ЭВАРИСТ ГАЛУА – МАТЕМАТИК И РЕВОЛЮЦИОНЕР

Острая О.В., Хакимова Э.Р., Гайфулина Д.А.
ГОУ ВО «Оренбургский государственный университет», г. Оренбург

Знакомство с историей любой науки полезно для каждого человека. Для того, кто изучает ту или иную науку, или уже трудится в той или иной научной области, оно особенно важно. В частности, у математика осознание неразделимости логического и исторического в математических науках вызывает потребность в знании основных фактов истории математики, в понимании законов развития этой науки. Видный советский историк математики С.А. Яновская писала: «Чтобы разобраться в логической природе таких основных понятий математики, как понятие числа, функции, бесконечности, непрерывности, пространства, множества и многие другие, нужно обратиться к их истории». Обращаясь же к истории важнейших математических понятий и идей, мы не можем пройти мимо судеб ученых, причастных к разработке этих понятий и развитию этих идей.

Среди великих ученых прошлого выделяется человек, не доживший и до 21 года, но успевший за такую короткую жизнь сделать великое открытие в области алгебры. Все его научные труды занимают всего 60 страниц, содержание которых не давало покоя математикам всего мира в течение целого столетия. Это – выдающийся французский математик Эварист Галуа (рисунок 1).

Он родился в Бур-ля-Рене, южном предместье Парижа, 25 октября 1811 года и был вторым из троих детей Николя-Габриэля Галуа и Аделаиды-Мари Демант.

Рисунок 1 – Портрет Эвариста Галуа.

Воспитанник лицея Луи-ле-Гранд, Эварист Галуа проявил яркие способности к математике начиная уже с четвертого класса. Без труда освоив учебную программу, он начал знакомиться со статьями выдающихся учёных того времени. Особый интерес вызвали у него труды Ж.Л. Лагранжа Н.Х. Абеля о решении алгебраических уравнений произвольной степени.

Уже в 17 лет Эварист опубликовал свою первую научную работу «Демонстрация теоремы о непрерывных периодических дробях». Однако талант Галуа не находил признания, так как его идеи нередко превосходили уровень понимания преподавателей, кроме того, многое казалось ему очевидным и не требующим объяснений, что еще более затрудняло понимание содержания его статей.

В 1828–1829 годах на Галуа обрушивается череда несчастий: трагически погиб его отец, а сам он два года подряд безуспешно пытался поступить в Политехническую школу – самое престижное высшее учебное заведение в Париже того времени. Краткость решений и отсутствие пояснений на устном экзамене привели к тому, что Галуа не был туда принят.

Свою вторую статью, положившую впоследствии начало теории групп, Галуа направил в Академию наук 25 мая 1829 г. Однако эта работа не была рассмотрена на заседании Академии, как это было принято. Рецензентом работы был назначен О.Л. Коши, который и должен был выступить на заседании Академии с изложением и анализом её результатов. Однако Коши заболел и отменил свое выступление, попросив, чтобы его перенесли. Но и на следующем заседании он не представил работу Галуа, и причина этого осталась неизвестной.

В том же 1829 году Галуа удалось поступить в Высшую Нормальную школу, в которой он проучился всего год. Дело в том, что в это время политическая обстановка в стране сильно изменилась. В июле 1830 года в результате восстания республиканцев король Карл Х был вынужден эмигрировать. Галуа не просто разделял республиканские убеждения, он ни от кого их не скрывал и в последовавшие за революцией месяцы посещал собрания республиканцев, встречался с их лидерами и выступил в печати с резкими высказываниями о директоре своего учебного заведения, не позволившем студентам участвовать в уличных демонстрациях. После этого он и был исключен из Высшей Нормальной школы.

В то же время неудачи Галуа на научном поприще продолжались. Он отправил Ж-Б. Фурье на рецензию свою статью для участия в конкурсе на приз Академии – но спустя несколько дней Фурье неожиданно умер, так и не успев ознакомиться с работой, причем в оставшихся после его смерти бумагах рукопись Галуа не была обнаружена. Ещё одна статья, которую Галуа послал С.Д.Пуассону, была отвергнута.

Галуа продолжал участвовать в выступлениях республиканцев, и вёл себя при этом весьма вызывающе. На банкете 9 мая 1831 г. он произнес скандальный тост с угрозами новому монарху Луи-Филиппу, подняв вместе с бокалом кинжал. После этого Эварист был арестован и заключен в тюрьму Сант-Пелажи. Однако судебный процесс закончился оправданием: молодость подсудимого послужила смягчающим обстоятельством в глазах судей.

Второй раз Галуа был заключен в эту же тюрьму за незаконное ношение формы артиллерийской гвардии. Гвардия была распущена как угроза короне, поэтому поступок Галуа также был вызывающим. В тюрьме он заболел, и его перевели в больницу, которая стала последним известным местом его жительства. Здесь он встретил Стефани, дочь одного из врачей, которая помогала в больнице своему отцу. Скорее всего, ссора с ней стала главной причиной трагической гибели молодого революционера.

В предрассветные часы 30 мая 1832 года двадцатилетний математик Галуа писал своим друзьям Лебону и Делонэ о том, что ему предстоит дуэль и ничего с этим поделать невозможно. Другое письмо в ту же ночь было написано Огюсту Шевалье. Ему Галуа сообщал о своих новых открытиях, которые, как ему кажется, могли бы стать предметом важных научных статей. Галуа хотел, чтобы значение его работ оценили такие известные математики как Якоби и Гаусс.

Ни о причинах предстоящего поединка, ни о своем сопернике Галуа друзьям ничего не сообщил, однако известно, что перед дуэлью он получил два письма, подписанных «Стефания Д…». В них упоминалась какая-то ссора, в которой Галуа, видимо, был виновен и сам это признавал.

Всю ночь напролёт он писал, стараясь как можно больше сказать о своих научных результатах. Часто на полях встречается заметка: «У меня нет времени» (см. рисунок 2). То, что ему удалось изложить в эти последние часы перед рассветом, более чем на сто лет дало пищу для размышления математикам следующих поколений.

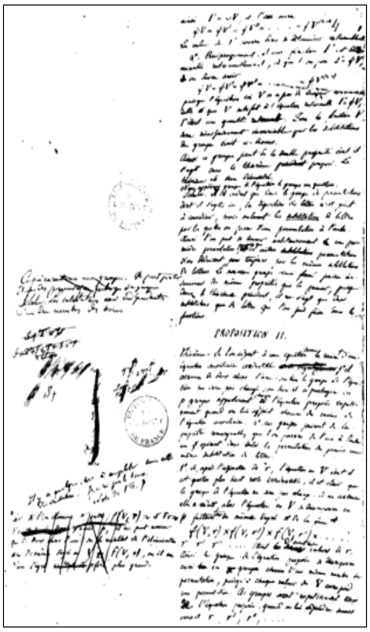

Рисунок 2 – Заметки на полях одной из статей Галуа.

Рано утром 30 мая Галуа был смертельно ранен на дуэли. Противники стреляли друг в друга из пистолетов на расстоянии нескольких метров. Пуля попала Галуа в живот. Несколько часов спустя один из местных жителей, проходя через парк по пути на работу, случайно наткнулся на раненого и отвез его в больницу. Обстоятельства дуэли так и не удалось выяснить, несмотря на то, что ещё сутки Галуа был жив и в сознании. Он успел проститься с младшим братом Альфредом, который был уверен, что дуэль была подстроена политическими противниками. Однако неизвестным осталось даже то, с кем именно стрелялся Эварист. В десять часов утра 31 мая 1832 года он скончался и был похоронен 2 июня.

Математические работы Галуа, по крайней мере, те, что сохранились, составляют всего шестьдесят страниц. Никогда ещё труды столь малого объёма не приносили автору такой широкой известности.

Галуа пытался найти общее решение уравнения произвольной степени, то есть выразить его корни через коэффициенты, используя только арифметические действия и извлечение корней. Когда это удается, говорят, что алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах.

Вопрос об условиях разрешимости в радикалах алгебраического уравнения произвольной степени был в это время чрезвычайно актуален. Метод решения должен быть общим, применяться ко всем подобным уравнениям и включать лишь четыре элементарные операции (сложение, вычитание, умножение и деление) и операцию извлечения корня.

Например, решение квадратного уравнения общего вида получается в результате извлечения квадратного корня из некоторой комбинации коэффициентов (дискриминанта уравнения):

$$ax^2 + bx + c = 0\,,\ D = b^2 - 4ac\,,\ x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Общее решение кубического уравнения сводится к извлечению кубического корня:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0\,.$$

Если $y = x - \frac{a}{3}$, то получится «неполное» кубическое уравнение вида:

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

Тогда:

$$x = 3\sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + 3\sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$ (Формула Тартальи – Кардано).

Решение уравнения четвёртой степени общего вида требует извлечения корней четвёртой степени.

Разработку этой проблемы продолжил Нильс Хенрик Абель (1802−1829), который в 1824 г. доказал неразрешимость в радикалах алгебраического уравнения пятой степени общего вида. Следующий, завершающий, шаг в изучении проблемы разрешимости был сделан Э. Галуа, который нашёл необходимое и достаточное условие для того, чтобы корни уравнения допускали представление через радикалы из выражений, связывающих коэффициенты уравнения.

Понять теорему Галуа несложно, но предварительно нужно усвоить несколько понятий.

Пусть имеется *n* предметов, которые мы будем обозначать натуральными числами $1, 2, \ldots, n$. Подстановкой называется преобразование множества этих чисел в таблицу. Каждая подстановка заключается в том, что на месте числа, стоящего в верхней строчке, ставится подписанное под ним число в нижней строчке. Из n чисел можно сделать $n!$ различных подстановок. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно сделать следующие подстановки:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

С подстановками из одного и того же числа предметов можно совершать различные алгебраические операции. Прежде всего, подстановки можно перемножать.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножить две подстановки – значит произвести их одну за другой. В результате попарного перемножения подстановок $P_0 - P_5$ получится таблица 1.

Таблица 1 – Результаты умножения двух подстановок

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_3
P_2	P_2	P_0	P_1	P_5	P_3	P_4
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_3	P_5	P_1	P_0	P_2
P_5	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	P_0

У каждой подстановки есть обратная к ней, то есть такая подстановка, которая, будучи умножена на исходную, даст подстановку P_0. Эта последняя подстановка называется тождественной. При умножении подстановок тождественная подстановка играет роль единицы.

Вместо изучения самого уравнения Галуа изучал группы подстановок корней уравнения. Именно Галуа ввел термин «группа». В современной алгебре группой называется совокупность абстрактных элементов, обладающих определенными общими свойствами. Если эти элементы − действительные числа, то главное общее свойство группы состоит в том, что результат умножения любых двух ее элементов также является элементом группы и есть также действительное число.

Пусть G – какая-либо группа, а a и b – её элементы. Выражение $[ab] = ab\ a^{-1}b^{-1}$ называется коммутатором элементов a и b. Оно служит корректирующим членом для того, чтобы поменять местами a и b: $ab = [ab]ba$.

Если группа подстановок коммутативна, то коммутатор любых двух её элементов является тождественной подстановкой. Чем больше в группе коммутаторов, тем значительнее отклонение этой группы от коммутативной.

Назовём производной группой группы G её подгруппу G', состоящую из всевозможных произведений вида $[a_1b_1][a_2b_2]..[a_kb_k]$ с $a_1,\dots,a_k,\dots,b_1,\dots,b_k$ из G.

Ясно, что если группа подстановок коммутативна, то G' состоит всего лишь из одной тождественной подстановки.

Для G' также можно рассмотреть производную группу $(G')' = G''$, называемую второй производной группой группы G. Продолжая этот процесс, мы получим k-ую производную группу группы G: $G^{(k)} = G^{(k-1)'}$. Ясно, что $G^{(k)} \le G^{(k-1)}$. Таким образом, возникает цепочка вложенных друг в друга подгрупп: $... \le G^{(k)} \le G^{(k-1)} \le ... \le G'' \le G' \le G$. Если эта цепочка обрывается на подгруппе, состоящей лишь из тождественной подстановки, т.е., если $G^{(m)} = e$ для некоторого числа m, то группа G называется разрешимой.

Ясно, что любая коммутативная группа разрешима.

Теперь мы сможем понять основную идею теории Галуа. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ – произвольное уравнение степени *n*, где $a_0, a_1,..., a_n$ – заданные числа. Ещё в конце XVIII века К.Ф.Гауссом была доказана основная теорема алгебры, согласно которой это уравнение должно иметь *n* комплексных в общем случае корней $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Мы хотим выяснить, существуют ли формулы, выражающие эти корни через коэффициенты уравнения $a_0, a_1,..., a_n$ с помощью четырёх арифметических действий и извлечения корней. Для простоты будем считать, что $a_0, a_1,..., a_n$ – рациональные числа, а все корни уравнения $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ различны. Свяжем с $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ множество $Q(f) = \{P(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\}$, где P – многочлен от n переменных с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим преобразование этого множества, переводящее сумму чисел в сумму, произведение в произведение и оставляющее на месте рациональные числа. Если β – корень нашего уравнения, т.е., если $a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + ... + a_n = 0$, а φ – такое преобразование, то

$$\varphi\left(a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + ... + a_n\right) = a_0\varphi\left(\beta^n\right) + a_1\varphi\left(\beta^{n-1}\right) + ... + a_n = 0.$$

Значит, $\varphi(\beta)$ – корень того же уравнения, то есть преобразование φ просто переставляет корни $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ между собой и тем самым задаёт некоторую подстановку корней уравнения: $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_3} \dots \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$. Все такие подстановки образуют некоторую группу. Эта группа называется группой Галуа уравнения $f(x) = 0$ и обозначается $G(f)$.

Эварист Галуа показал, что алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда группа Галуа этого уравнения – разрешимая группа. Оказалось, что наибольшая возможная группа подстановок корней уравнения − неразрешимая, если степень этого уравнения $n > 4$, следовательно, уравнение степени $n > 4$ не разрешимо в радикалах.

Теперь можно сформулировать основную теорему Галуа:

Уравнение $f = 0$ разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима группа Галуа $G(f)$. То есть общее уравнение степени $n \geq 5$, то общее уравнение степени $n \geq 5$ не разрешимо в радикалах, так как неразрешима группа Галуа.

Список литературы:

1. *Соловьев Ю.П. Эварист Галуа / Рассказы о математике и математиках. Сб. ст. / Ю.П. Соловьев. – М.: МЦНМО, 2000. – с. 80-90.*
2. *Стиллвелл, Д. Математика и её история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: 2004. – 531 с.*
3. *Саймон, С. Великая теорема Ферма / С. Саймон. – Москва, 2000. – 162 с.*
4. *Чеботарёв, Н.Г Эварист Галуа Сочинения / Н.Г. Чеботарёв, П. Дюпюи. – Москва: 1936. – 317 с.*
5. *Инфельд, Л. Эварист Галуа: жизнь замечательных людей / Л. Инфельд. – Москва: 1960. – 183 с.*
6. *Дальма, А. Эварист Галуа: революционер и математик / А.Дальма, П. Дюпюи. – Москва: 2001. – 176 с.*
7. *Макеев, Н.Н. Выдающиеся открытия 19 века (к 200 летию со дня рождения Эвариста Галуа) / Н.Н. Макеев. – Саратов: 2012. – 75 с.*