Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Н.А. Гамова, А.Н. Гирина, И.П. Томина

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 30.04.01 Экономика, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 Техносферная безопасность

Оренбург
2022

УДК 517.73 (075.8)
ББК 22.161.5 я73
Г18

Рецензент – доцент, доктор технических наук Ю.Г. Полкунов

Г18 **Гамова, Н.А.**
Комплексные числа и функции комплексного переменного : учебное пособие / Н.А. Гамова, А.Н. Гирина, И.П. Томина, – Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2022. – 124 с.
ISBN 978-5-7410-2751-6

Пособие содержит изложение теоретических положений по теме «Комплексные числа и функции комплексного переменного». Вводятся основные понятия этой теории: даются определения комплексных чисел, функций комплексного переменного, определяются операции дифференцирования и интегрирования функции комплексного переменного, вводятся определения вычетов. Пособие содержит материал, относящийся к одному из основных понятий теории функций комплексного переменного – конформные отображения. Предлагаются вопросы для самопроверки, контрольные задания и решения «нулевого варианта».

В пособии представлено приложение комплексных чисел и функций комплексного переменного к задачам электротехники и экономики.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 30.04.01 Экономика, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 Техносферная безопасность.

УДК 517.73 (075.8)
ББК 22.161.5 я73

ISBN 978-5-7410-2751-6

Содержание

Введение

Понятие комплексного числа возникло на рубеже XVI-XVII в.в. Первое упоминание о так называемых «мнимых величинах» имеется в трудах Дж.Кардано в 1545 г. Однако сам Кардано не придавал этому событию серьезного значения. Позднее в 1572 г. Р.Бембели при рассмотрении кубических уравнений столкнулся с необходимостью изучения комплексных чисел. Были установлены основные правила действия с новыми числами, которые оставались загадочными, по-существу, придуманными для удобства рассуждений.

Такое отношение к комплексным числам сохранялось практически в течение 200 лет. И только во второй половине XVIII века в трудах А.Муавра, Р.Коутса и, особенно, Л.Эйлера и Ж.Даламбера комплексные числа получили широкое призвание и сомнений в их необходимости для математики не осталось. Стало складываться представление о комплексных числах, как о более общей системе, замкнутой относительно любых алгебраических и трансцендентных действий.

Величину $\sqrt{-1}$ – («мнимую единицу») предложил обозначить буквой i Л.Эйлер, а термин «комплексное число» ввел Л.Карно. Объединил эти два понятия К.Ф. Гаусс.

Поворотным пунктом в представлениях о комплексных числах и действиях с ними явилась их геометрическая интерпретация, данная в 1799 г. К.Весселем. Каждому комплексному числу на плоскости ставится в соответствие – вектор, в аналитическом выражении – упорядоченные пары вещественных чисел. Эта пара несет информацию о величине и направлении, т.е. об удалении соответствующей этой паре точки на плоскости с декартовой системой координат. Это позволило толковать умножение на комплексное число как изменение не только величины множимого, но и его направления, т.е. поворота.

Такое представление о действиях с комплексными числами не противоречило традиционным правилам арифметики вещественных чисел (направлению положительных чисел соответствует аргумент равный нулю, а отрицательных – «π»). Мнимая единица соответствовала вектору единичной длины, направленному в положительную сторону оси ординат. Введение комплексных чисел и развитие теории функций комплексного переменного имело чрезвычайно важное значение для решения многих чисто математических и прикладных задач.

В XIX веке теория функций комплексного переменного получила существенное развитие, особенно в трудах О.Коши, Г.Римана и К.Вейерштрасса.

1 Построение системы комплексных чисел

1.1 Необходимость введения комплексных чисел

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Известно, что не всякое квадратное уравнение можно решить, оставаясь в области R действительных чисел. Простейшее неразрешимое в $\mathbb{R}$ квадратное уравнение имеет вид: $x^2+1=0$.

Данное уравнение можно решить, но его корень не является действительным числом, а представляет собой какое-то новое число. Итак, мы вводим новое число i, которое будет обладать следующим свойством: $i^2=-1$. Теперь, помимо известных действительных чисел, у нас появляется новое число i.

Рассмотрим операции умножения и сложения, используя действительные числа $x, y \in R$ и число i. Итак, введение нового числа i влечет за собой необходимость рассматривать числа вида yi и $x+yi$, которые будем называть комплексными. В комплексном числе слагаемое x называется действительной частью, а слагаемое yi – мнимой частью. Множество всех комплексных чисел обозначается C, основные арифметические операции – сложение и умножение над числами не выводят нас за пределы множества C. Именно таким путем и вводились первоначально комплексные числа. Разумеется, этот способ построения системы комплексных чисел порождает много вопросов: что же все-таки представляет собой новое число i? Можно ли распространять на него обычные законы арифметики? Законно ли рассматривать выражения, содержащие вместе действительные числа и число i? и т.д. Без ответа на эти вопросы вся теория комплексных чисел остается как бы плодом чистого воображения. Иначе говоря, возникает задача строгого и полного построения теории комплексных чисел.

Строгое обоснование теории комплексных чисел важно еще и потому, что эти числа крайне необходимы в целом ряде приложений математики. В настоящее время теория функций комплексного переменного представляет собой действенный инструмент применения математических методов в физике, механике, электротехнике, экономике и т.д.

1.2 Основные определения

Рассмотрим задание комплексного числа в виде $x + iy$, с помощью упорядоченной пары x, y действительных чисел.

Определение. Пара действительных чисел $(x; y)$, записанных в определенном порядке называется **комплексным числом** z и обозначается:

$$z = x + iy, \tag{1}$$

Данное представление комплексного числа называется алгебраической формой записи комплексного числа z, x называется действительной, iy – мнимой частями комплексного числа z, i называется «мнимой единицей».

Рассмотрим геометрическое представление комплексного числа z.

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy; ось Ox называется действительной осью, Oy – мнимой, плоскость Oxy – комплексной плоскостью (z). Комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку $M(x;\, y)$ плоскости (z), либо вектор $\overline{OM}$ – и точка, и вектор служат геометрическим изображением комплексного числа $z = z(x;\, y)$, $z = \overline{OM}$ (рисунок 1).

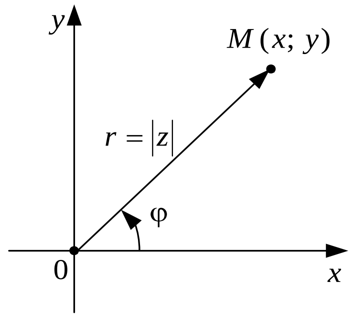

Рисунок 1

Введем понятия модуля и аргумента комплексных чисел. Модулем комплексного числа z называется модуль вектора $\overline{OM}$, он вычисляется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Аргументом комплексного числа z: $\varphi = Arg\ z$ называется угол φ, между действительной осью Ox и вектором $\overline{OM}$. Значение φ изменяется в промежутке $-\pi \le \varphi \le \pi$ и называется главным значением аргумента, его обозначают: $\arg z$.

$$-\pi \le \arg z \le \pi. \tag{3}$$

$$\arg z = \arg z + 2\pi n,\ (n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots). \tag{3'}$$

С помощью следующей формулы покажем нахождение главного значения аргумента комплексного числа:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, \quad y \ge 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \quad \text{если } x < 0, \quad y < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Определение. Выражение вида:

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \qquad (5)$$

называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

Определение. Выражение вида:

$$z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi n)} \qquad (5')$$

называется **показательной формой** комплексного числа z.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными, если равны соответственно их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В тригонометрической форме равенство формулируется следующим образом: $z_1 = z_2$, если модули их равны: $|z_1| = |z_2|$, а аргументы связаны соотношением

$$\arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi n \qquad (6)$$

(следует обратить внимание на то, что здесь сравниваются не элементы множества, а сами бесконечные множества).

Определение. Два комплексных числа $x + iy$ и $x - iy$ называются **комплексно-сопряженными** числами и обозначаются: z и $\bar{z}$ (рисунок 2).

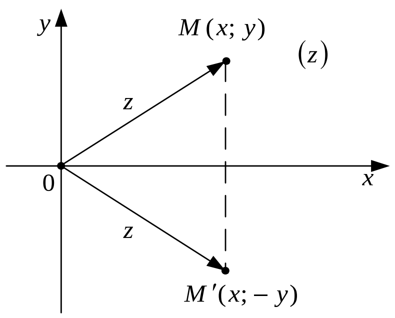

Рисунок 2

1.3 Действия над комплексными числами

Рассмотрим операции сложения и вычитания над комплексными числами. Геометрически эти действия рассматриваются как соответствующие действия над векторами (рисунок 3).

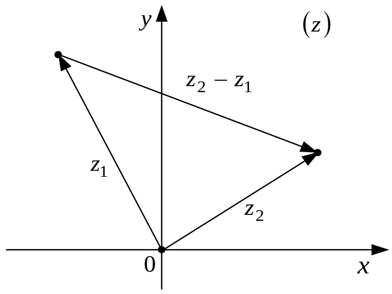

Рисунок 3

Чтобы выполнить сложение и вычитание двух комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, нужно сложить отдельно действительные и мнимые части. Получившиеся суммы будут соответственно действительной и мнимой частями суммы чисел и, следовательно, выполняются по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{7}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) находим

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{9}$$

Под произведением комплексных чисел z_1 и z_2 (обозначается $z_1 \cdot z_2$) понимается комплексное число z, равное

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{10}$$

Деление комплексных чисел z_1 и z_2 определяется через действие умножения и может быть найдено по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{11}$$

Используя формулу (10) найдем произведение комплексно-сопряженных чисел $z\overline{z_1} = |z|^2$, тогда деление удобно выполнять по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}. \qquad (11')$$

Таким образом, формула (10) «раскрывает смысл» «мнимой единицы» $i : i^2 = -1$. Умножение комплексных чисел производится по обычным правилам алгебры с заменой i^2 на -1.

Введенные таким образом операции сложения и умножения комплексных чисел подчиняются известным пяти законам арифметики:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммунитативность сложения;

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ – ассоциативность сложения;

3) $z_1z_2 = z_2z_1$ – коммунитативность умножения;

4) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ – ассоциативность умножения;

5) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

По определению суммы и ее свойств имеем:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$
$$\overline{(z_1 + z_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_2) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Пример 2. Найти действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$.

Запишем левую часть уравнения в алгебраической форме: $(4x + 2xi) + (5y - 3yi) = 13 + i$. По определению равенства комплексных чисел получим систему уравнений $4x + 5y = 13$, $2x - 3y = 1$, решением которой является пара чисел $x = 2$, $y = 1$.

Пример 3. Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} (3 + 4i)z_1 + 2i \cdot z_2 = 3 - i; \\ (6 - 4i)z_1 + 3z_2 = 10 - 7i. \end{cases}$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3+4i & 2i \\ 6-4i & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, решение системы будет единственным, найдем его по формулам Крамера. Имеем

$$\Delta_{z_1} = \begin{vmatrix} 3-i & 2i \\ 10-7i & 3 \end{vmatrix} = -5-23i;\ \Delta_{z_2} = \begin{vmatrix} 3+4i & 3-i \\ 6-4i & 10-7i \end{vmatrix} = 44+37i;$$

и, следовательно, $z_1 = \dfrac{\Delta_{z_1}}{\Delta} = -5-23i; z_2 = \dfrac{\Delta_{z_2}}{\Delta} = 44+37i.$

Пример 4. Для числа $z = -\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8}$:

а) построить геометрическое изображение;

б) вычислить модуль и главное значение аргумента;

в) представить число в тригонометрической форме;

г) представить число в показательной форме.

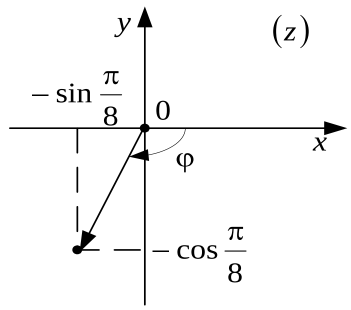

Рисунок 4

На рисунке 4 число представлено геометрически. Найдем модуль комплексного числа z. По формуле (2) имеем $|z| = \sqrt{\sin^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{\pi}{8}} = 1.$

Так как точка z расположена в третьем квадранте $(x < 0, y < 0)$, главное значение аргумента числа z следует вычислить по третьей строчке формулы (4):

$$\arg z = -\pi + arctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + arctg\left[tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= -\pi + arctg\left(tg\frac{3\pi}{8}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}.$$

Таким образом, $\arg z = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi n \;\; (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Ответ: тригонометрическая форма: $z = \cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ и показательная форма: $z = e^{-\frac{5\pi}{8}i}$ [2].

1.4 Возведение комплексного числа в целую степень и извлечение корня из комплексных чисел

Найдем произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{12}$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Рассмотрим деление комплексных чисел, представленных тригонометрической формой:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{13}$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{14}$$

Следствие формулы (14) (формула Муавра)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{15}$$

Рассмотрим извлечение корня n- ой степени из комплексного числа z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \tag{16}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ – корень n- ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений. Значения $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример 1. Возвести в степень, следующее комплексное число: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}$.

Решение:

Представим число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

По формуле (4) находим:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}\left(\cos\frac{59\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{59\cdot 2\pi}{3}\right)=2^{59}\left[\cos\frac{(60-1)\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{(60-1)\cdot 2\pi}{3}\right]=$$

$$=2^{59}\left[\cos\left(40\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(40\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2^{59}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Так как здесь $-\pi<-\dfrac{2\pi}{3}<\pi$, то полученное число представлено в тригонометрической форме. В алгебраической форме: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}\left(1-i\sqrt{3}\right)$, в показательной: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

Пример 2. Извлечь корень: $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$.

Представим число $-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме: $-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

По формуле (16) находим:

$$z=\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

Придадим последовательно k значения 0, 1, 2 и 3 и найдем корни:

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right);\qquad z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right);$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i\sin\frac{29\pi}{24}\right); \quad z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right).$$

Изобразим эти числа на комплексной плоскости (z). Построим окружность радиуса $R = \sqrt[4]{2}$. На окружности отметим точку, соответствующую $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$. Разбивая далее окружность на четыре равные части, изобразим остальные точки (рисунок 5). Заметим, что $\frac{5\pi}{24}$ радиан соответствует угол равный 37°30').

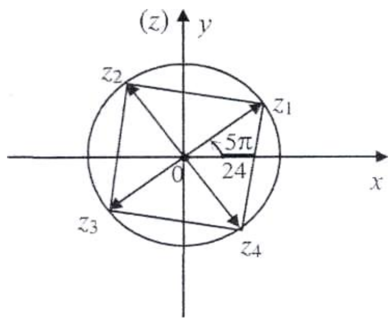

Рисунок 5

Пример 3. Найти корни уравнения: $z^2 - (2+i)z + 7i - 1 = 0$.

Имеем $z = \frac{2+i}{2} + \sqrt{\frac{4 - 1 + 4i + 4 - 28i}{4}} = \frac{2+i}{2} + \frac{\sqrt{7-24i}}{2}$.

Значение $\sqrt{7-24i}$ определим алгебраическим путем. Положим: $\sqrt{7-24i} = x + iy$ (x и y – действительные числа). Возводя в квадрат и используя определение равенства комплексных чисел, получаем систему уравнений: $7 + 24i = x^2 - y^2 + 2xyi$, $x^2 - y^2 = 7$, $xy = -12$. Исключая y, приходим к уравнению $x^2 - \frac{144}{x^2} - 7 = 0$, или $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$. Определим корни уравнения:

$$x^2 = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49+576}{4}} = \frac{7+\sqrt{625}}{2} = 16.$$

Знак минус перед корнем не пишется, так как x – действительное число. Далее находим: $x_1 = 4, x_2 = -4$ и $y_1 = 3, y_2 = -3$.

Нашли решения: $\sqrt{7-4i}=4-3i$ и $\sqrt{7-4i}=4+3i$ и, следовательно,

$$z_1=\frac{2+i}{2}+\frac{4-3i}{2}=\frac{6-2i}{3}=3-i\,;\; z_2=\frac{2+i}{2}+\frac{-4+3i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i\,.$$

1.5 Множества точек на комплексной плоскости. Задание геометрических мест

Приведем некоторые примеры использования геометрического смысла модуля комплексного числа, его аргумента, введенных алгебраических операций.

Пример 1. Найти множество точек на плоскости (z) и представить геометрически для следующего условия: $\operatorname{Im} z^2>2$?

Решение: $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$ и, значит, $\operatorname{Im} z^2=2xy$. По условию $2xy>2$ или $xy>1$. Данное неравенство представляет собой множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой (рисунок 6).

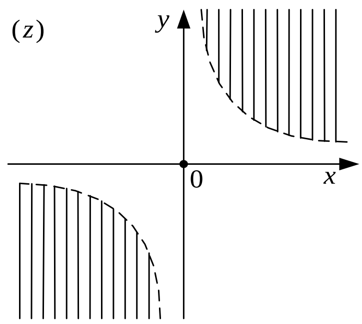

Рисунок 6

Пример 2. Найти множество точек и изобразить на плоскости (z) для следующего условия: $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg(z+1-i)\le\dfrac{3\pi}{4}$?

Комплексное число $z+1-i=z-(-1+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$ и концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$ и он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$ (рисунок 7).

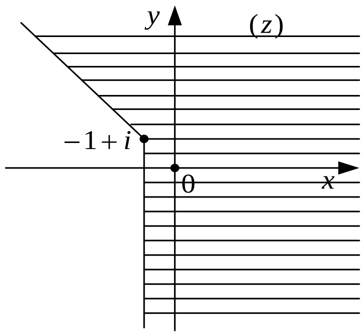

Рисунок 7

Пример 3. Какая кривая задается уравнением $|z+c|+|z-c|=2a$, где c и a – действительные положительные числа, причем $a>c$.

Модуль $|z+c|$ есть расстояние между точками z и $-c$, модуль $|z-c|$ – расстояние между точками z и c. По условию сумма расстояний от точки z до двух данных точек $-c$ и c есть величина постоянная. Значит, точка z лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$ (рисунок 8).

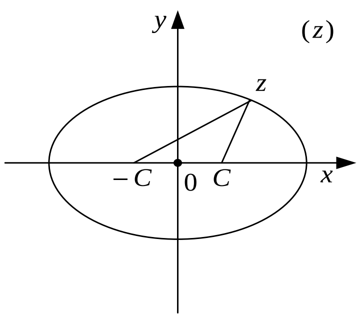

Рисунок 8

Пример 4. Какая кривая определяется уравнением $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$?

Имеем $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{\bar z}+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z+\bar z}{2z\bar z}=\frac{x}{x^2+y^2}$. По условию $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$ или $x^2+y^2-4x=0$ – это окружность $(x-2)^2+y^2=4$ (рисунок 9).

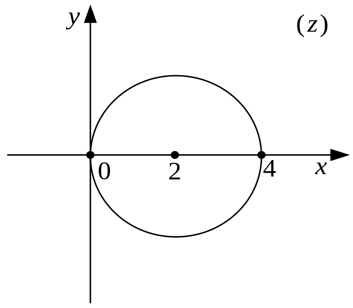

Рисунок 9

Пример 5. Написать в комплексной форме уравнение прямой $Ax+By+C=0$.

Подставляя x и y по формуле (9) в уравнение прямой, получаем $A(\bar z+z)+Bi(\bar z-z)+2C=0$, или $(A+iB)\bar z+(A-iB)z+2c=0$. Обозначив $A+iB=a, 2C=b$, получим уравнение: $\bar a z+a\bar z+b=0$ – уравнение прямой в комплексной форме.

1.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1+z_2}=\bar z_1-\bar z_2$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar z_1\cdot\bar z_2$.

2. Найти:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{2}{1-3i}$; в) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$; г) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

3. Найти действительные решения уравнений:

а) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$; б) $\frac{1}{z-i}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$.

4. Найти решения следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i; \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+i)z_1 + iz_2 = -3 + 4i; \\ -iz_1 + (1-i)z_2 = 6 + i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 0; \\ z_1 + (3-i)z_2 = 3 - 3i; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (3-i)z_1 + (4-2i)z_2 = 2 + 6i; \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 5 + 4i. \end{cases}$

5. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

а) -2; б) $2i$; в) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; г) $4 - 3i$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

6. Вычислить:

а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^9$; б) $(-1+i)^{24}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$; г) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

д) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Найти все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3} \cdot i}$; в) $\sqrt{-3 - i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{3 + 4i}$; д) $\sqrt[3]{-1}$;

е) $\sqrt[3]{-1+i}$; ж) $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$; з) $\sqrt[4]{-16}$; и) $\sqrt[5]{-1+3i}$; к) $\sqrt[8]{1}$.

8. Решить квадратные уравнения:

а) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$; б) $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$;

в) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$.

9. Найти множества точек на плоскости (z), определяемые заданными условиями:

а) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1$; б) $1 \le |z + 2 + i| \le 2$; в) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$; г) $0 < \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$;

д) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; е) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2}$; ж) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2}$.

10. Какие линии определяются следующими уравнениями

а) $\operatorname{Re}\bar{z}^2 = 1$;   б) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1$;   в) $2z\bar{z} + (2+i)z + (2i-)\bar{z} = 2$;

г) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$;   д) $z = \bar{z}$?

11. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий:

а) координатных осей Ox и Oy;   б) прямой $y = x$;

в) гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$;   г) окружности $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

1.7 Вопросы для самоконтроля

1. Какое число называется комплексным?
2. Какая плоскость называется комплексной?
3. Мнимой единицей называется…..
4. Ввести операции сложения и умножения комплексных чисел.
5. Модулем комплексного числа называется…..
6. Аргумент комплексного числа это…..
7. Условие равенства комплексных чисел.
8. Какие числа называются комплексно-сопряженными?
9. Представьте комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах..
10. Запишите формулу Муавра.
11. Что такое действительная часть комплексного числа?
12. Что такое мнимая часть комплексного числа?
13. Как найти сумму двух комплексных числа?
14. Как найти произведение двух комплексных числа?
15. Укажите переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической?
16. Укажите переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной?
17. Формула Эйлера.

18. Укажите переход от показательной формы комплексного числа к алгебраической?

19. Правило сложения двух комплексных числа в показательной форме.

20. Правило сложения двух комплексных чисел в тригонометрической форме.

21. Правило извлечения корня к -ой степени из комплексного числа.

22. Найти значения корня 4-ой степени из комплексного числа

23. Укажите особенности расположения на плоскости значения корня n-ой степени из комплексного числа?

2 Функции комплексного переменного

2.1 Основные понятия функции комплексного переменного

Определение 1. Множество называется **открытым** если оно состоит лишь из внутренних точек.

Определение 2. **Внутренней точкой** множества называется точка z,если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 3. ε**-окрестностью** точки a называется открытый круг радиуса ε с центром в точке a:

$$|z-a|<\varepsilon. \tag{17}$$

Определение 4. Множество называется **связным,** если любые две его точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение 5. Открытое связное множество называется **областью** в комплексной плоскости (z).

Определение 6. Если все точки области принадлежат некоторому кругу радиуса R с центром в начале координат, то область называется **ограниченной,** иначе она называется **неограниченной.**

Определение 7. **Границей** Γ области D называется совокупность точек, не принадлежащих области D, любая окрестность которых содержит точки, принадлежащие области D.

Определение 8. Область D вместе с границей Γ называется **замкнутой** областью; обозначается это $\overline{D} = D + \Gamma$.

Определение 9. **Односвязной** областью называется ограниченная область, если ее граница состоит из одной связной линии; **многосвязной** областью, если ее граница состоит из нескольких связных линий. **Связной** называется линия, из любой точки которой можно перейти по ней в любую другую ее точку [1].

Определение 10. Функция $w = f(z)$ определена, если $\forall z \in D$ поставлено в соответствие (по некоторому закону соответствия) одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w.

Пусть $w = u + iv$. Тогда

$$w = u(x;\, y) + iv(x;\, y) = f(z) \tag{18}$$

Имеет ли график функция комплексного переменного (18)? Отметим, что данная функция не имеет графика. Данная функция задается с помощью двух действительных функций переменных x и y:

$$u = u(x;\, y) \text{ и } v = v(x;\, y). \tag{18'}$$

При этом функция $u = u(x;\, y)$ называется **действительной частью** функции $w = f(z)$ и обозначается $\operatorname{Re} f(z) = u(x;\, y)$, функция $v = v(x;\, y)$ называется **мнимой частью** функции $w = f(z)$ и обозначается $\operatorname{Im} f(z) = v(x;\, y)$.

Функция комплексного переменного осуществляет отображение точек комплексной плоскости (z) на соответствующие точки комплексной плоскости (w) (формула (18')), (геометрическая интерпретация функции комплексного переменного).

Пусть на плоскости (z) задана кривая $F(x;\, y) = 0$. Уравнение образа

$\Phi(u;v)=0$ этой кривой в плоскости (w) при отображении с помощью функции $w=f(z)=u+iv$ следующее:

$$\begin{cases} u=u(x,y); \\ v=v(x,y); \\ F(x,y)=0. \end{cases} \tag{19}$$

Если кривая задана параметрически: $x=x(t),\ y=y(t)$ или $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, то параметрические уравнения ее образа при отображении $w=f(z)=u+iv$ следующие:

$$\begin{aligned} u&=u[x(t),y(t)]=u(t); \\ v&=v[x(t),y(t)]=v(t). \end{aligned} \tag{19′}$$

Пример 1. Рассмотрим множества точек: а) $|z+i|<3$; б) $1<|z|<2$; в) $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$; г) $|2z|<\left|1+z^2\right|$ и установим какие из них являются областями?

Используем определениями 1–9, а) множество $|z+i|<3$ – открытый круг с центром в точке $-i$ радиуса 3, б) множество $1<|z|<2$ – открытое круговое кольцо с центром в начале координат, в) $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ – открытый угол (рисунок 7) – являются областями. Построив множество г) $\left[x^2+(y-1)^2-2\right]\cdot\left[x^2+(y+1)^2-2\right]>0$ (рисунок 10), убеждаемся, что оно не является областью (не выполняется для него условие связности).

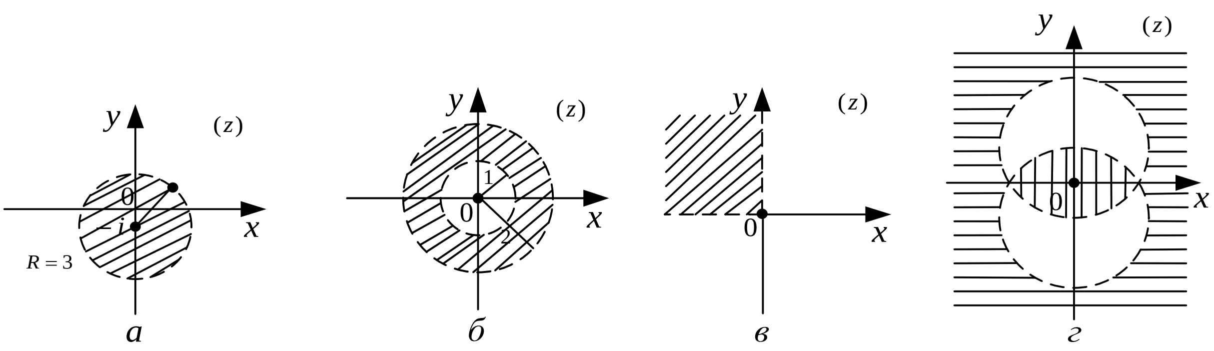

Рисунок 10

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $w=z^3-i\bar{z}$.

Имеем $w = u + iv = (x+iy)^3 - i(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x)$; отсюда $u = x^3 - 3xy^2 - y$; $v = 3x^2y - x - y^3$.

Пример 3. В какую кривую отображается единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $w = z^2$?

Решение. $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$,исключаем x и y из уравнений $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$; $x^2 + y^2 = 1$, получим $u^2 + v^2 = 1$. Следовательно окружность $|z| = 1$ преобразуется в $w = z^2$ в окружность $u^2 + v^2 = 1$ в плоскости (w). Имеем $Argw = 2Argz + 2k\pi$, то, когда точка z описывает полную окружность $|z| = 1$, ее образ (точка w) описывает две полные окружности $|w| = 1$.

2.2 Основные элементарные функции комплексного переменного

Введем понятия основных элементарных функций комплексного переменного.

1. Показательная функция e^z:

Если показатель степени является комплексным числом, то определение показательной функции теряет смысл. Показательная функция $W = e^z$ с комплексным показателем определяется с помощью равенства:

$$e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y). \tag{20}$$

или:

$$e^z = \lim_{z \to \infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \ |z| < \infty \tag{20'}$$

Все три определения равносильны.

Свойства показательной функции:

1) Область определения $D(e^z) = C$.

2) $e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y,\ u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$,

$$\left|e^z\right| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y} = \sqrt{e^{2x}} = e^x,$$

$$Arg e^z = y + 2\pi k,\ k \in Z\ .$$

3) Область значений $\left|e^z\right| = e^x \neq 0$;

4) $\forall z_1, z_2 \in C : e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

5) $e^{z+2\pi k i} = e^z$; основной период $T = 2\pi i$.

6) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ – формула Эйлера.

2. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, |z| < \infty, \tag{21}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, |z| < \infty. \tag{22}$$

Так как $e^{iz} = \cos z + i\sin z, e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$ (23)

то определения $\sin z$ и $\cos z$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{24}$$

Свойства тригонометрических функций:

1) Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определены для $\forall z \in C$

2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

3) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$,

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$.

Замечание 1. Имеют место и формулы приведения, $\sin z$ и $\cos z$ кратного аргумента, формулы понижения степени и т.д.

Замечание 2. $|\sin z|$ и $|\cos z|$ могут быть больше 1.

4) Функции являются периодическими с периодом $T = 2\pi$.

3. Тригонометрические функции $tg\, z$ и $ctg\, z$ определяются равенствами

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \ ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{25}$$

4. Гиперболические функции $sh z, ch z, th z, cth z$ определяются равенствами:

$$sh z = z + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \tag{26}$$

$$ch z = 1 + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \tag{27}$$

$$th z = \frac{shz}{chz}, \ cth z = \frac{chz}{shz}. \tag{28}$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{aligned} \cos iz = chz; \quad & \sin iz = ishz; \\ chiz = \cos z; \quad & shiz = i \sin z. \end{aligned} \tag{29}$$

Справедливы также соотношения

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{30}$$

$$e^z = chz + shz \quad e^{-z} = chz - shz \tag{31}$$

5. Логарифмическая функция $w = Ln z \ \ (z \neq 0)$,определяется как функция, обратная показательной $z = e^w$.

$$Ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \tag{32}$$

алгебраическая форма [3].

Свойства логарифмической функции:

1) Логарифмическая функция определена во всем множестве C кроме нуля.

2) $\forall z_1, z_2 \in C : Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln z_1 + Ln z_2$.

3) $\forall z_1, z_2 \in C : Ln \frac{z_1}{z_2} = Ln z_1 - Ln z_2$.

4) $\forall z \in C : Ln z^n = n \cdot \ln z + i2\pi k, n \in N, k \in Z$.

Замечание. 1) Пусть z – положительное действительное число, значит,

$Lnz = \ln|z| + i\cdot(\arg z + 2\pi k) = \ln z + 2\pi k,\ k \in Z$.

Логарифмическая функция принимает бесконечное множество значений, одно из которых при $k = 0$ действительно, т.е. главное значение логарифма совпадает с логарифмической функцией действительного аргумента.

2) z – отрицательное действительное число, значит,
$Lnz = \ln(-z) + i\cdot(\pi + 2\pi k) = \ln(-z) + i\pi(1 + 2k),\ k \in Z$.

Заметим, что ни при каких $k \in Z$ содержимое скобки в нуль не обращается, значит, логарифм отрицательного действительного числа имеет бесконечное множество значений, ни одно из которых не является действительным.

6. Обратные тригонометрические функции определяются как решения соответствующих уравнений (например, функция $w = Arc\sin z$ есть обратная по отношению к $\sin z$, т.е. это решение уравнения $z = \sin w$ и пр.) Все эти функции бесконечнозначны и выражаются через логарифмические функции:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \tag{33}$$

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{34}$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2}Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{35}$$

$$Arcctg\, z = \frac{i}{2}Ln\frac{z - i}{z + i}. \tag{36}$$

7. Обратные гиперболические функции вычисляются по формулам:

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \tag{37}$$

$$Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{38}$$

$$Arth\, z = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}, \tag{39}$$

$$Arcth\, z = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{z - 1}. \tag{40}$$

8. Общая степенная функция $w = z^a$ определяется по формуле

$$z^a = e^{aLnz} \quad (a,\ z \text{ – комплексные числа}). \tag{41}$$

Пусть $a = \alpha + i\beta$. Степенная функция бесконечнозначна, если $\beta \neq 0$ или α – число иррациональное.

9. Общая показательная функция $w = a^z$. По определению

$$a^z = e^{z \cdot Ln\, a}. \tag{42}$$

Из представления $a^z = e^{zLn\, a} e^{i2\pi kz}$ видно, что эта функция представляет собой совокупность отдельных функций, отличающихся друг от друга множителем $e^{i2\pi kz}$, $k \in Z$.

2.3 Предел и непрерывность

Определение 1. Число $A \neq \infty$ называется **пределом** функции $f(z)$ при $z \to z_0$ (обозначается $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon. \tag{43}$$

Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$

$$|f(z)| > E. \tag{43$'$}$$

Замечание. Существование предела по любому фиксированному пути $(z \to z_0)$ для функции еще не гарантирует существование предела при $z \to z_0$.

Теорема 1. Для того чтобы число $A = \alpha + i\beta$ было пределом функции $w = f(z) = u(x;u) + iv(x;y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) = \alpha$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x;y) = \beta$.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке z_0 конечный предел A необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |A|$;

2) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} \arg f(z) = \arg A \, (A \neq 0)$.

Из теоремы 1 следует, что известные теоремы о пределах функции действительной переменной, связанные с арифметическими операциями, остаются справедливыми для функции комплексного переменного, т.е. если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$, то

1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \left(\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0\right)$.

Пример. Показать, что для функции $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ $\bar{\exists} \lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

При r стремящемся к 0 по любому лучу $z = re^{i}$ имеет место следующее выражение $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \dfrac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi$. Таким образом, эти пределы различны для различных направлений – они заполняют сплошь отрезок $[-1;1]$ и, следовательно, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует.

Определение 2. Функция называется **непрерывной в точке** z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, т.е. любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Определение 3. $z - z_0 = \Delta z$ – называется **приращением аргумента,** а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ называется **приращением функции.**

Определение 4. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δz в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δw, т.е. $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0$.

Можно показать, что два последних определения непрерывности функции комплексного переменного эквивалентны.

Определение 5. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется **непрерывной в этой области.**

Приведем свойства непрерывных функций комплексного переменного:

1) Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то в ней она достигает как своего наибольшего, так и наименьшего значения, т.е. $\exists\, z_1, z_2 \in D, \forall z \in D : |f(z_1)| \le |f(z)| \le |f(z_2)|$;

2) Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она ограничена на этой области, т.е. $\exists\, M > 0, \forall z \in D : |f(z)| \le M$.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить множества и выяснить, какие из них являются областями, какие из них ограниченные области:

а) $\operatorname{Re} z = \alpha$; б) $\operatorname{Im} z > \delta$; в) $r \le |z - z_0| < R$.

2. Для указанных функций найти действительную и мнимую части:

а) $w = \bar{z} - iz^2$, б) $w = z^2 + i$; в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{1}{z}$; д) $\dfrac{\bar{z}}{z}$.

3. Найти образы данных точек при указанных отображениях:

а) $z_0 = -i, w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i, w = (z-1)^2$; в) $z_0 = 1, w = \dfrac{1}{z - i}$;

г) $z_0 = 2 + 3i, w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

4. Выделить действительную и мнимую части у следующих функций:

а) $w = e^{-z}$; б) $w = \sin z$; в) $w = ch(z - i)$; г) $w = tg\, z$.

5. Вычислить:

а) $Ln(-1)$; б) $Ln(1 - i)$; в) $Ln(-i)$.

6. Записать в алгебраической форме:

а) $\sin \pi i$;   б) $\cos \pi i$;   в) $tg \frac{\pi i}{2}$;   г) $ctg \pi i$.

6. Вычислить:

а) $Arc\sin i$;   б) $Arctg\, 2i$;   в) $Arc\cos i$.

7. Найти:

а) 3^{2+i};   б) $(1-i)^{3-3i}$.

8. Решить уравнения:

а) $e^z + i = 0$;   б) $4\cos z + 5 = 0$;   в) $\sin z = \pi i$.

9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$;   б) $\lim\limits_{z \to -i} \arg z$;   в) $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + 1}$.

10. Доказать непрерывность на всей комплексной плоскости следующих функций:

а) $w = \bar{z}$;   б) $w = |z| \operatorname{Re} z$;   в) $w = e^{\bar{z}}$;   г) $w = \cos|z|$.

2.5 Вопросы для самоконтроля

1. Какое множество называется открытым?
2. Какая точка называется внутренней точкой множества?
3. Какое множество называется связным?
4. Что называется областью в комплексной плоскости z?
5. Какая область называется ограниченной?
6. Что называется границей Γ области D?
7. Какая область называется замкнутой?
8. Какая область называется односвязной?
9. Какая область называется многосвязной?
10. Какая линия называется связной?

11. Что называется пределом функции комплексного переменного в точке z?

12. Дайте определение изолированной точки.

13. Какая функция называется непрерывной в точке области комплексных чисел?

3 Аналитические функции. Условия Коши-Римана

3.1 Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность функции

Понятие комплексной производной лежит в основе теории комплексных функций. Определение комплексной производной аналогично определению производной вещественной функции. Однако, несмотря на поверхностное сходство, комплексная дифференциация-это глубоко иная теория.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** $z \in D$, если существует предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\ \ (z+\Delta z\in D). \tag{44}$$

Этот предел называется **производной** функции $f(z)$ в точке z.

Для производной функции комплексного переменного вводятся обозначения $f'(z),\ \dfrac{df(z)}{dz}$.

Определение 2. Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется **дифференцируемой в этой точке.**

Несмотря на то, что формула производной идентична по форме производной вещественной функции, следует отметить, что f'(z_0) следует из двумерного предела. Таким образом, чтобы f’'(z_0) могла существовать, соответствующий предел должен существовать независимо от направления, из которого z приближается к предельной точке z_0. Для функции одной вещественной переменной у нас есть только два направления, то есть, $x < x_0$ и $x > x_0$.

Замечательной особенностью комплексного дифференцирования является то, что существование одной комплексной производной автоматически подразумевает существование бесконечно многих! Это в отличие от случая функции вещественной переменной g(x), в котором g'(x) может существовать без существования g''(x).

Теорема 1. Если функция дифференцируема в точке, то она в этой точке непрерывна.

Теорема, обратная данной, неверна, так как можно привести примеры функций, непрерывных в точке, но не являющихся в ней дифференцируемыми.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы приращение функции Δw можно было представить в виде: $\Delta w = A \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$, где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\Delta z} = 0$.

Теорема 3. Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы функции $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись условия Коши-Римана (иногда их называют условиями Даламбера-Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{45}$$

Определение 3. Функция $w = f(z)$ называется **аналитической (регулярной)** в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Определение 4. Функция $w = f(z)$ называется **аналитической в области** D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Очевидно, что функция, аналитическая в точке, будет и дифференцируема в ней. Обратное может не иметь места.

Определение 5. Функция называется **аналитической в области** D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Из определения следует, что функция аналитична в области D, если она дифференцируема в этой области.

Замечание. Так как все определения аналогичны определениям в случае функции действительной переменной, значит для функции комплексной переменной справедливы обычные правила дифференцирования и теоремы о производной сложной и обратной функций.

Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (46)$$

Пример 1. Показать, что функция $f(z)=e^{2z}$ аналитична, и найти $f'(z)$. Получаем $e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, т.е. $u(x,y)=e^{2x}\cos 2y$, $v(x,y)=e^{2x}\sin 2y$. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y$ и, следовательно, условия (45) выполняются во всей плоскости; по первой из формул (46) имеем $\left(e^{2z}\right)'=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\sin 2y=2e^{2z}$.

Пример 2. Является ли функция $w=z\cdot\bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Получаем $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$, так что $u=x^2+y^2$, $v\equiv 0$. Условия Коши-Римана имеют вид: $2x=0$, $2y=0$ и выполняются только в точке $(0;0)$. Следовательно, функция $w=z\cdot\bar{z}$ дифференцируема только в точке $(0;0)$ и нигде не аналитична. По определению (44) запишем: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\Delta\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta\bar{z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x-i\Delta y)=0$. Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю.

3.2 Гармонические функции. Сопряженно-гармонические функции. Восстановление аналитической функции

Определение 1. Функция $u = u(x; y)$ называется **гармонической** в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и в этой области лапласиан $\Delta u = 0$, т.е. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$.

Определение 2. Две гармонические функции $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, удовлетворяющие условию (45), называются **сопряженно-гармоническими** функциями.

Теорема. Для того чтобы функции $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$ были соответственно действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = u + iv$, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряженно-гармоническими функциями.

Пользуясь условиями Коши-Римана, аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить, если известна ее действительная $u = u(x; y)$ или мнимая часть $v = v(x; y)$.

Пример 1. При каких условиях трехчлен $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является гармонической функцией?

Находим: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$. Лапласиан $\Delta u = 0$ (т.е. $2a + 2c = 0$), если $a + c = 0$ при любом b.

Пример 2. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$ при дополнительном условии $f(0) = 0$.

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из условий Коши-Римана (45) находим производные $\frac{\partial v}{\partial x} = -4y$ (1); $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$ (2). Решив первое из этих уравнений, находим: $u = \int 4y dx = -4xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем u по y и подставляем в (2): $-4x + \varphi'(y) = -4x - 1$, откуда $\varphi'(y) = -1$ и $\varphi(y) = -y + C$. Следовательно, $u = -4xy - y + C$ и окончательно получим:

$$w = u + iv = -4xy - y + c + i(2x^2 - 2y^2 + x) =$$

$$= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C.$$

Определим C: $f(0) = 2i \cdot 0 + i \cdot 0 + C$ и $C = 0$; таким образом, $w = 2iz^2 + iz$ [4].

3.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то $k = |f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости (z) на плоскость (w). Аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости (z), проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$.

Пример. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Имеем $w'(z) = 2z$, так что $w'(z_0) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$. Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $w'(z_0)$ к тригонометрической, получим: $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

т.е. $k = 4$. угол поворота $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3.4 Конформные отображения

Определение 1. Отображение $w = f(z)$ называется **конформным** в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0 по всем направлениям, выходящим из точки z_0.

Теорема 1. Если функция $w = f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение является конформным в точке z_0.

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется **однолистной** в области D, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ для любых $z_1 \neq z_2$ из D.

Пример 1. Функция $w = z^4$ не является однолистной на всей комплексной плоскости, так как для $z_1 = -2$ и $z_2 = 2$ $(z_1 \neq z_2)$ выполняется условие $f(z_1) = f(z_2)$.

Определение 3. Отображение $w = f(z)$ называется **конформным в области** D, если оно конформно в каждой точке области D и функция $w = f(z)$ является аналитической и однолистной в области D.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть функция $w = f(z)$ – однолистная и аналитическая в области D и $f'(z_0) \neq 0$ в каждой точке области D. Тогда отображение $w = f(z)$ будет конформным в области D.

Доказательство: в силу условия $f'(z_0) \neq 0$ при $z \in D$ и теоремы 1. отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, является конформным в каждой точке области D.

Следовательно, отображение $w = f(z)$ будет конформным в области D, так как выполняются все условия определения 3.

Таким образом, мы доказали, что условия аналитичности, однолистность и неравенство нулю производной функции является достаточными условиями конформности отображения, осуществляемого этой функцией.

3.5 Основная задача и общие теоремы теории конформных отображений

В настоящем параграфе приведем без доказательства ряд теорем, которые имеют большое значение при решении задач на конформные отображения.

Основной задачей теории конформных отображений является следующая задача.

Даны две области D и D^* комплексной плоскости; требуется найти функцию осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую. Эта задача не всегда имеет решение. Например, невозможно взаимно-однозначное конформное отображение; многосвязной области на односвязную.

Таким образом, возникают вопросы об условиях существования и однозначного определения функции, конформно отображающей область D на область D^*.

Б.Риманом в 1851 году была доказана следующая теорема, которую называют основной теоремой теории конформных отображений.

Теорема 3. Пусть D и D^* – две произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки. Тогда существует и только одно конформное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* такое, что

$$f(z_0) = w_0,\ \arg f'(z_0) = \alpha, \qquad (*)$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in D^*$, α – заданное действительное число (рисунок 11).

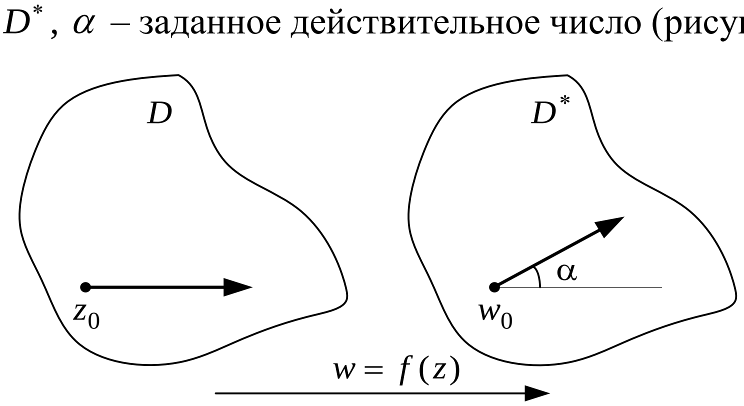

Рисунок 11

Условия (*) называются условиями нормировки конформного отображения. Вместо (*) можно задать другие условия. Например, можно задать $f(z_0)=w_0$, $f(z_1)=w_1$, где z_0, w_0 – внутренние, z_1, w_1 – граничные точки областей D и D^* соответственно, или $f(z_k)=w_k$, $(k=1,2,3)$, где z_1, z_2, z_3 – различные граничные точки области D, w_1, w_2, w_3 – различные граничные точки области D^*, причем точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 следуют в порядке положительного обхода границ ∂D и ∂D^* областей D и D^* соответственно.

Теорема Римана устанавливает факт существования функции, конформно отображающей область D на область D^*, но не дает удобного способа построения ее. Кроме того, эта функция выражается через элементарные функции лишь для простых областей. Поэтому изучение частных случаев отображений с помощью комбинаций элементарных функций имеет большое практическое значение.

Приведем без доказательства теорему о соответствии границ.

Теорема 4. Пусть G и D – односвязные области, причем их границы $\partial G = L$ и $\partial D = \Gamma$ – простые замкнутые кусочно-гладкие кривые.

Если функция $w = f(z)$ конформно отображает область G на область D, то

1) функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание области G, т.е. можно доопределить $f(z)$ на L так, что получится непрерывная в $\overline{G}$ функция;

2) эта функция $w = f(z)$ отображает однозначно кривую L на кривую Γ с сохранением ориентации.

Для практики важен следующий в известном смысле обратный теореме 4. принцип соответствия границ.

Теорема 5. Пусть в односвязной области D, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\overline{D}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ плоскости (w). Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на внутреннюю область G, ограниченную контуром Γ.

Из принципа соответствия границ следует, что для того, чтобы определить область G, на которую аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает данную область D, достаточно найти контур, на который эта функция отображает границу области D и установить направление обхода этого контура [5].

Пример 1. Найти область G, на которую функция $w = 5z + i$ конформно отображает область D, ограниченную контуром γ: $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Решение: пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Тогда $w = 5z + i = 5(x + iy) = 5x + i(5y + 1)$. Отсюда $u = 5x$, $v = 5y + 1$, т.е. $x = \frac{u}{5}$, $y = \frac{v-1}{5}$.

Контур γ отображается в контур Γ.

$$\left(\frac{u}{5}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{5}\right)^2 - 4\frac{u}{5} = 0$$

или

$$(u-10)^2 + (v-1)^2 = 100,$$

т.е. окружность радиуса 10 с центром в точке $M(10,1)$.

Легко убедиться, задав контуры параметрическими уравнениями, что положительное направление обхода контура γ соответствует положительному направлению обхода контура Γ.

Тогда на основании принципа соответствия границ, заключаем, что функция $w = 5z + i$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ на внутренность окружности

$(u-10)^2+(v-1)^2=100$ [1].

Пример 2. Найти функцию, которая отображает конформно угол $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ плоскости (z) на угол плоскости (w) (рисунок 12).

Решение: поставленную задачу решает комплексная функция $w=z^4$, так как она произвольный луч Oz, $\arg z=\varphi$ отображает на луч O_1w, $\arg w=4\varphi$. при изменении φ от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$ луч Oz описывает открытый угол D, а его образ луч O_1w описывает открытый угол D_1 – верхнюю полуплоскость. Указанное отображение $w=z^4$ будет однолистным в D, аналитичным и $f'(z)=4z^3$, если $z\in D$ (точка $0\notin D$).

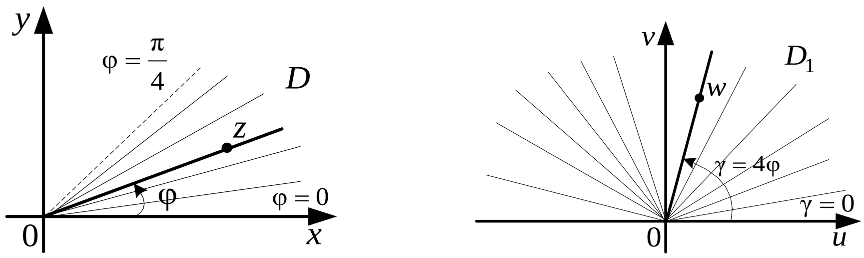

Рисунок 12

3.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке.

а) $w=z^2\bar{z}$; б) $w=ze^z$; в) $w=|z|\bar{z}$; г) $w=\sin 3z-i$; д) $w=|z|\operatorname{Im} z$.

2. Найти области аналитичности функций и их производные:

а) $f(z)=\dfrac{z\cos z}{1+z^2}$; б) $f(z)=cth\, z$.

3. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u=x^2+2x-y^2$; б) $u=2e^x\cos y$; в) $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$; г) $u=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4. Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

а) $v = x^3 - 3xy$, $0 \le |z| < +\infty$, $f(i) = i$; б) $v = 2e^x \sin y$, $0 \le |z| < +\infty$;

в) $v = x^2 - y^2 - 1$, $0 \le |z| < +\infty$, $f(-1) = 0$; г) $u = 2xy + 3$, $0 \le |z| < +\infty$,

д) $v = arctg\dfrac{y}{x}$, $0 < |z| < +\infty$, $f(1) = 0$; е) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < +\infty$, $f(1) = 0$.

5. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображении $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; б) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$; в) $w = \sin z$, $z_0 = 0$.

3.7 Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
2. Как найти производную функции комплексного переменного?
3. Сформулируйте условия существования производной функции комплексного переменного?
4. Какую роль в теории ФКП играют условия Коши-Римана?
5. Какие функции называются аналитическими?
6. Что характеризует модуль производной функции комплексного переменного в точке z_0?
7. Что характеризует аргумент производной функции комплексного переменного в точке z_0?
8. Какие функции называются гармоническими?
9. Какое отображение называется конформным в точке z_0?
10. Какая функция называется однолистной в области D?
11. Какое отображение называется конформным в области D?

4 Интегрирование функции комплексного переменного

4.1 Интеграл по кривой и его вычисление

Определение 1. **Кривой** в комплексной плоскости называется образ отрезка $[a;b]$ при непрерывном отображении $z=\gamma(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, тогда $\gamma(\alpha)$ называется **началом,** а $\gamma(\beta)$ называется **концом** кривой.

Определение 2. Кривая называется **гладкой,** если функция $\gamma(t)$ имеет во всех точках отрезка $[a;b]$ непрерывные производные, отличные от нуля.

Определение 3. Кривая называется **кусочно-гладкой,** если она может быть разбита на конечное число частей, каждая из которых представляет собой гладкую кривую.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D; L – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D.

По определению

$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\sup|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)\Delta z_k. \tag{47}$$

Теорема (достаточное условие существования интеграла). Пусть однозначная функция $w=f(z)$ непрерывна в области D, тогда интеграл от этой функции вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ, содержащейся в D, существует.

Заметим, что функции u и v, будучи действительной и мнимой частями непрерывной функции, сами являются непрерывными функциями двух действительных переменных. Кривая γ – кусочно-гладкая, значит выполняются все условия теоремы существования обычного криволинейного интеграла, т.е. если $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy \tag{48}$$

– вычисление интеграла (47) сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов второго рода. Заметим, что интеграл (47) зависит, вообще говоря, от пути интегрирования L. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (или в комплексной форме $f(t) = x(t) + iy(t)$), начальная и конечная точки кривой L соответствуют значениям параметра $t = \alpha, t = \beta$.

Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt. \tag{49}$$

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D, z_0, z_1 \in D$, $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для $f(z)$ ($\Phi'(z) = f(z)$), то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \tag{50}$$

Справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = [f(z)g(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz, \tag{51}$$

где $f(z)$, $g(z)$ – аналитические функции в односвязной области D, z_0, z_1 – произвольные точки этой области [6].

Замена переменных в интегралах от функции комплексного переменного аналогична случаю функции действительного переменного. Пусть аналитическая функция $z = g(w)$ отображает взаимно однозначно контур L в плоскости (z) на контур L' в плоскости (w). Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_{L'} f[g(w)]g'(w)dw. \tag{52}$$

Если функция является многозначной, то для вычисления интеграла указывается, какая именно однозначная ветвь ее берется при этом. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования L замкнут, то начальной точкой z_0 пути интегрирования считается та, в которой задано значение подынтегральной функции.

Так как определение интеграла от функции комплексного переменного почти не отличается от определения криволинейного интеграла от функции действительного переменного, то и свойства криволинейного интеграла от функции действительного переменного можно перенести на случай комплексного переменного.

Пример 1. Вычислить $I=\int\limits_L (1+i-2\bar{z})dz$ по кривой $L: y=x^2$, соединяющей точки $z_0=0, z_1=1$.

Для параболы $y=x^2$ имеем $dy=2x\,dx$, $0\le x\le 1$. По формуле (48)

$$I=\int\limits_0^1 [1-2x-(1+2x^2)2x]dx+i\int\limits_0^1 [1+2x+(1-2x^2)2x]dx=-2+i\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_L (z+\bar{z})dz$, где L – дуга окружности $|z|=1$, $\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{3\pi}{2}$.

Положим $z(t)=e^{it}$, $\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{3\pi}{2}$. Тогда $z'(t)=ie^{it}$, и по формуле (49) находим:

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(e^{it}+e^{-it})ie^{it}dt=i\left(\frac{1}{2i}e^{2it}+t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}=\pi i.$$

Пример 3. Вычислить $I=\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz$.

Так как подынтегральная функция $f(z)=3z^2+2z$ аналитична всюду, то по (50) найдем: $I=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=7+19i$.

Пример 4. Вычислить $I=\int\limits_0^i z\cos z dz$.

Функции $f(z)=z$ и $g(z)=\sin z$ аналитичны всюду. По формуле (51) получим:

$$I=\int_0^i z(\sin z)'dz=(z\sin z)\Big|_0^i-\int_0^i \sin z dz=i\sin i+\cos z\Big|_0^i=sh1+ch1-1=e^{-1}-1.$$

Пример 5. Вычислить $I=\int_L \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, $L=\left\{z:|z|=1,-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной: $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{3}}$, $k=0,1,2$; $\varphi=\arg z$. Условию $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет та однозначная ветвь этой функции, для которой $k=1$. Действительно, при $k=1$ (и так как $\arg 1=0$) $\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{0+2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Полагая теперь $z(t)e^{it}$, $-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$ на кривой L, находим $\sqrt[3]{z}=e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{3}}$, $z'(\varphi)=ie^{i\varphi}$ и, следовательно,

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ie^{i\varphi}}{e^{i(\varphi+2\pi)/3}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}id\varphi=\frac{3}{2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)=\frac{9}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

4.2 Теорема Коши. Интегральные формулы Коши

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то

$$\oint_\gamma f(z)dz=0. \qquad (53')$$

Если, помимо того, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}=\Gamma+D$, то

$$\oint_\Gamma f(z)dz=0 \qquad (53)$$

– теорема Коши для односвязной области [7].

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области D, то (контур $\Gamma+\gamma_1+\ldots+\gamma_k$ обходится в положительном направлении)

$$\oint\limits_{\Gamma+\sum\limits_{m=1}^{k}\gamma_m} f(z)dz=0 \tag{54}$$

– теорема Коши для многосвязной области. Дадим другую формулировку этой теоремы:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{m=1}^{k}\oint\limits_{\gamma_m} f(z)dz \tag{55}$$

– интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (все контуры проходятся в одном и том же направлении).

Если $f(z)$ аналитична в области D, $z\in D$ и $\gamma\subset D$ – контур, охватывающий точку z, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\,(\zeta\in\gamma). \tag{56}$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{57}$$

Пример 1. Вычислить $I=\int\limits_{|z|=2}\dfrac{chiz\cdot dz}{z^2+4z+3}$.

Внутри окружности $|z|=2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_0=-1$. Для удобства применения формулы (56) перепишем интеграл в виде $I=\int\limits_{|z|=2}\dfrac{chiz\cdot dz}{(z+1)(z+3)}=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\frac{chiz}{z+3}}{z-(-1)}dz$. Здесь $z_0=-1$ и $f(z)=\dfrac{chiz}{z+3}$ аналитична в круге $|z|\le 2$. Тогда $I=[2\pi i\cdot f(-1)]=2\pi i\dfrac{ch(-i)}{2}=\pi i\cos 1$ [2].

Пример 2. Вычислить $I=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{e^{z}}{z^{3}(z-1)}dz$: по а) контуру $\Gamma:\left|z-2\right|=\dfrac{1}{2}$;

б) $\Gamma:\left|z-2\right|=3$.

а) в круге $\Gamma:\left|z-2\right|=\dfrac{1}{2}$ функция $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z^{3}(z-1)}$ аналитична; следовательно, по формуле (53) $I=0$;

б) так как внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1=0$ и $z_2=1$, то для того, чтобы стало возможным применить формулы (56) и (57), рассмотрим многосвязную область D (рисунок 13), ограниченную окружностью $\Gamma=\left\{z:\left|z-2\right|=3\right\}$ и внутренними контурами $\gamma_1=\left\{z:\left|z\right|=\rho\right\}$ и $\gamma_2=\left\{z:\left|z-1\right|=\rho\right\}$ $\left(0<\rho<\dfrac{1}{2}\right)$.

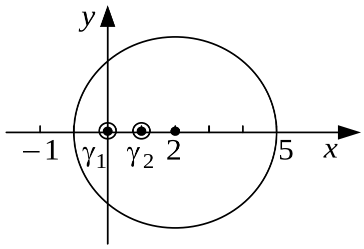

Рисунок 13

Тогда в области D функция $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z^{3}(z-1)}$ является аналитической, и по теореме (55) можно записать: $\oint\limits_{\Gamma}f(z)dz=\oint\limits_{\gamma_1}f(z)dz+\oint\limits_{\gamma_2}f(z)dz$. Для вычисления интегралов справа применим формулы (56) и (57):

$$\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^{z}dz}{z^{3}(z-1)}=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^{z}}{z^{3}}}{z-1}dz=2\pi i\left.\frac{e^{z}}{z^{3}}\right|_{z=1}=2\pi e i,$$

$$\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z}dz}{z^{3}(z-1)}=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^{z}}{z-1}}{z^{3}}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^{2}}{dz^{2}}\left(\frac{e^{z}}{z-1}\right)\right]_{z=0}=\pi e i\left.\frac{e^{z}(z^{2}-4z+5)}{(z-1)^{3}}\right|_{z=0}=-5\pi i$$

и, таким образом, $I=\pi i(2e-5)$.

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы по заданным контурам:

1. $\int\limits_L (2z+1)\bar{z}\,dz,\ L=\{z:|z|=1;\ 0\le \arg z\le \pi\}$.

2. $\int\limits_L \operatorname{Im} z\,dz,\ L=\{(x;\,y):\ y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

3. $\int\limits_L \left(iz^2-2\bar{z}\right)dz,\ L=\left\{z:|z|=2;\ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

4. $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z+z^2\right)dz,\ L=\{(x;\,y):\ y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

5. $\int\limits_L \bar{z}e^z\,dz,\ L-$ отрезок от точки $z_0=1$ до точки $z_1=i$.

6. $\int\limits_L \dfrac{z}{\bar{z}}\,dz,\ L=\left\{z:|z|=1;\ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

7. $\int\limits_1^i ze^z\,dz$.

8. $\int\limits_1^i \left(3z^4-2z^3\right)dz$.

9. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$.

Применяя теоремы и интегральные формулы Коши, вычислить интегралы:

10. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\,dz$.

11. $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$.

12. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$.

13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$.

14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$.

15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz$.

4.4 Вопросы для самоконтроля

1. Что называется кривой в комплексной плоскости?
2. Какая кривая называется гладкой?
3. Какая кривая называется кусочно-гладкой?
4. Сформулируйте достаточное условие существования интеграла.
5. В каком случае при вычислении интеграла от ФКП можно применять формулу Ньютона-Лейбница?
6. Чему равен интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру?
7. Какой интеграл называется «интегралом Коши»?
8. Сформулируйте смысл интегральной формулы Коши? Что она позволяет находить?

5 Ряды в комплексной области

5.1 Числовые ряды

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n . \tag{58}$$

Теорема. Для сходимости ряда $z_n = x_n + iy_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n , \tag{58′}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n . \tag{58″}$$

Определение. Ряд (58) называется **абсолютно сходящимся,** если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \tag{59}$$

Ряды $(58')$, $(58'')$ и (59) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области [8].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$.

а) имеем $e^{in} = \cos n + i \sin n$. Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. Так как каждый из рядов сходится абсолютно, то и данный ряд сходится абсолютно;

б) приведем другое решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего составим ряд $\left(\left|e^{in}\right| = |\cos n + i \sin n| = 1\right)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – этот ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

5.2 Степенные, сходящиеся к ним и двусторонние ряды

Определение 1. Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{60}$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots$ – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется **степенным рядом** в комплексной области.

Определение 2. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ...c_n(z-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{61}$$

называется **степенным рядом общего вида.**

Определение 3. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \tag{62}$$

называется рядом, **сходящимся к степенному общего вида.**

Определение 4. **Двусторонним** называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n . \tag{63}$$

Область сходимости степенного ряда (58) есть круг с центром в начале координат: $|z| < R$, где R – радиус сходимости. В некоторых случаях он может быть определен по формулам

а) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right| \ (c_n \neq 0 \forall n)$; б) $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$. (64)

Для рядов (61) областью сходимости служит круг $|z-a| < R$. Область сходимости ряда (62) ищется после проведения замены: $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$. Ряд вида (63) сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{n}_{-n}}{(z-a)^n} = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + ..., \tag{65}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... \tag{66}$$

Пусть ряд (65) сходится в области $|z-a| > r$, т.е. вне круга с центром в точке $z = a$ и радиуса r, а ряд (66) в круге $|z-a| > R$. Тогда, если: 1) $r > R$, то ряд (63) расходится всюду; 2) $r < R$, то ряд (63) сходится в кольце $r < |z-a| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$ [9].

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$.

Находим модуль коэффициента $c_n=(1+i)^n : |c_n|=\left|(1+i)^n\right|=(\sqrt{2})^n=2^{\frac{n}{2}}$. Применяя формулу б) из (64), находим $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Имеем $c_{-n}=\sin in=i\cdot sh\,n$, $c_{-n-1}=i\cdot sh(n+1)$ и $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|i\,sh(n+1)|}{|i\,sh\,n|}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{sh(n+1)}{sh\,n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^n-e^{-n}}=e$. Следовательно, ряд сходится в области $|z+i|>e$, т.е. вне круга с центром в точке $a=-i$ радиуса $r=e$.

Пример 3. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}$ имеем $c_{-n}=e^{in}, c_{-n-1}=e^{i(n+1)}$.

Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1$. Первый ряд сходится в области $|z+1|>1$. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ имеем $c_n=e^{\frac{-in-1}{2}}$, $c_n=e^{\frac{-i(n+1)-1}{2}}$. Его радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{e^{\frac{-in-1}{2}}}{e^{\frac{-i(n+1)-1}{2}}}\right|=1$, т.е. второй ряд сходится в области $|z+1|<1$. Данный ряд расходится всюду.

Пример 4. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2i}{6}\right)^n$.

Для первого из рядов имеем $c_{-n} = (3+4i)^n,\, c_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$. Следовательно, $r = \lim\limits_{n\to\infty} = \left|\dfrac{(3+4i)^{n+1}}{(3+4i)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|3+4i| = 5$. Первый ряд сходится в области $|z+2i|>5$. Для второго ряда имеем $c_n = 6^{-n},\, c_{n+1} = 6^{-n-1}$. Радиус его сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{6^{-n}}{6^{-n-1}}\right| = 6$ – он сходится в области $|z+2i|<6$. Таким образом, данный ряд сходится в кольце $(r=5<R=6): 5<|z+2i|<6$.

5.3 Ряды Тейлора и Лорана

5.3.1 Ряд Тейлора

Однозначная и аналитическая в точке $z=a$ функция $f(z)$ разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд – ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{67}$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{68}$$

Здесь Γ – окружность с центром в точке $z=a$, целиком лежащая в области аналитичности $f(z)$. Областью сходимости ряда является круг с центром в точке разложения радиуса R. Этот радиус равен расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки – точки, в которой $f(z)$ теряет аналитичность. В круге сходимости этого ряда суммой его является функция $f(z)$.

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<R$, однозначно представима в нем своим рядом Тейлора (67), коэффициенты которого определяются по формулам (68).

Из этой теоремы и теоремы о возможности дифференцирования степенного ряда в круге сходимости любое число раз следует, что разложение функции в степенной ряд единственно. Это означает, что по любому методу разложения функции в степенной ряд мы получаем одно и то же разложение – ряд Тейлора. При $a=0$ ряд (67) называется рядом Маклорена.

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

1) $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!},\ z \in (Z);$

2) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in (Z);$

3) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in (Z);$

4) $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n},\ |z| < 1;$ (69)

5) $arctg\, z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z| < 1;$

6) $(1+z)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,\ |z| < 1, \alpha \in R;$

7) $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots\ |z| < 1;$

8) $\dfrac{1}{(1+z)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\dfrac{1}{1+z} \right)$ [10].

Пример 1. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $f(z) = \ln(2-5z)$. Рассмотрим сначала следующее преобразование данной логарифмической функции: $\ln(2-5z) = \ln\left[17\left(1 - \dfrac{5}{17}(z+3)\right)\right] = \ln 17 + \ln\left[1 - \dfrac{5}{17}(z+3)\right].$

Воспользуемся разложением 4) из (69) для $\ln(1+u)$, полагая $u = -\dfrac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение 4) имеет место при $|u|<1$, то наше разложение будет иметь место при $\frac{5}{17}|z+3|<1$. Таким образом, для

$$|z+3|<\frac{17}{5}: \ln(2-5z)=\ln 17+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3\right)^{n}=\ln 17-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^{n}\frac{(z+3)^{n}}{n}.$$

Часто при разложении функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби – разложением ее на простейшие.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$.

Разложим $f(z)$ на простейшие дроби: $f(z)=\dfrac{1}{2z+5}+\dfrac{2}{(z-3)^2}$.

По формуле суммы геометрической прогрессии 7) из (69) получаем:

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2z}{5}\right)^{n}, |z|<\frac{5}{2} \text{ и } \frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-z/3}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^{n}, |z|<3.$$

замечая, что $[2(z-3)]^{`}=-2(z-3)^{-2}$, и применяя теорему о возможном почленном дифференцировании степенного ряда в круге сходимости получаем:

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}}, |z|<3.$$

Складывая ряды для $\dfrac{1}{2z+5}$ и $\dfrac{2}{(z-3)^2}$, получаем

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, |z|<\frac{5}{2}.$$

5.3.2 Ряд Лорана

Определение. **Рядом Лорана** называется ряд (63)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{63}$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ называется **главной частью** ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ – **правильной частью.** Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, то областью сходимости ряда (63) является кольцо $0 \le r < |z-a| < R$.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \le r < |z-a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана (63), коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (r < \rho < R; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{70}$$

Заметим, что из этой теоремы кольца разложимости определяются через расстояния от центра разложения до двух «соседних» особых точек $f(z)$. Вычисление контурных интегралов (70), как правило, затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются различные искусственные приемы [11].

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 2$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$.

Преобразуем данную функцию:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right]. \tag{71}$$

Первые два слагаемых в правой части (71) имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности $(z-1)$. Последние два слагаемых запишем в виде: $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{(z-1)+2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$, $\dfrac{1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{4}\left[1+\left(\dfrac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}$.

Применив формулы 7), а затем 8) (из (69)), найдем

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right],$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1-(z-1)+3\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-4\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right].$$

Подставляя (72) и (73) в (71), после несложных преобразований получаем разложение $f(z)$ в кольце $0<|z-1|<2$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^n}(z-1)^n\right].$$

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ в окрестности $a=0$.

Для любого комплексного ζ $\cos\zeta=1-\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^4}{4!}-\frac{\zeta^6}{6!}+\ldots$. Полагая $\zeta=\frac{1}{z}$, получаем:

$z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\ldots$. Это разложение справедливо для любой точки $z\neq 0$. В данном случае "кольцо" представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0:0<|z|<+\infty\,(r=0,\,R=+\infty)$.

Пример 3. Получить различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-2$ и $z_2=1$. Следовательно, имеется три «кольца» с центром в точке $a=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической: а) круг $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<+\infty$ – внешность круга $|z|\leq 2$. Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих «колец». Представим предварительно функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}. \qquad (*)$$

а) Разложение в круге $|z|<1$. Преобразуем $(*)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}. \qquad (**)$$

Используя формулу 7) из (69), получаем: $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+...,|z|<1$ $(***)$;

далее $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...,|z|<2$ $(****)$.

Подставляя эти разложения в $(**)$, получаем: $\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-...-\left(1+z+z^2+...\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{6}z^3+...$ – это разложение есть ряд Маклорена функции $f(z)$.

б) Разложение в кольце $1<|z|<2$. Ряд $(****)$ для функции $\frac{1}{1+z/2}$ остается сходящимся в этом кольце, так как $|z|<2$. Ряд $(***)$ для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится для $|z|>1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \qquad (*****)$$

Применяя формулу 7, получаем:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+.... \qquad (******)$$

Этот ряд сходится, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$. Подставляя $(****)$ и $(******)$ в $(*****)$, найдем $\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

в) Разложение для $|z|>2$. Ряд (****) для функции $\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z|>2$ расходится, а ряд (******) для функции $\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$ сходится, так как, если $|z|>2$, то и подавно $|z|>1$. Функцию $f(z)$ представим в таком виде:

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right).$$

Используя формулу 7), получаем

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-...+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+....$$

Замечание: этот пример показывает, что для одной и той же функции ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец [12].

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в окрестности ее особых точек.

Особые точки функции: $z_1=1, z_2=2$.

а) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_1=1$, т.е. в кольце $0<|z-1|<1$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}$. Правую часть преобразуем так: $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{1-(z-1)}$. Применяя разложение 7), в котором z заменим на – $(z-1)$, получим $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+...\right]$ или

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

б) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2=2$, т.е. в кольце

$0<|z-2|<1$. Имеем

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\ldots=$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

5.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

а) $\sin(2z+1)$ по степеням $(z+1)$;

б) $\cos z$ по степеням $\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\frac{1}{3z+1}$ по степеням $(z+2)$;

г) $\ln(2+z-z^2)$ по степеням z.

2. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $a=0$ следующие функции:

а) $\frac{\sin^2 z}{z}$; б) $\frac{e^z}{z}$; в) $z^4\cos\frac{1}{z}$; г) $\frac{1+\cos z}{z^4}$.

3. Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

а) $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, 1) $2<|z|<3$; 2) $3<|z|<+\infty$;

б) $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, 1) $1<|z|<4$; 2) $4<|z|<+\infty$;

в) $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, 1) $|z|<1$; 2) $1<|z|<2$; 3) $2<|z|<+\infty$;

г) $\frac{z+2}{z^3-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$;

д) $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $4<|z+2|<+\infty$.

5.5 Вопросы для самоконтроля

1. Необходимое и достаточное условия сходимости ряда на множестве комплексных чисел.
2. Какой ряд называется абсолютно сходящимся на множестве комплексных чисел?
3. Запишите вид степенного ряда в комплексной области.
4. Дайте определение двустороннего ряда.
5. Чем отличается ряд на множестве вещественных чисел от ряда на множестве комплексных чисел?
6. Сформулируйте достаточное условие сходимости ряда комплексных чисел?
7. Что называется главной частью ряда Лорана?
8. Что называется правильной частью ряда Лорана?
9. Чем отличается ряд Лорана от ряда Тейлора?
10. Какой геометрической фигурой на плоскости является область сходимости ряда Лорана?

6 Нули функции. Изолированные особые точки

6.1 Нули аналитической функции

Нуль функции – это любая замена переменной, которая даст нулевой ответ. Графически действительный нуль — функции - это место, где график функции пересекает ось x.

Определение. Точка z_0 называется **нулем** аналитической функции $f(z)$

порядка (или кратности) n, если $f(z_0) = f'(z_0) =$ $= f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$. В случае $n=1$ точка z_0 называется **простым нулем.**

Теорема. Для того, чтобы точка z_0 была нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки имело место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядки. Из уравнения $1 + \cos z = 0$ находим точки $z_n = (2n+1)\cdot\pi\ (n \in Z)$ – нули данной функции. Имеем: $f'[(2n+1)\pi] = -\sin[(2n+1)\pi] = 0$, $f''[(2n+1)\pi] = -\cos[(2n+1)\pi] = 1 \neq 0$, т.е. точки $z_n = (2n+1)\cdot\pi\ (n \in Z)$ – нули второго порядка данной функции.

Пример 2. Найти нули функции $f(z) = \left(z^2+1\right)^3 \cdot sh z$ и определить их порядки.

Полагая $\left(z^2+1\right)^3 \cdot sh z = 0$, получаем, что $z^2 + 1 = 0$ или $sh z = 0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z): z = \pm i, z = n\pi i\ (n \in Z)$. Пусть $z = -i$; тогда $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z+i)^3 \cdot \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = (z-i)^3 \cdot sh z$ является аналитической в точке $z = -i$, причем $\varphi(-i) = 8i \cdot sh i = -8 \cdot \sin 1 \neq 0$. Это означает, что точка $z = -i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z = i$ является нулем третьего порядка. Исследуем нули $z = n\pi i\ (n \in Z)$. Производная $f'(z) = 6z\left(z^2+1\right)^2 \cdot sh z + \left(z^2+1\right)^3 \cdot ch z$ в точках $z = n\pi i\ (n \in Z)$ отлична от нуля. Следовательно, $z = n\pi i\ (n \in Z)$ – простые нули функции $f(z)$.

6.2 Изолированные особые точки

Определение 1. Точка z_0 называется **особой точкой** аналитической функции $f(z)$, если в этой точке аналитичность функции нарушается.

Определение 2. Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность $0<|z-z_0|<\delta$ этой точки с исключенной точкой z_0, в которой $f(z)$ аналитична, кроме самой точки z_0.

Существует три типа изолированных особых точек. Приведем их определения.

Определение 3. Точка z_0 называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, если разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит главной части.

Определение 4. Точка z_0 называется **полюсом** кратности n функции $f(z)$, если в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 главная часть разложения содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является c_{-n} $(c_{-n} \neq 0)$.

Определение 5. Точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$, если главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число членов.

Приведем критерии типа изолированных особых точек.

1) для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ $(|A| < +\infty)$;

2) для того чтобы точка z_0 была полюсом кратности n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^n] = B$ $(|B| < \infty)$.

3) для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существовал [13].

Теорема (связь между нулями и полюсами). Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, нужно, чтобы она была нулем n-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Пример 1. Для функции $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ особой точкой является $z_0=0$. Покажем это. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\dfrac{1}{2}$; значит $z=0$ есть устранимая особая точка.

Пример 2. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z^5}$ $z_0=0$ является особой точкой. Так как $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{z^5}=\infty$, z_0 – это полюс. Так как для функции $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=z^5$ точка $z_0=0$ является нулем пятого порядка, то $z_0=0$ – полюс пятого порядка функции $f(z)=\dfrac{1}{z^5}$.

Пример 3. Для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $z=0$ является особой точкой. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!\,z^2}+\dfrac{1}{3!\,z^3}+\dots$ в главной части содержит бесконечное число членов; это существенно особая точка.

Пример 4. Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, откуда $\left(\dfrac{1}{z}=Ln(-1)\right)$ $z_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi i}$, причем эти точки являются нулями первого порядка. Следовательно, в точках $z_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi i}$, $n\in Z$ функция $f(z)$ имеет простые полюса. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, это означает, что любая окрестность точки $z = 0$ содержит бесконечное число особых точек $f(z)$.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

1. У следующих функций найти нули и определить их порядки:

а) $z^4 + 4z^2$; б) $\dfrac{\sin z}{z}$; в) $(z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z})$.

2. Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для следующих функций:

а) $\dfrac{1}{z - \sin z}$; б) $\dfrac{1}{\cos z - 1 - \dfrac{z^2}{2}}$; в) $\dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$.

3. Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

а) $\dfrac{1}{1 - \sin z}$; б) $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$; в) $e^{\frac{1}{z+2}}$; г) $\cos\dfrac{1}{z + 2i}$; д) $\dfrac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$;

е) $z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$; ж) $\dfrac{1}{e^{-z} - 1} + \dfrac{1}{z^2}$; з) $\dfrac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z - 1}$.

6.4 Вопросы для самоконтроля

1. Какая точка z_0 называется нулем аналитической функции?
2. Какая точка z_0 называется простым нулем аналитической функции?
3. Какая точка z_0 называется особой точкой аналитической функции?
4. Какая точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$?
5. Какая точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$?
6. Какая точка z_0 называется полюсом кратности n функции $f(z)$?

7. Какая точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$?

8. Сформулируйте теорему о связи между нулем и полюсами.

7 Вычеты. Применение их к вычислению интегралов

7.1 Вычет функции и его вычисление

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Определение. **Вычетом** функции $f(z)$ относительно точки $z=a$ (обозначается $res\, f(a)$ или $\underset{z=a}{res}\, f(z)$) называется число, равное

$$res\, f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz, \qquad (71)$$

где L – простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку a. В качестве L удобно брать окружность $|z-a|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения (71) вытекает, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $(z-a)$:

$$res\, f(a)=c_{-1}. \qquad (72)$$

Из представления (71) следует, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе определяется по формуле

$$res\, f(a)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]. \qquad (73)$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки a является частным двух аналитических функций

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\phi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$ и a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$res\ f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{74}$$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе порядка m определяется по формуле

$$res\ f(a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-a)^m\right]. \tag{75}$$

Если точка a – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения вычета необходимо найти коэффициент c_{-1}, в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ в ее особых точках.

Особыми точками $f(z)$ являются точки $z=0$ и $z=\dfrac{\pi}{4}$.

В точке $z=0$ найдем: $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^2 z}{z^2}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{1-\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{4}{\pi}$, т.е. точка $z=0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому $res\ f(0)=0$, в точке $z=\dfrac{\pi}{4}$ $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}f(z)=\infty$, т.е. точка $z=\dfrac{\pi}{4}$ – полюс (первого порядка) функции. По формуле (73) имеем $res\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[f(z)\cdot\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin z^2}{z^2}=\dfrac{16}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi^2}{16}$.

Пример 2. Определить вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$ относительно точки $z=i$.

Точка $z=i$ вляется полюсом третьего порядка функции, т.к. $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\dfrac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$. В соответствии с (75) получим:

$$res\ f(i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[f(z)\cdot(z-i)^3\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[12(z+i)^{-5}\right]=-\frac{3i}{16}.$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z)=e^{\frac{3}{z-2}}$ в ее особых точках.

Особой для данной функции является точка $z=2$. Это – существенно особая точка (из свойств функции e^z следует, что существует $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$). Для определения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения функции $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$. Так как $e^{\frac{3}{z-2}}=1+\dfrac{3}{z-2}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{3}{z-2}\right)^2+\ldots$, $0<|z-2|<+\infty$, следовательно $res\ f(2)=3$.

7.2 Основная теорема о вычетах и ее применение к вычислению контурных интегралов

Теорема Коши (основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(\mathrm{a_k}) \tag{76}$$

Замечание. Теорему Коши о вычетах удобно использовать, когда внутри контура интегрирования находится небольшое число особых точек [13].

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \dfrac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$, где $L:|z-2|=2$.

Особыми точками подынтегральной функции являются $z=-2$ – полюс второго порядка, $z=\pm i$ – полюса первого порядка. Внутри окружности $|z-2|=2$ (рисунок 14) лежит лишь точка $z=-2$. Поэтому по формуле (76)

$$\int\limits_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}=2\pi i\operatorname{res} f(-2)=2\pi i\lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+1}=2\pi i\lim_{z\to-2}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=\frac{8\pi i}{25}.$$

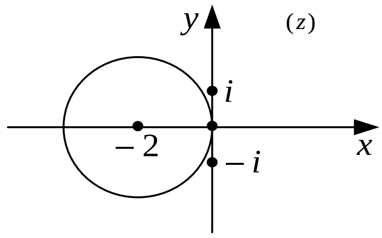

Рисунок 14

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz,\ L:|z-i|=\frac{3}{2}$.

В области $D:|z-i|<\frac{3}{2}$ функция $f(z)=\frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z=i$ – полюс первого порядка и $z=0$ – существенно особую точку.

По формуле (74) $res\, f(i)=\left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z}\right|_{z=i}=(2ie)^{-1}$. Для нахождения вычета в точке $z=0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Из представления функции в виде $f(z)=e^{1/z^2}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$ следует, что в ее лорановском разложении содержатся только четные степени z и $\frac{1}{z}$, так что $c_{-1}=0$ и $res\, f(0)=0$. По теореме Коши о вычетах (76) $I=\frac{\pi}{e}$.

7.3 Приложение вычетов к вычислению некоторых действительных интегралов

1. Если рациональная функция $R(x)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} R(a_k) \tag{77}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – нули $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$).

2. Пусть $R(\sin t, \cos t) = F(z)$, если положить $e^{it} = z$, где $t \in [0; 2\pi]$, тогда $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $dz = i \cdot e^{it} dt$, $dt = \dfrac{dz}{iz}$.

Тогда

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dx = 2\pi i\sigma \,, \tag{78}$$

где σ есть сумма вычетов функции $F(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z| = 1$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+9\right)^2}$.

Подынтегральная функция – четная, поэтому

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+9\right)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Для функции $R(x) = \dfrac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} : P(z) = z^2, Q(z) = \left(z^2+9\right)^2$ – многочлены второй и четвертой степени $(m = 2, k = 4)$ и $k - m = 2$. Нули функции $Q(z)$: $z = 3i$ и $z = 3i$ лежат вне вещественной оси, причем в верхней полуплоскости лежит лишь нуль $z = 3i$. Условия формулы (77) выполнены для данной функции, и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+9\right)^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=3i} \frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{6iz}{(z+3i)^3} = \frac{\pi}{6}$$ и

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2}$ $(a > b > 0)$.

Применяя $e^{it}=z$, получаем после преобразований $\left(\cos t=\dfrac{z^2+1}{2z},\, dt=\dfrac{dz}{iz}\right)$ $I=\dfrac{4}{i}$

$\int\limits_{|z|=1}\dfrac{zdz}{\left(bz^2+2az+b\right)^2}=\dfrac{4}{i}2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{res}F(z_k)$. Внутри единичного круга $|z|=1$ при условии $(a>b>0)$ находится только один полюс (двукратный) $z_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z)=\dfrac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ относительно этого полюса

$$res\ F(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]=\frac{a}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-3/2}$$ и

$I=\dfrac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}$ [2].

7.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Для следующих функций найти вычеты относительно ее конечных изолированных особых точек:

а) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$; в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

г) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$; д) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$.

2. Вычислить контурные интегралы:

а) $\int\limits_L\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz,\quad L:|z-i|=3$; б) $\int\limits_L\dfrac{z}{e^z+3}dz,\quad L:|z+1|=4$;

в) $\int\limits_L\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^5}dz,\quad L:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$; г) $\int\limits_L\dfrac{z^3}{2z^4+1}dz,\quad L:|z|=1$.

3. Вычислить действительные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}$; д) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin t\,dt}{\frac{2}{3}+\cos t}$; е) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos t\,dt}{2+\sin t+\cos t}$.

7.5 Вопросы для самоконтроля

1. Что такое вычет?
2. Чему равен вычет в изолированной особой точке?
3. Чему равен вычет в простом полюсе?
4. Чему равен вычет в полюсе n-го порядка?
5. Как связан вычет с коэффициентами ряда Лорана?
6. Как связан вычет в бесконечно удаленной точке с вычетами в конечных точках?
7. Сформулируйте основную теорему о вычетах.
8. Применение основной теоремы о вычетах к вычислению контурных интегралов.

8 Варианты для самостоятельного решения

1 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{-16}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z+i}\right)>\operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z+i}\right)$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в

промежутке $(-\pi; \pi])$: $\cos(2+i)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x; y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$, $f(0) = 0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \operatorname{Im} z\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки, $z_1 = 3$ и $z_2 = -3$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{dz}{z^2+1}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{3z+1}{(z-2i)^2(z+3)} dz, \quad C: |z+2-i| = 3$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dt}{1+\sin^2 t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

2 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{6}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $\sin 2i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x; y) = x^2 - y^2 + 3x$, $f(0) = i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \operatorname{Im} z\, dz$, где L – полуокружность $|z| = 3$, $0 \le \arg z \le \pi$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-1|=4} \frac{(z^2+1)\cdot\cos\frac{z}{3}}{z^2+4}\, dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-5)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \frac{\sin z}{(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой

C: $\oint\limits_C \frac{z}{(z+i)^2(z+4)}dz, \quad C: |z+2| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{5}{4} - \cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

3 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1+i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $1 < |z - 3 - 2i| < 2$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $\cos(1+i)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x; y) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = -1 + 2i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \operatorname{Re} z\, dz$, где L – дуга параболы $y = 2x^2$, начало которой в точке $z_1 = 0$ и конец в точке $z_2 = 1 + 2i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{ze^z}{(z-2)^3}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z:

$f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-5)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z+2)^2(z-3i)}dz,\quad C:|z+1-2i|=3$.

11. Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{1+\frac{1}{2}\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{\left(x^2+4x-5\right)^2}dx$.

4 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z|\le 2, \arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $Ln(-2)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$:

$v(x;y) = e^x \sin y + 2xy + 2y$, $f(0) = 10$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int_L \bar{z}\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 + i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{\left(z^2+1\right)^2} dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = 2^{\frac{1}{z}} - 2$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{e^z}{z\left(1-e^z\right)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \frac{z^4}{(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-3i)} dz, \quad C: |z - 1 - 2i| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t + 5}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx$.

5 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z| > 2 + \operatorname{Re} z$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): e^{-3i}.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x; y) = x^2 - y^2 - x$, $f(0) = 2$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L |z|\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 - i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-2|=1} \dfrac{z}{z^4 - 1} dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 (z - 2)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \dfrac{2 + \sin z}{z(z + 2i)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{2 - z}{(z + 2)^2 (z + 4i)} dz, \quad C: |z + 2 + 3i| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{5 + 4\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$.

6 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-1+i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z+2-i|<3$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $Ln\left(ie^2\right)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v(x;y)=x+y$, $f(0)=i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L z\cdot e^z\,dz$. где L – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=\frac{\pi i}{2}$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ степеням z: $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных

особых точек: $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{1+2z}{(z-2i)(z-1)}dz, \quad C: |z+1-2i| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sin t-\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2-2x-2\right)^2}dx$.

7 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $2|z| > \left|1-z^2\right|$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $\arcsin i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $v = y - e^{2x}\sin y$, $f(0) = 0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_1^i z \cdot e^z dz$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z+1)}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\dfrac{1}{z-z^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2-1)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)}dz,\quad C:|z+1-i|=3.$

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{\cos t-2}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{(x^2+1)^2}dx$.

8 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-2-2i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<-\dfrac{1}{2}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $th\pi i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$:

$v = x^2 - y^2 - 1,\ f(0) = 0.$

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L (z-1)\cos z\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $z_2 = \frac{\pi}{2}$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \frac{z+2}{z + z^2 - 2z^3}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{z+z^2}{(z+i)^2(z+2)}dz, \quad C: |z+1+i| = 2.$

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx$.

9 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости,

удовлетворяющих заданному неравенству: $|z+1| \geq 2|z|$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v = x^2 - y^2 + 3$, $f(0) = -1$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \sin z\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{1+z^2}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-2)(z+i)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \dfrac{z^2 - 2}{(z+i)(z-2)^2}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z-1)^2(z-i)}dz, \quad C: |z-2-i| = 3.$

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2+\sin t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} dx$.

10 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{-1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z| + \operatorname{Re} z \le 1$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $Ln\left(\sqrt{3} + i\right)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u = -y(4x + 1)$, $f(0) = 0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\oint\limits_{|z|=1} z \cdot \operatorname{Re} z \, dz$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\int\limits_L \frac{\sin z}{(z+2)(z-i)} dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{1}{(z+i)^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{3z+2}{(z-i)(z+5)}dz, \quad C: |z+3| = 5$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{10-6\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(4x^2+1\right)^2}dx$.

9 Решение задач «нулевого варианта»

1) Найти значения корней и изобразить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение: корень n степени из комплексного числа z имеет n значений, которые находятся по формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметический корень.

Представим комплексное число $z = 1-i$ в тригонометрической форме:

$|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Следовательно, по формуле имеем

$$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right).$$

Полагая $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, найдем четыре значения корня (рисунок 15):

$$k=0, \quad w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right), \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{16};$$

$$k=1,\quad w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right),\quad \varphi_1=\frac{7\pi}{16};$$

$$k=2,\quad w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right),\quad \varphi_2=\frac{15\pi}{16};$$

$$k=3,\quad w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right),\quad \varphi_3=\frac{23\pi}{16}.$$

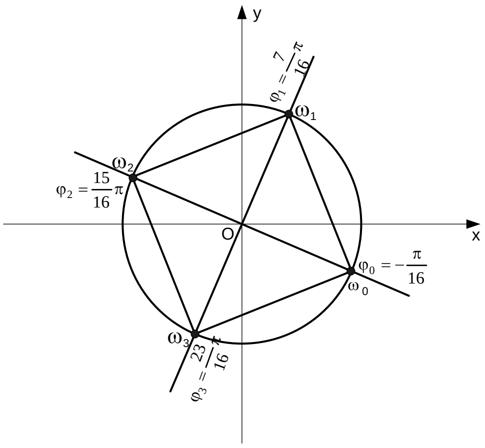

Рисунок 15

Ответ: $w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$, $w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$, $w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$, $w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$.

2) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $1<|z+1|<2$.

Решение: $|z+1|=|z-(-1)|=\rho((-1),z)$ – расстояние между точкой (-1) и точками $z\in M$. Это расстояние меньше 2, значит, точки множества M лежат внутри окружности $|z-(-1)|=2$; $\rho((-1),z)>1$, значит, точки множества M лежат вне окружности $|z-(-1)|=1$. Итак, M – открытое кольцо (рисунок 16).

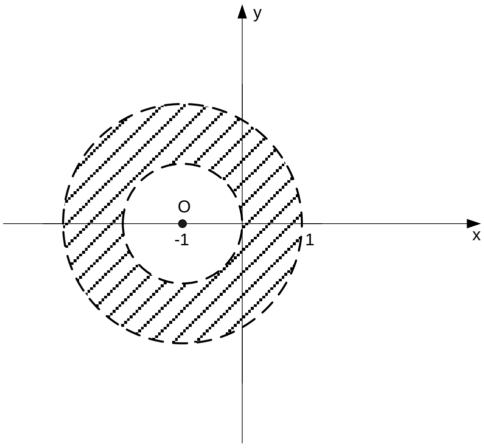

Рисунок 16

3) Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): а) $e^{\frac{\pi i}{2}}$, б) $\cos(2-3i)$, в) $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$, г) $(\sqrt{3}-i)^{2i}$.

Решение: а) $e^{\frac{\pi i}{2}}=e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i$. Здесь была применена формула Эйлера: $e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$.

б) $\cos(2-3i)=\dfrac{e^{3+2i}+e^{-3-2i}}{2}=\dfrac{e^{3}\left(\cos 2+i\sin 2\right)+e^{-3}\left(\cos(-2)+i\sin(-2)\right)}{2}=$

$=\dfrac{\cos 2\cdot(e^{3}+e^{-3})}{2}+i\dfrac{\sin 2\cdot(e^{3}-e^{-3})}{2}$. Здесь применена формула $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

в) $Ln\,z=\ln|z|+i\arg z+2\pi ki,\ k\in Z$. В нашем случае $z=1+i\sqrt{3}$, $|z|=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, $\arg z=arctg\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, значит $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)=$

$=\ln 2+i\dfrac{\pi}{3}+i2\pi k,\ k\in Z$.

г) Применим логарифмическое тождество: $z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}$.

$$(\sqrt{3}-i)^{2i}=e^{2i\cdot Ln\left(\sqrt{3}-i\right)}=e^{2i\left(\ln 2+\frac{11\pi}{6}\pi i+2\pi ki\right)}=e^{-\frac{11}{3}\pi-4\pi k}\cdot e^{i\ln 4},$$

где $z=\sqrt{3}-i$, $|z|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$, $\arg z = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{11\pi}{6}$.

Найдем значение функции при $k=0$ и представим его в алгебраической форме:

$$k=0:\left(\sqrt{3}-i\right)^{2i}=e^{-\frac{11}{3}\pi}\cdot e^{i\ln 4}=e^{-\frac{11}{3}\pi}\left(\cos\ln 4+i\sin\ln 4\right)=e^{-\frac{11}{3}\pi}\cos\ln 4+$$
$$+ie^{-\frac{11}{3}\pi}\sin\ln 4.$$

Ответ: а) $e^{\frac{\pi i}{2}}=i$; б) $\cos(2-3i)=\frac{\cos 2\cdot(e^3+e^{-3})}{2}+i\frac{\sin 2\cdot(e^3-e^{-3})}{2}$;

в) $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)=\ln 2+i\frac{\pi}{3}+i2\pi k,\, k\in Z$; г) $(\sqrt{3}-i)^{2i}=e^{-\frac{11}{3}\pi}\cos\ln 4+ie^{-\frac{11}{3}\pi}\sin\ln 4$.

4) Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v(x,y)=e^y\cos x$, $f(0)=0$.

Решение: найдем действительную часть искомой функции $f(z)=u(x,y)+ie^y\cos x$, использую условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Leftrightarrow\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=e^y\cos x; \tag{79}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Leftrightarrow\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=e^y\sin x. \tag{80}$$

Ищем функцию в виде:

$$u(x,y)=\int e^y\cos x dx+\varphi(y). \tag{81}$$

Здесь $\gamma(y)$ – произвольная неизвестная функция, зависящая от y.

Для функции u вида (81) очевидно, выполняется условие (80). Из (81) имеем $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=e^y\sin x+\varphi'(y)$.

Но нам необходимо, чтобы $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ удовлетворяла условию (80).

Тогда $\varphi'(y)=0 \Leftrightarrow \varphi(y)=c=const, \quad u(x,y)=e^y\sin x+c,$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(e^y\sin x+c)+ie^y\cos x=ie^y\left(\cos x-i\sin x\right)+c=ie^{-iz}+c.$

$f(0)=0$, значит $f(0)=i\cdot e^0+c$, $0=i\cdot e^0+c$, $c=-i$.

$f(z)=ie^{-iz}-i=i\left(e^{-iz}-1\right).$

Ответ: $f(z)=i\left(e^{-iz}-1\right).$

5) Вычислить интегралы от функции комплексного переменного по данной кривой:

а) $I=\int\limits_L(1+i-2\bar{z})dz$, где L – часть параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$;

б) $\int\limits_L e^{\bar{z}}dz$, где L – отрезок прямой $y=-x$, соединяющей точки $z_1=0$ до точки $z_2=\pi-i\pi$ (рисунок 17).

Решение: а) для вычисления интеграла используем формулу

$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_L v(x,y)dx+u(x,y)dy$, где $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Перепишем подынтегральную функцию в виде: $1+i-2\bar{z}=(1-2x)+i(1+2y)$.

Применим формулу и получим

$$I=\int\limits_L(1-2x)dx-(1+2y)dy+i\int\limits_L(1+2y)dx+(1-2x)dy.$$

Так как L – парабола $y=x^2$, то для параболы имеем: $dy=2xdx, \quad 0\le x\le 1$ и, значит,

$$I=\int\limits_0^1\left[1-2x-\left(1+2x^2\right)2x\right]dx+i\int\limits_0^1\left[1+2x^2+\left(1-2x\right)2x\right]dx=-2+\frac{4}{3}i.$$

б) для вычисления интеграла применим формулу

$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\sigma(t)\right]\sigma'(t)dt$, где $z=\sigma(t)$ – комплексное уравнение пути (кривой) интегрирования L, причем α – значение параметра t, которое отвечает началу пути интегрирования, β – концу пути интегрирования.

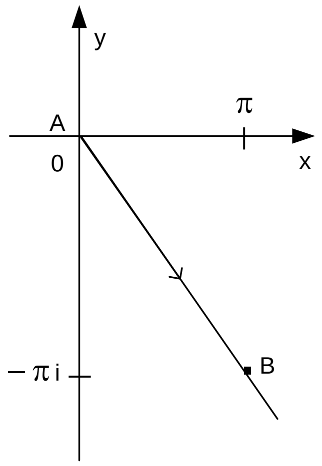

Рисунок 17

Запишем уравнение отрезка интегрирования L в комплексном виде $z = x + iy$; пусть $x = t$, $0 \le t \le \pi$, так как $y = -x$, то $y = -t$. Тогда $z = t - it \equiv \sigma(t)$ и $0 \le t \le \pi$ – комплексное уравнение отрезка интегрирования;

$\bar{z} = t + it; \quad \sigma'(t) = (t - it)' = 1 - i; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0;$

$f(z) = e^{\bar{z}}; \quad f\left[\sigma(t)\right] = e^{t+it}.$

По формуле имеем

$$\int_L e^{\bar{z}} dz = \int_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = \int_0^{\pi} e^{t(1+i)}(1-i)dt = (1-i)\int_0^{\pi} e^{t(1+i)}dt =$$

$$= \left[(1-i)\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\right]\Big|_{\pi}^{0} = \frac{1-i}{1+i}\left[e^{\pi}e^{i\pi} - 1\right] = \frac{(1-i)^2}{2}\left[e^{\pi}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1\right] = i(e^{\pi} + 1).$$

Ответ: а) $I = \int_L (1 + i - 2\bar{z})dz = -2 + \frac{4}{3}i$; б) $\int_L e^{\bar{z}} dz = i(e^{\pi} + 1)$.

6) Вычислить интеграл, применив формулу Коши $I = \int\limits_{|z-i|=4} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{6}} dz$.

Решение: для вычисления воспользуемся формулой Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dt}{z - z_0}.$$

Функция $w = \cos t$ аналитическая в круге $|z - i| \le 4$, значит в формуле можно положить $z_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $f(z) = \cos z$, $f(z_0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ (C – окружность $|z - i| = 4$) и получим

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{6}}dz; \quad \int\limits_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{6}}dz = 2\pi i \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}i.$$

Ответ: $I = \displaystyle\int\limits_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{6}}dz = \pi i\sqrt{3}$.

7) Найти все разложения данной функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$ в ряд Лорана по степеням z.

Решение: дробь правильная. Найдем корни уравнения $z^2 - 2z - 3 = 0$. Имеем два простых корня $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$ являются особыми точками функции $f(z)$.

Кольца аналитичности функции $f(z)$:

$$|z| < 1,$$
$$1 < |z| < 3,$$
$$|z| > 3.$$

Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{z-3}.$$

В каждом кольце аналитичности элементарные дроби разлагаем в ряд, используя разложения в ряд Тейлора.

При $|z| < 1$ получаем:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z| < 1, \ \frac{1}{z-3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3.$$

Следовательно, в круге $|z| < 1$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n .$$

Этот ряд является рядом Тейлора, так как в точке $z=0$ функция $f(z)$ аналитична.

При $1<|z|<3$ получаем

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n},\quad |z|>1.$$

Следовательно, в кольце $1<|z|<3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}.$$

При $|z|>3$ получаем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}},\quad |z|>3.$$

Следовательно, в области $|z|>3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\frac{1}{z^n}.$$

Итак,

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n,\quad |z|<1,$$

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}},\quad 1<|z|<3,$$

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\frac{1}{z^n},\quad 3<|z|<\infty.$$

Ответ: При $|z|<1$ $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right]z^n$,

при $1<|z|<3$ $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}$, при $|z|>3$ $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\dfrac{1}{z^n}$.

8) Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}$; б) $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

Решение: а) разложим знаменатель дроби на простые множители, тогда функция примет вид $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}=\dfrac{e^z}{z(z-1)(z+1)}$. Нулями знаменателя являются точки $z_1=0, z_2=1, z_3=-1$. Все эти нули являются простыми, т.е. нулями первого порядка. Подставим найденные значения в числитель дроби, замечаем ни в одной из этих точек не обращается в нуль, то эти точки являются простыми полюсами исходной функции.

б) для функции $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ – $z=0$ особая точка функции; во всех остальных точках функция аналитическая.

Для определения вида особой точки найдем разложение функции в ряд Лорана. Введем обозначение $t=\dfrac{1}{z}$. Тогда

$$e^{\frac{1}{z}}=e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+\ldots;$$

$$z\cdot e^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots.$$

Главная часть разложения содержит бесконечное множество членов, $z=0$ – существенно особая точка.

Ответ: а) Для функции $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}$ точки $z_1=0, z_2=1, z_3=-1$ являются простыми полюсами.

б) Для функции $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ точка $z=0$ является существенно особой точкой.

9) Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$; б) $f(z)=z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

Решение: для вычисления вычетов относительно особых точек используют следующие формулы:

1) $res\, f(z_0)=c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент разложения в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки z_0;

2) $res\, f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$, если z_0 – простой полюс;

3) $res\dfrac{\phi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, если $\varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0$;

4) $res\, f(z_0)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)^{(n-1)}$, если z_0 – полюс n-го порядка ($n\neq 1$).

а) особыми точками данной функции являются $z_1=-1$ и $z_2=3$.

В точке $z_1=-1$ получаем: $\lim\limits_{z\to -1} f(z)=\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{(z+1)^2}\cdot\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{z+2}{z-3}=\infty$.

Следовательно, точка $z_1=-1$ – полюс второго порядка.

$$res\, f(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\cdot(z+1)^2\right)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{z+2}{z-3}\right)'=\lim_{z\to -1}\frac{-5}{(z-3)^2}=-\frac{5}{16}.$$

В точке $z_2=3$ получаем: $\lim\limits_{z\to 3} f(z)=\infty$.

Следовательно, точка $z_2=3$ – полюс первого порядка функции $f(z)$.

По формуле получаем:

$$res\, f(3)=\lim_{z\to 3} f(z)(z-3)=\lim_{z\to 3}\left[\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\cdot(z-3)\right]=\lim_{z\to 3}\frac{z+2}{(z+1)^2}=\frac{5}{16}.$$

б) особой точкой функции является точка $z=0$. Это существенно особая точка, так как разложение Лорана функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^{10}}-\ldots\right)=z-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^7}-\ldots,$ т.е. содержит бесконечное число отрицательных степеней z. Так как $c_{-1}=0$ в этом разложении, то $res\, f(0)=0$.

Ответ: а) $res\, f(-1)=-\frac{5}{16}$, $res\, f(3)=\frac{5}{16}$;.б) $res\, f(0)=0$.

10) При помощи вычетов вычислить данный интеграл $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz$.

Решение: применим основную теорему о вычетах, по которой $\oint\limits_C f(z)\, dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$, где z_k – особые точки функции $f(z)$, которые лежат внутри замкнутой кривой C.

В круге $|z|<2$ функция $tg\, z$ аналитична всюду кроме точек $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, являющихся простыми полюсами. Все другие особые точки функции $tg\, z$ лежат вне окружности $|z|=2$ и поэтому не учитываются. Получаем:

$$res\, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=-1;\ res\, f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}}=-1.$$

Поэтому $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz=2\pi i((-1)+(-1))=-4\pi i$.

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz=-4\pi i$.

11) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}$ с помощью теории вычетов.

Решение: вводим подстановку $z=e^{it}$. Если t изменяется от 0 до 2π, то $z=e^{it}$ пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении, так как $|z|=\left|e^{it}\right|=|\cos t+i\sin t|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$, $dt=\frac{dz}{ie^{it}}=\frac{dz}{iz}$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+3-2\sqrt{2}\right)\left(z+3+2\sqrt{2}\right)}.$$

Функция $\phi(z)=\dfrac{1}{z^2+6z+1}$ внутри круга $|z|<1$ имеет единственный простой полюс $z_1=-3+2\sqrt{2}$. Находим

$$res\,\phi(-3+2\sqrt{2})=\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)\left(z+3-2\sqrt{2}\right)}\cdot\left(z+3-2\sqrt{2}\right)\right]=\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}}\frac{1}{z+3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\cdot\underset{z=-3+2\sqrt{2}}{res}\frac{1}{z^2+6z+1}=\frac{4\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

12) Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ с помощью теории вычетов.

Решение: рассмотрим интеграл $\displaystyle\int_\gamma\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}dz$, где γ – замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и полуокружности C верхней полуплоскости, опирающейся на отрезок $[-R,R]$. Найдем для $f(z)=\dfrac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}$ полюсы: $z^2+1=0,\ z^2=-1,\ z_1=i,\ z_2=-i$.

Полюсы подынтегральной функции $z_1=i, z_2=-i$, являются полюсами второго порядка. Ни один полюс не лежит на действительной оси и степень числителя на три единицы ниже степени знаменателя. Нам нужны только те полюсы, которые находятся в верхней полуплоскости. Это будет $z_1=i$.

Используя соответствующую формулу, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=2\pi i\cdot\underset{z=i}{res}\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2},\text{ но}$$

$$\underset{z=i}{res}\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-i)^2(z-1)}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z-1}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{2+i-z}{(z+i)^2}=\frac{i}{4}.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=2\pi i\left(\frac{i}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\frac{\pi}{2}$.

10 Из истории развития комплексных чисел и теории функций комплексного переменного

10.1 Первое появление комплексных чисел

Итальянский ученый Джироламо Кардано (1501 – 1576), профессор медицины Павийского университета с 1539 г., первым в истории рассмотрел выражение вида $a+\sqrt{-b}$, где $b>0$. Кардано также является автором трудов, посвященных решению уравнений третей и четвертой степеней. В 1545 г. вышла его книга «Великое искусство или о правилах алгебры», в которой предлагались разные пути решения не только названных, но и квадратных уравнений. Внимание ученого привлекло то, что при нахождении корней квадратных уравнений в некоторых случаях для конечного результата нужно было вычислить квадратный корень из отрицательного числа. В качестве примера, Кардано рассмотрел данную задачу: сумма переменных x и y равно 10, а их произведение равно 40. В математическом виде это выглядело таким образом:

$$x+y=10,\ xy=40$$

или в виде квадратного уравнения $x^2-10x+40=0$. При его решении, он определяет следующие корни $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_1=5-\sqrt{-15}$. Согласно теореме Виета, должны выполняться равенства: $x_1+x_2=10$ и $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=40$.

Для получения данного результата, необходимо принять, что $\left(-\sqrt{-15}\right)\left(\sqrt{-15}\right)=15$. Встречаясь с подобного вида решениями $a\pm\sqrt{-b}$ $(b>0)$, Кардано стал их именовать «софистически отрицательными». В тоже время он считал, что уравнения такого вида не могут быть решены.

Однако, при изучении кубических уравнений, он снова столкнулся с выражением вида $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$. Для нахождения корней уравнения $x^3=ax+b$ $(a>0, b>0)$, он применял правило, соответствующее формуле

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

По данной формуле невозможно было найти корень, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2<\left(\frac{a}{3}\right)^3$, так как подкоренное выражение для квадратного корня оказывалось отрицательным; этот случай назвали неприводимым. Например, уравнение $x^3=15x+4$ имеет корень $x=4$, но по указанной формуле получаем $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Как, используя данную формулу, получить число 4? Как объяснить это несоответствие?

Для нахождения ответов на подобные вопросы, математикам XVI-XVII вв., нужно было научиться обращаться с выражениями вида $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$; в частности, изучить, как извлекать кубические корни из таких выражений. На первых этапах ученые очень неохотно начинали подробное изучение этих выражений. Эти выражения они называли «мнимыми числами», «потайными решениями» уравнений. Считалось, что они не имеют реального содержания. Усложняло ситуацию то, что к тому времени плохо были освоены отрицательные числа. Как правило, их старались избегать. Это подтверждается тем, что кубические уравнения, не содержащие члена с квадратом переменной, на тот момент времени рассматривали в следующих трех видах:

$$x^3=ax+b,\ x^3+b=ax,\ x^3=ax+b,$$

где a и b – действительные положительные числа (а не в привычном для нас сейчас виде $x^3 + px + q = 0$, где p и q – действительные и положительные, и отрицательные числа). Поскольку коэффициенты уравнения предполагались положительными, то необходимо было исследовать отдельно три указанных вида кубических уравнений. Даже в более поздние периоды отрицательные числа назывались «ложными». При изучении выражений $a + \sqrt{-b}$ $(b > 0)$ работа осложнялась тем, что нужно было извлекать квадратный корень из «ложного» числа. При выполнении этой операции получить реальные значения считалось невозможным. Результаты этих операций считали бесполезными и старались их не применять.

Пользу мнимых величин первым оценил итальянский математик и инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли (1526-1573). Он изучал математику в Болонском университете. Его научные исследования были посвящены алгебре и геометрии. В 1572 г. Вышло в публикацию его сочинение «Алгебра». С помощью мнимых величин он объяснил, как получить действительные решения кубического уравнения $x^3 = ax + b$ в неприводимом случае.

Он отмечал, что разность $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$ в этом случае является отрицательной, поэтому извлекать квадратный корень из нее невозможно, потому что он не может быть ни положительным, ни отрицательным. Бомбелли предложил названия для такой величины: плюс от минуса (piu di meno), когда ее прибавляют и минус от минуса (тепо di meno), когда ее вычитают. Таким образом, у Бамбелли «piu di тепо R. q. 3» означает «$+\sqrt{-3}$», а «тепо di тепо R. q. 5» означает «$-\sqrt{-5}$». В своей книге он показывает алгоритм умножения мнимых и действительных чисел. Формулирует метод умножения в словесной форме, который на современном математическом языке выглядит так:

$$(+1)(+i) = +i, (-1)(+i) = -i, (-1)(-i) = +i,$$

$$(+i)(+i) = -1, (+i)(-i) = 1, (-i)(-i) = -1, (-i)(+i) = 1.$$

Данные правила являются основой всех действий над комплексными числами. В его книге приводится много решенных примеров с комплексными числами, например, $8i + (-5i) = 3i$.

Бомбелли, при рассмотрении действий по извлечению корней из комплексных чисел обнаружил, что кубические корни из комплексно сопряженных чисел являются комплексно сопряженными числами. Данные знания помогли ему при исследовании неприводимого случая решения кубического уравнения $x^3 = ax + b$. Решение (821) этого уравнения он записал в виде

$$x = \sqrt[3]{p + \sqrt{-q}} + \sqrt[3]{p - \sqrt{-q}}$$

и положил $\sqrt[3]{p + \sqrt{-q}} = u + \sqrt{-v}$, $\sqrt[3]{p - \sqrt{-q}} = u - \sqrt{-v}$; тогда $u^3 = 3uv + p$, $u^2 + v = \sqrt[3]{p^2 + q}$, откуда $4u^3 = 3cu + p$, $\left(c = \sqrt[3]{p^2 + q}\right)$. Последнее уравнение имеет действительный корень. Таким образом, Бомбелли объяснил, как уравнение в неприводимом случае может иметь действительный корень, хотя он выражается через кубические корни из мнимых величин:

$$x = \left(u + \sqrt{-v}\right) + \left(u - \sqrt{-v}\right) = 2u.$$

Решая данные уравнения он получал частные решения, но общего решения Бомбелли не получил, поскольку для определения u он снова вынужден был рассматривать неприводимый случай: уравнение $4u^3 = 3cu + p$ совпадает с уравнением $x^3 = ax + b$ при $u = \frac{x}{2}$, $p = \frac{b}{2}$, $c = \frac{a}{3}$. Путем проб он смог решить отдельные числовые примеры.

Вопрос об извлечении корней из комплексных чисел был рассмотрен Муавром в начале XVIII в.

10.2 Возникновение теории функций комплексного переменного

Первыми учеными, которые задумались над применением комплексных чисел для решения разных математических задач, были В.Лейбниц и И. Бернулли. Именно в их научных работах оба ученых, применяя для интегрирования рациональных функций метод разложения на элементарные дроби, пришли к интегралам вида $\int \frac{dx}{ax+b}$, где a и b – комплексные числа, рассматриваемые ими как «мнимые логарифмы». В 1702 году Лейбниц задумывается над возможностью представления любых многочленов с действительным коэффициентом в виде произведения множителей первой и второй степени. Он посчитал данное решение неверным. Но он не учел возможность разложения двучлена $x^4 + a^4$ на множители $\left(x_2 + \sqrt{2}ax + a^2\right)$ и $\left(x_2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)$. Для Лейбница было не понятно, что понимается под логарифмом комплексного числа. Ученый не предполагал, что логарифм многозначен, в следствие чего считал логарифмы отрицательных чисел мнимыми. Свое мнение относительно данных неразрешенных вопросов выразил и Эйлер в своей работе «Спор между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1749).

Бернулли утверждал по данному вопросу следующее: поскольку $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, то $\ln(-x) = \ln x$. Лейбниц не мог с этим согласиться, так как считал, что дифференцирование логарифмов справедливо только для положительных x. Эйлер возразил аргументу Лейбница и отметил, что Бернулли не смог доказать то, что хотел. Все дело в том, что из равенства дифференциалов двух функций $d\ln x$ и $d\ln(-x)$ следует лишь, что эти функции $\ln(-x)$ и $\ln x$ отличаются на постоянную, равную $\ln(-1)$, $(\ln(-x) = \ln((-1)x) = \ln(-1) + \ln x)$; Согласно утверждению Бернулли $\ln(-1) = 0$ это должно быть доказано.

Эйлер указал на ошибки ученых, но не сумел обосновать свою точку зрения . Леонард Эйлер сыграл важнейшую роль в развитии начал теории аналитических функций в XVIII в., он утверждал, что «даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины».Ученый утверждает, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степени, но принимает этот факт без доказательства. Эйлер установил взаимосвязь для показательной функции и логарифма:

$$e^{z} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n},\ \ln z = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Эйлер в течение 30-40-х годов XVIII в. разработал теорию элементарных функций комплексной переменной, которые смог представить в виде разложения в степенные ряды.

Следующий этап в развитии теории функций комплексной переменной связан с открытием того, что пары сопряженных гармонических функций могут быть получены как действительные и мнимые части произвольных аналитических функций $f(x+\sqrt{-1}y)$ комплексной переменой $x+\sqrt{-1}y$. Это утверждение получило применение к решению задач механики, картографии и интегрального исчисления.

В работах Д'Аламбера и Эйлера, в последующих трудах Эйлера и Лагранжа комплексные числа представлены как пары действительных чисел, в которых заложен, физический или аналитический (пары функций) смысл.

XVIII век считается самым плодотворным периодом в исследованиях по основам теории аналитических функций. Большой успех в этих вопросах связан с именами ученых Бернулли и Лейбница. Большие исследования в этих вопросах принадлежат петербургскому академику Леонарду Эйлеру [13].

10.3 Уточнение концепции комплексного числа

Следующий этап в истории теории функций комплексной переменной связан с интерпритацией комплексных чисел как векторах или точках плоскости. Об этом мы узнаем в трудах Эйлера, где он переходил от записи комплексного числа в виде $x \pm \sqrt{-1}y$ к тригонометрической форме комплексного числа $s\left(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega\right)$. Он переходит от представления точек $(x;\, y)$ плоскости (географической карты) к комплексным числам $x+iy$, выражающие долготу и широту точек сферы.

Геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними принадлежит норвежцу К. Весселю (1745–1818), который работал геодезистом-картографом Датской академии наук. Вессель создает удобный аппарат решения геодезических задач. Идея выразить изменение направления отрезка (слово «вектор» введено позже) с помощью алгебраических символов формулируется совершенно отчетливо. «Настоящий опыт предпринимается с целью узнать, как аналитически представлять направление», и «посредством одного только уравнения, связывающего один неизвестный отрезок и несколько известных отрезков, получить такое выражение, которое сразу представляло бы искомый отрезок как по величине, так и по направлению». Обычные алгебраические операции позволяют изменить направление только на противоположное, т.е. положительное на отрицательное и наоборот. Создание исчисления отрезков, имеющих на плоскости произвольные направления, требует обобщения алгебры; нужно «расширить определения алгебраических операций, но так..., чтобы не было противоречия со старой теорией чисел...»
Применяя правило умножения к основным единицам, обозначаемым +1, –1, +ε, –ε, Вессель вывел следующие формулы:

$$(+1)(+1)=+1,\ (-1)(+1)=-1,\ (-1)(-1)=+1,$$
$$(+1)(+\varepsilon)=+\varepsilon,\ (+1)(-\varepsilon)=-\varepsilon,\ (-1)(+\varepsilon)=-\varepsilon,\ (-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon,$$
$$(+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1,\ (+\varepsilon)(-\varepsilon)=+1,\ (-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1.$$

«Отсюда следует, – заключает Вессель, – что ε равно $\sqrt{-1}$».

Направленному отрезку ставится в соответствие комплексное число в тригонометрической форме $r(\cos v + \varepsilon \sin v)$ и рассматриваются все операции над комплексными числами; формула Муавра доказывается и для дробного рационального показателя.

В «геометрическом анализе» Весселя нашли реальное истолкование и обоснование комплексные числа и действия над ними. Спустя двести пятьдесят лет комплексные числа получили математическое толкование, а труды Весселя стали известны широкому кругу математиков только в конце XIX в. В конце XVIII в. и начале XIX в. к геометрическому истолкованию комплексных чисел и операций над ними пришли и другие ученые, среди которых живший в Париже уроженец Женевы Жан Робер Арган (1768–1822). Его сочинение «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» было издано анонимно в Париже (1806). Оно оставалось незамеченным, пока Жозеф Диаз Жергонн (1771–1859), основатель журнала «Анналы чистой и прикладной математики», не опубликовал указанную работу в четвертом номере своего издания (1813). После этого сочинение Аргана получило широкую известность. Арган предложил краткое и элегантное доказательство основной теоремы алгебры.

В первой четверти XIX в. многие математики были весьма близки к геометрическому представлению комплексных чисел. Всеобщую известность и признание представления комплексных чисел в виде точек плоскости получило с 1831 г., когда было опубликовано сочинение Гаусса «Теория биквадратных вычетов», включавшее обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Комплексные числа использовались Гауссом почти во всех его работах по арифметике, алгебре, теории функций, теории поверхностей (конформное отображение).

Долгий и сложный путь к геометрическому истолкованию комплексных чисел проделал Коши. Понимание им комплексных чисел менялось почти на протяжении всей его творческой деятельности. В «Алгебраическом анализе» (1821) он относит «мнимые выражения» (т.е. комплексные числа) и «мнимые уравнения» (т.е. равенства, содержащие комплексные числа) к разряду символических, понимая под последними такие, которые «взятые буквально не точны или лишены смысла, но из которых можно выводить точные результаты, модифицируя и меняя по определенным правилам либо сами уравнения, либо символы, в них содержащиеся». Он уточняет, что «всякое мнимое уравнение –

это только символическое представление двух уравнений между двумя действительными количествами». Почти через четверть века Коши вновь обращается к выяснению понятия комплексного числа. Он снова повторяет прежнюю концепцию, ссылаясь на «Алгебраический анализ». Вместе с тем он продолжает искать иное, содержательное понимание комплексных чисел. Таким поискам посвящено несколько работ, опубликованных после 1847 г. Коши останавливается на геометрическом представлении комплексного числа, отдавая ему преимущество перед алгебраическим. Он предлагает «после новых и зрелых размышлений» полностью отказаться от знака $\sqrt{-1}$ и заменить теорию мнимых выражений теорией количеств, названных «геометрическими». При этом геометрическое количество r_p является вектором с длинной r (называемой модулем) и полярным углом р (аргумент или азимут). Геометрическое количество приводится к виду $x+iy$, который называется аффиксом точки $A(x;y)$.

В статье «О функциях геометрических количеств» Коши дал определение функции комплексной переменой. Если $z=x+iy$ аффикс подвижной точки A и $Z=X+iY$ – аффикс движущейся точки В, то «Z должно считаться функцией z, когда значение z определяет значение Z. Но для этого достаточно, чтобы X и Y были определенными функциями x и y. Тогда также положение движущейся точки А будет определять всегда положение движущейся точки В». Итак, Коши узаконил наглядное представление о функции комплексной переменной, которым он фактически (не вполне осознанно) пользовался в своих предыдущих исследованиях и которое вполне естественным представлялось Гауссу еще в 1811 г.

10.4 Развитие комплексного интегрирования

Исследования построения теории функций комплексной переменной использовали эйлеровы методы вычисления определенных интегралов с использованием комплексной переменой.

Лаплас предложил метод решения линейный разностных и дифференциальных уравнений, основанный на замене неизвестной функции $y(s)$ интегралами вида $\int \phi(x) \cdot x^s dx$ или $\int \phi(x) \cdot e^{-sx} dx$, где $\phi(x)$ – новая неизвестная функция. Для данных уравнений ученый использует преобразование, получившее название преобразование Лапласа. В некоторых случаях корни этого уравнения оказывались мнимыми. Получив интегралы с «мнимыми пределами», Лаплас подвергал их различным преобразованиям, основанным на замене переменной интегрирования, и приходил к интегралам от действительных функций действительной переменной. Ученый отмечал, что переходы от действительного к мнимому позволили ему найти значения многих определенных интегралов. В тоже время заметил, что в каждом случае необходимо выполнять проверку результатов. Лаплас заметил, что так же, как и он, Эйлер использовал переход от действительного к мнимому для вычисления интегралов, хотя коллега изложил свои утверждения гораздо позже [13].

Теория комплексного интегрирования принадлежит Гауссу, которую он изложил в письме к Бесселю. Он писал:

«Что нужно понимать под $\int \phi(x) dx$ для $x = a + bi$. Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a + bi$) переходит к $x = a + bi$ и тогда сложить все $\phi(x)dx$. Так смысл вполне установлен. Но переход может совершаться бесконечно многими способами. Так же как совокупность всех действительных чисел можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a+bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ совершается поэтому по линии и, следовательно, возможен бесконечно многими способами. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \phi(x)dx$ при двух различных переходах сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, функция $\phi(x)$ нигде не равна ∞. Доказательство этой теоремы я изложу в последующих работах.. Она связана с другими прекрасными истинами, касающимися разложений в ряды. Переход в каждой точке следует производить так, чтобы ни разу не затронуть места, где $\phi(x)=\infty$. Я настаиваю на том, что такие точки следует обходить, что для них, очевидно, первоначальное основное понятие интеграла $\int \phi(x)dx$ теряет ясность и легко приводит к противоречиям.

Нужно помнить такой факт, что функция, порожденная посредством интеграла $\int \phi(x)dx$ может иметь многие значения для одного и того же значения x, а именно в зависимости от того, будет ли при переходе $\phi(x)=\infty$, допущен однократный или многократный обход вокруг точки, в которой или же такого обхода совсем не будет».

Приложение А

Комплексные числа в электротехнике

Методы, разработанные для электрических цепей постоянного тока на основе закона Ома, неэффективны в расчетах цепей переменного тока. При расчете линейных электрических цепей на основе мгновенных значений токов и напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону, возникают большие сложности. Эффективный метод расчета цепей переменного тока основан на применении комплексных чисел. Применение комплексного (символического) метода расчета позволяет исключить при расчетах одну из координат – частоту питающей сети. Это возможно в силу того, что все токи и падения напряжения в линейной электрической цепи изменяются с одной и той же частотой. Указанный метод позволяет избавиться от мгновенных синусоидальных значений токов и напряжений, что приводит к значительному упрощению расчетов.

В электротехнике принято обозначать мнимую единицу j: $j^2 = -1$; аргумент комплексного числа, как правило, определяется в градусах.

Комплексный метод расчета линейных электрических цепей синусоидального тока

1. Осуществляется переход из множества мгновенных значений токов и падений напряжений во множество их комплексных значений (например, вместо мгновенного значения тока $i(t)$ рассматривают его комплексную амплитуду I_m).

2. В комплексной области осуществляется расчет электрической цепи с использованием векторов (комплексов) токов и напряжений любым из методов расчета цепей постоянного тока.

3. После нахождения комплексного тока (падения напряжения)

осуществляется обратный переход, то есть находится закон изменения требуемого тока (напряжения). Последнее обычно не делают в силу того, что в найденном комплексном токе (падении напряжения) содержится полная информация о соответствующем законе изменения.

Преобразование мгновенных синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

Ток изменяется по синусоидальному закону $i(t) = I_m sin(\omega t + \phi)$, где I_m – амплитуда; $T = \frac{2\pi}{w}$ – период колебаний, $\omega t + \phi$ – фаза колебаний; ϕ – начальная фаза; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ – круговая частота; $f = \frac{1}{T}$ – частота (в гц).

Введем комплексную амплитуду тока $I_m = I_m i^{j\varphi}$, j – мнимая единица, $j^2 = -1$.

Умножая комплексную амплитуду тока на оператор вращения $e^{j\omega t}$ и применяя формулу Эйлера, получим

$I_m\, e^{jwt} = I_m\, e^{j\varphi} e^{jwt} = I_m e^{j(wt+\varphi)} = I_m\big(\cos(wt+\varphi) + j sin(wt+\varphi)\big)$.

Отсюда следует связь синусоидального тока $i(t)$ с комплексной амплитудой, а именно, ток равен мнимой части комплексной амплитуды, умноженной на оператор вращения:

$$i(t) = Im\big(I_m e^{jwt}\big) = I_m \sin(wt+\varphi).$$

Аналогично, напряжение и ЭДС соответственно равны

$$u(t) = Im(\dot{U}_m e^{jwt}),\ e(t) = Im(\dot{E}_m e^{jwt}),$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$, $\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi_e}$ – комплексные амплитуды напряжения и ЭДС соответственно.

В расчетах обычно используются векторы (комплексы) действующих токов, напряжений и ЭДС вместо их комплексных амплитуд. При отсутствии каких-то дополнительных условий имеют место следующие формулы:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{I}_m\sqrt{2}}{2} = \frac{I_m\sqrt{2}}{2}\, e^{j\varphi},$$

$$\dot{U}_m = \frac{\ddot{U}_m\sqrt{2}}{2}\, e^{j\varphi} = U e^{j\varphi_u},$$

$$\dot{E}_m = \frac{\dot{E}_m\sqrt{2}}{2} = \frac{E_m\sqrt{2}}{2}\, e^{j\varphi_e} = E\, e^{j\varphi_e},$$

где $\dot{I}, \dot{U}, \dot{E}$ – векторы действующих значений;

I, U, E – действующие значения тока, напряжения и ЭДС;

$\varphi_u, \varphi_e, \varphi$ – начальные фазы.

При переходе в комплексную область электрические схемы не изменяются, Законы Ома, Кирхгофа при этом записываются в других обозначениях сопротивлений, токов, напряжений, ЭДС. Схемы замещения идеальных элементов линейных электрических цепей можно найти в учебных пособиях по теоретическим основам электротехники.

Примечания.

1) При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа принято, что токи, вытекающие из узлов или сечений, положительны, а токи, втекающие в узлы или сечения – отрицательны.

2) При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа принято, что напряжения на ветвях положительные, если направление контура совпадает с направлением тока ветви. Если направление контура противоположно направлению тока ветви, то напряжение на ветви отрицательное.

Комплексное сопротивление. Приведем формулы для определения полных комплексных сопротивлений последовательного и параллельного соединения элементов. Пусть Zk – комплексное сопротивление -ого элемента.

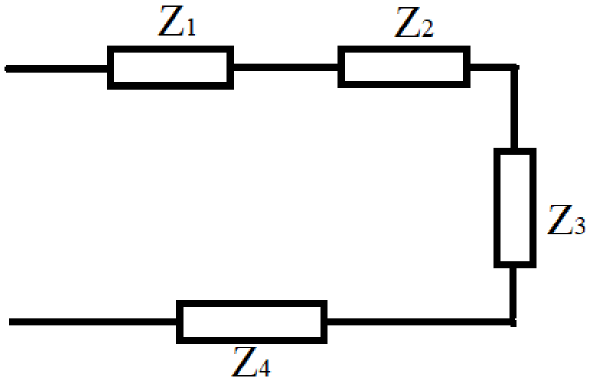

Рис. П.1

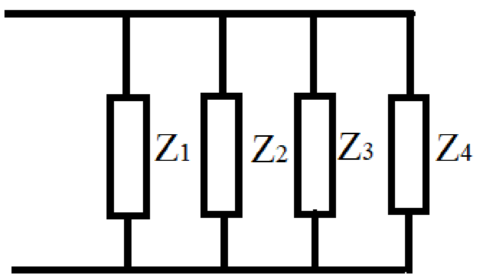

Рис. П.2

Для цепочки последовательно соединенных элементов (рисунок П.1) полное комплексное сопротивление равно

$$Z = \sum_k z_k.$$

При параллельном соединении элементов (рисунок П.2) полное комплексное сопротивление определяется следующим образом:

$$Z = \frac{1}{Y}, Y = \sum_k Y_k, Y_k = \frac{1}{Z_k}.$$

Здесь Y – полная комплексная проводимость, Y_k – проводимость каждой из параллельных ветвей $(k = 1,2,3,4)$.

Пример 1. Расчет электрической цепи со смешанным соединением (рисунок П.3) при следующих данных: $Z_1 = 5 + 8j$, $Z_2 = 20(1 + j)$, $Z_3 = 20(1 + j)$, $U = 220$ В.

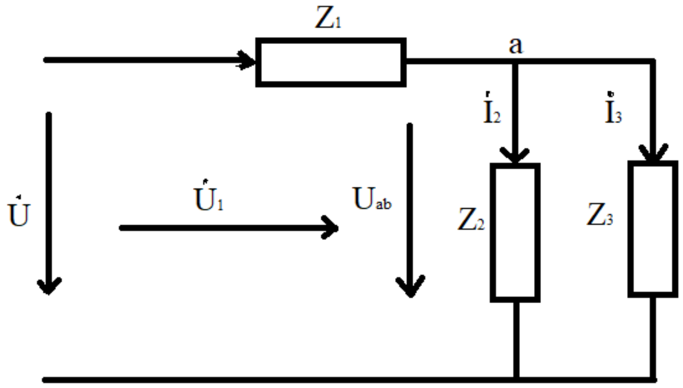

Рис. П.3

Решение. Для сравнения трудоемкости вычислений приведем расчет цепи, используя комплексные числа в алгебраической и показательной формах, без подробных пояснений.

1) Сначала найдем эквивалентное сопротивление параллельного участка:

$$Z_{23} = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}, \qquad Z_{23} = \frac{20(1+j) \cdot 20(1+j)}{20(1+j) + (1+j)};$$

$$Z_{23} = \frac{400(1+j)^2}{40(1+j)}; \qquad Z_{23} = 10(1+j) = 10\sqrt{2}e^{j45^0}\text{Ом}.$$

2) Полное комплексное сопротивление цепи: $Z = Z_1 + Z_{23}$,

$Z = 5 + 8j + 10(1 + j), Z = 15 + 18j \approx\ 23{,}43\, e^{j50{,}2^0}$ Ом.

3) Соответствующие токи определим по закону Ома $\dot{U} = Z \cdot \dot{I}$, используя действия над комплексными числами в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.

а) $I_1 = \frac{\dot{U}}{Z}$; $I_1 = \frac{220}{15+18j} = \frac{220(15-18j)}{549}$

или $I_1 = \frac{220}{\sqrt{549}} \cdot \frac{1}{e^{j50{,}2^0}} \approx\ 9{,}39\, e^{-j50{,}2^0} = 6{,}011 - 7{,}213j$ А.

б) $\dot{U}_{ab} =\ \dot{I}_1 Z_{23}$, $\qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2}$;

$$\dot{U}_{ab} = \frac{220(15-18j)}{549} \cdot 10(1 + j) = \frac{2200(1-j)}{183} \approx 132{,}24 - 12{,}02j = 132{,}79e^{-j50{,}2^0}\ B;$$

$$\dot{U}_{ab} \approx 9{,}39e^{-j50{,}2^0} \cdot 14{,}14^{j45^0} = 132{,}77e^{-j5{,}2^0} = 132{,}225 - 12{,}020j\ B;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{220(15-18j)10(1+j)}{549{\cdot}20(1+j)} = \frac{110(15-18j)}{549} = 3{,}0055 - 3{,}6066j =\ 4{,}695e^{-j50{,}2^0}\ A;$$

иначе

$$\dot{I}_2 = \frac{132{,}77e^{-j5{,}2^0}}{20(1+j)} = \frac{132{,}77e^{-j5{,}2^0}}{20\sqrt{2}\, e^{j45^0}} = 4{,}694e^{-j50{,}2^0} = 3{,}005 - 3{,}606j;$$

$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_3} = \dot{I}_2$, так как $Z_2 =\ Z_3$.

4) По закону Кирхгофа $\dot{I}_1 =\ \dot{I}_2 +\ \dot{I}_3$

В алгебраической форме равенство, очевидно, выполнено:

$$\frac{220(15 - 18j)}{549} = \frac{110(15 - 18j)}{549} + \frac{110(15 - 18j)}{549}.$$

Если рассматривать результирующие токи, вычисленные с помощью показательной формы комплексных чисел, то видно, что разница между $\dot{I}_1 = 6{,}011 - 7{,}213j$ и $\dot{I}_2 +\ \dot{I}_3 = 2\dot{I}_2 = 6{,}01 - 7{,}212j$ незначительна.

Очевидно, что вычисления в алгебраической форме более громоздкие, чем в показательной, а в результатах получается незначительная разница из-за погрешности округления.

Приложение Б

Теория функции комплексного переменного в экономике

Представление экономических характеристик в форме комплексного числа даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Зачастую очень сложные взаимосвязи между действительными экономическими переменными проще описать с помощью моделей и методов теории функций комплексного переменного. Для того, чтобы представить две экономические переменные в виде одной комплексной, необходимо выполнение условий:

1) данные переменные представляютсобой характеристики одного и того же экономического объекта или явления;
2) экономические переменные должны быть одной размерности.

Аппарат использования теории функций комплексных переменных уникален и активно применяется в экономике. Перед экономистами открываются новые возможности применения теории функций комплексных переменных. Изучение и применение функций комплексного переменного позволяет расширить использование совокупности экономико-математических моделей и позволяет применять новые экономико-математические методы.

Рассмотрим использование производственных функций для многовариантных прогнозов развития предприятий. С помощью данных функций можно проводить анализ протекающих на производстве процессов. С помощью производственных функций осуществляется описание зависимости между какими-либо результатами и факторами производства.

На практике переменными производственных функций выступают объём производства Q, затраты труда L и затраты капитала K. В нашем случае рассмотрим два производственных ресурса – труд и капитал. Эти ресурсы будем считать взаимозаменяемыми. Одинаковый объём производства Q

достигается при разных соотношениях производственных ресурсов K и L.

Представим производственные ресурсы K и L в виде комплексной переменной $K + iL$. Производственная функция при этом представлении будет выглядеть так:

$$Q_t = f\left(K_t + iL_t\right). \tag{1}$$

Комплексному числу $K + iL$ поставим в соответствие действительное значение функции – число Q. Коэффициенты K, L, и Q – положительные действительные числа, K и L могут представлять как действительную часть, так и мнимую.

Результаты производства Q можно представить следующим уравнением, которое связывает затраты труда L и капитала K:

$$Q_t = \left(a_0 - ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \tag{2}$$

В данной модели указывается связь между производственными затратами и результатами производства.

Найдем значения коэффициентов a_0 и a_1, для этого выполним преобразования, сгруппируем отдельно действительную и мнимую части. Каждый из коэффициентов можно вычислить:

$$a_0 = \frac{Q_t K_t}{K_t^2 + L_t^2} \text{ и } a_1 = \frac{Q_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}. \tag{3}$$

Если известны значения затрат и результатов, то можно найти численные значения коэффициентов. Установим экономический смысл значений коэффициентов a_0 и a_1. Значения a_1 и a_0 показывают изменения интенсивности трудовых ресурсов и капитальных ресурсов, соответственно, и называются – *коэффициенты использования ресурсов.*

Коэффициенты использования ресурсов обладают следующим свойством, которое вытекает из равенства (3), а именно:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{L_t}{K_t}. \qquad (4)$$

Представим, в каких границах находятся коэффициенты в зависимости от изменения того ресурса, которые они отражают, то есть:

$$a_0 = f\left(K_t\right) \text{ и } a_1 = f\left(L_t\right).$$

Покажем зависимость коэффициента a_1 от капитальных затрат K_t при фиксированном значении L_t. При K_t равном нулю, интенсивность трудовых ресурсов принимает максимальное значение. С увеличением капитальных затрат K_t и постоянстве трудовых затрат L_t, убывание изменений значений коэффициента a_1 происходят в направлении гиперболы. Значения интенсивности трудовых ресурсов a_1 стремятся к нулю, если капитальные затраты стремятся к бесконечности.

Анализируя коэффициент a_0, отметим, что при фиксированном значении K_t и изменении трудовых затрат L_t он изменяется от нуля до бесконечности. Значения каждого коэффициента линейно возрастают с ростом Q_t.

Найдем максимальные значения коэффициентов использования ресурсов:

$$a_0 = a_1 = \frac{Q_t}{2L_t} = \frac{Q_t}{2K_t}. \qquad (5)$$

Итак, коэффициент a_1 при фиксированном положительном значении ресурса K_t равен нулю при равенстве нулю ресурса L_t; коэффициент a_0 при этом больше нуля. При значениях ресурса L_t, равного ресурсу K_t, коэффициент a_0 достигает своего максимального значения, а его значения равны коэффициенту a_1. С дальнейшим ростом значений трудовых ресурсов коэффициент a_0 уменьшается и стремится к нулю при стремлении значений L_t к бесконечности. На этом участке коэффициент a_0, всегда больше коэффициента a_1, который также уменьшается с ростом L_t.

При подсчете изменения коэффициентов a_0 и a_1 использования ресурсов в производственной функции:

$$Q_t = (a_0 - ia_1)(K_t + iL_t)$$

ресурсы L_t и K_t, будь то отдельно взятое предприятие или хозяйство всей страны, развиваются во времени. Это происходит за счет изменения технологии производства, что вызывает, в свою очередь, изменения производительности труда и производительности оборудования. Эти изменения отражаются в производственной функции изменением коэффициентов использования ресурсов.

Мы отметили изменение коэффициентов в зависимости от времени, поэтому коэффициенты a_0 и a_1 можно рассмотреть как некоторые функции от времени: $a_1 = f_1(t)$, $a_0 = f_0(t)$. В тоже время указанные коэффициенты являются частями одного комплексного числа, поэтому мы их рассмотрим в совокупности.

Из равенства (2) можно увидеть, что каждый из коэффициентов зависит от трёх факторов – объёма Q_t, трудовых L_t и капитальных затрат $К_t$. Покажем зависимость каждого из коэффициентов использования ресурсов от их совместной динамики.

Если трудовые и капитальные ресурсы сбалансированы, а отдача их увеличивается, то происходит превышение значений двух коэффициентов от начальной точки 0,5. В этом случае мы говорим о сбалансированной экономике с устойчивым ростом производительности труда и фондоотдачи (первый вариант).

Второй вариант характерен снижением величин обоих коэффициентов использования ресурсов относительно их начальной точки в 0,5. Это происходит в условиях дисбаланса. При структурной перестройке производства наблюдается использование одного из ресурсов в большей степени, чем другого, при этом отдача ресурсов не увеличивается. Эта зона – зона кризисной динамики.

При третьем варианте предполагается рост коэффициента использования значений трудовых ресурсов выше начального значения и снижение величин коэффициента использования капитальных ресурсов. Это происходит если трудовые ресурсы привлекаются в большей степени, чем капитальные, в этом случае наблюдается увеличение значений a_1 по сравнению с a_0 В то же время, рост самого значения коэффициента a_1 свидетельствует о том, что растут и объёмы производства. Следовательно, процесс трудоинтенсивный с повышающейся фондоотдачей.

Четвёртый вариант предполагает снижение коэффициента использования трудовых ресурсов относительно начального значения и повышение величин коэффициента использования капитальных ресурсов. Этот вариант наблюдается в том случае, если капитальные ресурсы привлекаются в большей степени, чем трудовые. Происходит увеличение значений a_0 по сравнению с a_1. При этом происходит рост производства. Значит, фондоотдача уменьшается, а производительность труда растёт.

Интерес для экономистов представляет производственная функция действительных переменных, которая использует две комплексные переменные. Первая комплексная переменная – это затраты ресурсов; вторая – это комплексный производственный результат.

На результат производства могут оказывать влияние различные показателями, но существенное влияние оказывают два – объём производства и затраты этого производства. Результат производства представим в виде комплексной переменной, связывающей объём производства и затраты производства:

$$Q_t + iC_t, \tag{6}$$

где Q_t – объём производства, C_t – затраты производства.

Свяжем две комплексные переменные (зависимую и независимую) некоторой функциональной зависимостью:

$$Q_t + iC_t = F\left(K_t + iL_t\right), \quad (7)$$

получим функцию комплексных переменных.

Большое применение для целого ряда случаев находит линейная функция:

$$Q_t + iC_t = \left(b_0 + ib_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \quad (8)$$

Найдем значения коэффициентов:

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t + iC_t}{K_t + iL_t}. \quad (9)$$

$$b_0 = \frac{Q_t K_t + C_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}, \quad b_1 = \frac{C_t K_t - Q_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}. \quad (10)$$

Из полученных формул замечаем, что коэффициент b_0 будет линейно расти с ростом, как объёма производства, так и с ростом издержек производства при постоянстве затрат ресурсов. Отметим, что он будет также расти и при увеличении ресурсов, затраченных в производстве. С ростом себестоимости и с увеличением основных производственных фондов будет увеличиваться второй коэффициента b_1. В тоже время, если ресурсы, и результаты растут прямо пропорционально, то этот коэффициент остаётся постоянным.

Любой процесс производства интересует вопрос прибыли, для этого значения Q_t и C_t надо приводить к относительным величинам. Причем они должны быть связаны друг с другом следующим образом:

$$Q_t = \frac{Q_t^f}{Q_0}, \quad C_t = \frac{C_t^f}{Q_0},$$

где Q_t^f – фактическое значение объёма выпуска, а C_t^f – фактическое значение суммарных затрат при наблюдении t.

Кроме того, рентабельность производства может быть найдена из отношения:

$$\frac{Q_t - C_t}{C_t} = \frac{\left(b_0 K_t - b_1 L_t\right) - \left(b_0 L_t + b_1 K_t\right)}{\left(b_0 L_t + b_1 K_t\right)}. \quad (11)$$

Рассмотрев производственные функции комплексного аргумента и производственные функции комплексного переменного можно получить много информации о сути происходящих производственных процессов. Эти функции позволяют проводить анализ сути происходящих производственных процессов. Они применяются для анализа функционирования хозяйственных систем. Экономическое развитие в целом, является важным стимулирующим фактором использования этих функций.

Рассматривая суть процессов, происходящих в экономической действительности, взаимосвязь факторов, взаимодействие причин и следствий, ученые стараются выявить устойчивые тенденции или причины, тормозящие развитие. И в тоже время, как правило, нельзя претендовать на абсолютно точное, адекватное отражение реальных процессов и взаимосвязей. Используя математический аппарат, можно с известной степенью приближения говорить о протекании экономических процессов.

Производственные функции комплексного аргумента и производственные функции комплексного переменного используются, например, для нахождения оптимальных значений издержек на производстве, для максимизации прибыли от реализации произведенного товара. Использование производственных функций комплексного аргумента и производственных функций комплексного переменного нашло большое применение во всех сферах рыночного хозяйства. Вычисления экономических показателей позволяют произвести оптимизацию структуры производства. Данные функции употребляются также при выяснении причин той или иной тенденции в развитии экономических систем и др. Поэтому по мере происходящих в экономической сфере изменений на каждом этапе развития производства наблюдаются новые направления развития, что открывает принципиально новые возможности использования функций в этих условиях развития. Формулируются обобщения и выводы, ведутся математические расчеты, разрабатываются практические рекомендации по использованию и применению производственных функций.

Приложение В

Основные обозначения

R	– множество действительных чисел;
C	– множество комплексных чисел;
$(x; y)$	– упорядоченная пара действительных чисел x и y;
i	– мнимая единица;
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	– действительная и мнимая части комплексного числа;
$\bar{z}$	– число, сопряженное числу z;
$\lvert z \rvert$	– модуль комплексного числа z;
(z)	– комплексная плоскость;
$\arg z$	– аргумент комплексного числа z;
∂D	– граница области D;
$\overline{D}$	– замыкание области D;
$w = f(z)$	– функция комплексного переменного $z = x + iy$;
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$	– предел функции $f(z)$ при $z \to z_0$;
$f'(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$	– производная функции $f(z)$ комплексного переменного z;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}$	– частная производная функции $u(x; y)$ по переменному x;
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$	– определенный интеграл от функции $f(x)$ действительного переменного;
$\int\limits_\gamma f(z)\,dz$	– интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по ориентированной кривой γ;
$\oint\limits_L f(z)\,dz$	– интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по замкнутому контуру L;
$res\ f(a)$	– вычет функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке a.

Список рекомендуемой литературы

1 Гусак, А.А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова, Г.М. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 208 с.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2003. – 416 с.

3 Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

4 Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова – М.: Высш.шк., 2001. – 445с.

5 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике ч. 2 / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

6 Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кирилова. – 2-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

7 Стельмашук, Н.Т. Элементы теории аналитических функций. / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец – Минск: ДизайнПРО, 1997. – 192 с.

8 Данилов-Данильян В.И., Хранович И.Л. Производственные функции в условиях неопределённости // Экономика и математические методы, 2007, т. 43, №1, с.16–26.

9 Длин, А.М. Математическая статистика в технике. – М.: Советская наука, 1958. – 466 с.

10 Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: учебник / Под общ. ред. д.э.н., проф. А.В. Сидоровича; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М.: Дело и сервис, 2001. – 368 с. – (Серия «Учебники МГУ им. М.В. Ломоносова»). – ISBN – 5-86509-054-2.

11 Лукашин Ю., Рахлина Л. Производственные функции в анализе мировой экономики // Мировая экономика и международные отношения, 2004, №1, с.17–27.

12 Светуньков, И.С. Использование комплексных переменных в теории производственных функций // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2007, № 4.

13 Острая, О.В. Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Острая О.В. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. – 112 с.