К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ И ПРАКТИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ВУЗЕ

Пастухов Д.И.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

В процессе формирования знаний, в выработке умения и навыка по математике и математическим дисциплинам практические занятия занимают важное место.

В связи с этим на практические занятия отводится (выделяется) больше учебных часов, чем на лекционные занятия. Число лекций сокращается, а число практических занятий растет.

По некоторым математическим дисциплинам это соотношение составляет один к двум. На одну лекцию приходится два практических занятия.

На практических занятиях формируются, в основном, компетенции, то есть отрабатываются требования: знать, уметь и владеть.

В настоящее время сложилась следующая структура практического занятия:

1. Анализ теоретических положений материала, вынесенного на практическое занятие.
2. Практическая часть.
3. Заключение.

Анализ теоретического материала на практическом занятии по математическим дисциплинам обуславливается тем, что необходимо добиваться полного понимания и усвоения методов решения математических задач, выяснения (разъяснения) теоретических положений и контролем самостоятельной работы студентов. При реализации указанных положений сложились такие формы:

1. Письменный опрос теоретического материала.
2. Фронтальный разбор и опрос по основным положениям отрабатываемого материала.
3. В виде введения элементов семинарского занятия.
4. Индивидуальный опрос двух-трех студентов.

С точки зрения реализации контролирующей функции обучения часто применяется письменный опрос. Он охватывает всех студентов в группе и определяет не только факт рассмотрения теоретического материала по лекциям или учебникам, но и уровень его понимания. Однако, и это бывает чаще всего, он является письменным пересказом конспекта лекций, не всегда последовательным и даже с ошибками. Поэтому письменный опрос лучше проводить по материалу, который анализировался на одном или двух занятиях и применялся при решении конкретных задач или примеров.

При проведении практических занятий по темам, где решение практических задач базируется на теоретическом материале большого объема или на сложных понятиях, необходимо ввести элементы семинарского занятия, выдав вопросы и указав положения, которые надо провести с доказательством. Одновременно это развивает у студентов умение высказаться и отстоять свои доводы в обществе учебной группы.

Например, практическое занятие в математическом анализе по «локальному экстремуму» проводится с элементами семинарского занятия, а практическое занятие по методам интегрирования полностью направлено на выработку умения и навыка по технике интегрирования.

Для развития индивидуальных способностей студентов надо при анализе теоретического материала давать возможность двум-трем студентам изложить свои знания по рассматриваемой теме или материалу.

Содержание практической части занятия определяется набором примеров и задач, которые реализуют знания в умения владеть практическими вычислениями, аналитическими преобразованиями основных положений рассматриваемой темы. Главный вопрос: как осуществлять решение этих примеров и задач?

Сложился достаточно устойчивый стереотип реализации решения примеров и задач, а именно, преподаватель показывает на двух-трех примерах или задачах, как решаются рассматриваемые примеры и задачи, а затем приглашаются (вызываются) студенты для индивидуального решения на доске или с помощью компьютерный программ, с выводом хода решения и результата на экран.

Преподаватель помогает решающему студенту и одновременно осуществляет контроль над самостоятельным решением примера (задачи) другими студентами группы. Это очень важный момент, так как находятся студенты, которые просто переписывают в свою рабочую тетрадь решение, получаемое другими учащимися на доске или экране.

Для развития индивидуальных способностей студентов (особенно успевающих на «хорошо» и «отлично») обязательно выдаются примеры сверх тех, что решаются всей группой. Студенты, справившиеся с дополнительными заданиями, обязательно оцениваются.

Практическая часть всегда, в основном, содержит самостоятельную работу. Это позволяет контролировать уровень приобретенного (выработанного) умения каждым студентом.

В заключении надо обязательно подвести итоги проделанной работы как по объему, так и по качеству выполнения ее студентами и выдать задание для самостоятельной работы дома.

В качестве примера практического занятия с элементами семинарского можно рассмотреть следующий полный конспект занятия.

Тема: «Изолированные особые точки аналитической функции. Вычеты и их применение»

Поставить цель настоящего занятия: на данном занятии будет изучено поведение однозначной аналитической функции в окрестности ее изолированных особых точек. Знание этого поведения не только позволяет глубже проникнуть в природу аналитических функций, но и находит прямое практическое применение в многочисленных приложениях теории функции комплексной переменной

1 Изолированные особые точки и их классификация

1.1 Какие точки называются особыми?

Определение 1. Точка z_0 называется особой точкой функции $f(z)$, если функция в ней не является аналитической.

1.2 Какая особая точка называется изолированной?

Определение 2. Особая точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ в точке z_0 не является аналитической, а в точках ее окрестности она аналитична.

1.3 Перечислить типы изолированных особых точек однозначной функции и дать их определения.

Существует три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции $f(z)$ в их окрестности: 1. Устранимая; 2. Полюс; 3. Существенно особая точка.

Определение 3. Особая изолированная точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел этой функции, то есть

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C.$$

Определение 4. Особая изолированная точка z_0 является полюсом k-го порядка для функции $f(z)$, если существует конечный предел произведения $(z-z_0)^k f(z)$ при $z \to z_0$ и он не равен нулю, то есть

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) = C \neq 0.$$

Полюс первого порядка называется простым полюсом. Если z_0 - простой полюс, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, что означает $|f(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$.

Определение 5. Особая изолированная точка z_0 называется существенно особой точкой, если она не является устранимой или полюсом, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

1.4 Описать поведение функции в окрестности изолированных особых точек:

Если точка z_0 - устранимая особая изолированная точка функции $f(z)$, то в её окрестности функция ограничена и может быть представлена в виде $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $m > 0$ и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа устремления z к z_0.

В существенно особой точке не существует конечного или бесконечного предельного значения аналитической функции.

1.5 Какая точка z_0 называется нулем k-го порядка функции $W = f(z)$

Определение 6. Точка z_0 называется нулем k-го порядка для функции $f(z)$, если в этой точке z_0 функция равна нулю, т.е. $f(z_0) = 0$, существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = c \neq 0$ и он не равен нулю.

1.6 Сформулировать теорему, выражающую связь между нулем и полюсом функции

Теорема: Если z_0 - полюс k-го порядка для функции $W = f(z)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ - это ноль k-го порядка и наоборот.

1.7 Решить следующие задачи

Задача 1. Найти особые точки, установить их тип для следующих функций:

а) $f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^2}$

Образец оформления решения задачи

1. Функции $z + 2$ и $z(z-1)^2$ являются аналитическими во всей плоскости и знаменатель обращается в ноль лишь в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, числитель в этих же точках отличен от нуля. Поэтому точки $z = 0$ и $z = 1$ являются изолированными особыми точками функции $W = \frac{z+2}{z(z-1)^2}$.

2. Определим тип этих точек, для этого рассмотрим поведение функции в окрестности этих точек.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z+2}{z(z-1)^2} = \infty, \quad \lim_{z \to 1} \frac{z+2}{z(z-1)^2} = \infty$$

Следовательно, особые точки являются полюсами.

3. Определим кратность полюсов. Она равна кратности нулей знаменателя.

$z = 0$ - нуль кратности 1, а следовательно полюс простой.

$z = 1$ - нуль двукратный, следовательно полюс 2-ой кратности.

б) $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ Ответ: $z = 1$ существенно особая точка в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ Ответ: $z=0$ устранимая особая точка.

2 Определение вычетов функции

2.1 Что называется вычетом функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки?

Определение 6: Вычетом функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 называется, деленный на $2\pi i$ интеграл от этой функции по произвольной замкнутой кривой «С», содержащей внутри себя рассматриваемую точку z_0 и никаких других особых точек

$$\text{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

Чему равен вычет функции относительно устранимой особой точки?

Если точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то функция $f(z)$ аналитическая в области ограниченной замкнутой кривой С, а тогда $\int_C f(z)dz=0$, т.е. $\text{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0}=0$. Вычет относительно устранимой особой точки равен нулю.

Записать формулы для вычисления вычета относительно простого полюса и полюса кратности «k».

Если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, то вычет функции $f(z)$ относительно простого полюса z_0 вычисляется по формуле

$$\text{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

Если z_0 - полюс k-го порядка для функции $f(z)$, то вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0 производится по формуле

$$\text{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z))$$

Решить следующие задачи.

Задача 2. Вычислить вычеты относительно особых точек следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2}$

Образец оформления задачи.

1. Определим имеет ли данная функция особые точки: функции z^2+1 и $(z-1)(z+2)^2$ являются аналитическими во всей плоскости и знаменатель обращается в нуль лишь в точках $z_1=1$ и $z_2=-2$, числитель же в этих точках

отличен от нуля, поэтому точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$ являются изолированными особыми точками функции $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2}$.

2. Определим тип этих точек, для этого рассмотрим поведение функции в окрестности этих точек

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2} = \infty, \quad \lim_{z\to -2}\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2} = \infty.$$

Следовательно, особые точки являются полюсами.

3. Определим их кратность. Она равна кратности нулей знаменателя.

$z = 1$ - нуль кратности 1, а следовательно, точка $z = 1$ - простой полюс.

$z = -2$ - нуль двукратный, следовательно, и полюс 2-го порядка.

4. Найдем вычеты относительно полюсов. Вычет относительно полюса 1-го порядка вычисляется по формуле

$$\textit{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \Rightarrow$$

$$\textit{выч}\,\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2}\bigg|_{z=1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{2}{9}$$

Вычет относительно полюса кратности «k» будет вычисляться по формуле

$$\textit{выч}\, f(z)\big|_{z=z_0} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z))$$

Тогда при $k = 2$ получаем

$$\textit{выч}\, f(z)\big|_{z=-2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -2}\left((z+2)^2\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2}\right)' = \lim_{z\to -2}\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2}\frac{2z(z-1)-(z^2+1)}{(z-1)^2} = \lim_{z\to -2}\frac{2z^2-2z-z^2-1}{(z-1)^2} = \lim_{z\to -2}\frac{z^2-2z-1}{(z-1)^2} = \frac{7}{9}$$

б) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$

3 Вычисление интегралов с помощью вычетов

3.1 Сформулировать (доказать) основную теорему о вычетах:

Теорема: Пусть кривая «С» ограничивает односвязную область D, а функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{D}$. За исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k (k = 1,2,...,n)$, лежащих внутри области D, тогда

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \textit{выч}\, f(z)\big|_{z=z_k}$$

Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы а) $\oint\limits_C \frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}dz$, где $C:|z-i|=4$ Ответ: $-\frac{\pi}{4}$

б) Вычислить $\oint\limits_c \frac{zdz}{z^4-1}$, где $C:|z|=\frac{3}{2}$ Ответ: $-\frac{\pi}{2}$

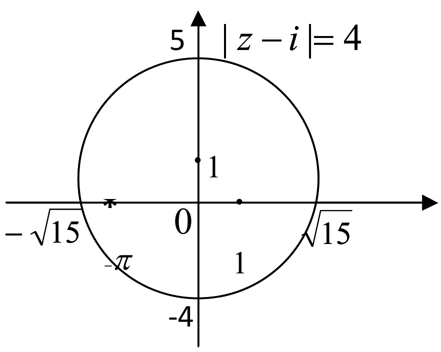
в) Вычислить тот же интеграл б), изменив контур интегрирования: $C:|z|=2$ Ответ: 0

Образец решения задачи а)

1. Определяем особые точки функции $f(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}$

1.1 Функции e^{2iz} и $(z+\pi)^3$ являются аналитическими во всей плоскости (Z) и знаменатель обращается в нуль лишь в точке $z=-\pi$, числитель же в этой точке отличен от нуля. Поэтому точка $z=-\pi$ является изолированной особой точкой функции $f(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}$.

1.2 Определяем тип этой точки для $f(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}$. Рассмотрим функцию $\frac{1}{f(z)}=\frac{(z+\pi)^3}{e^{2iz}}$. Для этой функции точка $z=-\pi$ есть нуль третьего прядка. Следовательно, она является полюсом третьего порядка для функции $f(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}$. Других особых точек функция $f(z)$ не имеет.



2. Строим кривую $C:|z-i|=4$ и наносим точку $z=-\pi$ на плоскость (Z) и определяем, что особая точка $z=-\pi$ находится внутри области ограниченной кривой «С», т.е. окружностью $|z-i|=4$.

3. Вычисляем интеграл по формуле

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} выч\, f(z)\Big|_{z=z_k}$$

$$\oint\limits_C \frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}dz = 2\pi i\, выч \frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}\Bigg|_{z=-\pi},$$

где

$$\text{выч}\left.\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}\right|_{z=-\pi} = |k=2| = \frac{1}{2!}\lim_{z\to-\pi}\left((z+\pi)^3\frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to-\pi}\left(2ie^{2iz}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}4i^2\lim_{z\to-\pi}\left(e^{2iz}\right) = -2e^{2iz} = -2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = -2 \Rightarrow$$

$$\oint\limits_C \frac{e^{2iz}}{(z+\pi)^3}dz = -4\pi i$$

Подвести итоги занятия.

Задание на самостоятельную (домашнюю) работу.

Решить задачи

1. Найти особые точки и исследовать их характер, если $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^3}$

2. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$

3. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(1+z)^2(z+2)}$ $C:|z|=1,5$

Список литературы

1. Ахметова, Д., Гурье, Л. Преподаватель ВУЗА и инновационные технологии // Высшее образование в России, 2001. -№4 - с. 138-144.

2. Костенко, И.П. Преподавание математики: смена парадигмы? / И.П. Костенко // Высшее образование в России, 2001. - №4-с. 159-160.

3. Федоров, А., Дудкина, Н., Асеев, Н. Оценка мастерства преподавателя // Высшее образование в России, 2001. - №3- с.41-46.