}\right)'-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+0=$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{2}+arctg\,x\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}+x\cdot arctg\,x-\frac{1+x^2-1}{2\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}+x\cdot arctg\,x-\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}=x\cdot arctg\,x.$$

б.2) $$\int x\cdot e^{2x}\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{2x}\,dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix}=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

При решении использован метод интегрирования по частям: $\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du.$

Проверка: $\left(\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'\cdot e^{2x}+\frac{1}{2}x\cdot\left(e^{2x}\right)'-\frac{1}{4}\cdot\left(e^{2x}\right)'+C'=$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}+\frac{1}{2}x\cdot 2e^{2x}-\frac{1}{4}\cdot 2e^{2x}+0=x\,e^{2x}.$$

б.3) $$\int x^5\cdot\ln x\,dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=x^5\,dx & v=\frac{x^6}{6}\end{vmatrix}=\ln x\cdot\frac{x^6}{6}-\int\frac{x^6}{6}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^6}{6}\cdot\ln x-\frac{1}{6}\int x^5dx=\frac{x^6}{6}\cdot\ln x-\frac{x^6}{36}+C.$$

При решении использован метод интегрирования по частям: $\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du.$

Проверка: $\left(\frac{x^6}{6}\cdot\ln x-\frac{x^6}{36}+C\right)'=\left(\frac{x^6}{6}\right)'\cdot\ln x+\frac{x^6}{6}\cdot\left(\ln x\right)'-\left(\frac{x^6}{36}\right)'+C'=$

$$=\frac{6x^5}{6}\cdot\ln x+\frac{x^6}{6}\cdot\frac{1}{x}-\frac{6x^5}{36}=x^5\cdot\ln x+\frac{x^5}{6}-\frac{x^5}{6}=x^5\cdot\ln x.$$

Ответ: б.1) $arctg\,x\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}arctg\,x+C$;

б.2) $\dfrac{1}{2}xe^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$;

б.3) $\dfrac{x^6}{6}\cdot\ln x-\dfrac{x^6}{36}+C.$

в.1) $\int\dfrac{3x^2-x+2}{(1+x^2)(x-1)}dx$. Нам дана правильная рациональная дробь, знаменатель которой уже разложен на неприводимые множители. Представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot(x-1)}\quad\Leftrightarrow$$

$3x^2-x+2=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2)$, $3x^2-x+2=Ax^2+Bx-Ax-B+C+Cx^2$.

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2: $3=A+C$;

x^1: $-1=B-A$;

x^0: $2=-B+C$.

Решая систему $\begin{cases}A+C=3,\\B-A=-1,\\C-B=2,\end{cases}$ получаем $\begin{cases}A=1,\\B=0,\\C=2.\end{cases}$

Тогда: $\dfrac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{2}{x-1}$. Искомый интеграл будет равен:

$$\int\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}dx=\int\left(\frac{x}{(1+x^2)}+\frac{2}{(x-1)}\right)dx=\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+2\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+2\ln|x-1|+C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+2\ln\left|x-1\right|+C\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x+2\frac{1}{x-1}+0=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{x-1}=$

$$=\frac{x(x-1)+2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\cdot(x-1)}=\frac{x^2-x+2+2x^2}{\left(1+x^2\right)\cdot(x-1)}=\frac{3x^2-x+2}{\left(1+x^2\right)\cdot(x-1)}.$$

в.2) $\int\frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}dx$. Под знаком интеграла нам дана правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на неприводимые множители и представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:

$x^3+2x^2+2x=x\cdot(x^2+2x+2)$, тогда $\frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}=\frac{x^2+5x+1}{x\cdot(x^2+2x+2)}=$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{A\cdot(x^2+2x+2)+(Bx+C)\cdot x}{x^3+2x^2+2x}\Leftrightarrow$$

$x^2+5x+1=A\cdot(x^2+2x+2)+(Bx+C)\cdot x$, $x^2+5x+1=A\cdot(x^2+2x+2)+Bx^2+Cx$.

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^2:\ 1=A+B$;

$x^1:\ 5=2A+C$;

$x^0:\ 1=2A$.

Решая систему $\begin{cases}A+B=1,\\2A+C=5,\\2A=1,\end{cases}$ получаем $\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\B=\frac{1}{2},\\C=4.\end{cases}$

Тогда $\int\frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}dx=\int\left(\frac{1/2}{x}+\frac{\frac{1}{2}x+4}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{x+8}{x^2+2x+2}dx=$

$\frac{1}{2}Y_1+\frac{1}{2}Y_2$.

Вычислим эти интегралы отдельно.

$$Y_1 = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1 .$$

$$Y_2 = \int \frac{x+8}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+16}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+14}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{14}{x^2+2x+2} \right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + 7\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + 7\,arctg(x+1) + C_2 .$$

Окончательно: $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{2}arctg(x+1) + C$.

Проверка: $\left(\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{7}{2}arctg(x+1) + C \right)' =$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}\cdot(2x+2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1} + 0 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot(x^2+2x+2)+(x+1)\cdot x + 7\cdot x}{x\cdot(x^2+2x+2)} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2x+2+x^2+x+7x}{x^3+2x^2+2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2+10x+2}{x^3+2x^2+2x} = \frac{x^2+5x+1}{x^3+2x^2+2x}.$$

в.3) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$. Нам дана правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на неприводимые множители, а затем представим дробь в виде суммы простейших дробей: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$, тогда:

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$x = A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2,$$

$x = A\cdot(x^2 + x - 2) + B\cdot(x+2) + C\cdot(x^2 - 2x + 1).$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2: $0 = A + C$;

x^1: $1 = A + B - 2C$;

x^0: $0 = -2A + 2B + C$.

Значения A, B и C можно найти из системы $\begin{cases} A + C = 0, \\ A + B - 2C = 1, \\ -2A + 2B + C = 0. \end{cases}$

Получим дополнительные уравнения, подставляя $x_1 = 1, x_2 = -2$ (корни знаменателя) в равенство $3x^2 - x + 2 = \left(Ax + B\right)\cdot\left(x-1\right) + C\left(1 + x^2\right)$. Получаем: $1 = 3B$, $-2 = 9C$. Отсюда: $B = 1/3$, $C = -2/9$, $A = 2/9$.

Разложение имеет вид: $\dfrac{x}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{2/9}{x-1} + \dfrac{1/3}{\left(x-1\right)^2} + \dfrac{-2/9}{x+2}.$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2}dx = \int\left(\frac{2/9}{x-1} + \frac{1/3}{(x-1)^2} + \frac{-2/9}{x+2}\right)dx = \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\int(x-1)^{-2}dx - \frac{2}{9}\ln|x+2| = \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C\right)' = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+2) + 3\cdot(x+2) - 2\cdot(x-1)^2}{9\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+2\right)} =$$

$$\frac{2(x^2 + x - 2) + 3\cdot(x+2) - 2\cdot(x^2 - 2x + 1)}{9\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+2\right)} = \frac{2x^2 + 2x - 4 + 3x + 6 - 2x^2 + 4x - 2}{9\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+2\right)} =$$

$$\frac{9x}{9\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+2\right)} = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}.$$

Ответ: в.1) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2x}{1+x^2}dx + 2\int\frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + 2\ln\left|x-1\right| + C$;

в.2) $\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{7}{2}arctg(x+1)+C$;

в.3) $\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C.$

г) Будем использовать метод замены переменной (подстановки) для интегралов от иррациональных функций вида $R\left(x;\ \sqrt[n]{(ax+b)^m},\sqrt[q]{(ax+b)^p},\ \ldots\right)$, где a,b – действительные числа, m,n,p,q – натуральные числа. Интегралы такого типа сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^k$, где k – наименьшее общее кратное показателей корней, т.е. чисел $n,q,...$

г.1) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. У нас $n=6$, $q=3$, отсюда $k=6$. Получаем:

$$\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{array}{l}x=t^6\\ dx=d(t^6)\\ dx=6t^5\ dt\end{array}\right|=\int\frac{t}{1+t^2}\cdot 6t^5\ dt=6\int\frac{t^6}{1+t^2}\ dt=$$

$$=6\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-arctg\,t\right)+C=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-2t^3+6t-6arctg\,t+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

Проверка: $\left(\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C\right)'=$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot x^{\frac{1}{6}}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}-6\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}=$$

$$=x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}-\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\left(x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

г.2) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$. У нас $n = 2$, отсюда $k = 2$. Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} x+4=t^2 \\ d(x+4)=d(t^2) \\ dx = 2t\,dt \\ x = t^2-4 \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2-4}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt = 2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\left(t+\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)+C =$$

$$= 2\left(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C.$$

Проверка:

$$\left(2\left(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C\right)' = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right)'\right)+C' =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)'\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)-\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)'}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)-\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\left(\frac{2}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2\cdot\sqrt{x+4}}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)\cdot\sqrt{x+4}}\right) =$$

$$=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{2}{(x+4-4)\cdot\sqrt{x+4}}\right)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{2}{x\cdot\sqrt{x+4}}\right)=$$

$$2\left(\frac{x+4}{2x\cdot\sqrt{x+4}}\right)=\frac{\sqrt{x+4}}{x}.$$

Ответ: г.1) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,arctg\sqrt[6]{x}+C$;

г.2) $2\left(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C.$

д) Будем использовать метод замены переменной, в том числе универсальную тригонометрическую подстановку.

д.1) $\int\frac{dx}{\sin 3x+3}$.

$$\int\frac{dx}{\sin 3x+3}=\left|\begin{matrix}t=3x,\ x=\frac{1}{3}t\\ dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin t+3}=\left|\begin{matrix}z=tg\frac{t}{2},\ \sin t=\frac{2z}{1+z^2}\\ dt=\frac{2dz}{1+z^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2dz}{(1+z^2)\left(\frac{2z}{1+z^2}+3\right)}=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{2z+3+3z^2}=\frac{2}{9}\int\frac{dz}{z^2+\frac{2}{3}z+1}=$$

$$=\frac{2}{9}\int\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}arctg\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{3z+1}{\sqrt{8}}+C=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{t}{2}+1}{\sqrt{8}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C.$$

Проверка: $$\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{3tg\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C\right)'=\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3tg\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{3x}{2}}\cdot\frac{3}{2}+0=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{8+\left(3tg\frac{3x}{2}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{3x}{2}}=3\cdot\frac{1}{9tg^2\frac{3x}{2}+6tg\frac{3x}{2}+9}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(tg^2\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}tg\frac{3x}{2}+1\right)\cdot\cos^2\frac{3x}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\sin 3x}=\frac{1}{3+\sin 3x}.$$

д.2) $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\frac{2t}{1+t^2}+5\frac{1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4-4t^2+6t+5+5t^2}=\int\frac{2dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3}+C.$$

Проверка: $$\left(-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3}+C\right)'=\frac{2}{\left(tg\frac{x}{2}+3\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{tg^2\frac{x}{2}+6tg\frac{x}{2}+9}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+9\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8\cos^2\frac{x}{2}+3\sin x+1}=\frac{1}{4\cos x+3\sin x+5}.$$

Ответ: д.1) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}arctg\dfrac{3tg\dfrac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C$;

д.2) $-\dfrac{2}{tg\dfrac{x}{2}+3}+C$.

Задача 2.4

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x\,dx$; б) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение.

а) Для решения будем использовать метод интегрирования по частям: $\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 3xdx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = x\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}\sin 3xdx =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{6} - 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{9}\left(\cos\frac{3\pi}{6} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}.$$

б) Для решения будем использовать метод замены переменной (подстановки): $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x_t'dt$. Получаем:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{vmatrix} x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t_в = 3,\ t_н = 2 \end{vmatrix} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 2\left(\left(\frac{27}{3} - 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 2\right)\right) = \frac{32}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}$; б) $\frac{32}{3}$.

Задача 2.5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Выполнить чертеж:

а) $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$; б) $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.

Решение.

а) Построим графики функций: $y = 4 - x^2$ парабола, ветви направлены вниз, $y = x^2 - 2x$ парабола, ветви направлены вверх.

Определим точки их пересечения: $4 - x^2 = x^2 - 2x$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Точки пересечения парабол: $A(-1;3)$ и $B(2;0)$. Построим параболы и отметим точки их пересечения (рисунок 1).

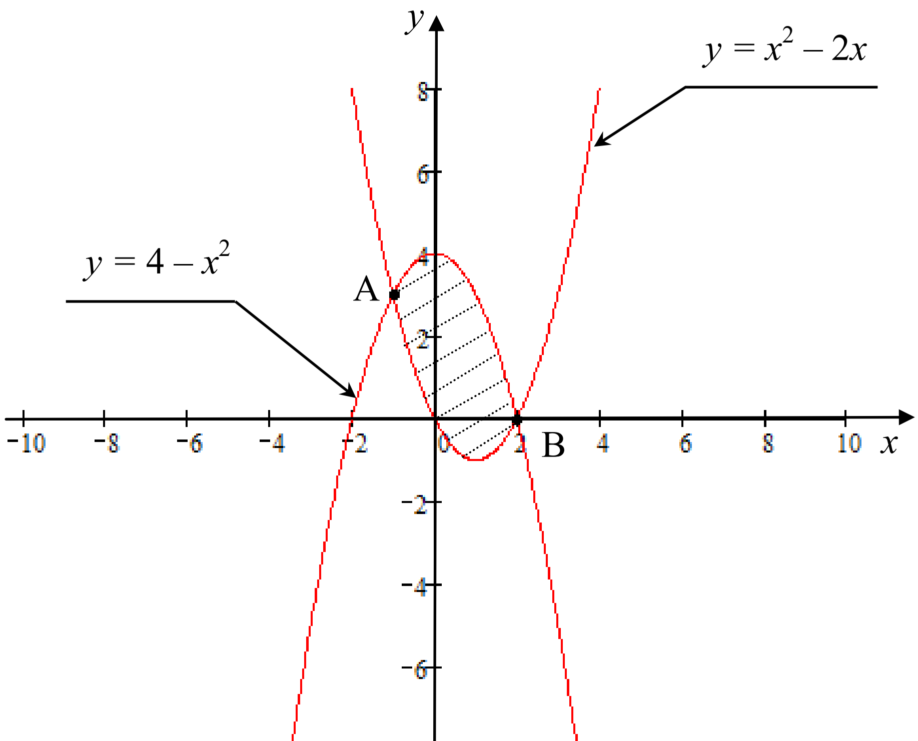


Рисунок 1 – График фигуры

Искомую площадь S можно найти по формуле: $S=\int_{-1}^{2}\left(f(x)-\varphi(x)\right)dx$. У нас $f(x)=4-x^2,\quad \varphi(x)=x^2-2x$.

Получаем $S=\int_{-1}^{2}\left(\left(4-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx$.

Отсюда $S=\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx=\left(4x^2+x^2-\frac{2}{3}x^2\right)\Big|_{-1}^{2}=9$ кв. ед.

Ответ: 9 кв. ед.

б) Построим графики функций: $y=-x$ прямая, $y=2x-x^2$ парабола, ветви направлены вниз.

Определим точки пересечения прямой и параболы: $\begin{cases} y=2x-x^2, \\ y=-x, \end{cases}$ отсюда $x_1=0, x_2=3, y_1=0, y_2=-3$. Получаем точки $A(0;0)$ и $B(3;-3)$. Построим прямую, параболу и отметим точки их пересечения (рисунок 2).

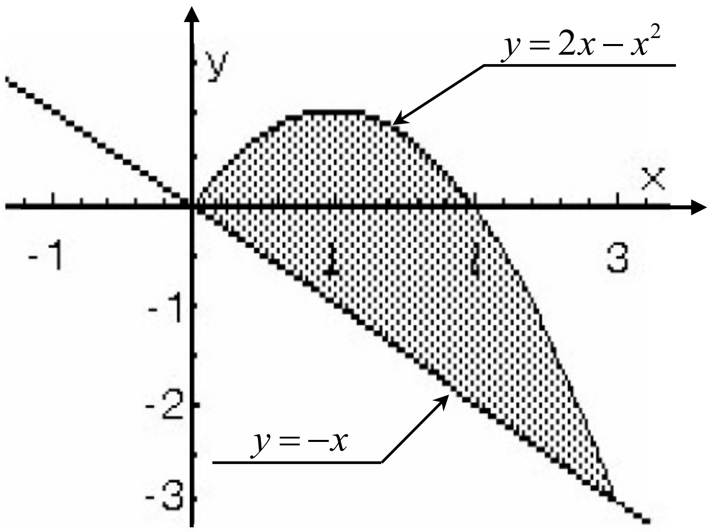


Рисунок 2 – График фигуры

Искомую площадь S найдем по формуле: $S=\int\limits_0^3\left(f(x)-\varphi(x)\right)dx$.

У нас $f(x)=2x-x^2,\quad \varphi(x)=-x$. Получаем:

$$S=\int\limits_0^3\left(\left(2x-x^2\right)-(-x)\right)dx=\int\limits_0^3\left(3x-x^2\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}\text{ кв. ед.}$$

Ответ: $\frac{9}{2}$ кв. ед.

Задача 2.6

Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=0,\ y=\frac{x^2}{4},\ 2x+y-12=0$.

Решение.

Объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox, находится по формуле $V=\pi\int\limits_a^b\left(f(x)\right)^2dx$.

Найдем точки пересечения графиков функций:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{4}, \\ 2x+y-12=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x^2}{4}, \\ y=-2x+12. \end{cases}$$

Отсюда: $\frac{x^2}{4}=-2x=12$,

$\frac{x^2}{4}+2x-12=0$,

$x^2+8x-48=0$,

$x_1=-12,\ x_2=4$.

Построим фигуру, ограниченную графиками функций $y=0,\ y=\frac{x^2}{4},\ 2x+y-12=0$ (рисунок 3).

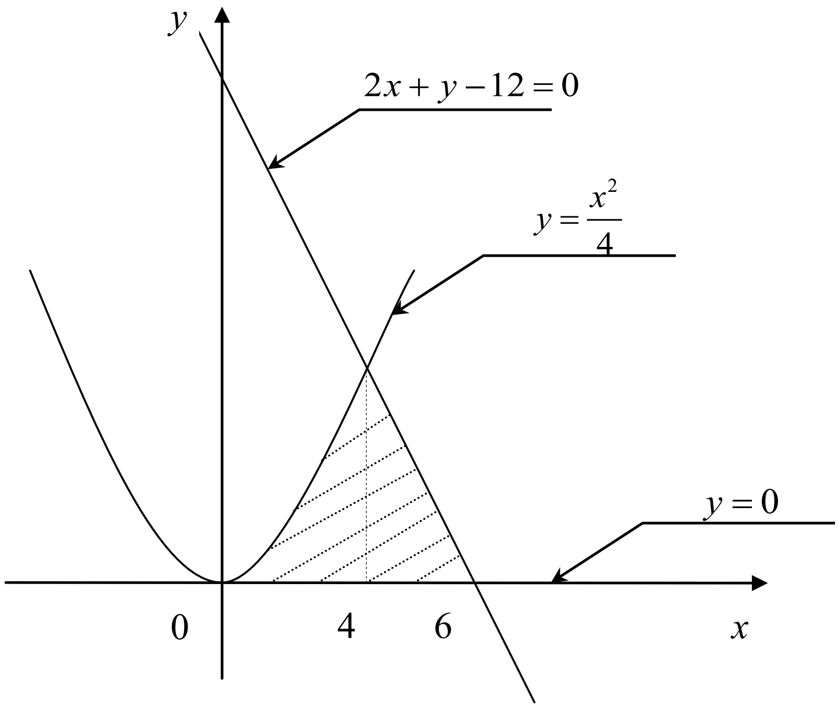


Рисунок 3 – График фигуры

Вокруг оси Ox вращается заштрихованная фигура. Замечаем, что сверху фигура ограничена графиками двух различных функций. Поэтому получаем:

$$V=\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx+\pi\int_4^6(-2x+12)^2\,dx=\frac{\pi}{16}\int_0^4x^4dx+4\pi\int_4^6(x^2-12x+36)dx=$$

$$=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^4+4\pi\left(\frac{1}{3}x^3-12x^2+36x\right)\Bigg|_4^6=$$

$$=\frac{\pi}{80}\cdot4^5+4\pi\left(\left(\frac{1}{3}6^3-6\cdot6^2+36\cdot6\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot4^3-6\cdot4^2+36\cdot4\right)\right)=$$

$$=\frac{64}{5}\pi+\frac{32}{3}\pi=\frac{352}{15}\pi \text{ куб.ед.}$$

Ответ: $V=\dfrac{352}{15}\pi$ куб.ед.

Задача 2.7

Исследовать несобственный интеграл на сходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$; г) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Решение.

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Нам дан несобственный интеграл первого рода (с бесконечным пределом интегрирования). Подынтегральная функция чётная, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctg\, x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\, b-arctg\, 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходящийся, π.

б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$. Нам дан несобственный интеграл второго рода: подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ неограниченна в окрестности точки $x=1$. На любом же отрезке $[\varepsilon+1,e]$ (где ε – сколь угодно малая величина) она интегрируема, т.к. является непрерывной функцией. Получим

$$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right]=\frac{3}{2}.$$

Ответ: интеграл сходящийся, $\frac{3}{2}$.

в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Нам дан несобственный интеграл второго рода: при x = 0 функция

$y=\dfrac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв, получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1=-\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty,$$ интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходящийся.

г) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}$. Нам дан несобственный интеграл первого рода, по определению:

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^4 x}=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3\ln^3 x}\Big|_{e^2}^{b}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3\ln^3(b)}-\frac{1}{3\ln^3 e^2}\right)=0+\frac{1}{3\cdot 2^3}=\frac{1}{24},$$

т.е. интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходящийся, $\dfrac{1}{24}$.

2.2 Индивидуальные задания

Задача 2.1

Записать дробь в виде, удобном для интегрирования.

1) а) $\dfrac{x^2+5x-10}{x^3-6x^2+13x-10}$; б) $\dfrac{x^5-3x^4+x^2-1}{x^3-4x^2+x-4}$;

2) а) $\dfrac{2x^2+3x-5}{x^3+2x^2-3x-10}$; б) $\dfrac{x^4-x^2+3}{x^3-10x^2+34x-40}$;

3) а) $\dfrac{3x^2-4x+10}{x^3-8x^2+22x-20}$; б) $\dfrac{x^4-x^3-5}{x^3-8x^2+21x-20}$;

4) а) $\dfrac{x^2+15x-4}{x^3-2x^2+x-2}$; б) $\dfrac{x^5-x^2+3}{x^3-10x^2+10x-8}$;

5) а) $\dfrac{2x^2-7x+4}{x^3+x^2-7x-15}$; б) $\dfrac{x^4-3x^2+x-1}{x^3-3x^2+4x-12}$;

6) а) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-9x^2+28x-30}$; б) $\dfrac{4x^5-3x+3}{x^3-3x^2+x-3}$;

7) а) $\dfrac{x^2+7x-2}{x^3-3x^2+4x-2}$; 8) а) $\dfrac{2x^2-3x+32}{x^3+x^2-2}$; 9) а) $\dfrac{x^2-3x+7}{x^3+3x^2+x-5}$;

б) $\dfrac{x^4-3x^2+3}{x^3+3x^2+4x-2}$; б) $\dfrac{4x^4-3x+1}{x^3-5x^2+8x-6}$; б) $\dfrac{x^5-3x^2+3}{x^3-2x^2+4x-8}$;

10) а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+16x-10}$; 11) а) $\dfrac{x^2+3x-2}{x^3-4x^2+6x-4}$; 12) а) $\dfrac{10x^2-2x+1}{x^3-5x^2+9x-5}$;

б) $\dfrac{x^5-3x^2-x-1}{x^3-2x^2+x-2}$; б) $\dfrac{x^4-3x^2-x+2}{x^3-8x^2+22x-20}$; б) $\dfrac{x^4+3x^2-2}{x^3-9x^2+28x-30}$;

13) а) $\dfrac{x^2+3x-1}{x^3-x^2+x-1}$; 14) а) $\dfrac{2x^2-3x+21}{x^3-x^2+4x-4}$; 15) а) $\dfrac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4}$;

б) $\dfrac{x^5-3x^3+2}{x^3+x^2-7x-15}$; б) $\dfrac{x^5-3x^4+x^2-1}{x^3-4x^2+x-4}$; б) $\dfrac{x^4-3x^3-2x+1}{x^3-3x^2+4x-2}$;

16) а) $\dfrac{x^2-4x+8}{x^3-5x^2+9x-5}$; 17) а) $\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-7x^2+17x-15}$; 18) а) $\dfrac{3x^2-7x+10}{x^3-3x^2+x-3}$;

б) $\dfrac{x^5-3x^4+x^2-1}{x^3-4x^2+x-4}$; б) $\dfrac{x^5+3x^2-x+1}{x^3-7x^2+16x-10}$; б) $\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+x^2-4}$;

19) а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+16x-10}$; 20) а) $\dfrac{2x^2-3x+32}{x^3+x^2-2}$;

б) $\dfrac{x^5-x^2+3}{x^3-10x^2+10x-8}$; б) $\dfrac{4x^5-3x+3}{x^3-3x^2+x-3}$.

Задача 2.2

Найти неопределенные интегралы, используя таблицу интегралов. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1) а) $\int \dfrac{2+3x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \dfrac{4dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^2}}$, в) $\int \dfrac{dx}{3-2x}$,

г) $\int e^{3x-1}dx$, д) $\int ctg(2-5x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2+3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{6+4x^2}$.

2) а) $\int \frac{4+x^5-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[4]{(2-3x)^3}}$, в) $\int \frac{dx}{2-4x}$,

г) $\int e^{2x-5}dx$, д) $\int \cos(2-5x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2+3}}$, ж) $\int \frac{2dx}{1+4x^2}$.

3) а) $\int \frac{1+3x^4-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{3-7x}$,

г) $\int e^{2x-4}dx$, д) $\int \sin(3+2x)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{16x^2+3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{6+9x^2}$.

4) а) $\int \frac{5+3x^2-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[5]{(2+3x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{5-6x}$,

г) $\int 2^{3x-1}dx$, д) $\int ctg(4+5x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2-3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{6-4x^2}$.

5) а) $\int \frac{4-2x^5-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{(7+3x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{7-8x}$,

г) $\int 4^{3x-1}dx$, д) $\int tg(2-5x)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{-9x^2+3}}$, ж) $\int \frac{2dx}{6+9x^2}$.

6) а) $\int \frac{1+3x^3+4\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int \frac{3dx}{\sqrt[5]{(2-5x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{6-2x}$,

г) $\int 5^{3x-1}dx$, д) $\int ctg(2+3x)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{-4x^2+3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{2-4x^2}$.

7) а) $\int \frac{2+7x^5+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[5]{(2-9x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{7-2x}$,

г) $\int e^{3x+5}dx$, д) $\int ctg(3+6x)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{-x^2+3}}$, ж) $\int \frac{2dx}{7+4x^2}$.

8) а) $\int \frac{7-2x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \frac{6dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$, в) $\int \frac{dx}{5-9x}$,

г) $\int e^{3x-12}dx$, д) $\int tg(4-5x)dx$, е) $\int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2+7}}$, ж) $\int \frac{dx}{6-9x^2}$.

9) а) $\int \frac{2+3x^5+2\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[5]{(2+3x)^3}}$, в) $\int \frac{2dx}{5-2x}$,

г) $\int 6^{3x-1}dx$, д) $\int ctg(5x+6)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{4x^2+1}$.

10) а) $\int \frac{1-5x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^2}}$, в) $\int \frac{4dx}{3+2x}$,

г) $\int 5^{3x-1}dx$, д) $\int tg(2x+1)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-5}}$, ж) $\int \frac{5dx}{3-4x^2}$.

11) а) $\int \frac{2+x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x^2}}dx$, б) $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{(2-4x)^5}}$, в) $\int \frac{5dx}{5+7x}$,

г) $\int e^{5x-2}dx$, д) $\int \cos(5x-3)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{2-9x^2}}$, ж) $\int \frac{5dx}{1+4x^2}$.

12) а) $\int \frac{5+2x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x^2}}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+3x)^5}}$, в) $\int \frac{6dx}{1+2x}$,

г) $\int 2^{6x-1}dx$, д) $\int \sin(2x+7)dx$, е) $\int \frac{3dx}{\sqrt{4-16x^2}}$, ж) $\int \frac{2dx}{6-9x^2}$.

13) а) $\int \frac{3-x^5+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[7]{x}}dx$, б) $\int \frac{7dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$, в) $\int \frac{3dx}{3-7x}$,

г) $\int e^{5x-1}dx$, д) $\int ctg(11x-3)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{25x^2+9}}$, ж) $\int \frac{3dx}{1-9x^2}$.

14) а) $\int \frac{2-3x^5-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[7]{x}}dx$, б) $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$, в) $\int \frac{7dx}{3+2x}$,

г) $\int e^{6x-5}dx$, д) $\int tg(2-11x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2+3}}$, ж) $\int \frac{3dx}{6+4x^2}$.

15) а) $\int \frac{3+3x^5-\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{7dx}{\sqrt[3]{(2+9x)^2}}$, в) $\int \frac{3dx}{2-9x}$,

г) $\int 4^{3x-5}dx$, д) $\int \cos(2+6x)dx$, е) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$, ж) $\int \frac{5dx}{2+4x^2}$.

16) а) $\int \frac{2+3x^4-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^5}}$, в) $\int \frac{3dx}{3+8x}$,

г) $\int 4^{3x-1}dx$, д) $\int ctg(12-5x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{3-16x^2}}$, ж) $\int \frac{dx}{6-4x^2}$.

17) а) $\int \frac{2+4x^3-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \frac{4dx}{\sqrt[3]{(8-3x)^2}}$, в) $\int \frac{3dx}{3+5x}$,

г) $\int 3^{5x-1}dx$, д) $\int \sin(-5x+6)dx$, е) $\int \frac{5dx}{\sqrt{9x^2+4}}$, ж) $\int \frac{2dx}{3-4x^2}$.

18) а) $\int \frac{3+3x^4-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{5dx}{\sqrt[5]{(6+3x)^2}}$, в) $\int \frac{5dx}{3-4x}$,

г) $\int e^{7x+5}dx$, д) $\int \cos(-5x+4)dx$, е) $\int \frac{4dx}{\sqrt{4x^2+8}}$, ж) $\int \frac{3dx}{6+4x^2}$.

19) а) $\int \frac{4-3x^5-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int \frac{2dx}{\sqrt[4]{(2-3x)^3}}$, в) $\int \frac{2dx}{3+5x}$,

г) $\int 3^{4x-5}dx$, д) $\int ctg(3x-12)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{-25x^2+3}}$, ж) $\int \frac{2dx}{7-5x^2}$.

20) а) $\int \frac{1+5x^5+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx$, б) $\int \frac{6dx}{\sqrt[5]{(2-3x)^2}}$, в) $\int \frac{8dx}{5-2x}$,

г) $\int 5^{3x-1}dx$, д) $\int tg(2+15x)dx$, е) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2+8}}$, ж) $\int \frac{5dx}{6+9x^2}$.

Задача 2.3

Найти неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1) а) $\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$, б) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$, в) $\int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+4}$;

2) а) $\int \frac{arctgx+x}{1+x^2}dx$, б) $\int (4x-3)e^{-2x}dx$, в) $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$, г) $\int \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin x+4}$;

3) а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$, б) $\int \left(\sqrt{2}+3x\right)\sin 3x\,dx$, в) $\int \frac{x^2}{x^3-5x^2+8x+4}dx$, г) $\int \frac{1}{2+\sqrt[4]{x-1}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+3}$;

4) а) $\int \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$, б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$, г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+5}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+5}$;

5) а) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$, б) $\int \sqrt{x^3}\cdot \ln x\,dx$, в) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+5}$;

6) а) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, б) $\int arctg\left(\sqrt{5x-1}\right)dx$, в) $\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}dx$, г) $\int \frac{1}{5-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+2}$;

7) а) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, б) $\int x^2\sin 3x\,dx$, в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$, г) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+4}$;

8) а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$, б) $\int (1-\ln x)dx$, в) $\int \frac{x^2}{x^4-81}dx$, г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin x+6}$;

9) а) $\int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^2}dx$, б) $\int\left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3x\,dx$, в) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$, г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+6}$;

10) а) $\int \frac{x+\left(arctg\,x\right)^2}{1+x^2}dx$, б) $\int\left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2x\,dx$, в) $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$, г) $\int \frac{x}{\sqrt{\left(5-x\right)^3}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+2}$;

11) а) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$, б) $\int\left(7x-10\right)\sin 4x\,dx$, в) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}\,dx$, г) $\int \frac{1}{2-\sqrt{1+x}}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+5}$;

12) а) $\int \frac{\arcsin x+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, б) $\int\left(4x+3\right)\sin 5x\,dx$, в) $\int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}\,dx$, г) $\int \frac{1}{8+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+3}$;

13) а) $\int \frac{2x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, б) $\int x\ln\left(1-3x\right)dx$, в) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}\,dx$, г) $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin x+3}$;

14) а) $\int \frac{2^{arctgx}+2x}{1+x^2}\,dx$, б) $\int xe^{-7x}dx$, в) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3}\,dx$, г) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+7}}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+6}$;

15) а) $\int \frac{e^{\arcsin x}-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, б) $\int e^{-3x}\left(2-9x\right)dx$, в) $\int \frac{x^3+6}{x^2-2x-3}\,dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}}{4+x}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+2}$;

16) а) $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+1}dx$, б) $\int \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)dx$, в) $\int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+4}$;

17) а) $\int \frac{\sqrt{arctgx+3x}}{1+x^2}dx$, б) $\int (3x+4)e^{3x}dx$, в) $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-6}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+6}$;

18) а) $\int \frac{x^3+3x^7}{\sqrt{1-x^8}}dx$, б) $\int arctg\left(\sqrt{4x-1}\right)dx$, в) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$, г) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+7}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin x+4}$;

19) а) $\int \frac{x^2-2x^5}{\sqrt{6+x^6}}dx$, б) $\int x\cdot \ln^2 x\,dx$, в) $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$, г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+3}$;

20) а) $\int \frac{2+\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$, б) $\int x\cdot e^{3x}dx$, в) $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx$, г) $\int \frac{x}{\sqrt{3x-5}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+2}$.

Задача 2.4

Вычислить определенный интеграл.

1) а) $\int_0^1 x^2 e^{-x}dx$; б) $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$;

2) а) $\int_0^e x^2 \ln x dx$; б) $\int_{-3/4}^0 \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^2}}dx$;

3) а) $\int_0^1 x e^{-x}dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4-x}dx$;

4) а) $\int_0^2 x^2 e^{-x}dx$; б) $\int_{-8}^0 \frac{1}{5-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

5) а) $\int_0^e x\ln^2 x dx$; б) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$;

6) а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; б) $\int_{-4}^1 \frac{x}{\sqrt{(5-x)^3}}dx$;

7) а) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$; б) $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{1}{2-\sqrt{x+1}}dx$;

8) а) $\int\limits_0^{1} \arcsin x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{8+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

9) а) $\int\limits_0^{1} arctgx dx$; б) $\int\limits_{-1/4}^{0} \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$;

10) а) $\int\limits_0^{1} x e^x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{4+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

11) а) $\int\limits_0^{1} \arcsin\frac{x}{2}dx$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$;

12) а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$; б) $\int\limits_3^{6} \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$;

13) а) $\int\limits_0^{\pi} x^2\sin x dx$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt{x+2}+x^2}{\sqrt{1+x}}dx$;

14) а) $\int\limits_0^{e} x \ln x dx$; б) $\int\limits_2^{1} \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$;

15) а) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$; б) $\int\limits_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}}{x-6}dx$;

16) а) $\int\limits_0^{1} x^2 e^{-x}dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x}{\sqrt{2x+7}}dx$;

17) а) $\int\limits_0^{21} x e^{-x}dx$; б) $\int\limits_{-8}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

18) а) $\int\limits_0^{e} x^3\ln x dx$; б) $\int\limits_4^{9} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx$;

19) а) $\int\limits_0^{e^2} \ln x dx$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{1}{2+\sqrt[4]{x-1}}dx$;

20) а) $\int\limits_0^{e} \ln^2 x dx$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{1}{\sqrt{x}+5}dx$.

Задача 2.5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Построить чертёж.

1) $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8;$

2) $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x;$

3) $y=4-x^2, \quad y=0;$

4) $y=x^2, \quad y=x^{\frac{1}{2}};$

5) $y=4-x^2, \quad x=y^2-2y;$

6) $y^2=9x, \quad x^2=4y;$

7) $y^2=4x, \quad x^2=4y;$

8) $y=x^2+2, \quad x+y=4;$

9) $y=x^2, \quad y^2=4x;$

10) $xy=6, \quad x+y-7=0;$

11) $y=x^2, \quad y=2-x^2;$

12) $y=x^2+4x, \quad y+x=4;$

13) $y=x+3,\ xy=4,\ x=0,\ x=4,\ y=0$;

14) $y=x^2-2x, \quad x-y+4=0;$

15) $y=4x-x^2, \quad y=x;$

16) $y=x^2, \quad xy=8, \quad y=9;$

17) $y=x^2+1, \quad y=x, \quad y=5, \quad x=0;$

18) $y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=1;$

19) $y=2^x, \quad y=2, \quad x=0;$

20) $y=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad y=\dfrac{x^2}{2}.$

Задача 2.6

Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{4},\ 4x+3y-28=0$;

2) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{3},\ 3x+2y-15=0$;

3) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{5},\ 5x+y-30=0$;

4) $y=0,\ y=x^2,\ x+4y-5=0$;

5) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{3},\ 3x+5y-24=0$;

6) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ 2x+3y-15=0$;

7) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{4},\ 4x+y-20=0$;

8) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ 2x+5y-14=0$;

9) $y=0,\ y=x^2,\ x+2y-3=0$;

10) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{5},\ 5x+4y-45=0$;

11) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{4},\ 2x+y-12=0$;

12) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{3},\ 3x+y-12=0$;

13) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{4},\ 4x+5y-20=0$;

14) $y=0,\ y=x^2,\ x+3y-4=0$;

15) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{5},\ 5x+2y-35=0$;

16) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{3},\ 3x+4y-21=0$;

17) $y=0,\ y=x^2,\ x+5y-6=0$;

18) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{5},\ 5x+3y-40=0$;

19) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ 2x+y-6=0$;

20) $y=0,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ x+2y-6=0$.

Задача 2.7

Исследовать несобственный интеграл на сходимость.

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$;

3) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx$;

4) $\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

5) $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$;

6) $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}}dx$;

7) $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}dx$;

10) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$;

11) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}dx$;

12) $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

13) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

14) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

15) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$;

16) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{\left(x^4+1\right)^3}dx$;

17) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(arctgx\right)^2}{1+x^2}dx$;

18) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$;

19) $\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-x}dx$;

20) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-x}dx$.

2.3 Вопросы для самоконтроля

1) Как соотносятся задачи дифференцирования и интегрирования?

2) Дайте определение первообразной функции на данном промежутке, приведите примеры. Всякая ли функция имеет первообразную?

3) Сформулируйте теорему о множестве первообразных.

4) Сформулируйте теорему о связи двух первообразных для данной функции.

5) Дайте определение неопределенного интеграла. Как он вычисляется?

6) Перечислите свойства неопределенного интеграла.

7) Какие основные методы интегрирования существуют?

8) Приведите пример вычисления неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования.

9) Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.

10) Нужно ли возвращаться к старой переменной после вычисления неопределенного интеграла методом замены переменной (подстановки)?

11) Запишите формулу подведения функции под знак дифференциала.

12) При вычислении каких интегралов применяется метод интегрирования по частям?

13) Какая рациональная дробь называется правильной? неправильной?

14) Какие рациональные дроби можно представить в виде суммы простейших дробей?

15) Расскажите алгоритм разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей.

16) Приведите правило интегрирования простейших рациональных дробей 1-го типа.

17) Приведите правило интегрирования простейших рациональных дробей 2-го типа.

18) Приведите правило интегрирования простейших рациональных дробей 3-го типа.

19) Приведите пример интегрирования иррациональной функции.

20) Запишите формулу универсальной тригонометрической подстановки.

21) Сформулируйте необходимые и достаточные условия интегрируемости.

22) Что такое интегральная сумма?

23) Сформулируйте определение определенного интеграла.

24) В чём заключается сходство и различие между определённым и неопределённым интегралами?

25) Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.

26) Для каких функций существует определенный интеграл?

27) Что произойдет, если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования?

28) Перечислите свойства определенного интеграла, выраженные равенствами.

29) Перечислите свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.

30) Сформулируйте теорему о среднем значении определенного интеграла.

31) Запишите формулу Ньютона-Лейбница. Приведите примеры ее использования.

32) Как происходит вычисление определенных интегралов методом подстановки и интегрирования по частям?

33) Как связаны интеграл с переменным верхним пределом и дифференцирование?

34) Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от нечётной (четной) функции?

35) Сформулируйте задачу о площади криволинейной трапеции.

36) Как можно найти площадь фигуры, если она задана в полярных координатах?

37) Запишите формулу для нахождения объема тела вращения.

38) Приведите примеры геометрических приложений определенного интеграла.

39) Приведите примеры физических приложений определенного интеграла.

40) Дайте определение несобственного интеграла 1 рода (с бесконечными пределами интегрирования).

41) Дайте определение несобственного интеграла 2 рода (от неограниченных функций).

42) В каком случае несобственный интеграл называется сходящимся (расходящимся)?

43) Что такое определённый интеграл с переменным верхним пределом?

44) В чем заключается геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом?

3 Кратные интегралы

3.1 Примеры решения типовых задач

Задача 3.1

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$. Сделать чертеж области интегрирования.

Решение.

Строим графики функций: $y=0,\ y=1, x=1-y, x=-\sqrt{1-y^2}$ (рисунок 4). Область интегрирования ограничена графиками этих функций. Получаем:

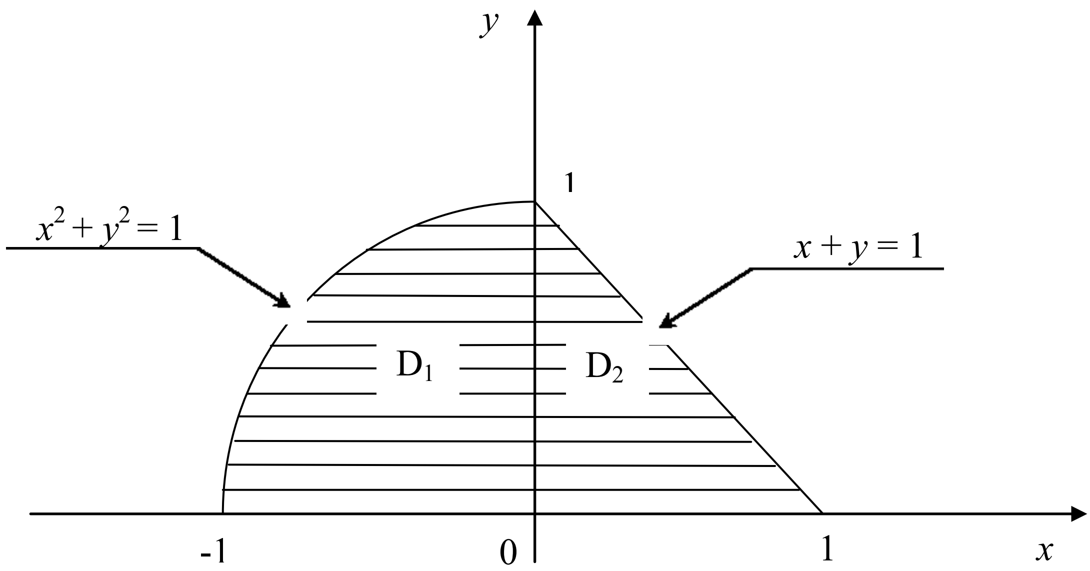


Рисунок 4 – График области интегрирования

При изменении порядка интегрирования необходимо область интегрирования разбить на две части D_1 и D_2, т.к. сверху она ограничена графиками двух различных функций. То есть в направлении оси Oy выделяется две области D_1 и D_2.

$x=1-y \Rightarrow y=1-x$;

$x=-\sqrt{1-y_2} \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ (берем со знаком «+», т.к. рассматривается верхняя полуплоскость).

Для области D_1 имеем $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

Для области D_2 имеем $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy.$

Тогда окончательно

$$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy$$

Ответ: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)dy$

Задача 3.2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями *xy=1, y=*$\sqrt{x}$*, x=2*. Сделать чертеж области интегрирования.

Решение.

Построим графики функций $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$. Область интегрирования ограничена этими графиками (рисунок 5).

Так как область интегрирования правильная в направлении оси Oy, то

$$\iint\limits_{D} y\ln x dxdy = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x dy = \int\limits_{1}^{2} \frac{y^2}{2}\ln x \Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_{1}^{2} \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} x\ln x\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

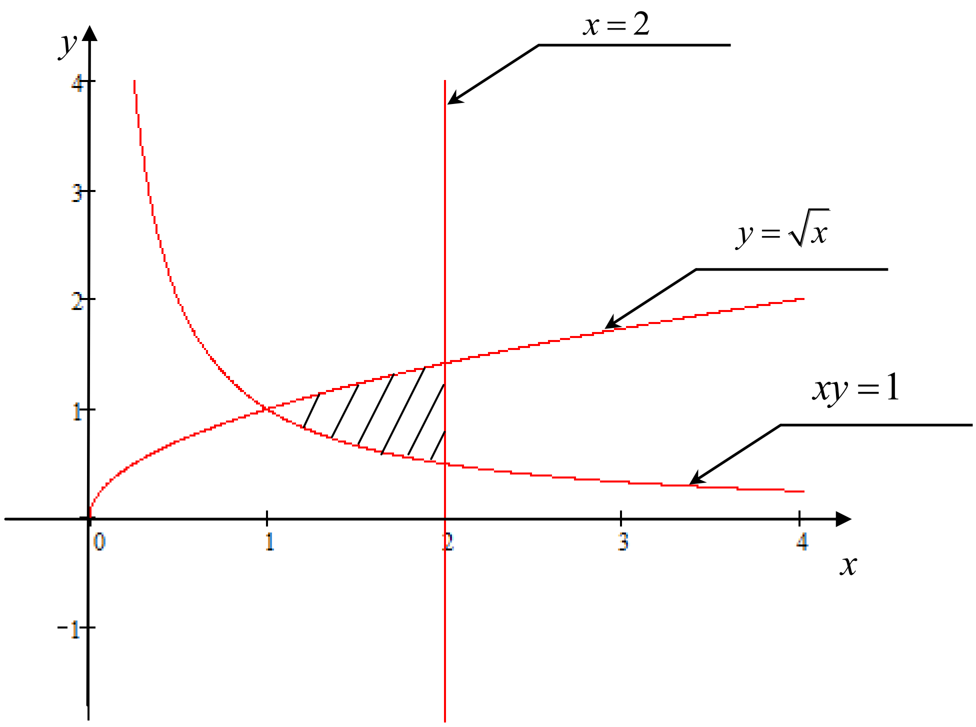


Рисунок 5 – Область интегрирования

Вычислим получившиеся интегралы:

1) $\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$. При решении использовали метод интегрирования по частям.

Тогда $\int\limits_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

2) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t & x = e^t \\ dt = \frac{1}{x}dx & \end{matrix} \right| = \int \frac{txdt}{x^2} = \int \frac{tdt}{x} = \int e^{-t}tdt = \left| \begin{matrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t} \end{matrix} \right| =$

$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ – использовали метод замены переменной (подстановки) и метод интегрирования по частям.

Тогда $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$.

Окончательно получаем

$$\iint_D y\ln x dxdy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2-\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2}-\frac{5}{4}\right)=\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}.$$

Ответ: $\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}$.

Задача 3.3

Выполнить чертеж и найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $y=x^2$ и плоскостью, проходящей через точки $A(2,4,0), B(-4,4,0), C(0,0,6)$.

Решение.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-6 \\ 2-0 & 4-0 & 0-6 \\ -4-0 & 4-0 & 0-6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -24x+24y+8(z-6)+16(z-6)+24x+12y=36y+24z-144.$$

Получаем: $36y+24z-144=0$ или $3y+2z-12=0 \Rightarrow z=-\frac{3}{2}y+6$.

Изобразим тело: параболический цилиндр $y=x^2$ ограничен снизу плоскостью $z=0$, а сверху плоскостью $z=-\frac{3}{2}y+6$ (рисунок 6).

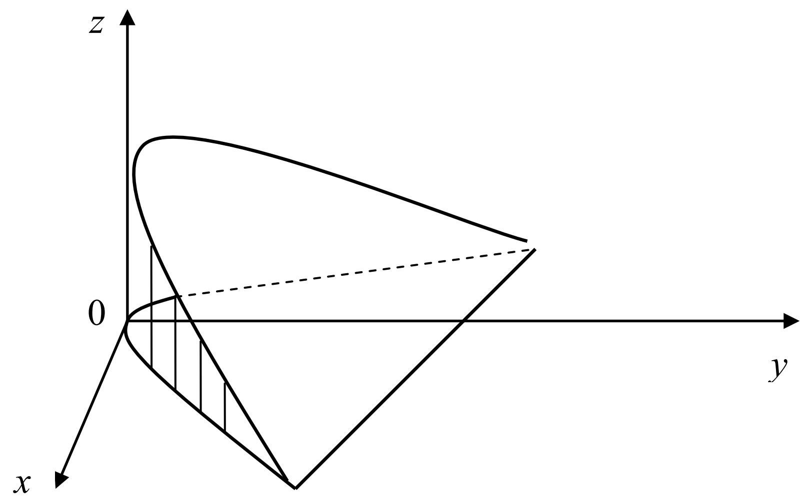


Рисунок 6 – График параболического цилиндра

Область интегрирования ограничена прямой $y = 4$ (получили из уравнения $z = -\frac{3}{2}y + 6$ при подстановке $z = 0$) и параболой $y = x^2$ (рисунок 7).

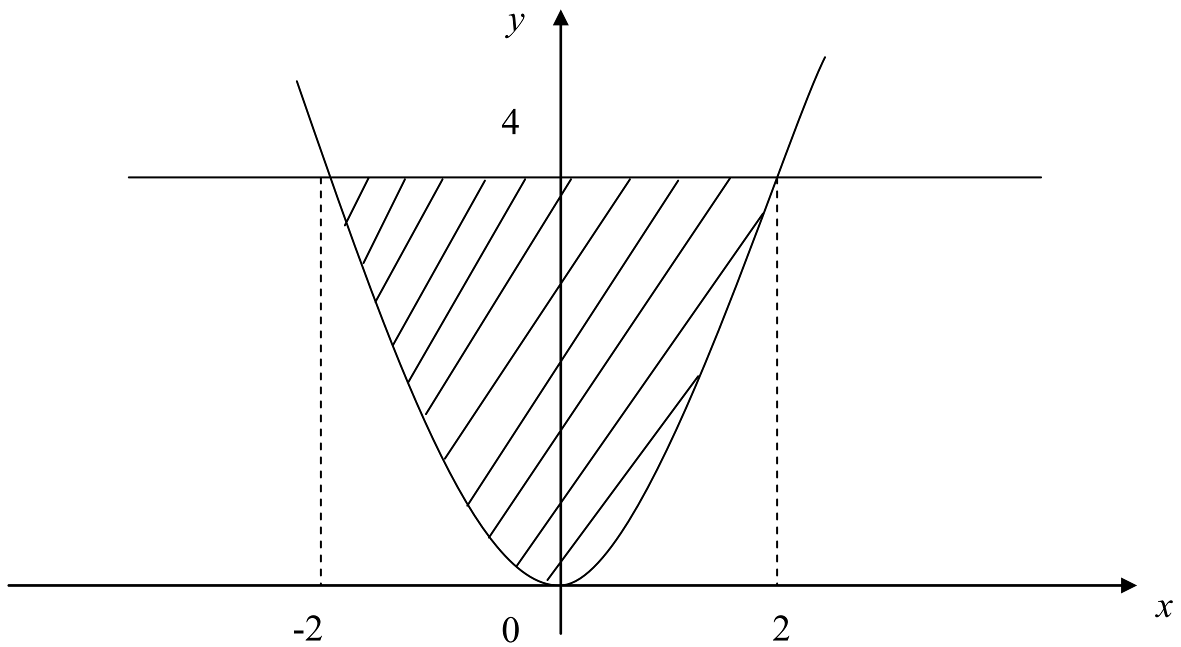


Рисунок 7 – График области интегрирования

Так как тело симметрично относительно плоскости zOy, то рассмотрим интеграл на промежутке [0, 2] и результат удвоим:

$$V=2\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^4 (6-\frac{3}{2}y)=2\int\limits_0^2 dx\left(6y-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_{x^2}^{4}=2\int\limits_0^2\left(\left(6\cdot 4-\frac{3}{4}\cdot 4^2\right)-\left(6\cdot x^2-\frac{3}{4}\left(x^2\right)^2\right)\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(12-6x^2-\frac{3}{4}x^4\right)dx=2\left(12x-2x^3-\frac{3}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2=2\left(12\cdot 2-2\cdot 2^3-\frac{3}{20}\cdot 2^5\right)=\frac{32}{5}\text{ куб.ед.}$$

.

Ответ: $V=\dfrac{32}{5}$ куб.ед.

3.2 Индивидуальные задания

Задача 3.1

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Построить области интегрирования.

1) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y)dy$;

2) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-2x-6}^{-8x^3} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-4x-4}^{-8x^3} f(x,y)dy$;

6) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$;

7) $\int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{-\sqrt{8x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$;

8) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{-4x-x^2}} f(x,y)dy$;

9) $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$;

10) $\int\limits_{2}^{6} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy$;

11) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y)dx$;

12) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)dx$;

13) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{4y-4}^{8y^3} f(x,y)dx$;

14) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{8y^3}^{2y+6} f(x,y)dx$;

15) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-8y^3}^{-4y+4} f(x,y)dx$;

16) $\int\limits_{-5}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x,y)dx$;

17) $\int\limits_{1}^{7} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y)dx;$

18) $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{-4y-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

19) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

20) $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{6y-y^2}}^{0} f(x,y)dx.$

Задача 3.2

Вычислить двойной интеграл. Построить область интегрирования.

1) $\iint\limits_{D}(12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$;

2) $\iint\limits_{D}(9x^2y^2+48x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x};$

3) $\iint\limits_{D}(4xy+176x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x};$

4) $\iint\limits_{D}(36x^2y^2-96x^3y^3)dxdy; D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x};$

5) $\iint\limits_{D}(18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x};$

6) $\iint\limits_{D}(27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy; D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x};$

7) $\iint\limits_{D}(18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x};$

8) $\iint\limits_{D}(18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x};$

9) $\iint\limits_{D}(27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x};$

10) $\iint\limits_{D}(4xy+3x^2y^2)dxdy; D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x};$

11) $\iint\limits_{D}(12xy+9x^2y^2)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x};$

12) $\iint\limits_{D}(8xy+9x^2y^2)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x};$

13) $\iint\limits_{D}(24xy+18x^2y^2)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x};$

14) $\iint\limits_D (12xy + 278x^2y^2)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$;

15) $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy$; $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$;

16) $\iint\limits_D (xy - 9x^5y^5)dxdy$; $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$;

17) $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$;

18) $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$;

19) $\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$;

20) $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

Задача 3.3

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0,\ y=x^2$ и плоскостью, проходящей через точки *A, B* и *C*. Сделать чертеж.

1) A(3,9,0), B(-4,9,0), C(0,0,7);
2) A(2,4,0), B(-3,4,0), C(0,0,5);
3) A(1,1,0), B(-5,1,0), C(0,0,6);
4) A(4,16,0), B(-1,4,0), C(0,0,5);
5) A(5,25,0), B(-3,5,0), C(0,0,8);
6) A(3,9,0), B(-2,3,0), C(0,0,5);
7) A(1,1,0), B(-4,1,0), C(0,0,5);
8) A(5,25,0), B(-2,5,0), C(0,0,7);
9) A(2,4,0), B(-1,2,0), C(0,0,3);
10) A(4,14,0), B(-5,4,0), C(0,0,9);
11) A(2,4,0), B(-4,2,0), C(0,0,6);
12) A(1,1,0), B(-3,1,0), C(0,0,4);
13) A(5,25,0), B(-4,9,0), C(0,0,9);
14) A(3,9,0), B(-1,3,0), C(0,0,4);
15) A(2,4,0), B(-5,2,0), C(0,0,7);
16) A(5,25,0), B(-1,5,0), C(0,0,6);
17) A(4,16,0), B(-3,4,0), C(0,0,7);
18) A(1,1,0), B(-2,1,0), C(0,0,3);

19) A(4,16,0), B(-2,4,0), C(0,0,6).   20) A(3,9,0), B(-5,3,0), C(0,0,8);

3.3 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение двойного интеграл как предела интегральных сумм.
2) В чем заключается геометрический смысл двойного интеграла?
3) Сформулируйте условия существования двойного интеграла.
4) Перечислите свойства двойного интеграла.
5) Сформулируйте теорему о среднем значении.
6) Какой физический смысл имеет двойной интеграл?
7) Сформулируйте правило вычисления двойного интеграла по различным областям интегрирования.
8) Зависит ли значение двойного интеграла от порядка интегрирования?
9) Как можно свести двойной интеграл к повторному в зависимости от вида области интегрирования?
10) Как зависит интегральная сумма от способа разбиения области на части? От выбора точек в каждой части?
11) Как выполнить замену переменных в двойном интеграле?
12) Какие геометрические приложения двойного интеграла вы знаете? Приведите примеры.
13) Приведите примеры физических приложений двойного интеграла.
14) Запишите формулы перехода к полярной, сферической, цилиндрической системам координат.

4 Дифференциальные уравнения

4.1 Примеры решения типовых задач

Задача 4.1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения $3x(2+y^2)dx = 2y(x^2+3)dy$.

Решение.

Нам дано дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведем его к уравнению с разделенными переменными учитывая, что $x^2+3 \neq 0,\ 2+y^2 \neq 0$.

$$3x(2+y^2)dx = 2y(x^2+3)dy \left| \begin{array}{l} :(2+y^2) \\ :(x^2+3) \end{array} \right.$$

Получим:

$$\frac{3x}{x^2+3}dx = \frac{2y}{2+y^2}dy.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{3x}{x^2+3}dx = \int \frac{2y}{2+y^2}dy;$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{2y}{2+y^2}dy;$$

$$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+3\right| = \ln\left|y^2+2\right| + \ln C;$$

$$\ln(x^2+3)^{3/2} = \ln(C(y^2+2)).$$

$(x^2+3)^{3/2} = C(y^2+2)$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Ответ: $(x^2+3)^{3/2} = C(y^2+2)$.

Задача 4.2

Проинтегрировать уравнение $y' - y\cos x = \sin 2x.$

Решение.

Нам дано линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Сделаем замену: $y = u \cdot v$, где $u(x)$ и $v(x)$ – новые неизвестные функции. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в исходное уравнение, получим: $u'v + uv' - uv\cos x = \sin 2x$, $u'v + u(v' - v\cos x) = \sin 2x.$

Так как одну из функций можно выбрать произвольно, то подберем, например, функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось условие $v' - v\cos x = 0$, получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Нам достаточно найти любое частное решение этого уравнения:

$v' = v\cos x \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = v\cos x \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \cos x\,dx \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = \int \cos x\,dx$, $\ln v = \sin x$, $v = e^{\sin x}$ – частное решение.

Подставим найденное частное решение в преобразованное уравнение $u'v + u(v' - v\cos x) = \sin 2x$, получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $e^{\sin x} \cdot u' = \sin 2x$.

Решим это уравнение: $u' = \dfrac{\sin 2x}{e^{\sin x}}$. Отсюда

$u(x) = \int e^{-\sin x} \sin 2x\,dx = \int e^{-\sin x} 2\sin x \cos x\,dx$, так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

После замены переменной: $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$, получаем $u = 2\int e^{-t}\,dt$.
Проинтегрируем по частям: $\int \bar{u}d\bar{v} = \overline{uv} - \int \bar{v}d\bar{u}$, $\qquad \bar{u} = t, e^{-t}dt = d\bar{v}$. Отсюда

$\bar{v} = \int e^{-t}dt = -e^{-t}, d\bar{u} = dt$, значит: $u = 2\left(-te^{-t} + \int e^{-t}dt\right) = 2\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) + C$,

$u(x) = 2\left(-\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x}\right) + C = -2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C.$

Следовательно, общее решение будет:

$y = u(x) \cdot v(x) = e^{\sin x}\left(-2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C\right) = -2\sin x - 2 + Ce^{\sin x}$.

Ответ: $y = -2\sin x - 2 + Ce^{\sin x}$.

Задача 4.3

Решить задачу Коши.

а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0, y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 25e^{x}\sin x, y\left(0\right) = 1, y'\left(0\right) = 2.$

Решение.

а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$. Нам дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 2k^2 - 3k = 0,\ k\left(k^2 - 2k - 3\right) = 0,$ отсюда получаем корни: $k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 3$.

Общее решение имеет вид: $y_{OO} = C_1e^{0x} + C_2e^{-1x} + C_3e^{3x} = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$, где C_1, $C_{2,}$ C_3 – произвольные постоянные.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$.

$$y'_{OO} = \left(C_1e^{0x} + C_2e^{-1x} + C_3e^{3x} = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}\right)' = -C_2e^{-x} + 3C_3e^{3x},$$

$$y''_{OO} = (-C_2e^{-x} + 3C_3e^{3x})' = C_2e^{-x} + 9C_3e^{3x}.$$

Подставим начальные условия в y_{OO}, y'_{OO}, y''_{OO}. Получаем систему:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2e^0 + C_3e^0, \\ 3 = -C_2e^0 + 3C_3e^0, \\ 1 = C_2e^0 + 9C_3e^0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + C_3, \\ 3 = -C_2 + 3C_3, \\ 1 = C_2 + 9C_3. \end{cases}$$

Решение этой системы: $C_1 = \dfrac{5}{3},\ C_2 = -2,\ C_3 = \dfrac{1}{3}$. Тогда частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решение задачи Коши) имеет вид:

$y=\frac{5}{3}-2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{3x}$ (подставили найденные значения произвольных постоянных в общее решение).

б) $y''-6y'+9y=25e^{x}\sin x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$ Нам дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение такого дифференциального уравнения будет иметь вид: $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$ (общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения данного неоднородного уравнения).

Решим однородное уравнение $y''-6y'+9y=0$ – это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0,\ (k-3)^2=0,$ имеет корни $k_1=k_2=3.$ Общее решение однородного уравнения: $y_{оо}=C_1e^{3x}+xC_2e^{3x}=(C_1+C_2x)\cdot e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Частное решение однородного уравнения имеет вид: $y_{чн}=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$, где A, B – некоторые постоянные, которые нам пока неизвестны. Так как данное выражение, по предположению, является решением дифференциального уравнения, то при подстановке этого выражения в исходное дифференциальное уравнение должно получиться верное равенство.

$$y'_{ЧН}=e^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right)+e^{x}\left(-A\sin x+B\cos x\right),$$
$$y''_{ЧН}=e^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right)+2e^{x}\left(-A\sin x+B\cos x\right)+e^{x}\left(-A\cos x-B\sin x\right).$$

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в исходное неоднородное уравнение, получим:

$$e^{x}(3A-4B)\cos x+e^{x}(4A+3B)\sin x=25e^{x}\sin x.$$

Разделим обе части уравнения на $e^{x}\neq 0$, получим:

$$(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x=25\sin x.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos x$, $\sin x$, получим систему уравнений: $\begin{cases} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 0. \end{cases}$

Решение этой системы $A = 4,\ B = 3$ и, следовательно: $y_{чн} = e^{x}\left(4\cos x + 3\sin x\right)$.

Общее решение данного дифференциального уравнения: $y_{OH} = \left(C_1 + xC_2\right)\cdot e^{3x} + e^{x}\cdot\left(4\cos x + 3\sin x\right)$.

Найдём частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$, т.е. найдём значения произвольных постоянных C_1 и C_2.

$$y'_{OH} = c_2 e^{3x} + \left(c_1 + xc_2\right)e^{3x} + e^{x}\left(4\cos x + 3\sin x\right) + e^{x}\left(-4\sin x + 3\cos x\right).$$

Подставим заданные начальные условия в $y_{он}$ и $y'_{он}$:

$$\begin{cases} 1 = \left(C_1 + 0\right)e^{0} + e^{0}\left(4 + 0\right), \\ 2 = C_2 + \left(C_1 + 0\right)e^{0} + e^{0}\left(4 + 0\right) + e^{0}\left(0 + 3\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -3, \\ 2 = C_2 + C_1 + 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -3, \\ C_2 = -2, \end{cases}$$

то есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = \left(-3 - 2x\right)\cdot e^{3x} + e^{x}\cdot\left(4\cos x + 3\sin x\right) = -e^{3x}(3 + 2x) + e^{x}\cdot\left(4\cos x + 3\sin x\right)$.

Ответ: а) $y_{OO} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$ – общее решение, $y = \dfrac{5}{3} - 2e^{-x} + \dfrac{1}{3}e^{3x}$ – частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$;

б) $y_{OH} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{3x} + e^{x}\left(4\cos x + 3\sin x\right)$ – общее решение, $y = -e^{3x}\left(3 + 2x\right) + e^{x}\left(4\cos x + 3\sin x\right)$ – частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4.2 Индивидуальные задания

Задача 4.1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1) $ydx+(1+x^2)dy=0$;

2) $2ydx+(3+x^2)dy=0$;

3) $y'=tgx\cdot tgy$;

4) $y'=tgx\cdot ctgy$;

5) $y'\cdot y=-2xe^x$;

6) $y'\cdot y=xe^{-x}$;

7) $y(1+x^2)y'+x(1+y^2)=0$;

8) $y(2+x^2)y'+2x(1+y^2)=0$;

9) $y'=2e^x\cos x$;

10) $y'=3e^x\sin x$;

11) $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

12) $y'=\dfrac{3x}{2+x^2}$;

13) $y'=y\ln y$;

14) $y'=y\ln^2 y$;

15) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

16) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

17) $e^x dx-(1+e^x)ydy=0$;

18) $e^x dx+(1+e^x)ydy=0$;

19) $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$;

20) $y'+\cos(x+y)=\cos(x-y)$.

Задача 4.2

Проинтегрировать уравнение.

1) $\left(x^2+2x-1\right)y'-\left(x+1\right)y=x-1$;

2) $x\ln x\cdot y'-y=3x^3\ln^2 x$;

3) $2xy'-y=3x^2$;

4) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$;

5) $y'-y\cdot tgx=\dfrac{1}{\cos x}$;

6) $y'(x+1)-2y-(x+1)^4=0$;

7) $(4-x^2)y'+xy=4$;

8) $x'-x\cos y=\sin 2y$;

9) $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$;

10) $y'-2xy=2xe^{x^2}$;

11) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

12) $y'\cos x+y\sin x=1$;

13) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

14) $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$;

15) $y' = 2\ln x + \frac{y}{x}$;

16) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$;

17) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$;

18) $x^2 \frac{dy}{dx} = 2xy - 3, \quad y(-1) = 1$;

19) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;

20) $y' - \frac{5}{x} y = e^x x^5$.

Задача 4.3

Решить задачу Коши.

1) а) $y''' - y'' - 12y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 3$;

б) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

2) а) $y''' - y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = 2$;

б) $y'' + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

3) а) $y''' - 4y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 5$;

б) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$;

4) а) $y''' + 3y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 4$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

5) а) $y''' + 4y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 5$;

б) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9.$;

6) а) $y''' - 2y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 5, y''(0) = 3$;

б) $y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

7) а) $y''' - y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1$;

б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8$;

8) а) $y''' = 2y'' - 8y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4$;

б) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x), \quad y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$;

9) а) $y''' + y'' - 12y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = 4$;

б) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$;

10) а) $y''' - 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x, \quad y(\pi) = \pi e^{\pi}, \quad y'(\pi) = e^{\pi}$;

11) а) $y''' + 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3$;

б) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

12) а) $y''' + y'' - 20y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 5$

б) $y'' + y = \cos 3x, \quad y(\pi/2) = 4, \quad y'(\pi/2) = 1.$;

13) а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$;

б) $2y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$;

14) а) $y''' - 2y'' - 8y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

15) а) $y''' - y'' - 20y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 4$;

б) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{27}$;

16) а) $y''' + y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' + y' = x^2 + x, \quad y'(0) = y(0) = 0$;

17) а) $y''' + 3y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 5$;

б) $y'' + y = 4x\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

18) а) $y''' - 3y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 1$;

б) $y'' + 2y' + 5y = e^{1+x}\sin 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{10}, \quad y'(0) = 0$;

19) а) $y''' + y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$;

б) $y'' - y' = e^{x}\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$;

20) а) $y''' + 2y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 5$;

б) $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$.

4.3 Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте какую-либо задачу, приводящую к понятию дифференциального уравнения.
2) Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения?
3) Как определить порядок дифференциального уравнения? Приведите примеры дифференциальных уравнений различных порядков.
4) Что называется решением дифференциального уравнения? Как проверить, является ли функция решением дифференциального уравнения? Сколько решений в общем случае может иметь дифференциальное уравнение?
5) Что называется общим решением дифференциального уравнения? Что называется частным решением дифференциального уравнения? Чем отличаются общее и частное решения дифференциального уравнения?
6) Что такое интегральная кривая дифференциального уравнения?
7) Какую задачу называют задачей Коши? Сформулируйте геометрический смысл решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка?
8) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.
9) Как получить частное решение дифференциального уравнения первого (второго) порядка, зная общее решение уравнения?
10) Какое уравнение называется дифференциальным уравнением с разделенными и разделяющимися переменными? Приведите примеры.
11) При каких условиях дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?
12) Расскажите алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
13) Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Как найти его общий интеграл?

14) Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? Приведите пример.

15) Назовите основные методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, в чем они заключаются?

16) Запишите алгоритм решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах.

17) Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Какие методы его решения вы знаете?

18) Какая подстановка позволяет привести дифференциальное уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению?

19) Какое условие нужно проверить, чтобы выяснить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах?

20) Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения для дифференциального уравнения второго порядка.

21) Дайте определение общего и частного решений дифференциального уравнения второго порядка. В чем заключается их геометрический смысл?

22) Перечислите виды дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка.

23) Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного (неоднородного) дифференциального уравнения второго порядка.

24) Что называется характеристическим уравнением, соответствующим линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка? Приведите примеры.

25) Как зависит решение линейного однородного (неоднородного) уравнения с постоянными коэффициентами от решения характеристического уравнения?

26) В каком виде записывается частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида правой части?

27) Пусть $y+3x=C$ – общее решение некоторого уравнения. Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 5$.

28) В чем заключается геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения $x^2+y^2=C$ и его частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(1)=0$? Изобразите это частное решение на плоскости.

29) Проверьте, что функция $y=5\cos x$ является решением дифференциального уравнения $y''=-y$.

30) Выберите из предложенных дифференциальных уравнений уравнения с разделенными переменными: $xdy+ydx=0;$ $xdx+ydy=0;$ $5xydx+2xydy=0;$ $x^2dy+y^2dx=0;$ $\sqrt{x}dx=\dfrac{dy}{y^5}.$

31) Сколько начальных условий должно быть задано, чтобы было возможным найти частное решение уравнения, содержащего производную 5-го порядка, разрешимого относительно этой производной?

32) Составьте дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение которого имеет корни k_1 – число вашего рождения, k_2 – номер месяца вашего рождения.

33) В каком виде искать частное решение неоднородного уравнения, если правая часть неоднородного уравнения равна x^2-4, и число 0 не является (является) решением характеристического уравнения?

34) В каком виде искать частное решение, если правая часть неоднородного уравнения равна $(x-4)e^{3x}$, и число 3 не является (является) решением характеристического уравнения?

35) В каком виде искать частное решение, если правая часть неоднородного уравнения равна $(\cos x+\sin x)e^{3x}$, и число $3\pm i$ является решением характеристического уравнения?

5 Числовые и функциональные ряды

5.1 Примеры решения типовых задач

Задача 5.1

Проверить выполнимость необходимого признака сходимости числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}$.

Решение.

Найдем предел общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+2\right)}=\frac{3}{2}\neq 0.$$

Так как предел общего члена ряда отличен от нуля, то необходимый признак сходимости числового ряда не выполняется и данный ряд расходится.

Ответ: необходимый признак сходимости не выполняется.

Задача 5.2

Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(x+2)^n$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}(x-2)^n$.

Решение.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(x+2)^n$. Для нахождения области сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+4)\cdot(x+2)^{n+1}\cdot(n^2+1)}{\left((n+1)^2+1\right)\cdot(n+3)\cdot(x+2)^n}\right| = |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)\cdot(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\cdot(n+3)} = |x+2|.$$

Ряд абсолютно сходится при $|x+2|<1 \;\Rightarrow\; -1<x+2<1 \;\Rightarrow -3<x<-1.$

Ряд расходится при $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала:

$x=-1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1+2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ – числовой ряд с положительными членами.

Воспользуемся признаком сравнения. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, он расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n^2+1}:\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+1} = 1$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ тоже расходится. Значит исходный ряд при $x=-1$ – расходится.

$x=-3$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-3+2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1)^n$ – знакочередующийся ряд.

Воспользуемся признаком (теоремой) Лейбница:

1) Члены данного ряда по модулю монотонно убывают: $\left|\frac{4}{2}\right| > \left|\frac{5}{5}\right| > \left|\frac{6}{10}\right| > \left|\frac{7}{25}\right| > \ldots$, то есть $|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots$

2) Найдем предел модуля общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1} = 0$.

Так как выполняются оба условия теоремы Лейбница, то этот знакочередующийся ряд сходится. Соответствующий ряд из модулей расходится, поэтому знакочередующийся ряд сходится условно. Значит исходный ряд при $x=-3$ – сходится.

Ответ: $-3\le x<-1$, в точке $x=-3$ ряд сходится условно.

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}(x-2)^n$. Для нахождения области сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot(x-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^4-1}}:\frac{4^n\cdot(x-2)^n}{\sqrt{n^4-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{4^n}\cdot\sqrt{\frac{n^4-1}{(n+1)^4-1}}\cdot(x-2)\right)=$$

$$=4|x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n^4}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\frac{1}{n^4}}}=4|x-2|.$$

Ряд абсолютно сходится при $4|x-2|<1 \Rightarrow -1<4(x-2)<1 \Rightarrow -\frac{1}{4}<x-2<\frac{1}{4}\Rightarrow$ $\frac{7}{4}<x<\frac{9}{4}$.

Ряд расходится при $x\in\left(-\infty;\frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала:

$x=\frac{9}{4}$: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}\left(\frac{9}{4}-2\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}$ – числовой ряд с положительными членами.

Воспользуемся признаком сравнения. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – обобщенный гармонический ряд, он сходится (так как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при p=2 > 1). Проверим выполнение признака сравнения: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4}{n^4-1}}=1$.

Так как предел конечный и отличный от нуля, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}$ тоже сходится.

Значит исходный ряд при $x=\frac{9}{4}$ – сходится.

$x=\dfrac{7}{4}$: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}\left(\dfrac{7}{4}-2\right)^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^4-1}}$ – знакочередующийся ряд.

Воспользуемся признаком (теоремой) Лейбница:

1) Члены ряда по модулю монотонно убывают: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{15}}\right|>\left|\dfrac{1}{\sqrt{80}}\right|>\left|\dfrac{1}{\sqrt{255}}\right|>\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^4-1}}=0$.

Так как выполняются оба условия теоремы Лейбница, то этот знакочередующийся ряд сходится.

Так как соответствующий ряд из модулей $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^4-1}}$ сходится, то знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Значит исходный ряд при $x=\dfrac{7}{4}$ – сходится.

Ответ: область сходимости $\left[\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right]$.

Задача 5.3

Вычислить приближённо с точностью до 0,001 определённый интеграл, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд:

а) $\int\limits_{-0,6}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{1}e^{-\frac{x^2}{3}}dx$.

Решение.

а) Воспользуемся разложением функции в биномиальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot x^4-\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\cdot x^6+\ldots,\quad |x|<1.$$

Так как отрезок интегрирования [–0,6; 0] находится внутри интервала сходимости биномиального ряда, то ряд можно почленно интегрировать.

Получаем: $\int\limits_{-0,6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_{-0,6}^{0} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot x^4 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot x^6 + \ldots\right)dx =$

$$= \left(x - \frac{1}{3\cdot 3}\cdot x^3 + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 5}\cdot x^5 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 7}\cdot x^7 + \ldots \right)\Bigg|_{-0,6}^{0} =$$

$$= -\left(-0,6 + \frac{(0,6)^3}{9} - \frac{2(0,6)^5}{45} + \frac{14(0,6)^7}{567} - \ldots \right).$$

Вычислим эту сумму с точностью до 0,001.

$a_1 = 0,6 > 0,001,\ a_2 = \frac{(0,6)^3}{9} = 0,024 > 0,001,\ a_3 = \frac{2\cdot (0,6)^5}{45} \approx 0,003 > 0,001,$

$a_4 = \frac{14\cdot (0,6)^7}{567} \approx 0,007 < 0,001.$

Поэтому:

$$\int\limits_{-0,6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = -(-a_1 + a_2 - a_3) \pm 0,001 = 0,6 - \frac{(0,6)^3}{9} + \frac{2\cdot (0,6)^5}{45} \pm 0,001 = 0,579 \pm 0,001.$$

Ответ: $0,579 \pm 0,001$.

б) Воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд Маклорена:

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots,\ t \in (-\infty; +\infty)$.

Делая замену $t = -\frac{x^2}{3}$, получим:

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^3}{3!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3^2\cdot 2!} - \frac{x^6}{3^3\cdot 3!} + \ldots$$

Подставляя разложение подынтегральной функции в интеграл, получаем:

$$\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^3}{3}}dx = \int\limits_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3^2\cdot 2!} - \frac{x^6}{3^3\cdot 3!} + \ldots\right]dx =$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3}+\frac{x^5}{3^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3^3\cdot 3!\cdot 7}+\dots\right]\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{9}+\frac{1}{90}-\frac{1}{1134}+\dots\approx 0,900.$$

При вычислениях ограничиваемся первыми тремя членами ряда, так как четвертый член знакочередующегося ряда меньше 0,001 и, поэтому, сумма ряда, начинающегося с четвертого члена, будет меньше 0,001 и весь этот остаток ряда можно отбросить.

Ответ: $0,009$.

5.2 Индивидуальные задания

Задача 5.1

Проверить выполнимость необходимого признака сходимости числового ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-3n+3}{1-2n+3n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-n+3}{1-2n+n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+3}{1-2n+4n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-5n+3}{1-2n+5n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\frac{4n^2-3n+3}{1-2n+3n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{1-2n+n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-5n+3}{1-2n+5n^2}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-4n+3}{1-2n+4n^2}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-n+3}{1-2n+n^2}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-5n+3}{1-2n+5n^2}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+3}{1-2n+3n^2}$; 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-2n+3}{1-2n+2n^2}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-4n+3}{1-2n+4n^2}$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5n+3}{1-2n+5n^2}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+3}{1-2n+3n^2}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+3}{1-2n+n^2}$; 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-4n+3}{1-2n+4n^2}$.

Задача 5.2

Найти область сходимости степенного ряда.

1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$; 2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}(x+6)^n$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{3^n}(x-3)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot 4^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$; 14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$; 15) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-5}{5^n}(x-5)^n$;

16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(3n-1)\cdot(x+2)^n$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n^2-1)\cdot(x-2)^n$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$; 20) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(3n-2)\cdot(x+2)^n$.

Задача 5.3

Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

1) $\int\limits_{0,3}^{0}\cos\frac{10x^2}{3}dx$; 2) $\int\limits_{-0,2}^{0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x}dx$; 3) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}dx$;

4) $\int\limits_{-0,4}^{0}\sin\frac{5x^2}{2}dx$; 5) $\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0}\frac{\sin 2x}{x}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}}\frac{1-\cos 2x}{x}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{0,16}e^{\sqrt{x}}dx$; 8) $\int\limits_{-1}^{0}\sin\left(\frac{x^2}{5}\right)dx$; 9) $\int\limits_{-0,5}^{0}arctg\, x^2dx$;

10) $\int\limits_{-0,5}^{0}x\cdot e^{-2x^3}dx$; 11) $\int\limits_{0}^{1}\cos\sqrt{2x}\,dx$; 12) $\int\limits_{0}^{0,1}\frac{e^{-2x}-1}{x}dx$;

13) $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$; 14) $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{\sin 0,8x}{x}dx$; 15) $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{\sin 0,6x}{x}dx$;

16) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}dx$; 17) $\int\limits_{-1}^{1} \sin x^2 dx$; 18) $\int\limits_{0}^{0,5} e^{-x^3}dx$;

19) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}}\, dx$; 20) $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx$.

5.3 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение числового ряда, приведите примеры.
2) Что называется n – ой частичной суммой числового ряда?
3) Что называется суммой числового ряда?
4) Какой числовой ряд будем называть сходящимся?
5) Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
6) Нарушится ли сходимость числового ряда, если отбросить конечное число его членов? Изменится ли сумма ряда?
7) Является ли необходимый признак сходимости числового ряда достаточным? Почему? Приведите пример.
8) Какие достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами вы знаете?
9) Запишите геометрический числовой ряд. При каком условии он сходится? Приведите примеры.
10) Запишите гармонический ряд. Докажите, что гармонический ряд расходится.
11) Какой числовой ряд называется обобщенным гармоническим рядом? Что можно сказать о его сходимости?
12) Какой числовой ряд называют абсолютно (условно) сходящимся?
13) Перечислите свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.

14) Зависит ли сумма абсолютно (условно) сходящегося числового ряда от порядка его членов?

15) Какой ряд называется знакочередующимся? Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

16) Какой ряд называется знакопеременным? Сформулируйте признак сходимости знакопеременного ряда.

17) Сформулируйте определение функционального ряда. Приведите пример.

18) Как формируется область сходимости функционального ряда?

19) Какой функциональный ряд называется сходящимся равномерно?

20) Сформулируйте теорему Абеля для нахождения области сходимости степенного ряда.

21) Как найти интервал и радиус сходимости степенного ряда, используя признаки Даламбера и Коши?

22) Сформулируйте теорему о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

23) Какой функциональный ряд называется степенным? Запишите примеры степенных рядов.

24) Может ли степенной ряд сходиться или расходиться на всей числовой прямой?

25) Какой степенной ряд называется рядом Тейлора данной функции? Как найти коэффициенты ряда Тейлора?

26) Сформулируйте необходимый и достаточный признаки разложения функции в ряд Тейлора.

27) Какой степенной ряд называется рядом Маклорена? Как найти коэффициенты ряда Маклорена?

28) Запишите формулы разложения в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $arctgx$.

6 Основные понятия теории вероятностей

6.1 Примеры решения типовых задач

Задача 6.1

Вычислить: P_n, C_n^m, A_n^m. Проверить справедливость следующих равенств: $\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{m} = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1).....(\mathrm{n}-\mathrm{m}+1)$, $C_n^m = C_n^{n-m}$, если $n = 5$, $m = 3$.

Решение.

В соответствии с формулами $P_n = n!$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ получаем:

$$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120,\quad C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = \frac{20}{2} = 10,$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} = 60.$$

Проверим справедливость формул:

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-3+1) = 5\cdot 4\cdot 3 = 60;$$

$$C_5^{5-3} = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10 = C_5^3.$$

Ответ: 120; 10; 60.

Задача 6.2

На десяти одинаковых по форме и размеру табличках написаны буквы слова МАТЕМАТИКА – по одной букве на каждой табличке. Таблички тщательно перемешивают и вынимают наудачу без возврата по одной, располагая их в ряд. Какова вероятность снова получить слово МАТЕМАТИКА?

Решение.

Испытание заключается в выборе табличек с буквами в случайном порядке без возврата. Элементарными событиями являются полученные последовательности букв. Событие A заключается в том, что получится слово МАТЕМАТИКА. Количество элементарных событий – число перестановок из 10 букв-табличек, т.е. $n = 10!$.

Некоторые буквы в слове МАТЕМАТИКА повторяются: М – 2 раза, А – 3 раза, Т – 2 раза. Поэтому возможны перестановки, при которых слово не изменится. Их число равно $m = 2!\cdot 3!\cdot 2!$.

Получаем: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2!\cdot 3!\cdot 2!}{10!} = \dfrac{2\cdot 6\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \dfrac{1}{151200}$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{151200}$.

Задача 6.3

На столе лежит стопка тетрадей. Среди них 5 тетрадей с синей обложкой и 6 тетрадей с зеленой обложкой. Наугад из стопки берут 4 тетради. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) ровно 2 тетради с зеленой обложкой, б) меньше, чем 2 тетради с зеленой обложкой, в) хотя бы 1 тетрадь с зеленой обложкой.

Решение.

а) Пусть событие A – среди выбранных тетрадей ровно 2 тетради с зеленой обложкой (тогда две другие тетради с синей обложкой). Вероятность этого события найдем, используя классическую формулу вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где n – число всевозможных элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются всевозможные сочетания:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\cdot(11-4)!} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!} = 330;$$

$$m = C_6^2 C_5^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 15\cdot 10 = 150.$$

Получаем: $P(A) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$.

б) Пусть событие B – среди выбранных тетрадей меньше, чем 2 тетради с зеленой обложкой. Это возможно, когда взяли одну тетрадь с зеленой обложкой и три тетради с синей обложкой или ноль тетрадей с зеленой обложкой и четыре тетради с синей обложкой. Поэтому

$$m = C_6^1 C_5^3 + C_6^0 C_5^4 = \frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} + \frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}\cdot\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 60 + 5 = 65.$$

Получаем: $P(B) = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}$.

в) Пусть событие C – среди выбранных тетрадей хотя бы 1 тетрадь с зеленой обложкой. Перейдем к противоположному событию $\overline{C}$ – среди выбранных тетрадей нет ни одной с зеленой обложкой, то есть все выбранные тетради с синей обложкой. Следовательно $m = C_5^4 \cdot C_6^0 = 5$.

Получаем: $P(\overline{C}) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$, тогда $P(C) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}$.

Ответ: а) 5/11; б) 13/66; в) 65/66.

Задача 6.4

Нефтедобывающая компания проводит буровые работы в трёх различных районах страны M, N и K. Вероятности успешности бурения в каждом из районов соответственно равны: $p_1 = 0{,}851$, $p_2 = 0{,}751$ и $p_3 = 0{,}701$. Успешность бурения не зависит от выбранного района. Вычислить вероятности следующих событий: а) ровно одно бурение окажется безуспешным; б) хотя бы одно бурение окажется безуспешным.

Решение.

а) Рассмотрим события: A_1 – бурение в районе M оказалось безуспешным; A_2 – бурение в районе N оказалось безуспешным; A_3 – бурение в районе K оказалось безуспешным; A – бурение ровно в одном районе оказалось безуспешным. Тогда $A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$. Учитывая, что слагаемые – несовместные события, а сомножители – независимые события, получаем:

$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3})$.

По условию $P(\overline{A_1}) = 0{,}851$, $P(\overline{A_2}) = 0{,}751$, $P(\overline{A_3}) = 0{,}701$. Тогда $P(A_1) = 1 - 0{,}851 = 0{,}149$, $P(A_2) = 1 - 0{,}751 = 0{,}249$, $P(A_3) = 1 - 0{,}701 = 0{,}299$.

Получаем: $P(A) = 0{,}149 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}299 = 0{,}418$.

б) Пусть событие B – хотя бы одно бурение оказалось безуспешным. Рассмотрим противоположное событие $\overline{B}$ – бурения во всех трех районах оказались успешными. Получаем: $\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Тогда $P(\overline{B}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3})$, то есть $P(\overline{B}) = 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 = 0{,}448$.

Окончательно $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552$.

Ответ: а) 0,418; б) 0,552.

Задача 6.5

В первом аквариуме плавают 6 скалярий и 4 меченосца, а во втором 5 скалярий и 7 меченосцев. Из первого аквариума наудачу выловили 3 рыбки, из второго – 2 рыбки. Найти вероятность того, что среди выловленных рыб: а) все рыбы одного вида; б) ровно три скалярии; в) хотя бы одна скалярия.

Решение.

Рыбы вылавливаются из аквариумов независимо друг от друга. Испытаниями являются извлечение трех рыб из первого аквариума и двух рыб из второго. Элементарными событиями будут различные наборы выловленных рыб.

Рассмотрим события:

1) для первого аквариума: B_1 – выловили 3 скалярии; B_2 – выловили 2 скалярии и 1 меченосца; B_3 – выловили 1 скалярию и 2 меченосца; B_4 – выловили 3 меченосца;

2) для второго аквариума: C_1 – выловили 2 скалярии; C_2 – выловили 1 скалярию и 1 меченосца; C_3 – выловили 2 меченосца.

Найдем вероятности этих событий.

Для первого аквариума:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120;$$

для события B_1 получаем $m_1 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3!} = 20$;

для события B_2 получаем $m_2 = C_6^2 \cdot C_4^1 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\dfrac{4!}{1!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{4}{1} = 60$;

для события B_3 получаем $m_3 = C_6^1 \cdot C_4^2 = \dfrac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = \dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 36$;

для события B_4 получаем $m_4 = C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$.

Тогда $P(B_1) = \dfrac{20}{120}$, $P(B_2) = \dfrac{60}{120}$, $P(B_3) = \dfrac{36}{120}$, $P(B_4) = \dfrac{4}{120}$.

Для второго аквариума:

$$n = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\cdot(12-2)!} = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 10!} = 66;$$

для события C_1 получаем $m_1 = C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10$;

для события C_2 получаем $m_2 = C_5^1 \cdot C_7^1 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} \cdot \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{1} = 35$;

для события C_3 получаем $m_3 = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 5!} = 21$.

Тогда $P(C_1) = \frac{10}{66}$, $P(C_2) = \frac{35}{66}$, $P(C_3) = \frac{21}{66}$.

а) Пусть событие A – все выловленные из двух аквариумов рыбы одного вида, т.е. все скалярии или все меченосцы. Тогда $A = B_1 \cdot C_1 + B_4 \cdot C_3$. Учитывая, что слагаемые несовместные, а сомножители независимые события, получаем

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_4) \cdot P(C_3) = \frac{20}{120} \cdot \frac{10}{66} + \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{71}{1980}.$$

б) Пусть событие D – среди выловленных рыб ровно три скалярии. В этом случае $D = B_1 \cdot C_3 + B_2 \cdot C_2 + B_3 \cdot C_1$. Учитывая, что слагаемые несовместные, а сомножители независимые события, получаем

$$P(D) = P(B_1) \cdot P(C_3) + P(B_2) \cdot P(C_2) + P(B_3) \cdot P(C_1) =$$

$$= \frac{20}{120} \cdot \frac{21}{66} + \frac{60}{120} \cdot \frac{35}{66} + \frac{36}{120} \cdot \frac{10}{66} = \frac{4}{11}.$$

в) Пусть событие F – среди выловленных рыб имеется по крайней мере одна скалярия. Рассмотрим противоположное событие $\overline{F}$ – среди выловленных рыб нет ни одной скалярии. Тогда $\overline{F} = B_4 \cdot C_3$, $P(\overline{F}) = P(B_4) \cdot P(C_3) = \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{7}{660}$.

Окончательно: $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{7}{660} = \frac{653}{660}$.

Ответ: а) $\frac{71}{1980}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{653}{660}$.

Задача 6.6

На первом подносе 5 стаканов с яблочным соком и 6 стаканов с вишневым, а на втором подносе 4 стакана с яблочным соком и 8 с вишневым. С первого подноса случайным образом берут 3 стакана с соком и переставляют на второй. После этого со второго подноса также случайно берут 4 стакана с соком. Найти вероятность того, что все, взятые со второго подноса стаканы с яблочным соком.

Решение.

Испытание проходит в два этапа: вначале случайным образом берут стаканы с первого подноса и переставляют их на второй, затем также случайно берут стаканы с соком со второго подноса.

Пусть событие A – все, взятые со второго подноса стаканы с яблочным соком. Рассмотрим гипотезы:

H_1 – с первого подноса взяли 3 стакана яблочного сока;

H_2 – с первого подноса взяли 2 стакана яблочного и 1 стакан вишневого сока;

H_3 – с первого подноса взяли 1 стакан яблочного и 2 стакана вишневого сока;

H_4 – с первого подноса взяли 3 стакана вишневого сока.

Используя формулу полной вероятности, получим $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)$.

Найдем вероятности гипотез: общее число исходов равно $n=C_{11}^3=\dfrac{11!}{3!\cdot(11-3)!}=\dfrac{11!}{3!\cdot 8!}=\dfrac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8!}=165$;

для гипотезы H_1 получаем $m_1=C_5^3=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!}=10$;

для гипотезы H_2 получаем $m_2=C_5^2\cdot C_6^1=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\dfrac{6!}{1!\cdot 5!}=\dfrac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{6}{1}=60$;

для гипотезы H_3 получаем $m_3=C_5^1\cdot C_6^2=\dfrac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=75$;

для гипотезы H_4 получаем $m_4 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$.

Тогда $P(H_1) = \frac{10}{165}$, $P(H_2) = \frac{60}{165}$, $P(H_3) = \frac{75}{165}$, $P(H_4) = \frac{20}{165}$.

Найдем условные вероятности: после первого этапа на втором подносе оказалось 15 стаканов с соком. Количество стаканов яблочного сока на втором подносе зависит от того, какая гипотеза была реализована.

Общее число исходов равно $n = C_{15}^4 = \frac{15!}{4!\cdot 11!} = \frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11!} = 1365$;

для события A/H_1 получаем $m_1 = C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$;

для события A/H_2 получаем $m_2 = C_6^4 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$;

для события A/H_3 получаем $m_3 = C_5^4 = 5$;

для события A/H_4 получаем $m_4 = C_4^4 = 1$.

Тогда $P_{H_1}(A) = \frac{35}{1365}, P_{H_2}(A) = \frac{15}{1365}$, $P_{H_3}(A) = \frac{5}{1365}$, $P_{H_4}(A) = \frac{1}{1365}$.

Окончательно: $P(A) = \frac{10}{165}\cdot\frac{35}{1365} + \frac{60}{165}\cdot\frac{15}{1365} + \frac{75}{165}\cdot\frac{5}{1365} + \frac{20}{165}\cdot\frac{1}{1365} = \frac{47}{6435}$.

Ответ: $\frac{47}{6435}$.

Задача 6.7

Для проведения акции «Посади дерево» привезли саженцы 16 лип и трех канадских кленов. Вероятность того, что саженец липы приживется, равна 0,81, а для клена – 0,46. Участниками акции случайным образом выбирается одно дерево для посадки. Найти вероятность того, что саженец приживется.

Решение.

Пусть событие A – саженец приживется, гипотезы H_1 – участнику достанется для посадки липа и H_2 – участнику достанется для посадки клен.

Используя формулу полной вероятности, получим $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)$, где по условию $P_{H_1}(A) = 0,81$, $P_{H_2}(A) = 0,46$.

Так как всего было посажено 19 деревьев: 16 лип и 3 клена, то $P(H_1) = \frac{3}{19}$, $P(H_2) = \frac{16}{19}$.

Окончательно: $P(A) = 0,81 \cdot \frac{3}{19} + 0,46 \cdot \frac{16}{19} = 0,515$.

Ответ: $0,515$.

Задача 6.8

В откормочный комплекс поступили телята из трех хозяйств: 19 их первого хозяйства, 6 из второго и 11 из третьего. Вероятности того, что телята имеют живой вес более 250 кг для каждого хозяйства соответственно равны 0,85; 0,76 и 0,71. Случайным образом выбранный теленок при поступлении в откормочный комплекс весит 280 кг. Какова вероятность, что он поступил из первого, второго или третьего хозяйства.

Решение.

Рассмотрим событие A, которое заключается в том, что теленок имеет живой вес более 250 кг. И гипотезы H_1, H_2, H_3, заключающиеся в том, что теленок поступил из первого, второго или третьего хозяйства соответственно.

Всего поступило 36 телят. Тогда вероятности того, что теленок поступил из первого, второго или третьего хозяйства соответственно, будут равны:

$$P(H_1) = \frac{19}{36} = 0,528, \quad P(H_2) = \frac{6}{36} = 0,167, \; P(H_3) = \frac{11}{36} = 0,306.$$

Из условия задачи известны условные вероятности:

$P_{H_1}(A) = 0{,}85$ – вероятность того, что теленок весом более 250 кг поступил из первого хозяйства;

$P_{H_2}(A) = 0{,}76$ – вероятность того, что теленок весом более 250 кг поступил из второго хозяйства;

$P_{H_3}(A) = 0{,}71$ – вероятность того, что теленок весом более 250 кг поступил из третьего хозяйства.

По формуле полной вероятности получаем: $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$

$= 0{,}85 \cdot 0{,}528 + 0{,}76 \cdot 0{,}167 + 0{,}71 \cdot 0{,}306 = 0{,}792$ – вероятность того, что поступивший теленок будет весом более 250 кг.

Теперь воспользуемся формулами Байеса: $P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$, где $P(A)$ – полная вероятность. Получаем:

$P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}528 \cdot 0{,}85}{0{,}792} = 0{,}566$ – вероятность того, что теленок весом 280 кг поступил из первого хозяйства;

$P_A(H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}167 \cdot 0{,}76}{0{,}792} = 0{,}160$ – вероятность того, что теленок весом 280 кг поступил из второго хозяйства;

$P_A(H_3) = \dfrac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}306 \cdot 0{,}71}{0{,}792} = 0{,}274$ – вероятность того, что теленок весом 280 кг поступил из третьего хозяйства.

Ответ: $P_A(H_1) = 0{,}566$, $P_A(H_2) = 0{,}160$, $P_A(H_3) = 0{,}274$.

Задача 6.9

У дикорастущей земляники красная окраска ягод доминирует над розовой. Вероятность встретить в лесу землянику с красными ягодами равна p = 0,8. Найти вероятность того, что среди отобранных наудачу 100 растений красные ягоды будут иметь:

а) не менее 75 и не более 90 растений;

б) не менее 75 растений;

в) не более 74 растений.

Решение.

а) Рассмотрим событие A, которое заключается в том, что растение имеет красные ягоды. Согласно интегральной теореме Лапласа, если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

По условию задачи $n=100$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$, $k_1=75$, $k_2=90$. Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{75-80}{\sqrt{16}}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{90-80}{\sqrt{16}}=\frac{10}{4}=2{,}5.$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение Г), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1)=\Phi(-1{,}25)=-\Phi(1{,}25)=-0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2)=\Phi(2{,}5)=0{,}4938.$$

Тогда

$$P_{100}(75,90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,4938 - (-0,3944) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

б) Требование, что красные ягоды будут иметь не менее 75 растений земляники, означает, что число растений с красными ягодами может быть равно 75 либо 76, либо 77, …, либо 100 (больше 100 быть не может по условию задачи). Значит, в нашем случае следует принять, что $k_1 = 75$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1,25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{100 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение Г), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0,5.$$

Тогда $P_{100}(75,100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 - (-0,3944) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$

в) События «Красные ягоды будут иметь не более 74 растений» и «Красные ягоды будут иметь не менее 75 растений» противоположны, поэтому

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

Ответ: а) 0,8882; б)0,8944; в) 0,1056.

Задача 6.10

Вероятность того, что изготовленная станком деталь будет иметь брак, равна 1/200. Найти вероятность того, что среди 200 наудачу отобранных для проверки деталей окажется: а) ровно 1 бракованная; б) меньше чем 3 бракованных; в) больше чем 2 бракованных.

Решение.

Вероятность события мала, а число испытаний велико, поэтому воспользуемся формулой Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = n \cdot p$.

а) По условию $n = 200,\ p = 1/200,\ k = 1$. Тогда $\lambda = 200 \cdot 1/200 = 1$ и по таблице значений данной функции (приложение Д) находим $P_{200}(1) = 0{,}3679$.

б) По условию $n = 200,\ p = 1/200,\ k < 3,\ \lambda = 1$.

Тогда $P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197$.

в) По условию $n = 200,\ p = \frac{1}{200},\ k > 2,\ \lambda = 1$. Воспользуемся противоположным событием, так как оно раскладывается на меньшее число слагаемых:

$P_{200}(k > 2) = P_{200}(3) + P_{200}(4) + ... + P_{200}(200) = 1 - P_{200}(k \le 2) =$

$= 1 - P_{200}(k < 3) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803.$

Ответ: а) 0,3679, б) 0,9197, в) 0,0803.

6.2 Индивидуальные задания

Задача 6.1

Вычислить: $P_n,\ C_n^m,\ A_n^m$. Проверить справедливость следующих равенств: $A_n^m = n(n-1).....(n-m+1)$, $C_n^m = C_n^{n-m}$.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	3	2	4	2	3	4	5	2	3
n	5	7	6	8	7	8	9	11	8	9
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	4	5	2	3	6	7	4	3	5	2
n	11	8	4	6	12	11	12	5	9	10

Задача 6.2

Слово составлено из букв разрезной азбуки. Карточки перемешали и расположили их в произвольном порядке. Найти вероятность, что вновь получилось заданное слово.

№ варианта	Слово	№ варианта	Слово
1	АКСИОМА	11	КАЛЬКУЛЯТОР
2	СТАТИСТИКА	12	ПРОГРАММИСТ
3	СОБЫТИЕ	13	ПРИЗНАК
4	МАТРИЦА	14	ДИФФЕРЕНЦИАЛ
5	ГИПЕРБОЛА	15	СЛУЧАЙНОСТЬ
6	ИНТЕГРАЛ	16	ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
7	ОПЕРАЦИЯ	17	ПЛОЩАДЬ
8	УСЛОВИЕ	18	УРАВНЕНИЕ
9	ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ	19	ПЛОСКОСТЬ
10	ПАРАБОЛА	20	ПОВЕРХНОСТЬ

Задача 6.3

В вазе стоят К красных и Н желтых тюльпанов. Наугад из вазы вынимают М тюльпанов. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) ровно Р желтых тюльпанов, б) меньше, чем Р желтых тюльпанов, в) хотя бы 1 желтый тюльпан. Значения К, Н, М и Р даны в таблице 1.

Таблица 1 – Значения К, Н, М и Р

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
К	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7
Н	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4
М	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4
Р	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2

Продолжение таблицы 1

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	8	6	4	8	5	7	5	6	5	6
H	6	5	6	6	6	4	7	5	7	7
M	4	4	4	5	5	5	4	5	5	5
P	3	3	3	2	4	3	3	2	4	3

Задача 6.4

Каждый из трех свидетелей может опознать предполагаемого преступника с вероятностью p_1, p_2, p_3 соответственно. Свидетели приходят на опознание независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что преступник не будет опознан: а) ровно одним свидетелем; б) хотя бы одним свидетелем. Значения вероятностей p_1, p_2, p_3 даны в таблице 2.

Таблица 2 – Значения вероятностей p_1, p_2, p_3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,851	0,871	0,901	0,921	0,931	0,951	0,971	0,999	0,981	0,969
p_2	0,751	0,771	0,801	0,821	0,831	0,851	0,871	0,899	0,881	0,869
p_3	0,701	0,721	0,751	0,771	0,781	0,801	0,821	0,849	0,831	0,819
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0,861	0,881	0,891	0,911	0,941	0,961	0,991	0,979	0,989	0,959
p_2	0,761	0,781	0,791	0,811	0,841	0,861	0,891	0,879	0,889	0,859
p_3	0,711	0,731	0,741	0,761	0,791	0,811	0,841	0,829	0,839	0,809

Задача 6.5

На одном подносе K пирожков с картошкой и L с капустой, а во втором подносе M пирожков с картошкой и N с капустой. С первого подноса берут случайным образом P пирожков, со второго – Q пирожков. Найти вероятность того, что среди выбранных пирожков: а) все с одинаковой начинкой; б) ровно три пирожка с картошкой; в) хотя бы один пирожок с картошкой. Значения K, L, M, N, P и Q даны в таблице 3.

Таблица 3 – Значения K, L, M, N, P и Q

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	7	5	7	5	5	5	5	6	6	6
L	4	5	3	4	6	7	8	3	5	6
M	8	4	6	7	7	6	7	5	5	5
N	5	8	3	4	3	4	5	6	3	5
P	3	2	3	1	3	2	4	3	2	4
Q	3	2	1	4	2	2	1	3	2	1
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1

Задача 6.6

В одном ящике K новых и L игранных теннисных мячей, а в другом ящике M новых и N игранных мячей. Из первого ящика наудачу вынимают P мячей и перекладывают во второй. После этого из второго ящика также случайно вынимают R мячей. Найти вероятность того, что все мячи, вынутые из второго ящика, новые. Значения K, L, M, N, P и R даны в таблице 4.

Таблица 4 – Значения K, L, M, N, P и R

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	7	5	5	5	5	4	4	4	4	4
L	7	5	4	3	2	4	5	6	7	8
M	2	4	4	4	4	5	5	5	5	5

Продолжение таблицы 4

N	2	7	6	5	4	5	4	6	7	8
P	2	2	3	2	3	4	2	3	2	3
R	3	3	3	4	4	3	4	3	4	3
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	6	8	6	6	6	6	6	3	3	3
L	8	7	6	5	4	3	2	2	3	4
M	5	3	3	3	3	3	3	6	6	6
N	9	3	4	5	6	7	8	8	7	6
P	3	4	3	4	4	3	3	2	2	3
R	4	3	2	3	2	3	4	4	3	3

Задача 6.7

Для изучения эффективности специального питания в лечении больных с различными заболеваниями желудочно-кишечного тракта было отобрано R больных, из которых L человек будут придерживаться диеты №1. У пациента, придерживающегося диеты №1, наблюдается положительная динамика в лечении с вероятностью p_1, а придержавшегося диеты №2, – с вероятностью p_2. Найти вероятность того, что у случайно выбранного больного будет наблюдаться положительная динамика. Значения параметров R, L, p_1, p_2 даны в таблице 5.

Таблица 5 – Значения R, L, p_1, p_2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
L	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
p_1	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91
p_2	0,47	0,48	0,49	0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56

Продолжение таблицы 5

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R	8	7	6	5	6	7	8	9	10	11
L	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
p_1	0,92	0,93	0,94	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,89
p_2	0,57	0,58	0,59	0,6	0,59	0,58	0,57	0,56	0,55	0,54

Задача 6.8

1) На склад завезли приборы двух партий. Нормальный режим наблюдается у 20 приборов из 30 из первой партии и у 15 из 25 из второй партии. Найти вероятность того, что наудачу выбранный прибор, работающий в нормальном режиме, из первой партии.

2) В прибор могут быть установлены предохранители двух типов. Предохранитель первого типа может быть установлен с вероятностью 0,55; второго – 0,45. Вероятность того, что при перегрузке сработает первый предохранитель, равна 0,9; второй – 0,98. От скачка напряжения в приборе сработал предохранитель. Найти вероятность того, что в прибор был установлен предохранитель второго типа.

3) В автопарке такси новых машин вдвое больше, чем старых, которые ранее были в ремонте. Вероятность работы старого автомобиля без поломок, равна 0,7; нового – 0,8. Найти вероятность того, что приехавшая на вызов машина будет новой.

4) Мальчик играет солдатиками из двух разных наборов. В первом наборе 7 рядовых и 5 офицеров, во втором – 4 рядовых и 4 офицера. Наудачу выбранный для игры солдатик оказался офицером. Найти вероятность того, что он был выбран из первого набора.

5) В трех классах обучается 75 учеников, из них 25 в классе «А», 30 – в классе «Б», остальные в классе «В». Количество учеников в классах успешно сдавших все выпускные экзамены соответственно равны: 22, 24 и 15. Случайным образом выбранный ученик сдал все экзамены. Найти вероятность того, что он

учился в «Б» классе.

6) В магазине продается 25 холодильников, из них 9 выпущены первым заводом, 10 – вторым и остальные – третьим. Известно, что среди всех холодильников, выпущенных первым заводом имеют скрытые дефекты 5%, вторым – 12% и третьим заводом 10% холодильников. Купленный холодильник оказался бракованным. Найти вероятность того, что он был изготовлен третьим заводом.

7) В первой лабораторной клетке содержится 8 мышей, из них 3 белых, во второй – 15, из которых 6 белых, в третьей – 10 мышей, из них 7 белых. Наудачу выбрали клетку и из нее извлекли одну мышь, которая оказалась белого цвета. Найти вероятность того, что мышь извлечена из второй клетки.

8) Сельхозпредприятие заготовило для посадки семена кукурузы трех сортов. Из них 1/3 часть семян первого сорта, 1/5 часть – второго и остальные семена третьего сорта. Всхожести семян каждого сорта соответственно равны 90%, 80% и 85%. Какова вероятность того, что после сбора урожая выбранный початок вырос из семени первого сорта?

9) Вероятность того, что во время работы компьютера произойдет сбой в программном обеспечении, равна 0,4; оперативной памяти – 0,35; в прикладных программах – 0,25. Вероятности обнаружения сбоя в программном обеспечении, оперативной памяти и прикладных программах равны соответственно 0,3; 0,4; 0,6. Найти вероятность того, что возникший сбой будет обнаружен в оперативной памяти.

10) В первом инкубаторе 40 яиц, из них случайно попали 5 пустых (неоплодотворенных), во втором 50 яиц, из них 4 пустых, а в третьем 25 яиц, из них 5 пустых. Наудачу выбранное из инкубатора для проверки яйцо оказалось пустым. Найти вероятность того, что его достали из второго инкубатора.

11) В магазин поступили сумки от двух производителей. Количество сумок, поступивших от первого производителя, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 20% сумок от первого производителя и 35% сумок от второго производителя имеют различные дефекты. Из общей массы наугад

выбирают одну сумку. Оказалось, что сумка не имеет дефектов. Найти вероятность того, что она изготовлена первым производителем.

12) В инфекционную больницу поступили 20 больных с острой кишечной инфекцией, 15 больных с рожистым воспалением и 17 больных с клещевым энцефалитом. Вероятность полного излечения для первого заболевания равна 0,6; для второго – 0,5 и третьего – 0,4. Больной после лечения был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал острой кишечной инфекцией.

13) Студент может подсмотреть ответ на заданный ему вопрос в одной из двух шпаргалок. Он может воспользоваться первой шпаргалкой с вероятностью 0,4; а второй – 0,6. Вероятность того, что нужный ему ответ будет найден в первой шпаргалке, равна 0,35 и во второй – 0,7. Студент воспользовался одной из шпаргалок и ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что он воспользовался второй шпаргалкой.

14) В магазин поступили яйца с двух агрофирм. С первой агрофирмы поступило 150 яиц, из них 30 яиц первой категории, со второй – 200 яиц, из них 50 – первой категории. Из всей партии выбрали одно яйцо, которое оказалось первой категории. Найти вероятность того, что выбранное яйцо поставлено первой агрофирмой.

15) На заводе три сборочных цеха, причем в первом из них собирается 35% всех мотоциклов, во втором 25%, в третьем – 45%. Вероятность скрытого дефекта для мотоциклов, собранных в первом цеху, равна 0,2; во втором – 0,1; в третьем – 0,15. Приобретенный покупателем мотоцикл не имеет дефектов. Найти вероятность того, он собран в первом цеху.

16) С первого станка-автомата на сборочный конвейер поступает 200 деталей, со второго – 150. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,01 и 0,005. Выбранная для проверки деталь оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь изготовлена вторым станком-автоматом.

17) На потоке учится три группы студентов. Количество студентов в каждой

группе равно 28, 19 и 20 соответственно. Вероятность того, что студент первой группы отличник, равна 0,4; второй – 0,35; третьей – 0,6. Преподаватель вызывает по списку одного из студентов, который оказался отличником. Найти вероятность того, что студент учится в третьей группе.

18) Автомобильный завод получает детали от двух производителей. Вероятность того, что деталь от первого производителя не соответствует ГОСТу равна 0,9; для второго – 0,3. Первый производитель поставил 2000 деталей, второй – 3000. Сборщик взял одну деталь, которая оказалась соответствующей ГОСТу. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена первым производителем.

19) В магазин поступили кофеварки трех фирм в количестве 35, 20 и 4 соответственно. Вероятность того, что кофеварка не сломается в гарантийный срок равна: для первой фирмы 0,95; для второй – 0,8; для третьей – 0,9. Купленная кофеварка оказался хорошего качества. Найти вероятность того, что эта кофеварка изготовлена второй фирмой.

20) На двух фермах произошла вспышка заболевания ящуром. Доли зараженного скота составляют соответственно $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Случайным образом выбирают ферму и из нее одну корову. Выбранная корова оказалась заражена. Вычислить вероятность того, что она выбрана из первой фермы.

Задача 6.9

Вероятность нарушений в уплате налогов каждым из n частных банков, работающих в городе, в среднем равна p. Налоговая инспекция проводит независимую проверку частных банков города. Найти вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия нарушений среди: а) не менее k_1 и не более k_2 банков; б) не менее k_2 банков; в) не более k_3 банков. Значения n, p, k_1, k_2, k_3 даны в таблице 6.

Таблица 6 – Значения n, p, k_1, k_2, k_3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	120	110	130	150	135	150	220	160	275	175
k_1	100	70	85	120	100	130	180	145	250	160
k_2	115	95	105	140	120	145	200	155	265	170
k_3	114	94	104	139	119	144	199	154	264	169
p	0,75	0,8	0,85	0,90	0,97	0,95	0,95	0,9	0,96	0,85
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	200	105	125	145	180	210	140	170	115	205
k_1	175	85	85	90	155	190	120	135	95	185
k_2	195	100	105	125	170	205	135	155	110	200
k_3	194	99	104	124	169	204	134	154	109	199
p	0,98	0,95	0,85	0,97	0,9	0,9	0,85	0,95	0,9	0,85

Задача 6.10

Вероятность приема каждого из передаваемых радистом сигналов равна *p*. Найти вероятность того, что из *n* переданных радистом сигналов, будет принято:

а) ровно *G* сигналов;

б) меньше чем *L* сигналов;

в) больше чем *M* сигналов. Значения параметров даны в таблице 7.

Таблица 7 – Значения параметров

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	$\frac{1}{6500}$	$\frac{1}{8400}$	$\frac{1}{10500}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{3400}$	$\frac{1}{5400}$	$\frac{1}{7600}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{12600}$	$\frac{1}{15400}$
n	6500	8400	10500	1600	3400	5400	7600	10000	12600	15400
G	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
L	8	3	4	5	6	7	8	3	4	5
M	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4

Продолжение таблицы 7

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{1200}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{4200}$	$\frac{1}{5600}$	$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{3300}$	$\frac{1}{64800}$
n	600	1200	2000	3000	4200	5600	900	2000	3300	4800
G	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
L	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7
M	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6

6.3 Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте правила сложения и умножения в комбинаторике.

2) Как вычисляется размещение из n элементов по m элементов?

3) Что называется сочетанием из n элементов по m элементов, запишите формулу для вычисления?

4) Дайте определение перестановки из n элементов, запишите формулу для вычисления.

5) В чем основное отличие размещения и сочетания? Приведите пример.

6) Что понимается под испытанием (опытом, экспериментом)?

7) Дайте определение события. Какие виды событий знаете?

8) Что называют случайным событием?

9) Какие два события называют несовместными?

10) Какие события называют единственно возможными?

11) Какое событие называют невозможным?

12) Приведите пример достоверного и невозможного событий. Чему равны вероятности таких событий?

13) Дайте определение полной группы событий.

14) Что понимают под элементарными исходами?

15) Сформулируйте классическое определение вероятности события. Приведите пример вычисления вероятности события по классической формуле.

16) Перечислите свойства вероятности события.

17) Что называют относительной частотой событий?

18) Сформулируйте статистическое определение вероятности события.

19) Сформулируйте геометрическое определение вероятности события.

20) Что означает событие $A+B$?

21) Что означает событие $A \cdot B$?

22) Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.

23) Чем отличаются условная и безусловная вероятности? Приведите примеры.

24) Какие события называются независимыми?

25) Сформулируйте теорему умножения вероятностей.

26) Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

27) Какое событие называют противоположным событию A? Как оно обозначается?

28) Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?

29) Как вычислить вероятность появления хотя бы одного события?

30) Чему равна вероятность события, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу?

31) Запишите формулу полной вероятности.

32) Запишите формулу Байеса.

33) Запишите формулу Бернулли, когда она используется? Когда надо использовать приближенные формулы?

34) Запишите формулу определения наивероятнейшего числа наступления успеха в схеме Бернулли.

35) Запишите формулу Пуассона.

36) Сформулируйте локальную и интегральную предельную теоремы Муавра-Лапласа.

37) Запишите функцию Лапласа. Перечислите свойства функции Лапласа.

7 Случайные величины

7.1 Примеры решения типовых задач

Задача 7.1

Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	p_5

Найти p_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Решение.

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Получаем: 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,25 + p_5 = 1. Отсюда $p_5 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

То есть закон распределения имеет вид:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Математическое ожидание найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Получаем

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}15 = -0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}45 = 1{,}15.$$

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i$.

Получаем:

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}1 + 0{,}3 + 1{,}0 + 1{,}35 = 2{,}75.$$

Тогда $D(X) = 2{,}75 - 1{,}15^2 = 1{,}427$.

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Получаем $\sigma_x = \sqrt{1{,}427} \approx 1{,}195$.

Максимальное значение вероятности 0,3 достигается, когда случайная величина принимает значение 1. Поэтому мода $M_o = 1$.

Построим многоугольник распределения (рисунок 8)

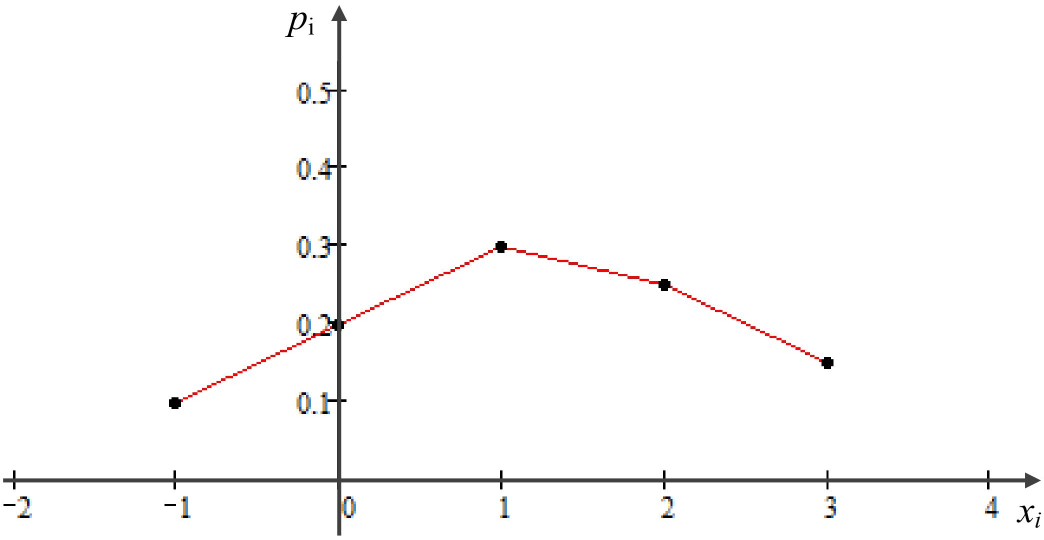


Рисунок 8 – Многоугольник распределения

Функция распределения (интегральная функция распределения) задается формулой $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если $x \le -1$, то $F(x) = 0$ (в том числе и при $x = -1$, так как F(-1) = P(X< -1) = 0).

Если $-1 < x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = P(X = -1) = 0{,}1$.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}1+0{,}2 = 0{,}3$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1+0{,}2+0{,}3 = 0{,}6$.

Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) =$

$= 0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}25 = 0{,}85$.

Если $x > 3$, то $F(x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
$= 0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}25+0{,}15 = 1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le -1, \\ 0{,}1, \text{ при } -1 < x \le 0, \\ 0{,}3, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}6, \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}85, \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 1, \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рисунок 9).

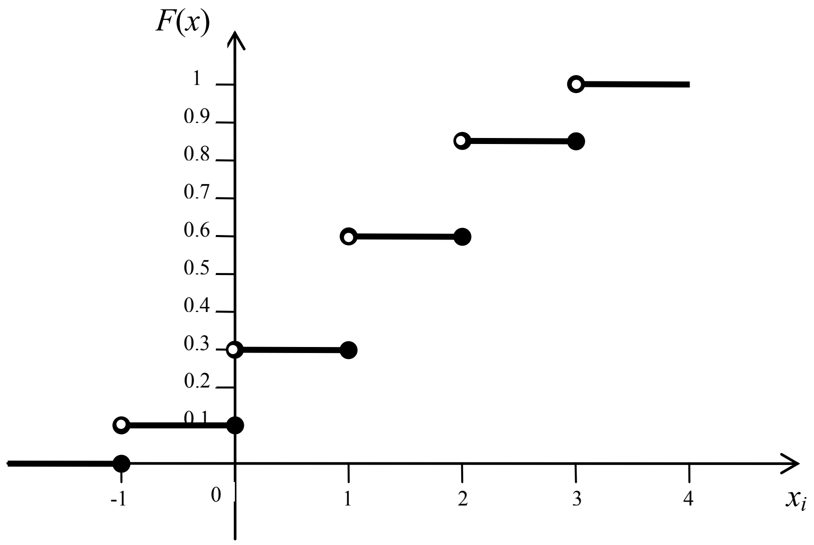


Рисунок 9 – График функции распределения

Задача 7.2

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$P(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ при } \quad 0 < x \le 2, \\ 0, \text{ при } \quad x > 2. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$.

Решение.

а) Функции $p(x)$ и $F(x)$ связаны соотношением $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

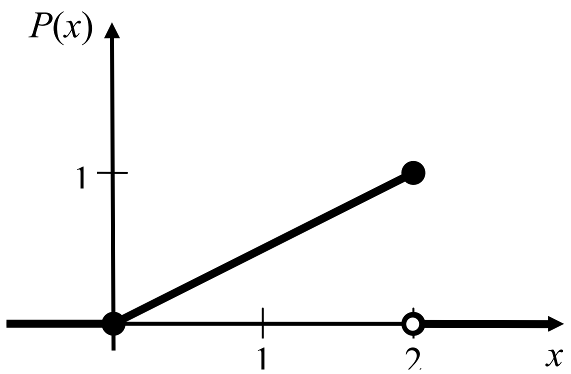
Если $x \le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt=0$.

Если $0<x\le 2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int\limits_{0}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int\limits_{0}^{x}\frac{t}{2}dt=0+\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x=\frac{x^2}{4}$.

Если $x>2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int\limits_{0}^{2} p(t)dt+\int\limits_{2}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int\limits_{0}^{2}\frac{t}{2}dt+\int\limits_{2}^{x} 0dt=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^2=1$.

Получаем $F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{при } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

Графики плотности распределения и функции распределения представлены на рисунке 10.



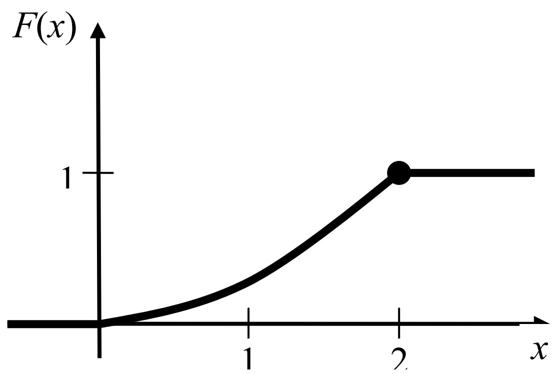


Рисунок 10 – Графики плотности распределения и функции распределения б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$, $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M(x))^2$, $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$. Получаем:

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{2} dx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

$$D(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{x}{2} dx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^3 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9};$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

в) Вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$ найдем по формуле $P(a \le X \le b) = \int\limits_a^b p(x)dx$. Получаем:

$$P(1 \le X \le 2) = \int\limits_1^2 \frac{x}{2} dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $M(x) = \frac{4}{3}$; $D(x) = \frac{2}{9}$; $\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $P(1 \le X \le 2) = \frac{3}{4}$.

Задача 7.3

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины.

Решение.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ определяется через функцию Лапласа по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma}\right).$$

По условию задачи вероятность $P(16 < X < 20) = 0{,}98$. Тогда

$$P(16 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{16-18}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}98.$$

Так как функция Лапласа является нечетной функцией, для нее $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \left(-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}98.$$

Откуда $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}49$. Найдем значение аргумента $z = \frac{2}{\sigma}$ функции Лапласа. Из таблицы значений функции Лапласа (приложение В) получаем $z = 2{,}33$. Значит, $\frac{2}{\sigma} = 2{,}33$, а $\sigma = \frac{2}{2{,}33} = 0{,}86$.

Ответ: 0,86.

Задача 7.4

Найти вероятность попадания случайной величины X в заданный промежуток, если известен вид распределения и некоторые числовые характеристики:

а) геометрическое распределение, $M(x) = 4$, $D(x) = 2$, $[\alpha; \beta] = [4{,}6]$;

б) биноминальное распределение, $M(x) = 4$, $D(x) = 2$, $[\alpha; \beta] = [4{,}6]$;

в) пуассоновское распределение, $M(x) = 4$, $D(x) = 2$, $[\alpha; \beta] = [4{,}6]$;

г) равномерное распределение, $M(x) = \sigma(x) = 4$, $(\alpha; \beta) = (2{,}6)$;

д) показательное распределение, $M(x) = \sigma(x) = 4$, $(\alpha; \beta) = (2{,}6)$.

Решение.

а) Для геометрического распределения $P(n) = p \cdot q^{n-1}$, $M(x) = \frac{1}{p}$, $D(x) = \frac{q}{p^2}$.

По условию $M(x) = 4$, то есть $\frac{1}{p} = 4$, отсюда $p = 4$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Получаем: $P(4 \le X \le 6) = P(4) + P(5) + P(6) = p \cdot q^{4-1} + pq^{5-1} + pq^{6-1} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{999}{1024} = 0{,}244$.

б) Для биноминального распределения $P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^n$, $M(x) = np$, $D(x) = npq$.

По условию $M(x) = 4$, $D(x) = 2$, т.е. $\begin{cases} 4 = np, \\ 2 = npq, \end{cases}$ отсюда (разделив второе уравнение на первое) получаем: $q = \frac{1}{2}$, $p = 1 - q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, n = 8$. Тогда $P(4 \le X \le 6) = P_8^4 + P_8^5 + P_8^6 = \frac{8!}{4!(8-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} + \frac{8!}{5!(8-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} +$

$\frac{8!}{6!(8-6)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{8-6} = \frac{70}{256} + \frac{56}{256} + \frac{28}{256} = \frac{154}{256} = 0{,}602$.

в) Для распределения Пуассона $M(x) = D(x) = \lambda$, $P_n^m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

По условию $\lambda = M(x) = 4$, поэтому

$P(4 \le X \le 6) = P_8^4 + P_8^5 + P_8^6 = \frac{4^4}{4!} e^{-4} + \frac{4^5}{5!} e^{-4} + \frac{4^6}{6!} e^{-4} = 4^4 \cdot e^{-4} \cdot \frac{35}{360} = 0{,}456$.

г) Для равномерного распределения $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 0, \quad \text{при} & x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$

$$M(X)=\frac{b+a}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Получаем: $\begin{cases}\dfrac{b+a}{2}=4,\\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=4,\end{cases}$ отсюда $\begin{cases}b+a=8,\\ b-a=\pm 8\sqrt{3}.\end{cases}$

Решая систему, получим: $a_1=4+4\sqrt{3}, b_1=4-4\sqrt{3}$; $a_2=4-4\sqrt{3}, b_2=4+4\sqrt{3}$.

Так как $a<b$, то выбираем второе решение, т.е. $a=4-4\sqrt{3}, b=4+4\sqrt{3}$.

Получаем: $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{24}, & \text{при } 4-4\sqrt{3}\le x\le 4+4\sqrt{3}\\ 0, & \text{при} \quad x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$

Так как $P(a\le X\le b)=\int\limits_a^b p(x)dx$, то получаем $P(2<X<6)=\int\limits_2^6\frac{\sqrt{3}}{24}dx=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{24}x\Big|_2^6=\frac{\sqrt{3}}{24}(6-2)=\frac{\sqrt{3}}{6}=0{,}289.$$

д) Для показательного распределения $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases}$

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

По условию $M(x)=4=\frac{1}{\lambda}$. Отсюда $\lambda=\frac{1}{4}$, $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \dfrac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}, & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases}$

Получаем: $P(2<X<6)=\frac{1}{4}\int\limits_2^6 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_2^6=e^{-0{,}5}-e^{-1{,}5}=0{,}606-0{,}223=0{,}383$.

Ответ: а) 0,244; б) 0,602; в) 0,456; г) 0,289; д) 0,383.

7.2 Индивидуальные задания

Задача 7.1

Дискретная случайная величина задана таблицей. Найти P_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

1)	x_i	-3	-2	-1	1	2	2)	x_i	-7	-4	0	4	7
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	p_5

3)	x_i	-5	-2	0	2	5	4)	x_i	-3	-1	0	4	5
	p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	p_5

5)	x_i	-7	-4	0	4	7	6)	x_i	2	9	10	11	13
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	p_5

7)	x_i	-6	-4	-2	2	4	8)	x_i	1	3	5	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	p_5		p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	p_5

9)	x_i	-2	-1	0	3	5	10)	x_i	-3	-2	-1	1	2
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	p_5

11)	x_i	-5	-3	-1	1	5	12)	x_i	1	4	6	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,2	0,05	0,15	0,3	p_5

13)	x_i	1	3	5	7	9	14)	x_i	-2	0	3	6	8
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,3	0,15	0,3	0,2	p_5

15)	x_i	-5	-4	0	1	3	16)	x_i	2	4	5	10	12
	p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5

17)						
	x_i	-1	0	1	2	3
	p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	p_5

18)						
	x_i	0	3	6	8	9
	p_i	0,15	0,35	0,05	0,2	p_5

19)						
	x_i	-3	-2	1	2	7
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	p_5

20)						
	x_i	0	3	6	10	11
	p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	p_5

Задача 7.2

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения $p(x)$.

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[a,b]$.

1) $$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ x-\frac{1}{2}, & \text{при} \quad 1<x\le 2\\ 0, & \text{при} \quad x>2\end{cases}$$
$P(1{,}5\le X\le 1{,}75)-?$

2) $$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ x-\frac{x^3}{4}, & \text{при} \quad 0<x\le 2\\ 0, & \text{при} \quad x>2\end{cases}$$
$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

3) $$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 6\\ \frac{x}{9}-\frac{1}{2}, & \text{при} \quad 6<x\le 9\\ 0, & \text{при} \quad x>9\end{cases}$$
$P(3\le X\le 4)-?$

4) $$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \frac{2x-1}{6}, & \text{при} \quad 0<x\le 3\\ 0, & \text{при} \quad x>3\end{cases}$$
$P(1\le X\le 2{,}5)-?$

5) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 2\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{x}{4}, & \text{при} \quad 2<x\le 4\\ 0, & \text{при} \quad x>4\end{cases}$

$P(2{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

6) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{x}{36}+\dfrac{1}{18}, & \text{при} \quad 1<x\le 7\\ 0, & \text{при} \quad x>7\end{cases}$

$P(2\le X\le 5)-?$

7) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{36}, & \text{при} \quad 0<x\le 6\\ 0, & \text{при} \quad x>6\end{cases}$

$P(0{,}5\le X\le 2{,}5)-?$

8) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 5\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2x}{25}, & \text{при} \quad 5<x\le 10\\ 0, & \text{при} \quad x>10\end{cases}$

$P(6\le X\le 9)-?$

9) $p(x)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{11}{18}-\dfrac{x}{9} & \textit{при} \quad 1<x\le 4\\ 0 & \textit{при} \quad x>4\end{cases}$

$P(2\le X\le 3)-?$

10) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 7\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{27}{10}, & \text{при} \quad 7<x\le 9\\ 0, & \text{при} \quad x>9\end{cases}$

$P(8\le X\le 8{,}5)-?$

11) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{x}{32}, & \text{при} \quad 0<x\le 8\\ 0, & \text{при} \quad x>8\end{cases}$

$P(1\le X\le 7)-?$

12) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{64}, & \text{при} \quad 0<x\le 4\\ 0, & \text{при} \quad x>4\end{cases}$

$P(0\le X\le 2)-?$

13) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 6\\ \dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{2}, & \text{при} \quad 6<x\le 9\\ 0, & \text{при} \quad x>9\end{cases}$

$P(3\le X\le 4)-?$

14) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{2x-1}{6}, & \text{при} \quad 0<x\le 3\\ 0, & \text{при} \quad x>3\end{cases}$

$P(1\le X\le 2{,}5)-?$

15) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{2}, & \text{при} \quad 1<x\le 2\\ 0, & \text{при} \quad x>2\end{cases}$

$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

16) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ 6x+2, & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{1}{3}\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$P(0{,}1\le X\le 0{,}2)-?$

17) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{2x+1}{2}, & \text{при} \quad 0<x\le 1\\ 0, & \text{при} \quad x>1\end{cases}$

$P(\frac{1}{6}\le X\le \frac{5}{6})-?$

18) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{6}, & \text{при} \quad 1<x\le 3\\ 0, & \text{при} \quad x>3\end{cases}$

$P(1{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

19) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ 3x^2, & \text{при} \quad 0<x\le 1\\ 0, & \text{при} \quad x>1\end{cases}$

$P(0{,}5\le X\le 1)-?$

20) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 4\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{3}, & \text{при} \quad 4<x\le 6\\ 0, & \text{при} \quad x>6\end{cases}$

$P(5\le X\le 6)-?$

Задача 7.3

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно M, а вероятность ее попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ равна *p*. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины. Значения $M,\alpha,\beta,$ *p* даны в таблице 8.

Таблица 8 – Значения $M,\alpha,\beta,$ *p*

№ варианта	α	M	β	p		№ варианта	α	M	β	p
1)	36	40	44	0,966		11)	9	13	17	0,98
2)	40	42	44	0,98		12)	22	24	26	0,966
3)	51	56	61	0,97		13)	52	55	58	0,82
4)	17	20	23	0,96		14)	42	47	52	0,97
5)	23	26	29	0,81		15)	21	23	25	0,89

Продолжение таблицы 8

6)	15	18	21	0,88		16)	11	16	21	0,9
7)	18	22	26	0,97		17)	38	41	44	0,95
8)	30	32	34	0,99		18)	32	35	38	0,95
9)	41	45	49	0,98		19)	12	15	18	0,96
10)	29	33	37	0,966		20)	23	25	27	0,85

Задача 7.4

Найти вероятность попадания случайной величины X в заданный промежуток, если известен вид распределения и некоторые числовые характеристики:

а) геометрическое распределение, математическое ожидание, дисперсия;

б) биноминальное распределение, математическое ожидание, дисперсия;

в) пуассоновское распределение, математическое ожидание, дисперсия;

г) равномерное распределение, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение;

д) показательное распределение, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение.

№ варианта	Задание	Условия
1)	а) – в)	$M(x)=4,\ D(x)=2,\ [\alpha;\beta]=[3,5]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=4,\ (\alpha;\beta)=(3,7)$
2)	а) – в)	$M(x)=3,\ D(x)=15/8,\ [\alpha;\beta]=[5,7]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=3,\ (\alpha;\beta)=(2,5)$
3)	а) – в)	$M(x)=2,\ D(x)=3/2,\ [\alpha;\beta]=[1,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=5,\ (\alpha;\beta)=(1,6)$
4)	а) – в)	$M(x)=3,\ D(x)=7/4,\ [\alpha;\beta]=[3,5]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=1,\ (\alpha;\beta)=(4,5)$
5)	а) – в)	$M(x)=6,\ D(x)=1{,}5,\ [\alpha;\beta]=[2,4]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=3,\ (\alpha;\beta)=(5,8)$
6)	а) – в)	$M(x)=4,\ D(x)=2,\ [\alpha;\beta]=[4,6]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=2,\ (\alpha;\beta)=(3,5)$

7)	а) – в)	$M(x)=2,\ D(x)=1{,}5,\ [\alpha;\beta]=[2,4]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=4,\ (\alpha;\beta)=(1,5)$
8)	а) – в)	$M(x)=6,\ D(x)=3/2,\ [\alpha;\beta]=[1,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=2,\ (\alpha;\beta)=(5,7)$
9)	а) – в)	$M(x)=3,\ D(x)=3/2,\ [\alpha;\beta]=[5,7]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=1,\ (\alpha;\beta)=(2,3)$
10)	а) – в)	$M(x)=5,\ D(x)=15/8,\ [\alpha;\beta]=[1,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=5,\ (\alpha;\beta)=(4,9)$
11)	а) – в)	$M(x)=3,\ D(x)=7/4,\ [\alpha;\beta]=[3,5]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=4,\ (\alpha;\beta)=(3,7)$
12)	а) – в)	$M(x)=2,\ D(x)=1{,}5,\ [\alpha;\beta]=[2,4]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=3,\ (\alpha;\beta)=(1,4)$
13)	а) – в)	$M(x)=5,\ D(x)=15/2,\ [\alpha;\beta]=[4,6]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=5,\ (\alpha;\beta)=(5,9)$
14)	а) – в)	$M(x)=6,\ D(x)=3/2,\ [\alpha;\beta]=[2,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=1,\ (\alpha;\beta)=(2,3)$
15)	а) – в)	$M(x)=4,\ D(x)=2,\ [\alpha;\beta]=[1,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=3,\ (\alpha;\beta)=(4,7)$
16)	а) – в)	$M(x)=2,\ D(x)=1{,}5,\ [\alpha;\beta]=[5,7]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=2,\ (\alpha;\beta)=(3,5)$
17)	а) – в)	$M(x)=6,\ D(x)=3/2,\ [\alpha;\beta]=[4,6]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=4,\ (\alpha;\beta)=(2,6)$
18)	а) – в)	$M(x)=3,\ D(x)=7/4,\ [\alpha;\beta]=[3,5]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=2,\ (\alpha;\beta)=(1,3)$
19)	а) – в)	$M(x)=5,\ D(x)=7/4,\ [\alpha;\beta]=[5,7]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=1,\ (\alpha;\beta)=(4,5)$
20)	а) – в)	$M(x)=4,\ D(x)=2,\ [\alpha;\beta]=[1,3]$
	г) – д)	$M(x)=\sigma(x)=5,\ (\alpha;\beta)=(5,9)$

7.3 Вопросы для самоконтроля

1) Какую величину называют случайной?

2) Сформулируйте определение дискретной (непрерывной) случайной величины *X*. Приведите примеры.

3) Дайте определение закона распределения случайной величины.

4) Что называют многоугольником распределения случайной величины?

5) Дайте определение ряда распределения случайной величины.

6) Дайте определение математического ожидания $M(X)$ дискретной случайной величины *X*. Перечислите основные свойства математического ожидания.

7) Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины. Перечислите основные свойства дисперсии.

8) Запишите формулы, по которым можно рассчитать дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины.

9) Дайте определение среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины *X*.

10) Дайте определение интегральной функции распределения непрерывной случайной величины *X*.

11) Что называют плотностью распределения непрерывной случайной величины? Перечислите свойства плотности.

12) Дайте определение дифференциальной функции распределения непрерывной случайной величины *X*. Перечислите основные свойства дифференциальной функции распределения.

13) Запишите формулу связи интегральной и дифференциальной функций распределения непрерывной случайной величины.

14) Запишите формулу вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины *X* в отрезок.

15) Запишите формулы вычисления математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ непрерывной случайной величины *X*.

16) Как определяется биномиальное распределение непрерывной случайной величины *X*?

17) Сформулируйте определение случайной величины *X*, имеющей распределение Пуассона.

18) Дайте определение случайной величины *X*, имеющей равномерное распределение.

19) Как выглядит дифференциальная функция равномерно распределенной непрерывной случайной величины *X*?

20) Запишите интегральную функцию равномерно распределенной непрерывной случайной величины *X*.

21) Запишите формулы вычисления математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ равномерно распределенной непрерывной случайной величины *X*.

22) Дайте определение непрерывной случайной величины *X*, имеющей показательное (экспоненциальное) распределение.

23) Изобразите графики функции распределения и плотности распределения непрерывной случайной величины *X*, имеющей показательное распределение.

24) Чему равно математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ непрерывной случайной величины *X*, имеющей показательное распределение?

25) Дайте определение непрерывной случайной величины *X*, имеющей нормальное распределение.

26) Запишите интегральную функцию нормально распределенной непрерывной случайной величины *X*.

27) Как называют график плотности распределения нормально распределенной непрерывной случайной величины *X*?

28) Как вычислить вероятность попадания непрерывной случайной величины *X*, имеющей нормальное распределение в некоторый интервал?

29) Чему равна вероятность того, что отклонение нормально распределенной непрерывной случайной величины по абсолютной величине меньше заданного положительного числа?

30) Сформулируйте правило трех сигм.

31) Запишите теорему и неравенство Чебышева.

32) Какими должны быть случайные величины, чтобы для них выполнялось неравенство Чебышева?

33) Запишите формулировку закона больших чисел.

34) К чему стремится среднее значение величин согласно закону больших чисел?

35) Сформулируйте следствие из теоремы Ляпунова о законе распределения суммы случайных величин.

8 Элементы математической статистики

8.1 Примеры решения типовых задач

Задача 8.1

В результате измерений были получены следующие данные (n = 100):

79	81	69	67	77	72	62	84	72	59
83	71	81	61	66	76	73	76	81	92
81	74	73	68	98	80	72	90	88	84
72	83	73	72	76	76	81	91	73	95
84	71	66	86	89	79	74	69	89	80
87	84	81	86	88	69	76	96	84	85
76	69	69	72	75	73	86	77	83	72
69	75	85	71	78	67	70	66	74	61
89	72	71	75	78	82	91	81	87	79
84	81	78	66	92	95	66	77	82	81

Необходимо:

а) составить вариационный ряд распределения;

б) определить размах варьирования случайной величины, по формуле Стерджеса определить длину интервалов и составить интервальный вариационный ряд;

в) найти выборочную среднюю $\overline{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$;

г) построить гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения вероятностей $F_в^*$.

Решение.

а) Составляем таблицу, в первой строке которой расположены числовые значения в порядке возрастания от $x_{\min} = 59$ до $x_{\max} = 98$; во второй строке – соответствующие частоты. Получаем дискретный вариационный ряд:

x_i	59	61	62	66	67	68	69	70	71	72
n_i	1	2	1	5	2	1	6	1	4	8

x_i	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
n_i	5	3	3	6	3	3	3	2	9	2

x_i	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
n_i	3	6	2	3	2	2	3	1	2	2

x_i	95	96	97	98
n_i	2	1	0	1

б) Объем выборки n=100. Определяем размах варьирования: $k = x_{\max} - x_{\min} = 98 - 59 = 39$.

Для составления интервального вариационного ряда по формуле Стерджеса определим длину интервала: $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}332 \cdot \lg n} = \dfrac{39}{7{,}644} = 5{,}1 \approx 5$.

В качестве начала первого интервала возьмем $a = x_{\min} - \dfrac{h}{2} = 59 - 2{,}5 = 56{,}5$. Всего получаем 9 интервалов. Будем считать, что начало интервала принадлежит ему, а конец – нет. В качестве представителя интервала возьмем его середину.

Определим частоты попадания в каждый интервал значений случайной величины и составим интервальный ряд распределения. Вычисления, необходимые для выполнения пункта г) занесем в таблицу 9.

Таблица 9 – Интервальный ряд распределения

Интервалы $x_i \le x < x_{i+1}$		Середины интервалов $\widetilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	Частоты n_i	Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$	Накопленные частости $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{n_i}{n}, x_{m-1} < x \le x_m$	Плотность относительной частоты $\frac{n_i}{n \cdot h}$
Начало интервала	Конец интервала					
56,5	61,5	59	3	0,03	0,03	0,0060
61,5	66,5	64	6	0,06	0,09	0,0120
66,5	71,5	69	14	0,14	0,23	0,0280
71,5	76,5	74	25	0,25	0,48	0,0500
76,5	81,5	79	20	0,2	0,68	0,0400
81,5	86,5	84	16	0,16	0,84	0,0320
86,5	91,5	89	10	0,1	0,94	0,0200
91,5	96,5	94	5	0,05	0,99	0,0100
96,5	101,5	99	1	0,01	1,00	0,0020
$\sum$			100	1		

в) Находим выборочную среднюю $\overline{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ по формулам:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k=9} \widetilde{x}_i n_i, \qquad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k=9} (\widetilde{x}_i - \overline{x}_в)^2 n_i, \qquad \sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Для удобства все вычисления проведем в таблице 10. Заполняем первые три столбца таблицы и вычисляем $\overline{x}_в = \frac{1}{100} \cdot 7760 = 77{,}6.$

Заполняем следующие три столбца таблицы и вычисляем $D_в = \frac{1}{100} \cdot 7304 = 73{,}04.$

Тогда $\sigma_в = \sqrt{73{,}04} = 8{,}55$.

Таблица 10

Середины интервалов $\widetilde{x}_i$	Частоты n_i	$\widetilde{x}_i \cdot n_i$	$(\widetilde{x}_i - \overline{x}_в)$	$(\widetilde{x}_i - \overline{x}_в)^2$	$(\widetilde{x}_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i$
59	3	177	-18,6	345,96	1037,88
64	6	384	-13,6	184,96	1109,76
69	14	966	-8,6	73,96	1035,44
74	25	1850	-3,6	12,96	324

Продолжение таблицы 10

79	20	1580	1,4	1,96	39,2
84	16	1344	6,4	40,96	655,36
89	10	890	11,4	129,96	1299,6
94	5	470	16,4	268,96	1344,8
99	1	99	21,4	457,96	457,96
$\sum$		7760			7304

г) Построим гистограмму относительных частот. Для этого на каждом частичном интервале построим прямоугольник высотой $\dfrac{n_i}{n \cdot h}$.

Полученная ступенчатая фигура – гистограмма относительных частот (рисунок 11).

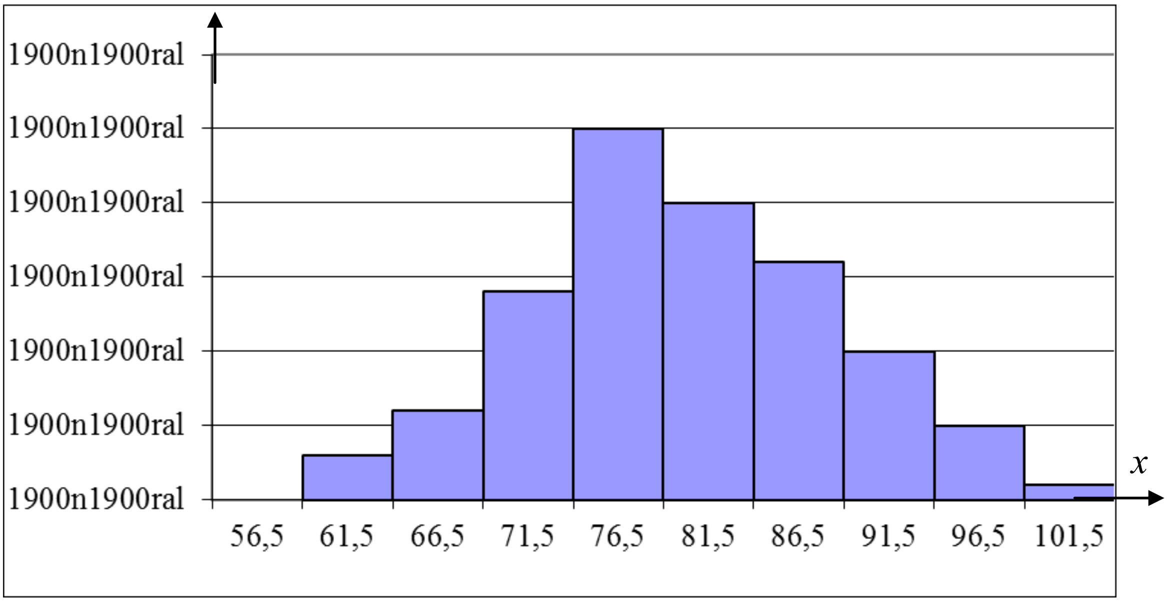


Рисунок 11 – Гистограмма относительных частот

Найдем эмпирическую функцию распределения, используя накопленные частности.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 59 \\ 0{,}03, & 59 < x \le 64 \\ 0{,}09, & 64 < x \le 69 \\ 0{,}23, & 69 < x \le 74 \\ 0.48, & 74 < x \le 79 \\ 0{,}68, & 79 < x \le 84 \\ 0{,}84, & 84 < x \le 89 \\ 0{,}94, & 89 < x \le 94 \\ 0{,}99, & 94 < x \le 99 \\ 1, & x > 99 \end{cases}$$

Построим график этой функции, в качестве представителя интервала мы выбирали его середину (рисунок 12).

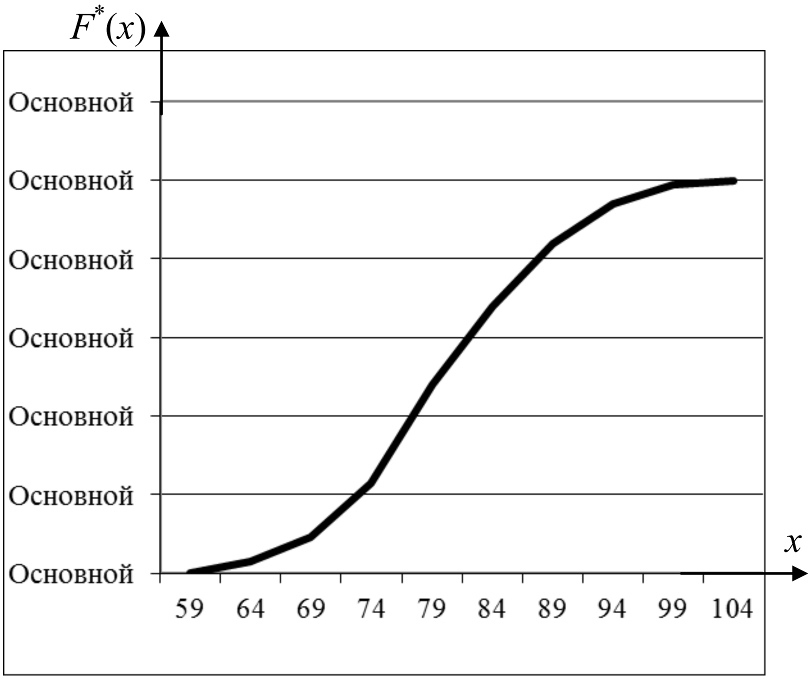


Рисунок 12 – График эмпирической функции распределения

Задача 8.2

Экспериментальным путём получены следующие данные:

X_i	1	2	3	4	5	6
Y_i	6	8	10	9	12	11

Требуется с помощью метода наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$.

Решение.

Для нахождения значений a и b воспользуемся формулами:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Результаты вычислений запишем в таблице 11.

Таблица 11

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	6	1	6
2	2	8	4	16
3	3	10	9	30
4	4	9	16	36
5	5	12	25	60
6	6	11	36	66
$\sum_{i=1}^{n}$	21	56	91	214

Получаем систему: $\begin{cases} 91a + 21b = 214, \\ 21a + 6b = 56. \end{cases}$ Решив систему, получаем $a = \frac{36}{35}$, $b = \frac{86}{15}$ и искомая функция имеет вид: $y = \frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$.

Ответ: $y = \frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$.

8.2 Индивидуальные задания

Задача 8.1

Для заданной выборки из генеральной совокупности случайной величины X (n = 100) необходимо:

а) составить вариационный ряд распределения;

б) определить размах варьирования случайной величины, по формуле Стерджеса определить длину интервалов и составить интервальный вариационный ряд;

в) найти выборочную среднюю $\overline{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$;

г) построить гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения вероятностей $F_в^*$.

1)

47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
47	57	51	45	55	47	48	52	59	46
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53

2)

43	48	45	40	49	39	46	40	47	50
46	42	42	45	45	48	48	42	51	38
40	53	40	37	53	51	49	52	47	47
43	45	46	52	42	51	45	49	53	52
40	43	47	45	42	39	41	36	42	38
50	56	36	38	32	41	49	45	43	41
40	34	38	35	44	42	43	41	44	42
45	39	48	40	34	45	40	40	47	36
34	41	36	33	33	40	43	42	34	43
51	51	44	36	30	44	42	43	43	38

3)

67	75	75	80	65	67	74	62	93	60
76	64	75	82	75	65	68	63	69	72
71	76	80	62	68	59	71	52	64	66
67	78	72	78	77	67	59	64	67	66
83	77	58	87	67	74	55	70	66	76
67	65	79	83	76	79	65	83	90	75
62	65	69	59	67	67	58	74	68	71
61	64	76	71	70	73	70	71	56	79
86	65	82	75	67	82	56	78	74	65
61	68	78	82	66	79	70	78	60	75

4)

53	62	65	58	57	62	57	59	52	65
53	58	62	54	56	56	57	52	59	58
57	57	64	56	58	54	57	60	60	64
56	54	54	53	64	53	63	64	53	61
59	61	62	64	59	57	66	62	69	66
47	56	65	56	57	55	58	57	66	59
58	59	58	57	59	48	54	53	66	64
55	59	49	56	48	55	50	47	61	64
56	53	64	60	57	61	60	63	59	58
55	60	66	56	56	51	58	66	54	55

5)

82	74	74	67	73	79	79	75	70	85
78	81	78	76	78	77	59	72	78	67
81	82	68	85	76	82	78	79	75	75
67	70	74	71	73	72	78	77	70	75
84	86	74	68	73	73	75	79	76	66
75	73	74	81	73	79	67	79	70	69
77	61	69	73	82	71	76	72	71	78
72	73	80	81	77	79	74	74	71	74
73	77	83	76	71	71	67	70	65	69
71	78	82	66	74	76	85	77	77	78

6)

75	67	69	69	60	64	85	85	77	80
84	81	78	79	57	61	75	60	78	68
62	75	69	81	79	63	69	60	77	74
73	76	74	62	63	84	91	82	67	81
54	77	61	78	77	60	66	73	73	55
76	82	77	88	72	83	91	83	68	62
85	75	56	77	76	71	73	66	75	67
69	80	73	84	72	81	85	62	82	84
61	94	78	67	77	78	81	67	71	74
80	73	73	70	72	81	72	86	69	89

7)

64	56	57	67	59	62	60	55	60	56
63	66	56	63	67	63	63	62	64	69
60	61	63	64	57	58	56	60	60	63
60	62	62	56	59	56	63	61	59	64
57	67	59	55	60	64	57	62	66	59
58	65	59	60	67	62	66	62	57	62
64	53	63	58	65	58	66	63	64	61
59	62	67	59	56	62	60	61	60	66
60	55	58	63	59	57	65	61	66	64
62	67	65	61	59	65	62	58	59	63

8)

50	57	52	55	42	40	40	48	55	41
46	49	37	42	45	56	49	38	45	50
44	51	43	47	47	50	56	55	48	45
47	52	51	50	48	39	50	45	48	44
51	37	42	51	38	46	53	48	41	42
48	51	47	53	49	42	38	44	45	47
45	45	49	56	54	48	54	45	53	46
44	54	38	51	53	36	41	41	41	49
48	58	40	53	43	44	46	47	39	42
36	43	42	47	50	40	45	40	56	46

9)

67	46	52	68	48	60	69	65	48	53
62	76	52	73	61	59	60	63	51	54
64	69	65	67	63	52	66	60	60	58
59	65	43	56	58	73	67	51	61	66
55	62	64	75	69	63	72	72	54	62
68	77	68	72	56	51	53	64	53	54
57	71	51	60	70	47	57	52	63	58
69	66	58	70	65	56	48	59	61	58
48	56	57	62	65	57	56	53	74	59
57	68	53	64	52	66	76	75	63	61

10)

50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
47	57	51	45	55	47	48	52	59	46
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45

11)

47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60
57	47	51	45	55	47	48	52	59	46
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45

12)

43	45	46	52	42	51	45	49	53	52
40	53	40	37	53	51	49	52	47	47
46	42	42	45	45	48	48	42	51	38
34	41	36	33	33	40	43	42	34	43
43	48	45	40	49	39	46	40	47	50
45	39	48	40	34	45	40	40	47	36
43	40	47	45	42	39	41	36	42	38
50	56	36	38	32	41	49	45	43	41
40	34	38	35	44	42	43	41	44	42
51	51	44	36	30	44	42	43	43	38

13)

62	65	69	59	67	67	58	74	68	71
67	77	58	87	67	74	55	70	66	76
83	78	72	78	77	67	59	64	67	66
76	64	75	82	75	65	68	63	69	72
71	76	80	62	68	59	71	52	64	66
61	68	78	82	66	79	70	78	60	75
61	64	76	71	70	73	70	71	56	79
67	75	75	80	65	67	74	62	93	60
67	65	79	83	76	79	65	83	90	75
86	65	82	75	67	82	56	78	74	65

14)

56	53	64	60	57	61	60	63	59	58
56	59	58	57	59	48	54	53	66	64
59	61	62	64	59	57	66	62	69	66
55	60	66	56	56	51	58	66	54	55
53	58	62	54	56	56	57	52	59	58
58	54	54	53	64	53	63	64	53	61
55	59	49	56	48	55	50	47	61	64
53	62	65	58	57	62	57	59	52	65
47	56	65	56	57	55	58	57	66	59
57	57	64	56	58	54	57	60	60	64

15)

75	73	74	81	73	79	67	79	70	69
78	81	78	76	78	77	59	72	78	67
84	86	74	68	73	73	75	79	76	66
77	61	69	73	82	71	76	72	71	78
82	74	74	67	73	79	79	75	70	85
71	70	74	71	73	72	78	77	70	75
73	77	83	76	71	71	67	70	65	69
72	73	80	81	77	79	74	74	71	74
67	78	82	66	74	76	85	77	77	78
81	82	68	85	76	82	78	79	75	75

16)

54	77	61	78	77	60	66	73	73	55
84	81	78	79	57	61	75	60	78	68
67	75	69	81	79	63	69	60	77	74
75	62	69	69	60	64	85	85	77	80
69	80	73	84	72	81	85	62	82	84
80	73	73	70	72	81	72	86	69	89
73	76	74	62	63	84	91	82	67	81
85	75	56	77	76	71	73	66	75	67
61	94	78	67	77	78	81	67	71	74
76	82	77	88	72	83	91	83	68	62

17)

59	62	67	59	56	62	60	61	60	66
62	67	65	61	59	65	62	58	59	63
58	65	59	60	67	62	66	62	57	62
62	60	62	56	59	56	63	61	59	64
60	61	63	64	57	58	56	60	60	63
63	66	56	63	67	63	63	62	64	69
57	67	59	55	60	64	57	62	66	59
64	56	57	67	59	62	60	55	60	56
60	55	58	63	59	57	65	61	66	64
64	53	63	58	65	58	66	63	64	61

18)

45	45	49	56	54	48	54	45	53	46
48	58	40	53	43	44	46	47	39	42
47	52	51	50	48	39	50	45	48	44
44	51	43	47	47	50	56	55	48	45
36	51	47	53	49	42	38	44	45	47
48	43	42	47	50	40	45	40	56	46
51	37	42	51	38	46	53	48	41	42
44	54	38	51	53	36	41	41	41	49
50	57	52	55	42	40	40	48	55	41
46	49	37	42	45	56	49	38	45	50

19)

64	69	65	67	63	52	66	60	60	58
66	69	58	70	65	56	48	59	61	58
48	56	57	62	65	57	56	53	74	59
55	62	64	75	69	63	72	72	54	62
62	76	52	73	61	59	60	63	51	54
68	77	68	72	56	51	53	64	53	54
67	46	52	68	48	60	69	65	48	53
57	68	53	64	52	66	76	75	63	61
57	71	51	60	70	47	57	52	63	58
59	65	43	56	58	73	67	51	61	66

20)

51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
57	47	51	45	55	47	48	52	59	46
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63

Задача 8.2

Экспериментальным путём получены данные. Требуется с помощью метода наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$.

1)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

2)

x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

3)

x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

4)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

5)

x_i	0,1	0,3	0,5	1,2	2,1
y_i	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6

6)

x_i	1,1	1,3	1,7	1,9	2,2
y_i	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

7)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

8)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

9)

x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3
y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1

10)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

11)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

12)

x_i	1,3	2,4	3,5	4,1	5,5
y_i	3,4	4,7	5,5	6,5	7,8

13)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

14)

x_i	2,1	3,0	3,2	3,9	4,1
y_i	3,4	8,1	9,2	12,6	13,3

15)

x_i	2,2	3,1	4,5	5,3	5,7
y_i	0,1	-0,4	-1,2	-1,6	-1,8

16)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,9	6,9	5,4	3,4	3,4

17)

x_i	1,0	3,7	5,8	6,1	7,2
y_i	2,8	6,8	10,0	10,4	12,1

18)

x_i	3,2	3,8	4,7	5,1	5,4
y_i	10,5	12,3	14,9	16,4	16,9

19)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

20)

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,2	2,0	4,7	2,7	3,2

8.3 Вопросы для самоконтроля

1) Каковы основные задачи математической статистики?

2) Что называется генеральной и выборочной совокупностями для исследуемой случайной величины?

3) Какие существуют способы отбора объектов?

4) В чем сущность выборочного метода?

5) Какая выборка называется: повторной, бесповторной, репрезентативной?

6) Что означают слова «выборка представительная»?

7) Что называется вариационным рядом?

8) Как получают вариационный ряд распределения?

9) Как строится дискретный вариационный ряд?

10) Как строится интервальный вариационный ряд?

11) Какой отбор называют: простым случайным, типическим, механическим, серийным?

12) Что такое объем выборки? Размах выборки?

13) Что называется вариантой, частотой, относительной частотой?

14) Как получают относительную частоту варианты в выборке?

15) Что называется эмпирической функцией распределения?

16) Что называется: полигоном частот, полигоном относительных частот? Как построить многоугольник распределения относительных частот?

17) Что называется: гистограммой частот, гистограммой относительных частот? Как построить гистограмму распределения плотностей относительных частот?

18) Чем отличаются полигон и гистограмма?

19) Дайте определение эмпирической функции распределения.

20) Сформулируйте свойства эмпирической функции распределения.

21) Дайте определения числовой характеристики выборки «среднее арифметическое». Запишите формулу для вычисления.

22) Дайте определения числовой характеристики выборки «мода». Запишите формулу для вычисления.

23) Дайте определения числовой характеристики выборки «медиана». Запишите формулу для вычисления.

24) Дайте определения числовой характеристики выборки «стандартное отклонение». Запишите формулу для вычисления.

25) Что называют выборочной средней? Как найти выборочную среднюю?

26) Какими свойствами обладает выборочное среднее?

27) Что называют отклонением, выборочной дисперсией? Как найти выборочную дисперсию?

28) Какими свойствами обладает выборочная дисперсия?

29) Чему равна общая дисперсия?

30) Как найти исправленную дисперсию?

31) Построить эмпирическую функцию распределения и ее график для данной выборки:

x_i	6	8	12	15
n_i	2	3	10	5

32) Для данной выборки записать вариационный ряд, разбить размах варьирования на 7 интервалов и построить полигон частот, гистограмму относительных частот.

148	56	113	169	73	138	104	31	90	109
101	24	67	154	172	110	62	59	197	121
181	141	162	103	136	124	41	117	69	153
135	58	199	159	81	39	142	87	179	85
127	116	190	20	111	94	157	119	53	76
156	33	188	58	112	139	86	174	106	77
152	130	43	108	119	129	37	71	96	114
66	132	166	91	44	115	72	26	128	149
46	75	105	137	82	64	186	96	176	97
171	107	125	192	163	200	133	150	178	98

Найти среднее значение выборки, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

9 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

1 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч.1 / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: Мир и Образование, 2012. – 368 с.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч.2 / П.Е. Данко [и др.].– 6-е изд. – Москва: Оникс 21 век, 2007. – 416 с.

3 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. - Москва: Юрайт, 2014. – 479 с.

4 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие для прикладного бакалавриата / В.Е. Гмурман.– 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2016. – 404 с.

5 Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст]: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2019. – 479 с.

6 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа [Текст]: учебник для вузов. Т.1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л.Д. Кудрявцев . – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.

7 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа [Текст]: учебник для вузов. Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ / Л.Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2005. – 424 с.

8 Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие / Г.И. Запорожец. – Санкт-Петербург: Лань, 2014. – 464 с.

9 Единое окно доступа к образовательным ресурсам: федеральный портал [Электронный ресурс] / ФГАУ ГНИИ ИТТ "Информика", 2005-2019. – Режим доступа: http://window.edu.ru/catalog/?p_rubr=2.2.74.12

Список использованных источников

1 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.

2 Гусак, А.А. Теория вероятностей: справ. пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 4-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – 288 с.

3 Зимина, О.В. Высшая математика / О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова. Под ред. А.И. Кириллова. – 3-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 368 с.

4 Мироненко, Е.С. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей вузов/ Е.С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 1998. – 110 с.

5 Казакова, О.Н. Математика: учеб.-метод. пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.

6 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.

7 Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных задач по высшей математике. Ч.1/ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Изд-во «Вышейшая школа», 1990. – 271 с.

10 Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие/ А.С. Шапкин. – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 432 с.

11 Колде, Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / Я.К. Колде. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.

12 Оренбургский государственный университет [Электронный ресурс] / ОГУ: ЦИТ, 1999-2021. – Режим доступа: http://www.osu.ru

Приложение А

Краткие теоретические сведения. Элементарная математика

Дроби

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \;;$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c};$$

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b} \;;$$

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m};$$

$$m : \frac{a}{b} = \frac{m \cdot b}{a} \;;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Степени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} .;$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \;;$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\left(a. > 0,\; b > 0;\quad a, b, m, n \in R\right)$$

Корни

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \;;$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \;;$$

$$\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m} \;;$$

$$\sqrt[n]{a^{n\cdot m}} = a^m \;;$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \;;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a} = a^{\frac{1}{n\cdot k}} \;;$$

$$\left(a \ge 0,\; b \ge 0, c \ge 0;\quad a, b, c \in R; n, k \in N, m \in Z\right)$$

Модуль

$$|a| = \begin{cases} a, & если \;\; a \ge 0 \\ -a, & если \;\; a < 0 \end{cases} \;; \qquad |a| \ge 0;$$

$$|a| = |-a| \;;$$

$$|ab| = |a||b|;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$|a|^2 = a^2 = \left|a^2\right|;$$

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

Логарифмы

$a^{\log_a b} = b;$

$\log_a 1 = 0;$

$\log_a a = 1;$

$\log_a bc = \log_a |b| + \log|c|, \ (bc > 0);$

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log|c|, (bc > 0);$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b;$

$\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b;$

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \cdot \log_a b;$

$\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b;$

$\log_a b = \log_{a^n} b^n;$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a};$

$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c;$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a};$

$\log_{10} b = \lg b;$

$\log_e b = \ln b;$

$(b > 0, a > 0, a \neq 1)$

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2;$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Тригонометрия

Таблица А.1 – Значения основных тригонометрических функций

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Продолжение таблицы А.1

α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\arcsin\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\arccos\alpha$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0		
$\mathrm{arctg}\,\alpha$	0				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\,\alpha$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha};\ \ \sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha};$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta;$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$

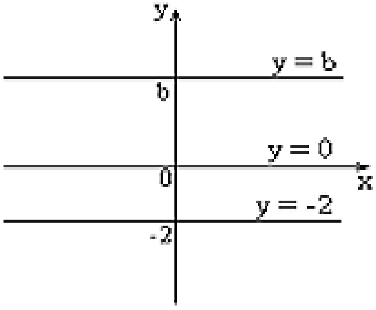
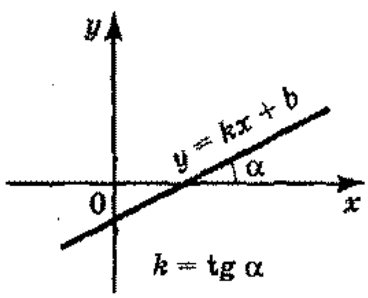
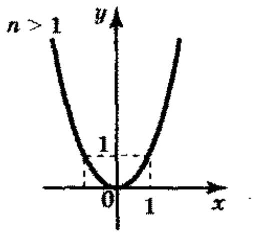
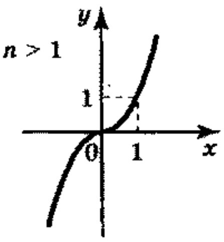
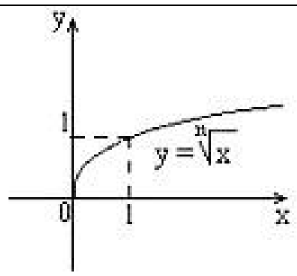
$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta));$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

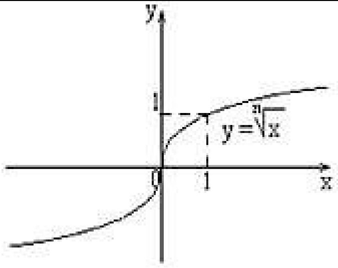
Приложение Б

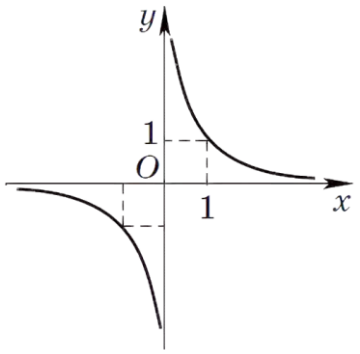
Элементарные функции их свойства и графики

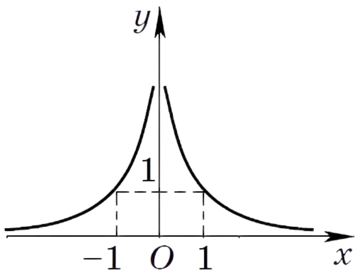
Таблица Б.1 – Основные элементарные функции их свойства и графики

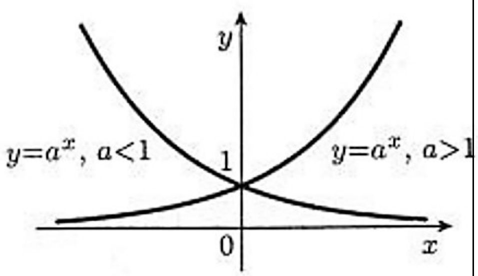
<table>
<tr><th>Функция</th><th>График</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Линейная функция (непериодическая)</td></tr>
<tr><td>Постоянная функция
$y = b$</td><td></td><td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $\{b\}$
3. Четность: четная
4. Монотонность: постоянная</td></tr>
<tr><td>$y = kx + b$,
$k \neq 0$</td><td></td><td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$
3. Четность: общего вида
4. Монотонность:
- возрастает на $(-\infty; +\infty)$, если $k > 0$;
- убывает на $(-\infty; +\infty)$, если $k < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Степенная функция (непериодическая)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y = x^n$,
$n \in \mathbb{N}$</td><td>
n– четное число</td><td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $[0; +\infty)$
3. Четность: четная
4. Монотонность:
- возрастает на $(0; +\infty)$;
- убывает на $(-\infty; 0]$</td></tr>
<tr><td>
n– нечетное число</td><td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$
3. Четность: нечетная
4. Монотонность: возрастает на $(-\infty; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y = \sqrt[n]{x}$,
$n \in \mathbb{N}, n > 1$</td><td>
n– четное число</td><td>1. Область определения: $[0; +\infty)$
2. Область значений: $[0; +\infty)$
3. Четность: общего вида
4. Монотонность: возрастает на $[0; +\infty)$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы Б.1

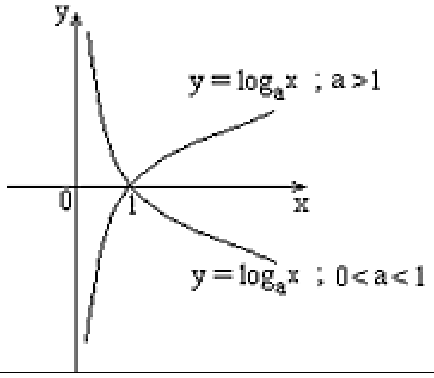
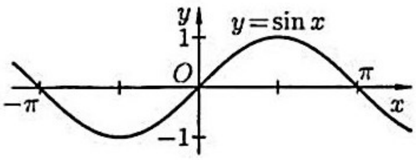
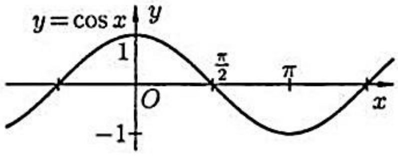
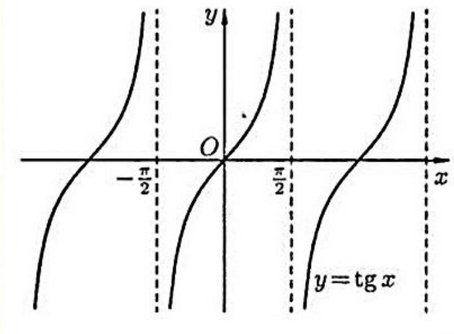
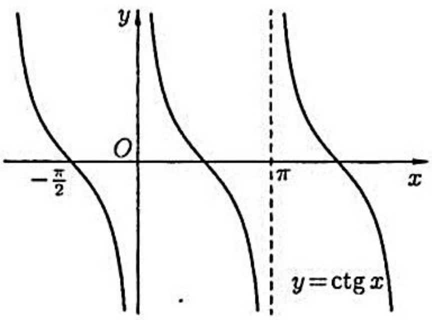
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

n – нечетное число</td>
<td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$
3. Четность: нечетная
4. Монотонность: возрастает на $(-\infty; +\infty)$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Обратная пропорциональность
$y = \frac{k}{x^n}$,
$k \neq 0, x \neq 0$
$n \in \mathbb{N}, n > 1$</td>
<td>

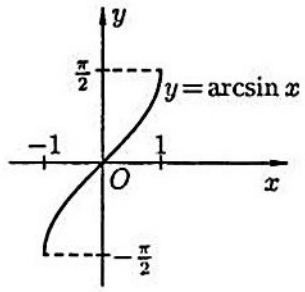
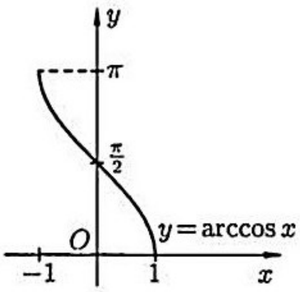
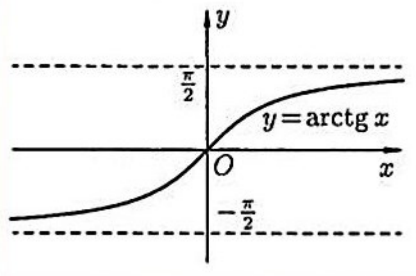
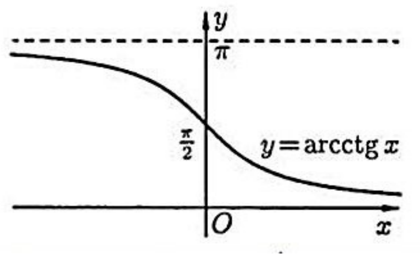
n – нечетное число , $k > 0$</td>
<td>1. Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. Область значений: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
3. Четность: нечетная
4. Монотонность:
- убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, если $k > 0$;
- возрастает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, если $k < 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>

n – четное число , $k > 0$</td>
<td>1. Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. Область значений: $[0; +\infty)$
3. Четность: четная
4. Монотонность: возрастает на $(-\infty; 0)$; убывает на $(0; +\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">3. Показательная функция (непериодическая)</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = a^x$
$(a > 0, a \neq 1)$</td>
<td>
</td>
<td>1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $(0; +\infty)$
3. Четность: четная
4. Монотонность:
- возрастает на $(-\infty; +\infty)$, если $a > 1$;
- убывает на $(-\infty; +\infty)$, если $0 < a < 1$.</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы Б.1

4. Логарифмическая функция (непериодическая)		
$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$		1. Область определения: $(0; +\infty)$ 2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$ 3. Четность: общего вида 4. Монотонность: - возрастает на $(0; +\infty)$, если $a > 1$; - убывает на $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$.
5. Тригонометрические функции (периодические)		
$y = \sin x$ Период равен 2π		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$ 2. Область значений: $[-1; 1]$ 3. Четность: нечетная 4. Монотонность: - возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; - убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$
$y = \cos x$ Период равен 2π		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$ 2. Область значений: $[-1; 1]$ 3. Четность: четная 4. Монотонность: - возрастает на $(-\pi + 2\pi n; 0 + 2\pi n)$; - убывает на $(0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$.
$y = \operatorname{tg} x$ Период равен π		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)/\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$ 2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$ 3. Четность: нечетная 4. Монотонность: возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.
$y = \operatorname{ctg} x$ Период равен π		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)/\{\pi n\}$ 2. Область значений: $(-\infty; +\infty)$ 3. Четность: нечетная 4. Монотонность: убывает на $(-\pi + \pi n; 0 + \pi n)$.

Продолжение таблицы Б.1

6. Обратные тригонометрические функции (непериодические)		
$y = \arcsin x$		1. Область определения: $[-1; 1]$ 2. Область значений: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ 3. Четность: нечетная 4. Монотонность: возрастает на $[-1; 1]$.
$y = \arccos x$		1. Область определения: $[-1; 1]$ 2. Область значений: $[0; \pi]$ 3. Четность: общего вида 4. Монотонность: убывает на $[-1; 1]$.
$y = \operatorname{arctg} x$		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$ 2. Область значений: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ 3. Четность: нечетная 4. Монотонность: возрастает на $(-\infty; +\infty)$.
$y = \operatorname{arcctg} x$		1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$ 2. Область значений: $[0; \pi]$ 3. Четность: общего вида 4. Монотонность: убывает на $(-\infty; +\infty)$.

Приложение В

Краткие теоретические сведения. Высшая математика

Вычисление некоторых пределов

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, Q(x) = $b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ – многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

Получаем: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n<m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m \\ \infty, & при \quad n>m \end{cases}.$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $(C \neq 0)$;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Таблица эквивалентности бесконечно малых

При $\alpha \to 0$ будут эквивалентными:

$\sin\alpha$ и α	$\arcsin\alpha$ и α	$1-\cos\alpha$ и $\frac{\alpha^2}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$ и α	$\mathrm{arctg}\alpha$ и α	
$\ln(1+\alpha)$ и α	$e^\alpha - 1$ и α	$a^\alpha - 1$ и $\alpha\ln a$

Таблица производных основных элементарных функций

$(C)' = 0$

$(ax+b)' = a$

$(x^m)' = mx^{m-1}$

$(x\ )' = 1$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x}\ )' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

1. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
2. $(UV)' = U'V + UV'$
3. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$
4. $y'_x = y'_u\, u'_x$, если y=y(u), u=u(x)

Правило Лопиталя

Если функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке *a*, *g′(x)* отлична от нуля вблизи *a* и *f(a) = g(a) = 0*, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \mathrm{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{a + x^2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Правила и методы интегрирования

$$\int a\, f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$\int u dv = uv - \int v du$ – метод интегрирования по частям

$\int f(x) dx = \int f(x(t))\, x'_t dt$, если $y = y(x)$, $x = x(t)$ – метод подстановки

Таблица В.1 – Виды подстановок

Подынтегральная функция	Подстановка
$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно синуса	$\cos x = t$
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно косинуса	$\sin x = t$
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ – четная относительно синуса и косинуса	$\mathrm{tg} x = t$ $(\mathrm{ctg} x = t)$, если есть знаменатель. Если нет знаменателя, то применяются формулы понижения степени.
$R(tgx)$	$\mathrm{tg} x = t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$
Любые тригонометрические функции	$tg\frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ – универсальная тригонометрическая подстановка
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \cdot \sin t \quad (a \cdot \cos t)$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\sin t} \quad \left(\frac{a}{\cos t}\right)$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \cdot tgt \quad (a \cdot ctgt)$
$x^m \cdot (a + bx^n)^p$	$p-$ *целое, то* $x = t^N$, *где* $N-$ *общий знаменатель для* m *и* n; $\frac{m+1}{n}-$ *целое, то* $a + bx^n = t^N$, *где* $N-$ *знаменатель дроби* p; $\frac{m+1}{n} + p-$ *целое, то* $\frac{a}{x^n} + b = t^N$, *где* N *– знаменатель лроби* p.
$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$	$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^N$, *где* $N-$ *общий знаменатель дробей* $m, p, \ldots$
$R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)$	$x = t^k$, *где* $k-$ *общий знаменатель дробей* $\alpha, \beta, \ldots$

Таблица В.2 – Вид частного линейного неоднородного дифференциального уравнения в зависимости от вида правой части

Вид правой части f(x)	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$R_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r R_m(x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} R_m(x)$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x} R_m(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$	Число βi не является корнем характеристического уравнения	$R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x$
	Число βi является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
$e^{\alpha x} \cdot \begin{bmatrix} P_m(x)\cos\beta x + \\ + Q_s(x)\sin\beta x \end{bmatrix}$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot \begin{pmatrix} R_l(x)\cos\beta x + \\ + T_l(x)\sin\beta x \end{pmatrix}$
	Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности *r*	$x^r e^{\alpha x} \cdot \begin{pmatrix} R_l(x)\cos\beta x + \\ + T_l(x)\sin\beta x \end{pmatrix}$

Здесь $P_m(x)$ *и* $Q_s(x)$ – известные многочлены степеней *m* и *s*.

$R_l(x)$ *и* $T_l(x)$ – неизвестные многочлены, определяемые подстановкой частного решения в дифференциальное уравнение, $l = \max\{m, s\}$.

Разложение элементарных функций в степенной ряд Тейлора

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1, +1];$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in (-1, +1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$x \in (-1, +1)$

Приложение Г

Таблица Г.1 – Значения функций Лапласа $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040'	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3116
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	91	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643

Продолжение таблицы Г.1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
31	3802	1217	71	3101	2611	и	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	ЗОИ	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794 .	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58'	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981

Продолжение таблицы Г.1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
	0957	4545	38	0235	4913			

Приложение Д

Таблица Д.1 – Значения функции Пуассона $P_{\lambda}(m)=\dfrac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}$

m / λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m / λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000