МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра математического анализа

И.К. ЗУБОВА,
О.В. ОСТРАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2003

ББК 22.161 я7
З 91
УДК517.2(07)

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент Л.М. Невоструев.

Зубова И.К., Острая О.В.
З 91 Исследование функций методами дифференциального исчисления: Методические указания. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003 – 24с.

Методическое пособие посвящено основным понятиям дифференциального исчисления функций одной переменной. В нем содержатся теоретические вопросы и практические задания к типовому расчету по данной теме, а также основные рекомендации по выполнению такого задания и список предлагаемой литературы.

Пособие рекомендуется студентам всех специальностей ОГУ.

Оно может быть использовано и в работе со старшеклассниками физико-математических классов.

ББК 22.161 я7

Введение

Выполнение расчетно-графического задания по теме "Исследование функций и построение графиков", должно способствовать усвоению студентом первых основных понятий математического анализа. Это прежде всего понятия функции одной переменной, графика этой функции, области ее определения, и области значений. Определяя монотонные функции, нужно отличать, например, строго возрастающую функцию от неубывающей. Необходимо также усвоить определения предела и непрерывности функции в точке, научиться видеть связь между этими понятиями, изучить классификацию точек разрыва.

Знание основных определений и теорем дифференциального исчисления и понимание их геометрического смысла помогает выявить связь между поведением самой функции и ее производных, найти точки экстремума функции и точки перегиба.

В первом семестре расширяются и углубляются сведения по исследованию функций, полученные в школе. Тем не менее, иногда студенты выполняют расчетно-графическое задание по школьному шаблону, не вникая в содержание упоминающихся понятий и не понимая их геометрического смысла. В этом случае выполнение задания данного типового расчета нередко становится более трудоёмким. Бывает, например, что выполнив "исследование" по всем пунктам, студент не может воспользоваться его результатами и пытается строить эскиз графика только "по точкам". Это свидетельствует о том, что основные понятия дифференциального исчисления не усвоены, и поэтому не удается проиллюстрировать их графически.

Для успешного выполнения заданий типового расчета рекомендуем сначала проработать полные ответы на предлагаемые теоретические вопросы. Все они подробно освещены в курсе лекций и учебной литературе. Затем следует подумать над теоретическими упражнениями, которые взяты нами из экзаменационных материалов. Эти упражнения позволяют студенту потренироваться в практическом применении своих теоретических знаний, проверить их.

После этого можно приступить к выполнению индивидуальных заданий, каждое из которых состоит из трех задач. Образец правильного оформления работы показан в "нулевом варианте". Список рекомендуемой литературы приводится в конце пособия.

1 Теоретические вопросы

1. Понятие функции. Определение функции одной переменной. Область определения и область значения функции. Явное и неявное задание функции. Параметрическое задание функции.
2. Монотонные функции: возрастающая, убывающая, невозрастающая и неубывающая функции.
3. Определение предела функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.
4. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.
5. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Геометрический смысл дифференцируемости функции в точке.
6. Производная функции в точке. Определение и геометрический смысл.
7. Теоремы об арифметических свойствах производной.
8. Производная функции одной переменной, заданной неявно.
9. Производная функции, заданной параметрически.
10. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
11. Теорема Ферма о функции, дифференциальной и имеющей локальный экстремум в интервале (a , b).
12. Теорема Ролля: формулировка, доказательство, геометрический смысл.
13. Теорема Лагранжа. Формулировка, доказательство, геометрический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа.
14. Теорема Коши и правило Лопиталя.
15. Критические точки и точки экстремума функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.
16. Два правила отыскания точек экстремума функции.
17. Выпуклость и вогнутость графика функции. Критические точки второго рода. Необходимое и достаточное условия их существования.
18. Асимптота кривой. Определение. Условие существования вертикаль ной асимптоты у графика функции.
19. Необходимые и достаточные условия существования невертикальной асимптоты у графика функции.

2 Теоретические упражнения

1. На каком из следующих рисунков изображен график функции, возрастающей на всей числовой оси?

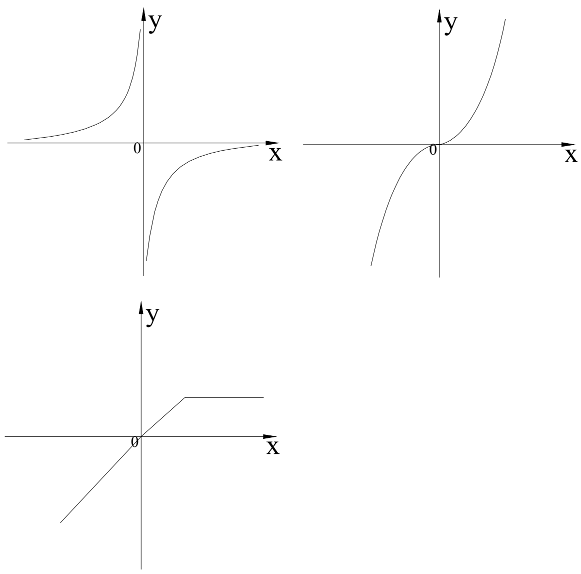


Рисунок 2.1

2. На каком из следующих рисунков изображен график функции, убывающей на отрезке [1,2]?

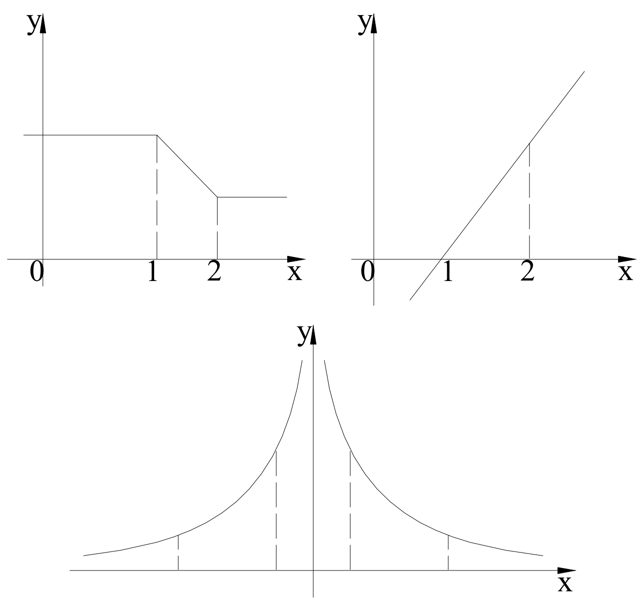
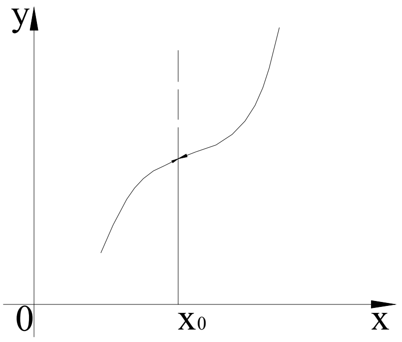
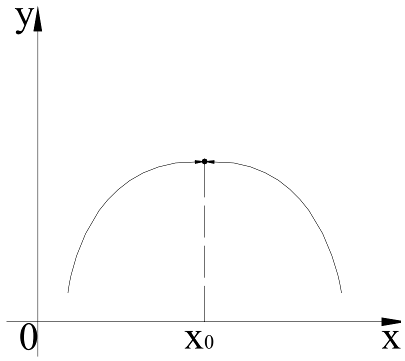


Рисунок 2.2

3. На рисунке 2.3 даны графики функций, разрывных в точке x_0. Какая из этих функций в точке x_0 не определена, но имеет предел? Какая функция не имеет предела в этой точке? У каких функций в точке x_0 разрыв устраним?



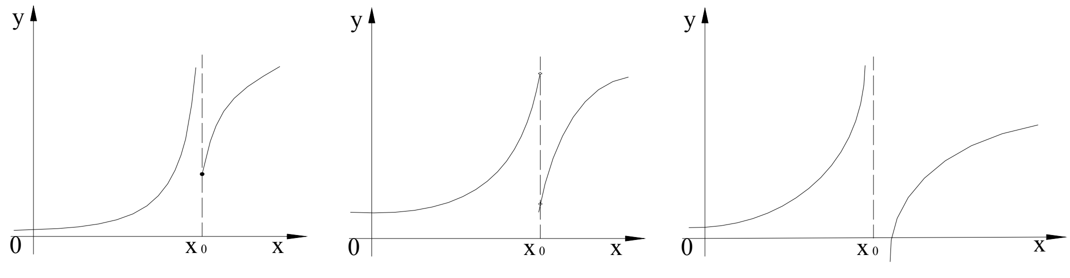
а) б)



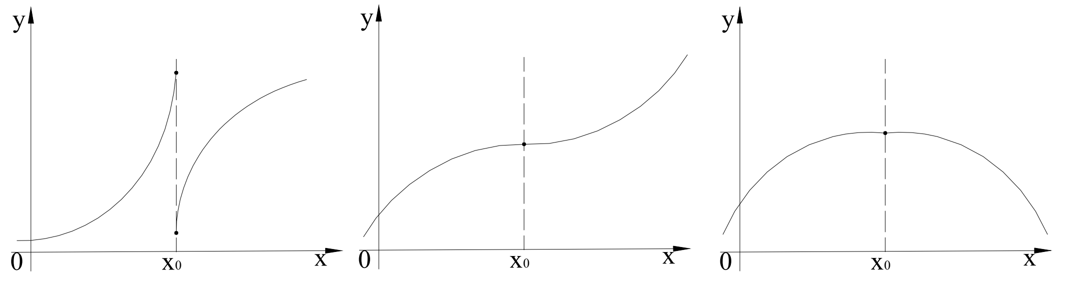
в)

Рисунок 2.3

4. Даны графики функций, разрывных в точке x_0.Проведите классификацию точек разрыва.



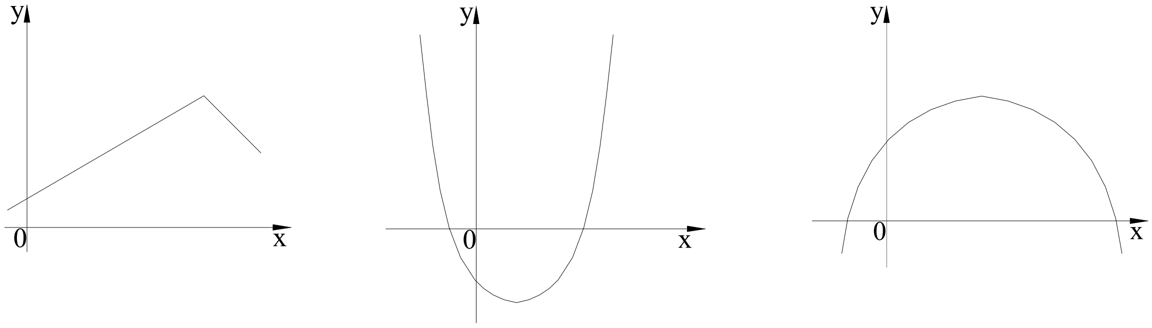
а) б) в)



г) д) е)

Рисунок 2.4

5. На каком из следующих рисунков изображен график функции, имеющей экстремум?



а) б) в)

Рисунок 2.5

6. На рисунке 2.6 изображен график непрерывной функции. В какой из точек x_1, x_2 данная функция не дифференцируема?

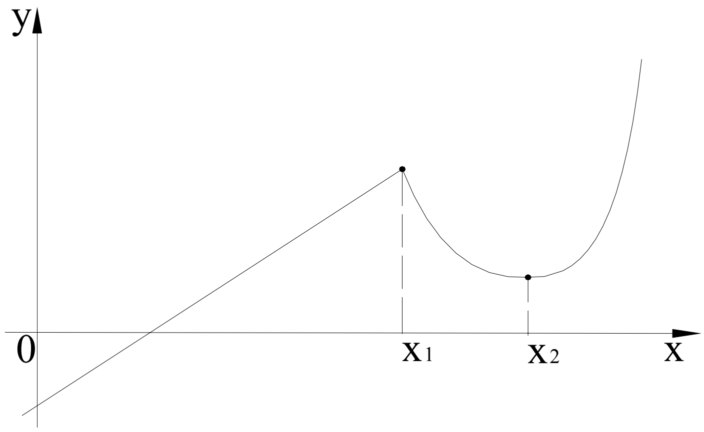


Рисунок 2.6.

7. На рисунке 2.7 изображен график непрерывной функции. Дифференцируема ли эта функция в точках x_1, x_2, x_3? Имеет ли она экстремумы в этих точках?

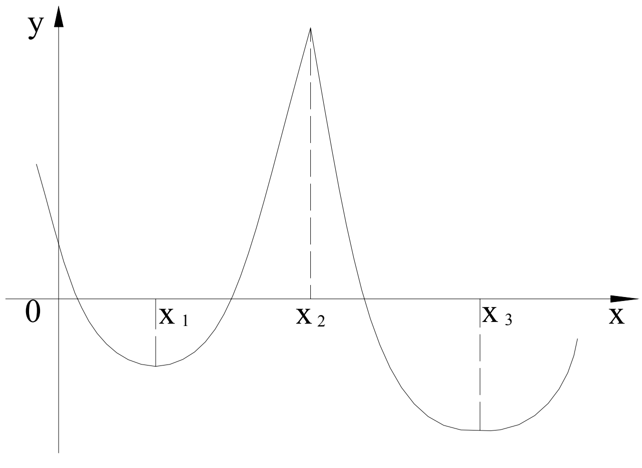


Рисунок 2.7

8. На каком из следующих рисунков изображен график функции, не дифференцируемой в точке x_0

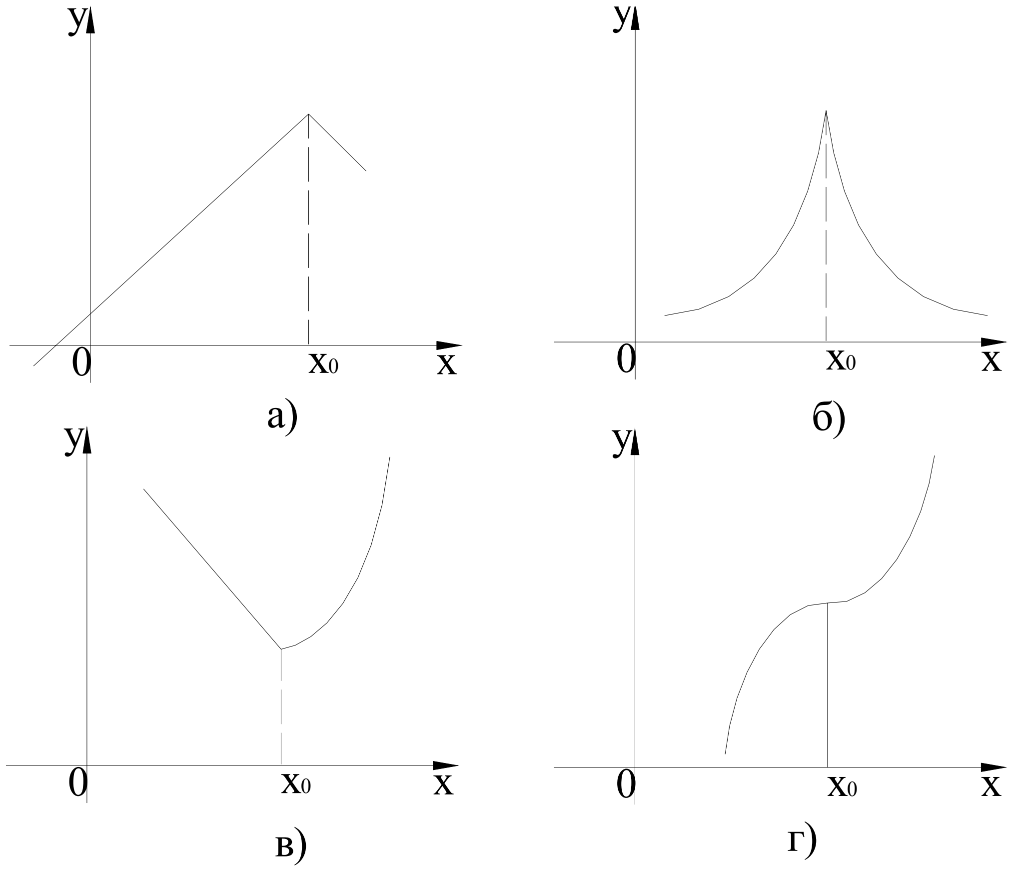


Рисунок 2.8

9. На каком из следующих рисунков изображен график функции, имеющей минимум в точке x_0? Какая из этих трех функций дифференцируема в точке x_0?

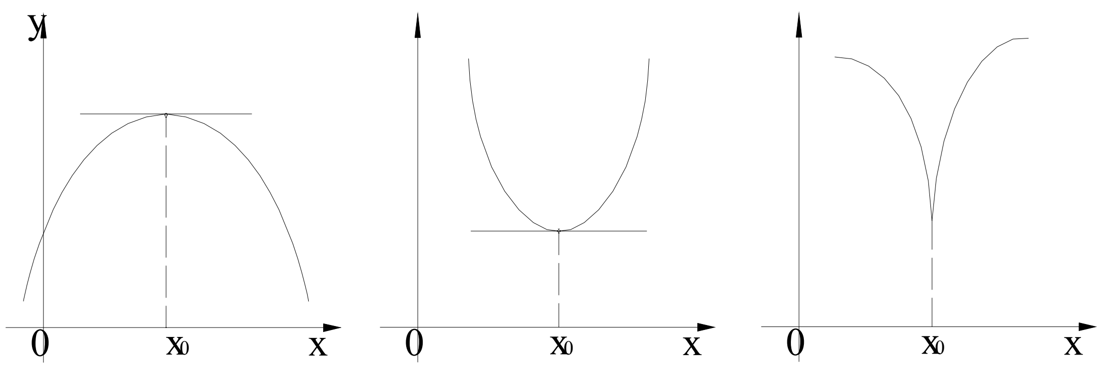


Рисунок 2.9.

10. На рисунке 2.10 изображен график непрерывной функции. В каких из отмеченных точек эта функция имеет максимумы и в каких минимумы? В каких точках функция не является дифференцируемой? В каких точках производная функции равна нулю?

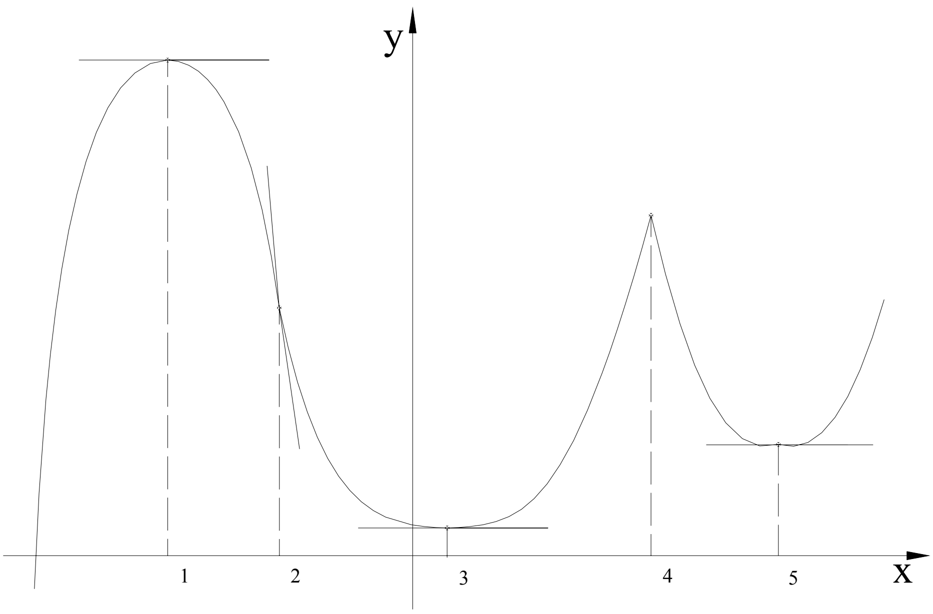


Рисунок 2.10

11. На рисунке 2.11 изображен график непрерывной функции. В каких из отмеченных точек у функции не существует первой производной? В каких точках первая производная функции равна нулю? В каких точках равна нулю вторая производная функции?

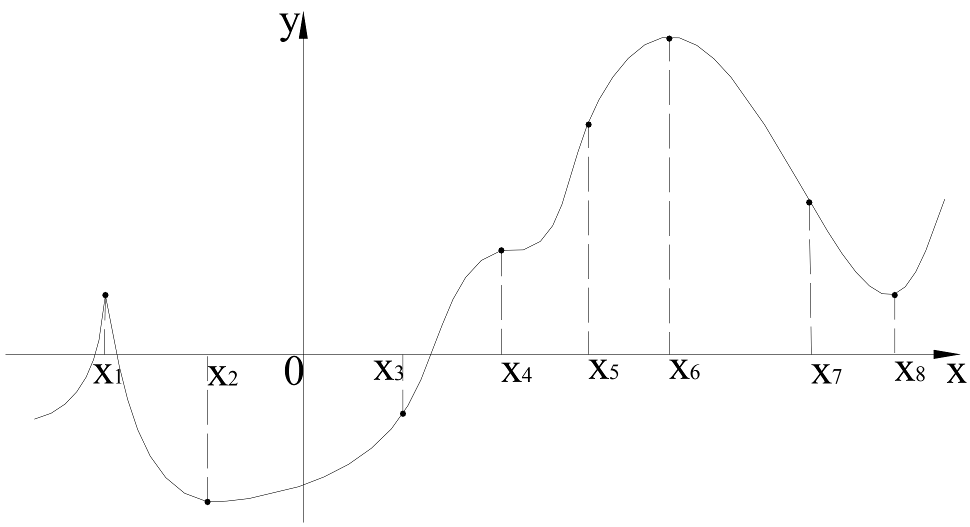


Рисунок 2.11

12. На рисунке 2.12 дан график производной некоторой непрерывной функции. Изобразить приблизительно эскиз графика самой функции.

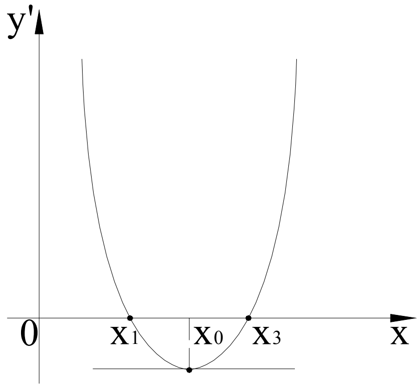


Рисунок 2.12.

13. На рисунке 2.13 изображен график производной некоторой непрерывной функции. Будет ли сама функция иметь экстремумы в точках x_1, x=0, x_2, x_3?

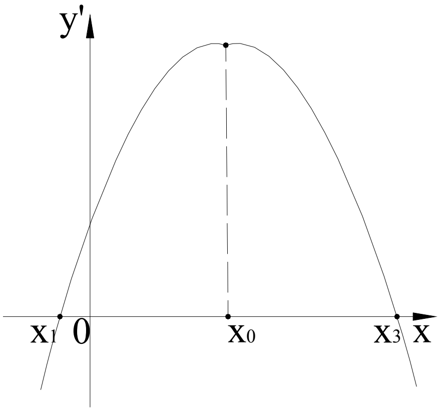


Рисунок 2.13

14. На рисунке 2.14 дан график производной некоторой непрерывной функции. Выбрать на рисунке 2.15 график, наиболее точно описывающий поведение самой функции в окрестности точки x_0.

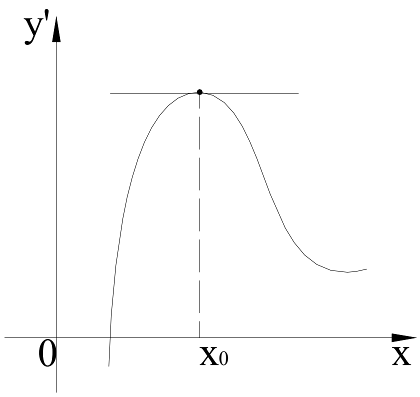


Рисунок 2.14

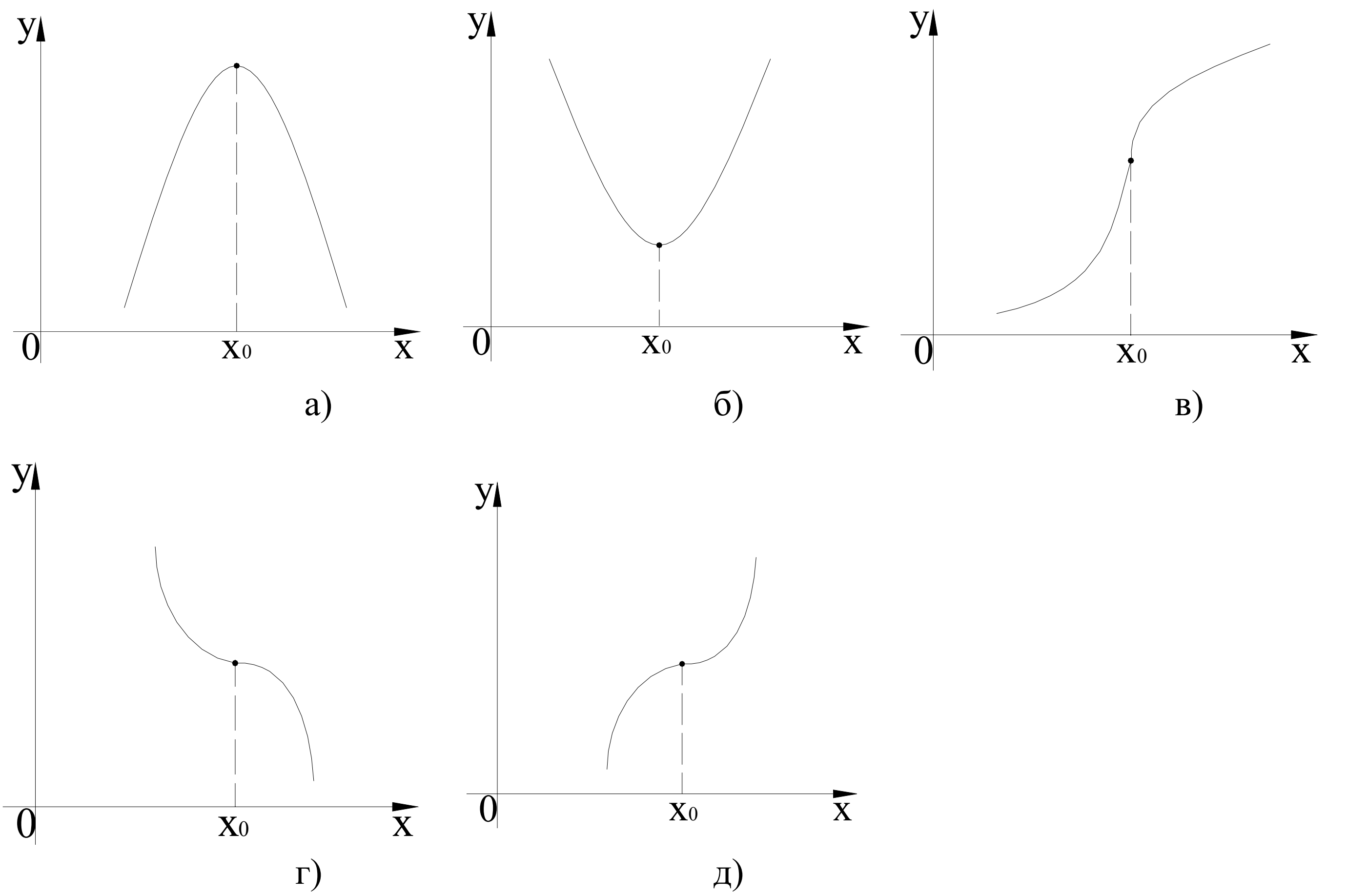


Рисунок 2.15

3 Схема исследования функции

1 Найти область определения функции и исследовать поведение функции вблизи граничных точек области определения, включая и $x = \pm\infty$.

2 Написать уравнения асимптот графика:

а) вертикальных;

б) невертикальных.

3 Выяснить является ли функция четной, нечетной, периодической. Если она обладает каким-либо из этих свойств, то как это отразится на графике?

4 Найти точки пересечения графика с осями координат.

5 Найти точки экстремума и интервалы монотонной функции.

6 Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вогнутости.

7 Построить эскиз графика функции.

4 Практические задания

Задача №1

Найти асимптоты графика функции:

1) $y = \frac{5x}{x-1}$

2) $y = \frac{x}{2x-1} + x$

3) $y = \frac{x^2+5}{x^2-1} + 2x$

4) $y = \frac{3}{x-2}$

5) $y = \frac{x-2}{x+4}$

6) $y = \frac{x}{1+x^2}$

7) $y = \frac{x^2-1}{x^4}$

8) $y = \frac{2}{x+3}$

9) $y = \frac{6}{x^2-16}$

10) $y = \frac{x^2}{x+4}$

11) $y = \frac{x^2+8x-6}{x}$

12) $y = \frac{2x^2+x+3}{x+6}$

13) $y = \frac{2}{x^2-4}$

14) $y = \frac{x^2+1}{2x+3}$

15) $y = \frac{x^2+1}{x}$

16) $y = \frac{x+5}{x+3}$

17) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$

18) $y = \frac{1}{3-x}$

19) $y = \frac{x^2-5x+6}{x}$

20) $y = \frac{x^2-4}{x^2-9}$

21) $y = \frac{1}{1-x^2}$

22) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$

23) $y = \frac{1}{x^2-4}$

24) $y = \frac{1}{4-x^2}$

25) $y = \frac{1-x}{x^2}$

Задача №2
Провести полное исследование и построить график функции:

1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

2) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$

3) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

4) $y = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 3x + 3}$

5) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$

6) $y = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$

7) $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$

8) $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 3}$

9) $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$

10) $y = \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 1}$

11) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

12) $y = \dfrac{-x^2 + 7x + 9}{x^2 - 3x + 3}$

13) $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

14) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

15) $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$

16) $y = \dfrac{-x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 3}$

17) $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$

18) $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$

19) $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

20) $y = \dfrac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 3x + 3}$

21) $y = x^3 - 3x$

22) $y = \dfrac{3x^3}{3x^2 + 4x + 4}$

23) $y = x^4 - 4x^2 + 5$

24) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$

25) $y = 4x^2 - x^4 - 3$

Задача №3

Провести полное исследование и построить график функции:

1) $y = x \cdot \mathrm{Ln}\ x$

2) $y = (x-3)\sqrt{x}$

3) $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

4) $y = x \cdot \sqrt{1-x}$

5) $y = x - \mathrm{Ln}\ x$

6) $y = \sqrt{\dfrac{125 - x^3}{3x}}$

7) $y = x^3 \cdot e^x$

8) $y = \dfrac{6\sqrt{x}}{x+2}$

9) $y = \dfrac{1 + \mathrm{Ln}\ x}{x}$

10) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

11) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

12) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

13) $y = x \cdot \mathrm{Ln}^2 x$

14) $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

15) $y = \dfrac{x}{e^x}$

16) $y = x \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}}$

17) $y = \dfrac{x}{\mathrm{Ln}\ x}$

18) $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot (1-x)$

19) $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

20) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

21) $y = x^2 \cdot \mathrm{Ln}^2 x$

22) $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

23) $y = x^3 \cdot e^{-x}$

24) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

25) $y = \dfrac{\text{Ln } x}{x}$

5 Решение задач «нулевого» варианта

Задача №1.

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{1}{16 - x^2}.$$

1) Находим область определения функции и исследуем ее поведение в граничных точках области определения, включая и $x = \pm\infty$

$\mathcal{D} = (-\infty;-4) \cup (-4;4) \cup (4;+\infty)$.

$$\text{а)}\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -4-0} \dfrac{1}{16 - x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -4+0} \dfrac{1}{16 - x^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -4 \text{ - вертикальная асимптота}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{1}{16 - x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{1}{16 - x^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -4 \text{ - вертикальная асимптота}$$

б) $y = kx + b$ - наклонная асимптота

$$\left.\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(16 - x^2)x} = 0 \\ b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{16 - x^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \text{ - горизонталь-}$$

ная асимптота;

Наклонных асимптот у графика функции нет.

2) Изображаем эскиз графика функции (рисунок 5.1).

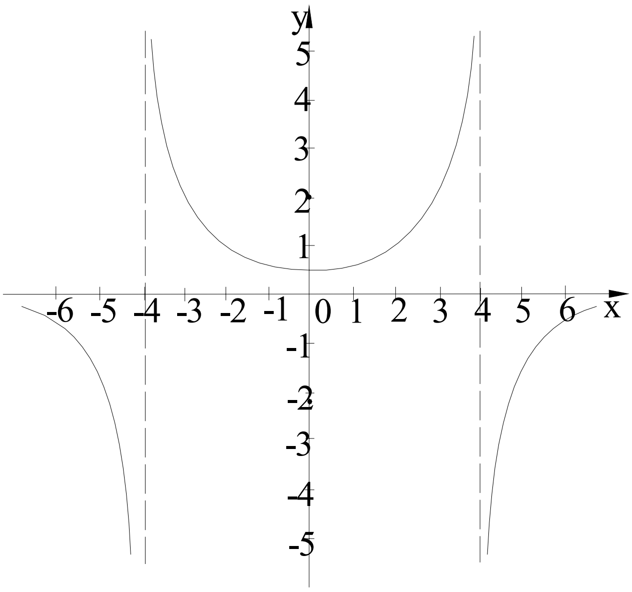


Рисунок 5.1

Задача №2.

Провести полное исследование и построить график функции

$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

1) Находим область определения $\mathcal{D}$ функции и исследуем ее поведение вблизи граничных точек области $\mathcal{D}$, включая и $x = \pm\infty$.

$\mathcal{D}$ =(-∞ ; 1) ∪ (1 ; +∞)

а) $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty$

Следовательно, прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота, причем функция при

приближении к ней слева неограниченно убывает, а справа неограниченно возрастает.

б) $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\bigl(f(x)-k(x)\bigr) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}^2-2x+2-\cancel{x}^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+2}{x-1} = -1$$

$y = kx + b = x - 1$ - наклонная асимптота.

2) Выясним четность и периодичность функции.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2\ \ (-x)+2}{-x-1} = \frac{x^2+2x+2}{-(x+1)} \neq f(x)$$

Функция не обладает свойствами четности и периодичности.

3) Находим точки пересечения графика с осями координат:

$$f(0) = \frac{0-2\cdot 0+2}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

(0 ; -2) – точка пересечения с осью Oy

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+2 = 0$$

$$\mathcal{D} = (-2)^2 - 4\cdot 2 = 4-8 = -4$$

$\mathcal{D} < 0 \Rightarrow$ уравнение действительных корней не имеет, график функции не пересекается с осью Ox

4) Находим точки экстремума и интервалы монотонности.

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\mathcal{D}(y') = (-\infty;1)\cup(1;+\infty) \quad \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=2. \end{array}\right.$$

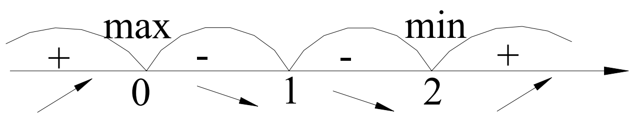


Рисунок 5.2

$$f(2) = \frac{4-4+2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$x = 0$ - max

$x = 2$ - min

(0 ; -2) – точка максимума;

(2 ; 2) – точка минимума;

при $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ - функция убывает;

при $x \in (1;2) \cup (2;+\infty)$ - функция возрастает.

5) Находим точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости и вогнутости.

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x+1) - 2(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^2 + 4x - 2 - 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x}{(x-1)^4} = \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2}{(x-1)^3};$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} = 0 ;$$

$\mathcal{D}(y'') = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

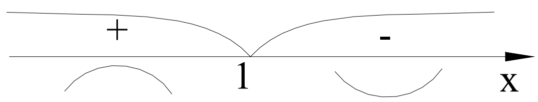


Рисунок 5.3

Точек перегиба у графика функции нет.

при $x \in (-\infty;1)$ - график функции – выпуклая кривая;

при $x \in (1;+\infty)$ - график функции - вогнутая кривая;

6) Изображаем эскиз графика функции (рисунок 5.4):

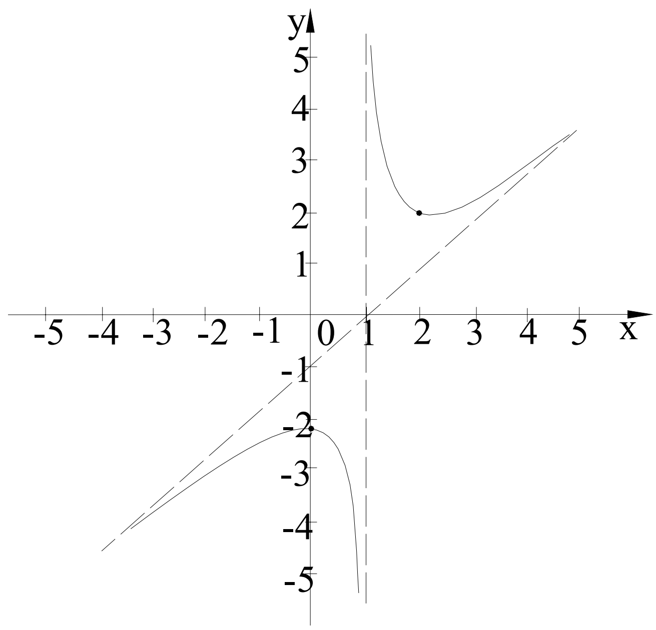


Рисунок 5.4

Задача №3

Провести полное исследование и построить график функции

$f(x) = (2+x^2)\cdot e^{-x^2}$.

1) Находим область определения функции $f(x)$ и исследуем ее поведение в граничных точках в области определения, включая и $x=\pm\infty$

$\mathcal{D}_f$=R $\Rightarrow$ вертикальных асимптот у графика функции нет.

Найдем наклонные асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2+x^2)\cdot e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2+x^2)}{x\cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2} + x\cdot 2x\cdot e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}(1+2x^2)} == \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e^{x^2}\cdot 4x + (1+2x^2)\cdot 2xe^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e^{x^2}\cdot(4x+2x+4x^3)} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (2+x^2)\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}} = 0$$

$y=0$ - горизонтальная асимптота.

2) Выясним четность и периодичность функции:

$f(-x) = (2+(-x)^2)\cdot e^{-(-x)^2} = (2+x^2)\cdot e^{-x^2} = f(x) \Rightarrow$ функция четная.

Функция не периодическая.

3) Находим точки пересечения графика функции с осями координат:

$f(0) = (2+0)\cdot e^0 = 2 \Rightarrow (0;2)$ - точка пересечения с осью Oy

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (2+x^2)\cdot e^{-x^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2+x^2 \neq 0 \\ e^{-x^2} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{точки пересечения с осью}$$

4) Находим точки экстремума и интервалы монотонности:

$$y'=2x\cdot e^{-x^2}+(2+x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}(2x+(2+x^2)\cdot(-2x))=$$

$$=e^{-x^2}(2x-4x-2x^3)=e^{-x^2}(-2x-2x^3)$$

$$y'=0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(-2x-2x^3)=0$$

$$-2(x+x^3)=0$$

$$x(1+x^2)=0$$

$$x=0$$

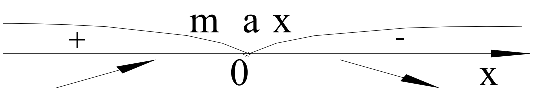


Рисунок 5.5

(0 ; 2) – точка максимума;

при $x\in(-\infty;0)$ - график функции возрастает;

при $x\in(0;+\infty)$ - график функции убывает.

5) Находим точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости и вогнутости.

$$y''=-2xe^{-x^2}(-2x-2x^3)+e^{-x^2}(-2-6x^2)=e^{-x^2}(4x^2+4x^4-2-6x^2)=$$

$$=e^{-x^2}(4x^4-2x^2-2)$$

$$y''=0 \Leftrightarrow 2x^4-x^2-1=0$$

$$x^2=t$$

$$2t^2-t-1=0$$

$$\mathcal{D}=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=1+8=9$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}=1,\ -\frac{1}{2}$$

$$x^2=t$$

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

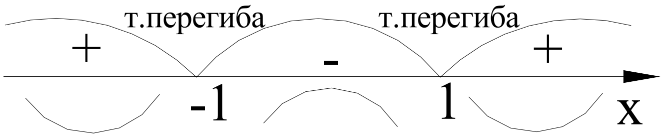


Рисунок 5.6

$$\left.\begin{matrix}\left(-1;\dfrac{3}{e}\right)\\ \left(1;\dfrac{3}{e}\right)\end{matrix}\right\}$$ -точки перегиба;

$$f(-1) = e^{-(-1)^2}\,(2+(-1)^2) = e^{-1}\cdot 3 = \frac{3}{e} = f(1)$$

при $x \in (-1;1)$ - график функции – выпуклая кривая;

при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ график функции – вогнутая кривая;

6) Изображаем эскиз графика функции (рисунок 5.7):

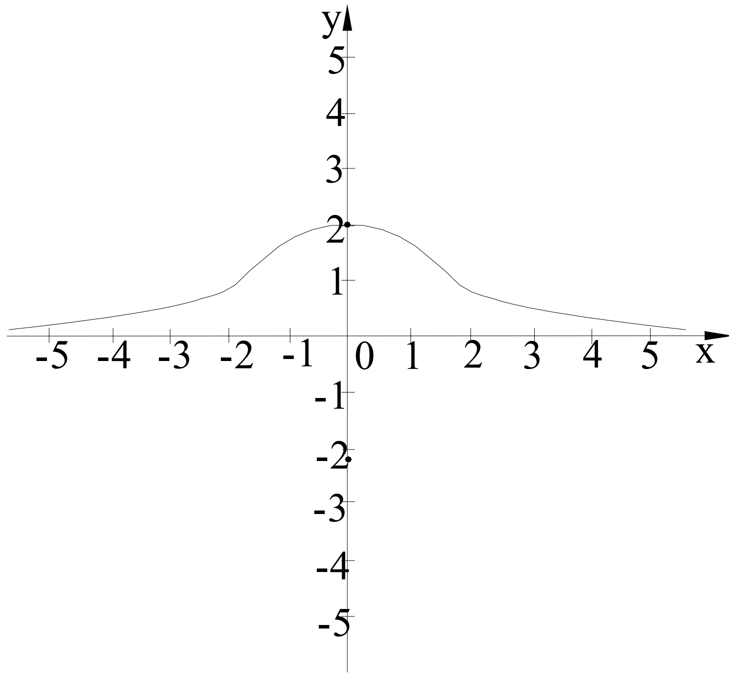


Рисунок 5.7

Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М. :Наука, 1984. – 431с.
2. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Минск: Изд. БГУ, 1973. – 532с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1961. – 407с.
4. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. -М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 407с.
5. Ким В.С. Исследование функций. Методические указания. – Оренбург.: Политехнический институт, 1988. – 15с.
6. Козлова В.А., Левитас Г.Г. Саморепетитор по математике. – М.: Школа – Пресс, 1996. – 272с.
7. Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 748с.
8. Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников. – М.: Наука,1983. – 96с.
9. Щипачев В.С. Основы высшей математики. – М.: Высшая школа, 1998. – 479с.