

ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ ПРОВОДИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ У УЧАЩИХСЯ 5-6 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КАК ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Князева В.С.

Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) ОГУ, г. Орск

Умения проводить доказательные рассуждения входят в число основных интеллектуальных умений. Ведущая роль в формировании этих умений принадлежит геометрии, однако, как показал анализ школьной практики, успех в этой работе в значительной степени предопределен готовностью учащихся уже в начале курса выполнять различные виды деятельности, связанные с проведением доказательных рассуждений. Готовить школьников к проведению доказательных рассуждений следует уже в курсе математики 5-6 классов.

Следуя А.Н. Капиносову [7], мы под рассуждениями (проведением рассуждений) понимаем мыслительную деятельность, направленную на решение определенных задач, состоящую из актуализации некоторых ранее известных субъекту суждений и выполняемых на их основе переходов от одних суждений к другим. Под доказательными рассуждениями понимаются такие, в которых основаниями перехода от одних суждений к другим являются теоретические предложения (аксиомы, теоремы, определения некоторой математической теории).

В методической литературе выделяют четыре уровня проведения доказательных рассуждений:

- простого воспроизведения (предъявленная задача распознается субъектом, как ранее решенная и рассуждение представляет воспроизведение известного);
- обобщенного воспроизведения (рассуждение проводится на основе выделения общего в условии и требовании предъявленной задачи и ранее решенной или на основе распознавания задачи как принадлежащей к типу задач с известной схемой рассуждения);
- логического поиска (решение задачи отыскивается на основе выполнения действий выведения следствий и отыскания достаточных условий);
- логико-эвристический (выполнение действий выведения следствий или отыскания достаточных условий связано с применением различного рода эвристик).

Первые два уровня являются репродуктивными, а последние два – продуктивными. На уровне 5-6 классов учащихся надо учить проводить доказательные рассуждения на первых трех уровнях, четвертый уровень относится к более поздним ступеням обучения. Обучать учащихся умениям доказательно рассуждать в 5-6 классах надо в основном на числовом материале, ибо он занимает в этом курсе значительный удельный вес и он логически относительно прост. В свое время А.И. Маркушевич отмечал: «Логическая структура арифметических и алгебраических вопросов и задач, как правило, является простой, отчетливой, поэтому их следует в значительно большей мере,

чем это делалось до сих пор, привлекать в целях математического воспитания» [8, с.40].

Приведем примеры некоторых заданий, на которых может строиться работа по формированию у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, но прежде на двух задачах покажем, как должен строиться ответ школьников.

Задание 1. Число a – отрицательно. Положительным или отрицательным числом будет $(-8 + a)$? Ответ обосновать.

Ответ: Число $(-8 + a)$ – отрицательно, так как сумма отрицательных чисел – число отрицательное.

Задание 2. Может ли значение выражения $2ab - a - 3b$ быть отрицательным при отрицательных значениях a и b ? Ответ обосновать.

Ответ: Нет, ни при каких отрицательных значениях a и b значение указанного выражения не может быть отрицательным, так как при любых отрицательных значениях a и b каждое слагаемое выражения ($2ab$; $-a$; $-3b$) есть число положительное, а сумма положительных чисел всегда есть число положительное.

Укажем еще ряд заданий подобного характера.

- 1) Числа $a + p$ и a равны. Какое число обозначено буквой p ? Ответ обосновать.
- 2) $a + b = p$, $b + a = k$. Могут ли буквы p и k обозначать различные числа? Ответ обосновать.
- 3) $a - b = p$. Является ли число p разностью чисел $a + m$ и $b + m$? Ответ обосновать.
- 4) Число a делится на число b , число k не делится на b . Делится ли число ak на b ? Ответ обосновать.
- 5) Число a делится на число b , число k не делится на b . Делится ли число $a + k$ на b ? Ответ обосновать.
- 6) При делении числа a на 12 получим в остатке число 15. Правильно ли выполнено деление?
- 7) Доказать, что число 37 является делителем всех трехзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами.
- 8) Число b кратно 15. Доказать, что число b кратно 3.
- 9) $a = 30b$. Какой цифрой оканчивается запись числа a ? Ответ обосновать.
- 10) Для записи числа использованы только цифры 3, 7, 8. Делится ли это число на 5? Ответ обосновать.
- 11) Для записи числа использованы только цифры 0 и 5. Делится ли это число на 5? Ответ обосновать.
- 12) Верно ли утверждение: любое натуральное число является простым или составным? Ответ обосновать.
- 13) Доказать, что числа 21 и 55 взаимно простые числа. Ответ обосновать.
- 14) Могут ли два различных четных числа быть взаимно простыми? Ответ обосновать.
- 15) Запись числа a оканчивается цифрой 0, число b – цифрой 5. Могут ли числа a и b быть взаимно простыми? Ответ обосновать.

- 16) На координатной прямой отмечены точками С и А числа 7 и а так, что $OC \neq OA$. Являются ли числа 7 и а противоположными? Ответ обосновать.
- 17) Может ли число $|b|$ изображаться на координатной прямой точкой, которая лежит слева от начала отсчета? Ответ обосновать.
- 18) Числа $a - 4$ и $|a - 4|$ равны. Положительным или отрицательным является число $a - 4$, если известно, что $a - 4 \neq 0$? Ответ обосновать.
- 19) Число а отрицательное. Какое из чисел больше $b + a$ или b ? Ответ обосновать.
- 20) Два числа отмечены на координатной прямой точками, которые лежат по одну сторону от начала отсчета. Может ли сумме чисел соответствовать точка, которая лежит с другой стороны от начала отсчета? Ответ обосновать.
- 21) Может ли число 5 быть суммой двух отрицательных чисел? Ответ обосновать.
- 22) Модулем чисел а и b являются соответственно числа -а и -b. Положительным или отрицательным является число $a + b$? Ответ обосновать.
- 23) Число $b \neq 0$. Положительным или отрицательным является число b, если $7b = -7|b|$? Ответ обосновать.
- 24) Для чисел а, b, с, k, выполняются равенства $5a = c$, $5b = k$. Сравнить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{k}$. Ответ обосновать.
- 25) Доказать, что взаимно обратные чисел не могут иметь различные знаки.
- 26) На координатной прямой по разные стороны от начала отсчета отмечены точками числа а и b. Могут ли числа а и b быть взаимно обратными? Ответ обосновать.
- 27) Обосновать равенство $7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, не выполняя вычислений.
- 28) Доказать, что $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.
- 29) Доказать, что $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$.
- 30) $a + c = a$. Могут ли числа а и с быть взаимно обратными? Ответ обосновать.

Как показал анализ школьной практики, умения доказательно рассуждать не приобретаются учащимися спонтанно, их нужно целенаправленно формировать и развивать посредством специально подобранных задач. М.Е. Драбкина и И.Л. Никольская отмечают: «Если ограничиться только разбором образцов доказательств в классе и решением обычных (предлагаемых учебником) задач на доказательство, то только у отдельных, лучших учащихся стихийно вырабатываются соответствующие приемы мыслительной деятельности, но они не достаточно осознаются ими как общие приемы. Большинство же учащихся беспомощны, когда им приходится самим решать задачи на доказательство» [6, с. 6].

На пропедевтическом уровне школьников следует учить строить не только индуктивные, но и дедуктивные рассуждения, они-то и будут впоследствии положены в основу доказательства теорем. Рассмотрим два примера дедуктивных рассуждений.

Пример 1. Докажите, что числа $a = -135$ и $b = -207$ не обращают в нуль выражение $2 \cdot a = 3 \cdot \frac{a}{b} = 7 \cdot ab$.

Индуктивное рассуждение основывалось бы на непосредственной подстановке указанных значений a и b в выражение (значение выражения будет отлично от нуля).

Дедуктивное обоснование того, что $a = -135$ и $b = -207$ не обращают в нуль заданное выражение будет строиться следующим образом.

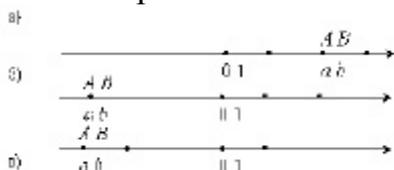
При подстановке в заданное выражение любых отрицательных значений a и b , каждое слагаемое этого выражения ($2a$; $-3 \cdot \frac{a}{b}$; $-7ab$) будет отрицательным числом, которые в сумме не могут дать нуль. Так как числа $a = -135$ и $b = -207$ отрицательны, то и они не обращают в нуль заданное выражение.

Пример 2. Рассмотрим, каким образом можно в курсе математики VI класса дедуктивно построить изложение вопроса о нахождении расстояния между двумя точками на координатной оси (этот вопрос в школьном учебнике изложен конкретно-индуктивным методом).

Центральным в курсе математики является само понятие расстояния между двумя точками, а нахождение расстояния между двумя точками на координатной оси – вопрос все же частный. В нашем изложении будем отталкиваться от общего понятия – расстояние между двумя точками.

Прежде, учащимся уже предлагались различные способы измерения расстояния между двумя точками: с помощью масштабной линейки, с помощью циркуля и масштабной линейки (в систематическом курсе геометрии будут даны и другие способы, в частности, основанные на теореме Пифагора, теоремах синуса и косинуса).

Для нахождения расстояния между двумя точками может быть использована координатная ось. Наложим координатную ось на две заданные точки. При этом возможны три разных случая (рисунок).



а) Точки A и B оказались по правую сторону от начала отсчета ($a > 0$, $b > 0$).

б) Точки A и B оказались по разные стороны от начала отсчета ($a < 0$, $b > 0$).

в) Точки A и B оказались по левую сторону от начала отсчета ($a < 0$, $b < 0$).

Заметим, что в каждом из трех случаев точки займут на координатной оси одно определенное место, которое характеризуется координатой точки.

Для нахождения длины отрезка AB в случае рис. 1 а, поступим следующим образом:

$$AB = OB - OA = b - a.$$

Для нахождения длины отрезка AB в случае рис. 1 б, следует поступить так:

$$AB = OB + OA = b + |a| = b - a$$

(при раскрытии $|a|$ знак поменялся на противоположный, так как число a отрицательно).

Для нахождения длины отрезка АВ в случае рис. 1 в, поступим так:
 $AB = OA - OB = |a| - |b| = -a - (-b) = -a + b = b - a$
(при раскрытии $|a|$ и $|b|$ знак менялся на противоположный, так как числа a и b отрицательны).

Итак, для нахождения расстояния между двумя точками на координатной оси, следует из координаты правой точки вычесть координату левой точки.

Затем, рассмотрев свойство модуля, а именно: $|a - b| = |b - a|$, учащимся можно сообщить, что длина отрезка АВ выражается формулой $AB = |a - b| = |b - a|$.

Список литературы:

1. Далингер В.А. Как доказывать теоремы: Приемы и методы доказательства // Вечерняя средняя школа. – 1991. – №2. – С. 65-67.
2. Далингер В.А. Об аналогиях в планиметрии и стереометрии // Математика в школе. – №6. – 1995. – 32–37.
3. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: Учебное пособие. – Омск: Изд-во Омского пединститута, 1990. – 127 с.
4. Далингер В.А. Чертеж учит думать // Математика в школе. – 1990. – №4. □– С. 32-35.
5. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.
6. Дрabbкина М.Е., Никольская И.Л. Обучение доказательным рассуждениям в 7-9 классах: Методические рекомендации для учителей математики. – М.: Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1990. – 39 с.
7. Капинос А.Н. Учись рассуждать: Учебные задания по математике для 5-6 классов. – М.: Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1986. – 27 с.
8. Маркушевич А.И. Об очередных задачах преподавания математики в школе. // На путях обновления школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1978. – С.29-48.