МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра математического анализа

И. К. ЗУБОВА

ТЕОРИЯ РЯДОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ИХ ИСТОРИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2003

ББК 22.16
З 91
УДК 517.5

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент Л.М. Невоструев

Зубова И. К.

З 91 Теория рядов. Основные понятия в их историческом развитии: Методические указания. — Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. — 28 с.: ил.

Методическое пособие посвящено основным понятиям теории рядов. Предлагается краткий обзор истории формирования этих понятий, выявляющий связь теории рядов с теорией дифференциальных уравнений, математической физикой, теорией функций. Рассматриваются примеры разложения функций в ряд Фурье.

Пособие рекомендуется преподавателям и студентам всех специальностей ГОУ ОГУ.

ББК 22.16

Введение

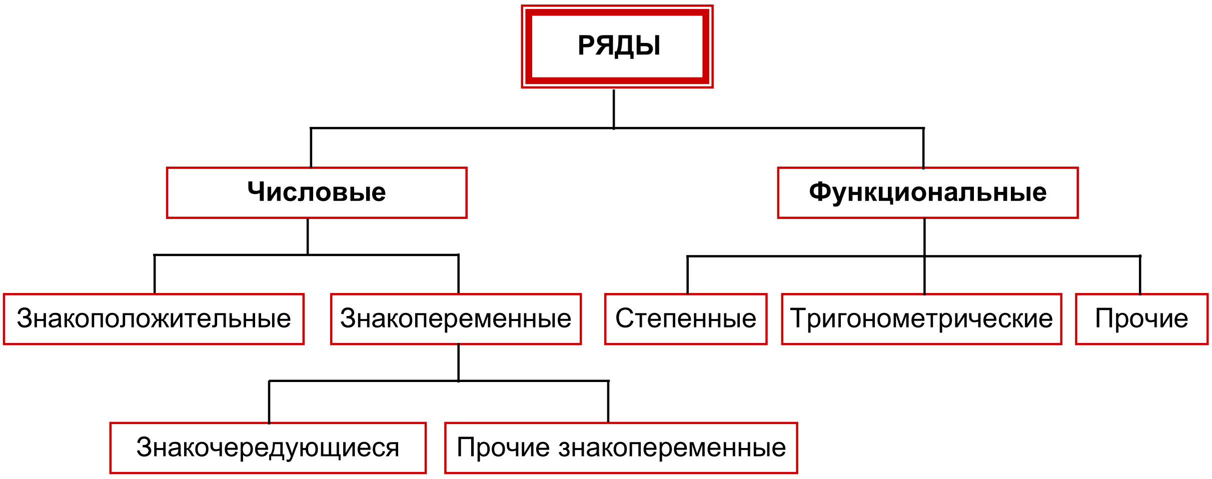
Изучение теории рядов, как, впрочем, и изучение любой математической теории, начинается со знакомства с ее основными понятиями, с установления связей между ними и их свойств, а затем указывается, для решения каких практических задач используется построенная теория.

Однако естественный (исторической) ход формирования научной теории почти никогда не совпадает с ходом ее изучения. Чаще всего в процессе развития науки практические задачи ставили ученых перед необходимостью использования того или иного научного аппарата, а уже потом сам аппарат усовершенствовался, обобщался, обретал математическую строгость. Нам приходится изучать уже сформировавшуюся теорию по порядку, начиная с основных ее понятий. Однако знание истории решения той или иной задачи часто объясняет необходимость этого решения и его применения, помогает выработать более общий взгляд на изучаемый вопрос.

В данном пособии дается исторический обзор вопросов, связанных с числовыми и функциональными рядами. Этот обзор может помочь изучающему теорию рядов увидеть ее связь с различными разделами математики, и поэтому пособие рекомендуется студентам всех специальностей.

1 Числовые и функциональные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Ряды, рассматриваемые в курсе, расположим в виде следующей блок-схемы:



Пусть задана числовая последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots$. Символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ называется числовым рядом.

Числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots$ называются членами ряда.

Теперь зададим функциональную последовательность:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_n(x),\ \ldots$$

Символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ называется функциональным рядом.

Сумма конечного числа членов числового ряда называется частичной суммой ряда:

$$S_1 = x_1$$

$$S_2 = x_1 + x_2$$

....

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Аналогично определяется понятие частичных сумм и для функционального ряда:

$$S_1(x) = f_1(x)$$

$$S_2(x) = f_2(x) + f_2(x)$$

....

$$S_n = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Если у последовательности частичных сумм числового или функционального ряда существует конечный предел при $n \to \infty$, то этот предел называется суммой ряда, а сам ряд называется сходящимся.

Сумма сходящегося числового ряда представляет собой число. Суммой сходящегося функционального ряда является некоторая функция.

Если в функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ подставить конкретное значение $x = x_0$, то получится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Если он сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда. Множество D всех точек сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется областью сходимости этого ряда. В области сходимости ряда его остаток после n-го члена $f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Часто бывает удобно разложить ту или иную функцию в функциональный ряд, который сходится к ней на некотором множестве. Другими словами, нередко ставится такая задача: пусть дана функция *f(x)*. Найти такой функциональный ряд, который на множестве D сходится и сумма его есть функция *f(x)*.

Однако не следует думать, что по такой же схеме действовали математики, с именами которых мы связываем сегодня формирование теории рядов. Эта теория создавалась в тесной связи с теорией приближенного представления функций в виде многочленов. Впервые это сделал И. Ньютон (1642—1727). В 1676 г. в его письме к секретарю Лондонского Королевского Общества появилась формула:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{m!}x^m,$$

которую мы знаем как формулу бинома Ньютона. Здесь мы видим функцию $(1 + x)^m$, представленную в виде многочлена. Но если число m не является натуральным, в правой части равенства получается не полином, а бесконечная сумма слагаемых, то есть ряд.

Развивая идею Ньютона, английский математик Брук Тейлор (1685—1731) в 1715 г. доказал, что любой функции, имеющей в точке x_0 производные всех порядков, можно сопоставить ряд:

$$f(x) \to f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Мы не можем пока поставить знак равенства между функцией *f(x)*, принимающей конечное значение для любого значения x_0, и стоящим справа функциональным рядом. Для того чтобы вместо знака «→» можно было поставить знак равенства, необходимо провести некоторые дополнительные рассуждения, связанные именно с бесконечностью числа слагаемых в правой части равенства и касающиеся области сходимости ряда.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид, в котором называется формулой Маклорена:

$$f(x) \to f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Колин Маклорен (1698—1746), ученик Ньютона, в работе «Трактат о флюксиях» (1742) установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, — единственный, и это будет ряд Тейлора, порожденный такой функцией. В формуле бинома Ньютона коэффициенты при степенях x представляют собой значения $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, где $f(x) = (1 + x)^m$.

Итак, ряды возникли в XVIII в. как способ представления функций, допускающих бесконечное дифференцирование. Однако функция, представляемая рядом, не называлась его суммой, и вообще в то время не было еще определено, что такое сумма числового или функционального ряда, были только попытки ввести это понятие.

Например, Л. Эйлер (1707—1783), выписав для функции соответствующий ей степенной ряд, придавал переменной x конкретное значение x_0. Получался числовой ряд. Суммой этого ряда Эйлер считал значение исходной функции в точке x_0. Но это не всегда верно.

Рассмотрим пример. Пусть дана функция $\dfrac{1}{1+x}$. Это сумма геометрической прогрессии, поэтому соответствующий ей степенной ряд будет иметь вид: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

Пусть $x = 1$. Подставив это значение в степенной ряд, получим числовой ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Эйлер, полагая и в исходной функции $x = 1$, получал $\dfrac{1}{2}$ и считал, что это и есть сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Он обосновал это следующим образом: если ввести обозначение $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S$ и затем перенести первое слагаемое в правую часть, получим: $-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = S - 1$. Но тогда все, что останется в левой части равенства, можно считать равным $-S$. Значит, получается: $-S = S - 1$, откуда $1 = 2S;\ S = \dfrac{1}{2}$.

Однако последовательность частичных сумм числового ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ не имеет предела, т.е. этот ряд расходится. Степенной ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ сходится только в интервале (–1, 1), и именно в этом интервале функция $\dfrac{1}{1+x}$ разлагается в ряд $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$.

О том, что расходящийся ряд не имеет суммы, ученые стали догадываться только в XIX в., хотя в XVIII в. многие, и прежде всего Л. Эйлер, много работали над понятиями сходимости и расходимости. Эйлер называл ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходящимся, если его общий член u_n стремится к нулю при возрастании n. Однако это условие лишь необходимо для сходимости ряда. Возможны случаи, когда общий член ряда стремится к нулю, а ряд расходится, например, расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, общий член которого, очевидно, стремится к нулю.

В теории расходящихся рядов Эйлер получил немало существенных результатов, однако результаты эти долго не находили применения. Еще в 1826 г. Н. Г. Абель (1802—1829) называл расходящиеся ряды «дьявольским измышлением». Результаты Эйлера нашли обоснование лишь в конце XIX в. В современной математике расходящиеся ряды составляют важный раздел.

Вернемся к вопросу о сумме сходящегося ряда. В формировании этого понятия большую роль сыграл французский ученый О. Л. Коши (1789—1857). Он сделал чрезвычайно много не только в теории рядов, но и в теории пределов, в разработке самого понятия предела. В любом курсе математического анализа встречается много теорем Коши, связанных с этим понятием. Именно Коши заявил в 1826 г., что расходящийся ряд не имеет суммы. Он же сформулировал критерий сходимости рядов.

В сходящемся ряде $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n > 0$, величина $\left|S_{n+p} - S_n\right|, \forall p \in N$ стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Более и более точные приближения одной и той же величины должны сами между собой меньше и меньше различаться. Из этого критерия следует и необходимый признак сходимости, который был известен еще в XVIII в.: если ряд сходится, его общий член стремится к нулю.

В самом деле, из сходимости ряда имеем:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| \to 0, \forall p \in 1, 2, \dots .$$

Можно представить, что $p = 1$. Тогда

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}, \quad \left|u_{n+1}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Особое значение критерия Коши заключается в том, что он не только необходимое, но и достаточное условие сходимости ряда. Иными словами, если в некотором ряде разность двух частичных сумм $S_{n+p} - S_n$, т.е. величина $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$ по модулю может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом n и $\forall p = 1, 2, \dots$, то ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится.

На практике мы обычно пользуемся не критерием Коши, а четырьмя достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов.

1.1 Признаки сравнения, доказанные Коши

Теорема 1. Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

Если члены ряда (1) не больше членов ряда (2), т.е.

$$u_n \le v_n \; (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Теорема 2. Пусть даны ряды (1) и (2). Если члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2), т.е.

$$u_n \ge v_n \tag{4}$$

и ряд (2) расходится, то и ряд (1) расходится.

Теорема 3 (предельная форма признака сравнения). Пусть даны два ряда (1) и (2). Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A > 0, \tag{5}$$

то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

1.2 Признак Д'Аламбера

В 1768 г. французский математик и философ Ж. Л. Д'Аламбер исследовал отношение последующего члена к предыдущему в биномиальном ряде и показал, что если это отношение по модулю меньше единицы, то ряд сходится. Коши в 1821 г. доказал теорему, излагающую в общем виде признак сходимости знакоположительных рядов, называемый теперь признаком Д'Аламбера.

Теорема 4. Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{6}$$

отношение $(n + 1)$-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет конечный предел l, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{7}$$

то:

1) ряд сходится в случае $l < 1$,

2) ряд расходится в случае $l > 1$.

В случае $l = 1$ теорема не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (1).

Замечание. Ряд будет расходиться и в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Это следует из того, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то, начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ или $u_{n+1} > u_n$.

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ не существует или равен единице, то признак Д'Аламбера не дает возможности установить, сходится ряд или расходится. Такой ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, но отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ для всех номеров *n,* начиная с некоторого, больше единицы, то ряд расходится. Это следует из того, что если $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то $u_{n+1}>u_n$ и общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$ [5].

1.3 Радикальный признак Коши

Теорема 5. Если для ряда с положительными членами

$$u_1+u_2++u_3...+u_n+...$$

величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то:

1) в случае $l<1$ ряд сходится;
2) в случае $l>1$ ряд расходится.

Как и в признаке Д'Аламбера, случай $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l=1$ требует дополнительного исследования, так как среди рядов, удовлетворяющих этому условию, могут встретиться как сходящиеся, так и расходящиеся.

Во всех случаях, когда признак Д'Аламбера дает ответ на вопрос о сходимости ряда, этот ответ можно получить и с помощью признака Коши. Обратное утверждение неверно, т.е. признак Коши сильнее признака Д'Аламбера. Ясно, однако, что во многих случаях и этого признака недостаточно для характеристики поведения ряда.

1.4 Признак Раабе

Сформулируем признак, полученный швейцарским математиком Йозефом Людвигом Раабе (1801—1859). При использовании этого признака данный ряд сравнивается со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$ или расходящимся $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Введем так называемую варианту Раабе:

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_n+1}-1\right).$$

Признак Раабе: если при достаточно больших *n* выполняется неравенство $R_n\geq r$, где r — постоянное число, большее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $R_n\leq 1$, то ряд расходится.

На практике применяется преимущественно *предельная форма признака Раабе.*

Допустим, что варианта R_n имеет предел (конечный или нет):

$$\lim_{n\to\infty}R_n=R .$$

Тогда при $R>1$ ряд сходится, а при $R<1$ — расходится.

Сравним признаки Д'Аламбера и Раабе.

Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} = D_n$ — варианта Д'Аламбера. Если $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$ существует и отличен от единицы, то для $R_n = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right)$ существует предел, равный $+\infty$ при $D < 1$ и равный $-\infty$ при $D > 1$. Таким образом, если признак Д'Аламбера дает ответ на вопрос о поведении данного ряда, то признак Раабе и подавно его дает. При этом все такие случаи охватываются двумя значениями R: $R = \pm\infty$. Все остальные значения R, кроме $R = 1$, также дают ответ на вопрос о сходимости ряда, причем соответствуют случаям, когда $D = 1$ и признак Д'Аламбера ответа на этот вопрос не дает.

Если же $R = 1$, то и признак Раабе не подходит для исследования ряда. В этом случае можно обратиться к еще более сильным признакам.

1.5 Признак Куммера

Признак, принадлежащий немецкому математику Эрнсту Эдуарду Куммеру (1810—1893), можно рассматривать как общую схему для построения признаков сходимости рядов.

Признак Куммера

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — произвольная последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ расходится.

Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; выражение

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

назовем вариантой Куммера для этого ряда. Если для $\forall n > N$ выполняется неравенство $K_n \geq \delta$, где $\delta = const$, $\delta > 0$, то ряд сходится. Если же $\forall n > N$ $K_n \leq \delta$, то ряд расходится.

Предельная форма признака Куммера

Допустим, что варианта Куммера имеет конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K .$$

Тогда при $K > 0$ ряд сходится, а при $K < 0$ — расходится.

Некоторые признаки сходимости можно рассматривать как частные случаи признака Куммера:

1. Пусть $c_n = 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ расходится. Если $D_n \underset{n\to\infty}{\to} D$, то $K_n \underset{n\to\infty}{\to} K = \frac{1}{D} - 1$ ($K = +\infty$, если $D = 0$; $K = -1$, если $D = +\infty$).

При $D > 1$ очевидно, что $K < 0$ и, по признаку Куммера, ряд расходится; если же $D < 1$, то $K > 0$ и ряд сходится. Мы получили, таким образом, признак Д'Аламбера.

2. Теперь будем считать $c_n = n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Выражение K_n получает вид:

$$K_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n-1) = R_n - 1 .$$

Если $R_n \underset{n\to\infty}{\to} R$, то $K_n \underset{n\to\infty}{\to} K = R - 1$ ($K = \pm\infty$, если $R = \pm\infty$).

При $R > 1$ будет $K > 0$ и по признаку Куммера ряд сходится. Если же $R < 1$, то $K < 0$ и ряд расходится. Мы получили признак Раабе.

3. Теперь возьмем $c_n = n \ln n$ $(n \geq 2)$. Такой выбор допустим, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

В этом случае

$$K_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = B_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} .$$

B_n — это новая варианта:

$$B_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \ln n \cdot (R_n - 1) .$$

Отсюда получается новый признак сходимости, полученный французским математиком Жозефом Луи Франсуа Бертраном (1822—1900), который, как и Коши, окончил знаменитую Парижскую Политехническую школу и затем в ней работал.

1.6 Признак Бертрана

Допустим, что варианта B_n имеет предел (конечный или нет):

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B .$$

Тогда при $B > 1$ ряд сходится, а при $B < 1$ — расходится. В самом деле, так как $\lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \ln e = 1$, то варианта Куммера K_n стремится к пределу $K = B - 1$ ($K = +\infty$, если $B = +\infty$). Теперь остается опять сослаться на признак Куммера.

Таким образом, мы видим целую цепь все усиливающихся, но при этом усложняющихся признаков сходимости рядов, причем эта цепь может неограниченно продолжаться.

Когда математиками XIX в. была выстроена эта цепь, из нее легко был получен признак, который, как и признак Д'Аламбера, был сформулирован значительно раньше. Мы видим, таким образом, один из многих примеров того, как открытие, опередившее время, спустя многие десятилетия заняло должное место в сформировавшейся к этому времени теории.

Этот признак получен величайшим немецким математиком рубежа XVIII—XIX вв. Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855).

1.7 Признак Гаусса

Допустим, что для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может быть представлено в виде:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где λ и μ — постоянные, а θ_n есть ограниченная величина: $|\theta_n| \le L$; тогда ряд сходится, если $\lambda > 1$ или если $\lambda = 1$, $\mu > 1$, и расходится, если $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \le 1$.

Случаи, когда $\lambda > 1$ или $\lambda < 1$, приводятся к признаку Д'Аламбера, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$.

Пусть теперь $\lambda = 1$. Тогда

$$R_n = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n};\ R = \mu,$$

и случаи $\mu > 1$, $\mu < 1$ исчерпываются признаком Раабе.

Наконец, если $\mu = 1$, то

$$B_n = \ln n \cdot (R_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, а θ_n ограничена, то $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$, и по признаку Бертрана ряд расходится.

Следующий признак сходимости знакоположительного ряда отличается по форме от всех предыдущих. Он основан на идее сопоставления ряда с интегралом и доказан О. Л. Коши.

1.8 Интегральный признак Коши

Теорема 6. Пусть члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{8}$$

положительны и не возрастают, т.е.

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots,$$

и пусть $f(x)$ — такая непрерывная невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1;\ f(2) = u_2;\ \ldots;\ f(n) = u_n. \tag{9}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд (1);

2) если такой интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

2 Знакочередующиеся ряды и признак их сходимости

Рассмотренные выше знакоположительные ряды, играющие важную роль в исследовании функциональных рядов, не исчерпывают, однако, все случаи числовых рядов, которые могут встретиться при этом исследовании. Как мы уже видели на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, важную роль играют и знакочередующиеся ряды. Для исследования сходимости таких рядов используется признак Лейбница.

Г. В. Лейбниц (1646—1716), великий немецкий математик и философ, наряду с И. Ньютоном является основоположником дифференциального и интегрального исчисления.

Рассмотрим ряд:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \qquad (10)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots$ положительны.

Теорема 7. Если в знакочередующемся ряде (10) абсолютные величины его членов все время убывают и, кроме того, стремятся к нулю, то такой ряд сходится.

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов. Абсолютно сходящиеся ряды обладают целым рядом свойств, облегчающих решение многих задач. Для таких рядов справедлив переместительный закон; члены такого ряда можно группировать и объединять в скобки (раскрывать скобки не всегда можно); сумму абсолютно сходящегося ряда можно рассматривать как разность суммы ряда из положительных членов и суммы ряда из модулей отрицательных членов. Поэтому решение многих задач, связанных как с числовыми, так и с функциональными рядами, удобно сводить к исследованию абсолютно сходящихся рядов, а тогда приходится работать со знакоположительными рядами. Именно этим объясняется особая роль знакоположительных рядов во всей рассматриваемой теории.

Рассмотренные два вида числовых рядов — знакоположительные и знакочередующиеся — используются нами для исследования функциональных рядов, среди которых наиболее применимы в механике и различных разделах физики степенные и тригонометрические ряды. Ряды Тейлора и Маклорена относятся к степенным рядам. Обратимся теперь к истории возникновения тригонометрических рядов.

3 Тригонометрические ряды

Во второй половине XVIII в. началось активное развитие математики, близкой к современной, когда такие понятия, как функция, дифференциальное уравнение, ряд стали приобретать тот смысл, который в них сейчас вкладываем мы. К этому времени ученые уже отдавали себе отчет в том, что существуют геометрическая и аналитическая модели всего, что происходит в природе и технике. При этом аналитическая модель продуктивнее, поскольку, как правило, обобщает данные, которые можно получить средствами геометрии. Именно в XVIII в., в 1715 г., исходя из соображений механики и геометрии, Брук Тейлор вывел уравнение, описывающее малые колебания струны с закрепленными концами.

В современном виде оно выглядит так:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Это дифференциальное уравнение с частными производными, с которого начала свое развитие математическая физика.

Рассматривается натянутая однородная струна, расположенная вдоль оси OX, закрепленная на концах в точках $x = 0$ и $x = l$ (l — длина струны). Если отклонить струну от положения равновесия (или придать ее точкам некоторые скорости), то струна начнет колебаться. Рассматривая только малые колебания струны, длину ее можно считать неизменной. Будем считать колебания происходящими в одной плоскости XOY таким образом, что каждая точка струны движется в направлении, перпендикулярном оси OX. Пусть $y = y(x, t)$ — величина отклонения в момент t точки струны с абсциссой x. При каждом фиксированном значении $t = t_0$ график функции $y = y(x, t_0)$ дает форму струны.

Сформулируем задачу геометрически: зная форму струны и скорость ее точек в начальный момент времени $t = 0$, найти отклонение каждой точки струны в любой момент времени t.

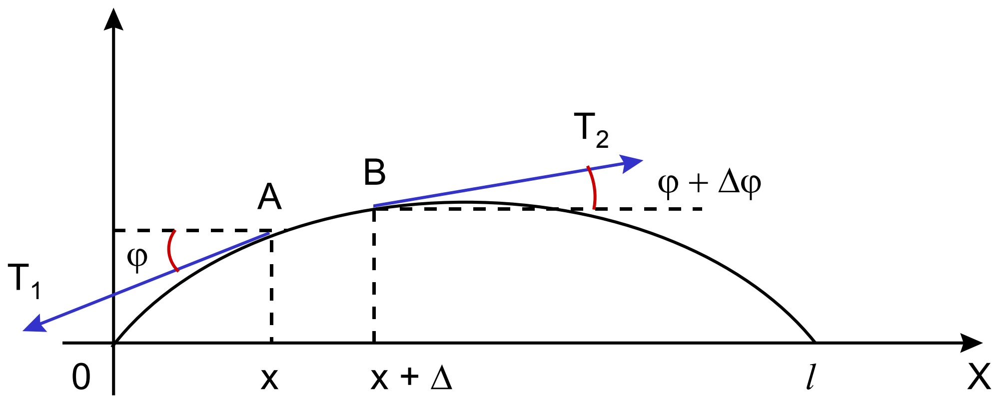
Соответствующая аналитическая формулировка: решить уравнение (11) при граничных условиях

$$y = y(0, t) = y(l, t) = 0$$

и при начальных условиях

$$y(x, 0) = f(x); \; \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при $x = 0$ и $x = l$.



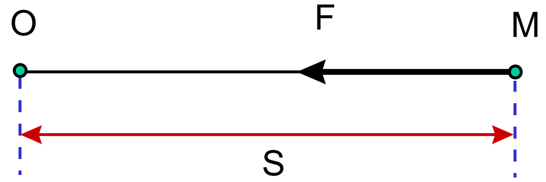
Тейлор нашел частное решение уравнения (11), которое в его работе, конечно, было выведено в других обозначениях.

Частное решение представляло собой периодическую функцию, близкую к функции, которую в современных обозначениях можно записать так:

$$y = A\,sin(\,\omega x + \varphi)\,. \qquad (12)$$

Такая функция называется гармоникой с амплитудой $|A|$, частотой ω и начальной фазой φ. A, ω, φ — постоянные, ω связана со струной, а A и φ — произвольные. Понятие гармоники связано с задачей механики о простейшем колебательном движении — гармонических колебаниях.

Пусть материальная точка М с массой m движется по прямой под действием силы F, пропорциональной расстоянию S точки М от фиксированной точки О и направленной к точке О.



$$F = -k\,S,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -kS$$

или

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0\,, \qquad (13)$$

где $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, откуда $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Решением полученного дифференциального уравнения (13) будет функция $S = A\,sin(\,\omega t + \varphi)$, где A и φ — постоянные, которые можно вычислить, зная положение и скорость точки М в момент времени $t = 0$. S есть периодическая функция времени t с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Значит, под действием описанной таким образом силы F точка М будет совершать колебательное движение.

Функция (12) имеет период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Действительно, при любом x

$$A\,sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\,sin\left[(\omega x+\varphi)+2\pi\right]=A\,sin(\omega x+\varphi).$$

Амплитуда $|A|$ есть максимальное отклонение точки М от О. Величина $\frac{1}{T}$ — это число колебаний в единицу времени. Следовательно, $\omega=\frac{2\pi}{T}$ есть число колебаний за отрезок времени 2π. Величина φ — начальная фаза — характеризует положение точки М в начальный момент, так как при $t = 0$ $S_0 = A\,sin\varphi$.

Всякую гармонику можно представить в виде

$$a\,cos\,\omega t + b\,sin\,\omega t,$$

и обратно, всякая функция такого вида есть гармоника.

Пусть $T = 2l$; тогда $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}$. Тогда гармоника с периодом $T = 2l$ может быть записана так:

$$a\,cos\frac{\pi x}{l}+b\,sin\frac{\pi x}{l}.$$

Рассмотрим гармоники вида

$$a_k\,cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\,sin\frac{\pi kx}{l},\ k=1,2,... \tag{14}$$

с частотами $\omega_k=\frac{\pi k}{l}$ и периодами $T_k=\frac{2\pi}{\omega_k}=\frac{2l}{k}$; так как $T = 2l = kT_k$, число $T = 2l$ является периодом для всех гармоник вида (14) сразу, поскольку период, умноженный на целое число, опять дает период.

Теперь рассмотрим бесконечный тригонометрический ряд

$$A+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\,sin\frac{\pi kx}{l}\right). \tag{15}$$

Если он сходится, то сумма его также представляет собой функцию периода $2l$. Трактуя каждую гармонику как простое гармоническое колебание, а сумму ряда (15) — как характеристику сложного колебательного движения, получим разложение этого движения в сумму отдельных гармонических колебаний. Это стало ясным уже в XVIII в.

В 1748 г. в одной из своих пятнадцати работ, посвященных задаче о колебаниях струны, Эйлер дает решение одного из частных случаев уравнения в виде тригонометрического ряда, а в 1753 г. Д. Бернулли (1700—1782) предлагает уже общее решение уравнения в аналогичной форме, исходя из того, что звук, издаваемый колеблющейся струной, складывается из основного тона и бесконечного множества обертонов. Эйлер считал такую форму представления функции недостаточно общей. Встал вопрос: какой же класс функций может быть представлен тригонометрическими рядами? Ответить на него удалось только в XIX в.

В 1807 г. Ж. Б. Фурье (1756—1830) в работах по аналитической теории тепла доказал, что функции, заданные на конечных участках отрезка $[-l, l]$ различными уравнениями, представимы на любом таком отрезке рядом

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right),$$

где коэффициентами являются выражения:

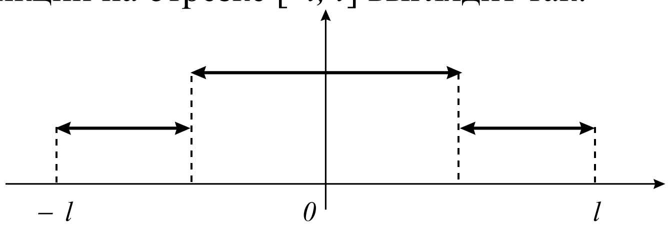
$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

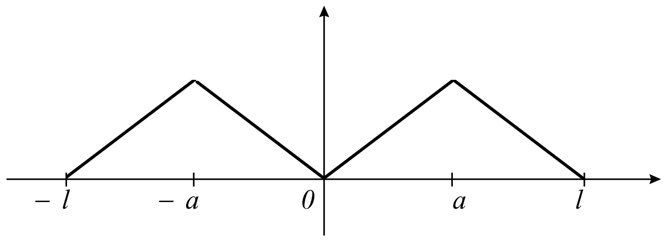
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Такой ряд называется рядом Фурье.

Поясним с помощью чертежа, какие функции имеются в виду. Пусть, например, график функции на отрезке [–*l, l*] выглядит так:



или так



Становится ясно, что если речь идет о графике периодической функции, то на языке современной математики это должна быть функция, которая кусочно-монотонна на заданном интервале — периоде (–*l, l*).

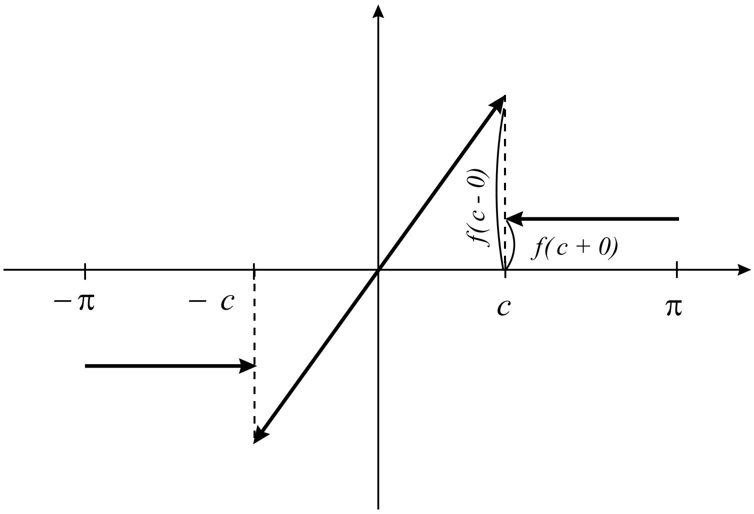
Определение. Функция *f(x)* называется кусочно-монотонной на отрезке [*a*, *b*], если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1);\ (x_1, x_2);\ \ldots (x_{n-1}, b)$ так, что на каждом из этих интервалов функция монотонна, т.е. либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из определения следует, что если функция *f(x)* — кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке [*a, b*], то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x = c$ есть точка разрыва функции *f(x)*, то в силу монотонности функции существуют пределы $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = f(c-0);$ $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$, т.е. точка *c* есть точка разрыва первого рода.

Теорема 8. Если периодическая функция *f(x)* с периодом 2π кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке [–π*,* π], то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках.

Сумма полученного ряда *S(x)* равна значению функции *f(x)* в точках ее непрерывности. В точках разрыва функции *f(x)* сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции *f(x)* справа и слева:

$$S(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$



Пусть дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Предположим, что она периодическая с периодом 2π. Тогда везде, где она непрерывна, справедливо равенство:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{16}$$

Пусть знакоположительный числовой ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + ... + |a_n| + |b_n| + ... \tag{17}$$

сходится. Каждый член этого ряда по модулю не меньше соответствующего члена ряда, стоящего в правой части равенства (16).

В таком случае говорят, что ряд (17) мажорирует ряд из равенства (16). Ряд, мажорируемый сходящимся рядом (17), а следовательно, и равенство (16), можно интегрировать почленно от $-\pi$ до π, что мы и сделаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx\right).$$

Вычислим отдельно каждый интеграл из правой части этого равенства.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \left.\frac{a_n \sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = -\left.\frac{b_n \cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx . \tag{18}$$

Мы получили первый коэффициент для ряда Фурье функции $f(x)$.

Чтобы получить формулы для остальных коэффициентов этого ряда, рассмотрим предварительно некоторые определенные интегралы.

Если n и k — целые числа, то имеют место следующие равенства:

если $n \neq k$, то

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{I}$$

если $n = k$, то

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi \end{aligned}\right\}. \tag{II}$$

Вычислим, например, первый интеграл из группы (I).

Так как $\cos nx \cdot \cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx = 0 .$$

Подобным же образом, используя тригонометрические формулы для произведений синусов и синуса на косинус, мы получим и остальные формулы из группы (I).

Интегралы группы (II) вычисляются непосредственно, и это предлагается сделать самостоятельно.

Теперь можно вычислить коэффициенты a_k и b_k ряда из равенства (16). Для разыскания коэффициента a_k при каком-либо определенном значении $k \neq 0$ умножим обе части равенства (16) на $\cos kx$:

$$\begin{aligned} &f(x)\cos kx = \\ &= \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \end{aligned} \tag{19}$$

Члены ряда, получившегося в правой части этого равенства, не превосходят по модулю членов сходящегося знакоположительного ряда (17). Поэтому можно почленно интегрировать ряд из равенства (19) на любом отрезке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx \; +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx \; + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx dx\right).$$

Принимая во внимание формулы (I) и (II), видим, что все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом a_k. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,. \tag{20}$$

Умножая обе части равенства (16) на $\sin kx$ и снова интегрируя от $-\pi$ до π, найдем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

откуда

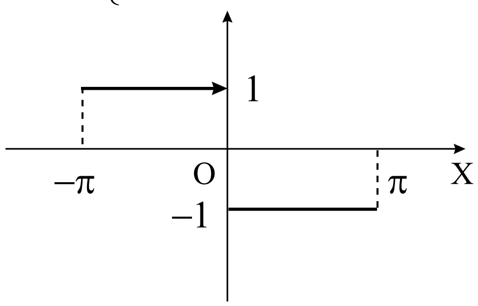
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,. \tag{21}$$

Таким образом, мы вывели коэффициенты ряда Фурье для функции с периодом 2π. Рассуждая аналогично, можно было бы вывести формулы для коэффициентов ряда Фурье функции с периодом $2l$.

Рассмотрим примеры разложения функций в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -\pi \le x < 0 \\ -1, & \text{если} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$



Продолжив эту функцию периодически с периодом 2π на всю ось, получим функцию, разложимую в ряд Фурье. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\,dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0} -$$

$$-\frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}[0-(-\pi)] = \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1 - 1 = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\ dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\ dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi n}(\cos 0 - \cos n\pi) +$$

$$+\frac{1}{\pi n}(\cos \pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi n}(\cos \pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi n}[(-1)^n - 1].$$

Таким образом: $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_{2n} = 0,\ b_{2n+1} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)}$.

Значит,

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

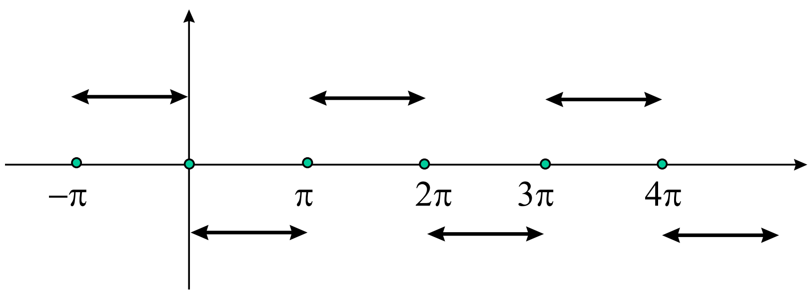
Точкой разрыва является точка $x = 0$. В ней сумма ряда равна:

$$\frac{f(-0)+f(0)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0.$$

На концах отрезка сумма ряда равна:

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0.$$

Нарисуем график суммы ряда $S(x)$.

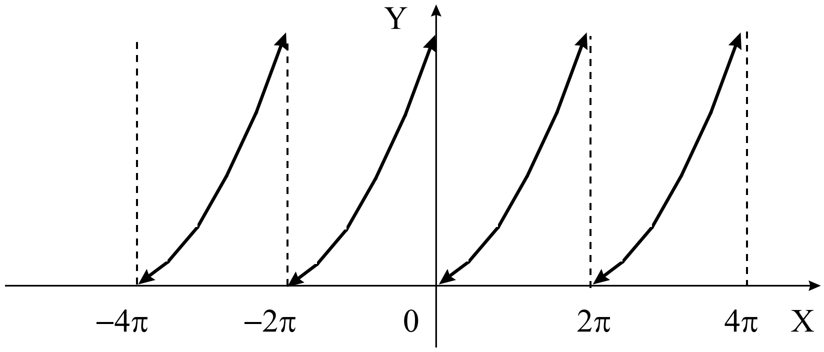


Итак, полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках $x \in (-\pi, \pi)$, где функция $f(x)$ непрерывна. В точке $x = 0$ $S(x) = 0$.

Отметим, что функция нечетная, а потому можно было не вычислять коэффициенты a_n. Ряд Фурье для нечетной функции есть ряд синусов, а для четной — ряд косинусов.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ $(0 < x < 2\pi)$ в ряд Фурье.

Продолжим функцию на всю числовую ось с периодом Т = 2π.



Продолженная функция не является ни четной, ни нечетной. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

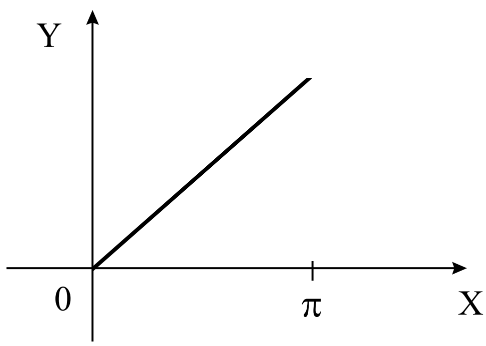
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n^2}.$$

$$f(x) = 4\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right).$$

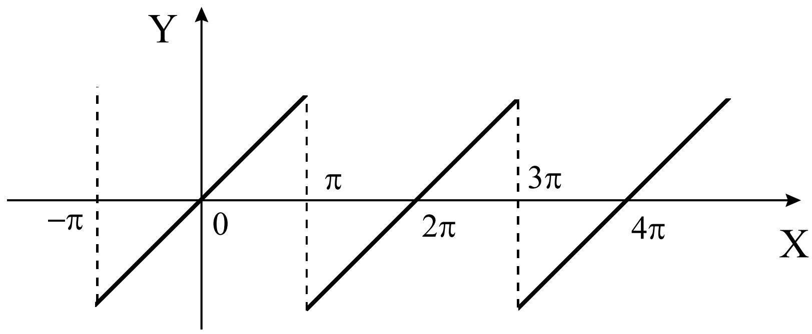
Отметим следующий весьма важный факт: разложение функции в ряд Фурье не единственно.

Пример 3. Пусть $f(x) = x$, $0 \le x \le \pi$.



Продолжив эту функцию нечетным образом на отрезок [–π, 0], а затем на всю ось с периодом Т = 2π, получим нечетную функцию, график которой изображен ниже.

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \le \pi.$$



Разложив такую функцию в ряд Фурье, получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

Получим ряд синусов:

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right).$$

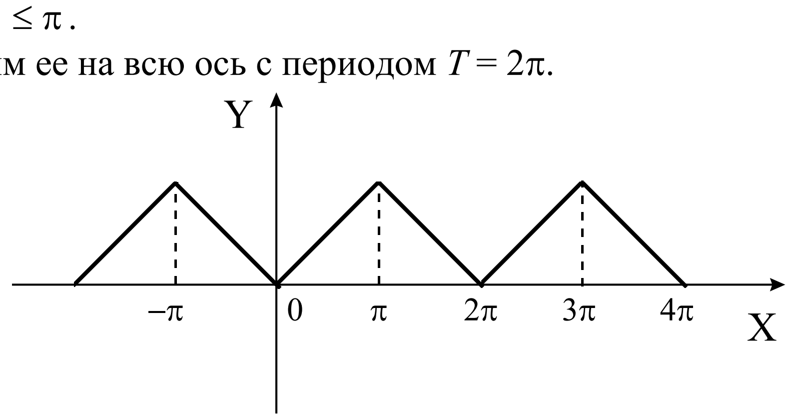
Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т.е. нулю.

Однако эту же функцию $f(x) = x$ можно продолжить на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом. Тогда на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция будет определена так:

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}, \text{ или } f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Эта функция, как и первая, будет кусочно монотонной и ограниченной на отрезке $-\pi \le x \le \pi$.

Продолжим ее на всю ось с периодом $T = 2\pi$.



Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{-x\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \left.\frac{x\sin kx}{k}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[\left.\frac{-\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\cos kx}{k}\right|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при } k \text{ четном} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} \quad \text{при } k \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx\right] = 0.$$

Таким образом, получаем ряд:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right).$$

Этот ряд сходится во всех точках, и его сумма равна функции $f(x) = |x|$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Список использованных источников

1. Белл Э. Т. Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979.
2. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник. — Киев: Наукова Думка, 1983.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1984.
4. Маркушевич А. И. Ряды. — М.: Гостехиздат, 1957.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
6. Рахимова И. К. Исторический обзор первого этапа развития теории колебаний. — Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1984.
7. Толстов Г. П. Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1960.
8. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. — М.: Наука, 1973.
9. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II. — М.: Высшая школа, 1974.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1970.
11. Щипачев В. С. Сборник задач по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1994.