

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра начертательной геометрии, инженерной и
компьютерной графики

Г.П. ЛЕТНИЦКАЯ, З.А. МЯСНИКОВА, Л.М. ВИНОКУРОВА

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к расчетно-графической работе «Построение разверток»
по курсу «Инженерная графика»
Часть 1
Начертательная геометрия

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2003

ББК 22.151.3 я 7
В 49
УДК 514.18 (075)

Рецензент

кандидат технических наук, доцент А.П. Иванова

Л 49 Летницкая Г.П., Мясникова З.А., Винокурова Л.М.
Инженерная графика: Методические указания.-Оренбург:
ГОУ ВПО ОГУ, 2003.-Ч.1.-25 с.

Методические указания (часть первая) предназначены для самостоятельного выполнения расчетно-графической работы по курсу «Инженерная графика» «Построение разверток» для студентов обучающихся по программам высшего профессионального образования по инженерным специальностям.

ББК 22.151.3я73

© Винокурова Л.М., Летницкая Г.П., Мясникова З.А., 2003
© ГОУ ВПО ОГУ, 2003

Введение

Приступая к изучению развёртки поверхности, последнюю целесообразно рассматривать как гибкую, нерастяжимую плёнку. Некоторые из представленных таким образом поверхностей можно путём изгибания совместить с плоскостью. При этом, если отсек поверхности может быть совмещён с плоскостью без разрывов и склеивания, то такую поверхность называют **развёртывающей**, а полученную плоскую фигуру - её **развёрткой**.

1 Основные свойства развертки поверхностей

С позиции теории множеств поверхность и ее развёртку следует рассматривать как два точечных множества. Так как, по определению, развёртка поверхности представляет собой плоскую фигуру, образованную из поверхности без разрывов и склеивания, то между отмеченными двумя множествами устанавливается взаимно-однозначное соответствие: каждой точке (фигуре) на поверхности соответствует точка (фигура) на развёртке и наоборот.

На основании этого можно сформулировать следующие свойства:

1) длины двух соответствующих линий поверхности и её развёртки равны между собой;

Следствием чего является: замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развёртке ограничивают площадь.

2) угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развёртке;

3) прямой на поверхности соответствует также прямая на развёртке;

4) параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развёртке;

5) Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развёртке, то эта линия является геодезической.

2 Построение развёртки прямой призмы

Развёрткой многогранника называется фигура, полученная в результате совмещения всей ее поверхности с плоскостью.

Развёртка боковой поверхности призмы, приведена в соответствии с рисунком 1 есть прямоугольник, длина которого равна периметру треугольника основания, а высота равна высоте призмы. Для получения полной развёртки добавляют верхнее и нижнее основание призмы. Переносят на развёртку точки М и N. Для этого на ребре АВ откладывают отрезок $AM_0 = A_1M_1$ и через точку M_0 проводят прямую, параллельную направлению боковых ребер призмы. На этой прямой откладывают отрезок M_0M ,

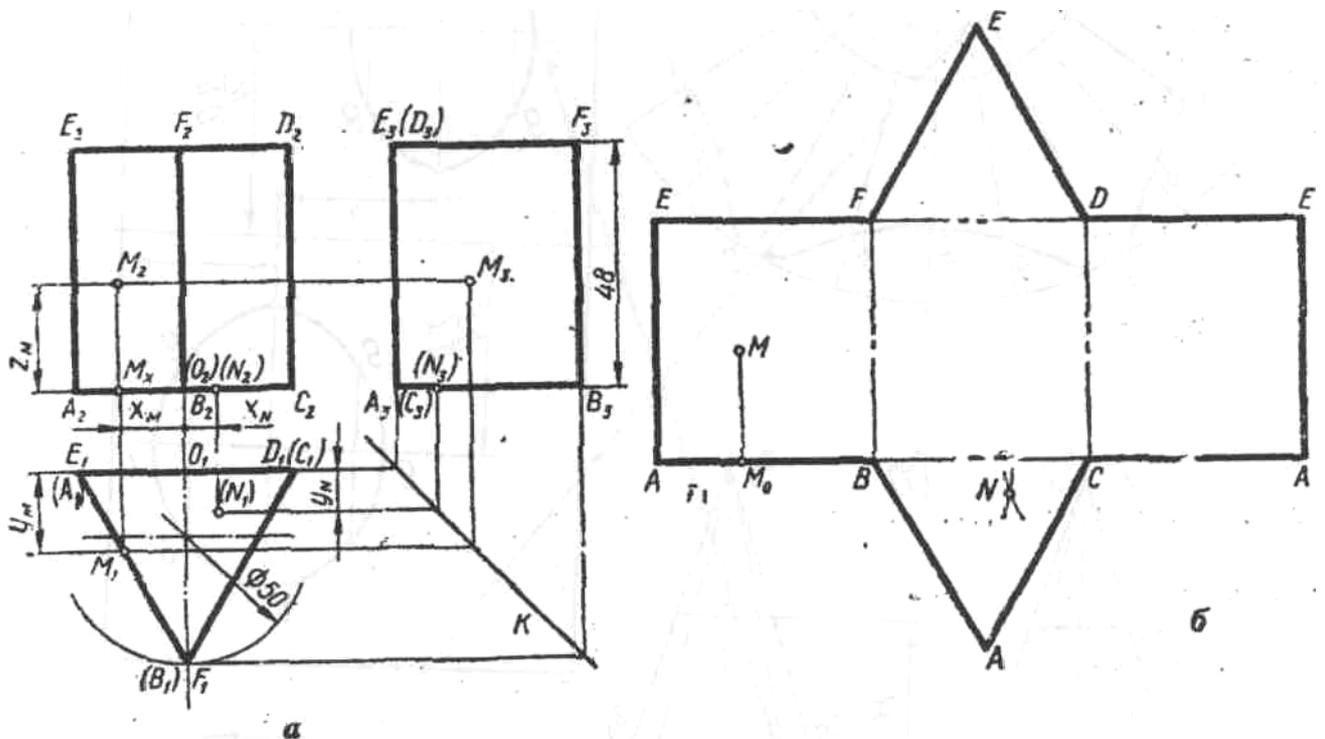


Рисунок 1

равный отрезку M_1M_2 . Точка N построена способом засечек. На горизонтальной проекции измеряют циркулем отрезки BN и CN и из точек B и C, как из центров, проводят дуги до взаимного их пересечения в точке N. Рёбра призмы (линии перегиба) на развертке изображают тонкой штрих пунктирной линией.

3 Развертка наклонной призмы

Существует 2 способа построения развертки:

- 1) способ нормального сечения;
- 2) способ раскатки;

Рассмотрим каждый из этих способов.

3.1 Способ нормального сечения

Этот способ используют, если ребра призмы параллельны какой либо плоскости проекций. Пример. Построить развертку наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$, проекции которой представлены на рисунке 2. Ребра AD , BE и CF параллельны плоскости H , поэтому на эту плоскость они проецируются в действительную величину. Если ребра призмы занимают произвольное положение, то прежде чем приступить к построению развертки, следует с помощью методов преобразования перевести их в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

Решение. Пересечем призму $ABCDEF$ плоскостью u , перпендикулярной к боковым ребрам призмы. Построим сечение заданной призмы этой плоскостью - треугольника 123 . Определяем действительную величину сторон треугольника 123 . В произвольном месте чертежа проводим прямую a (на рис. 3 прямая a проведена горизонтально). От произвольной точки $1o$, взятой на этой прямой, откладываем отрезки $[1o2o]$, $[2o3o]$, $[3o1o]$, конгруэнтные сторонам треугольника 123 . Через точки $1o2o3o1o$ проводим прямые, перпендикулярные к прямой a , и откладываем на них от точек $1o$, $2o$, $3o$, $1o$ отрезки, конгруэнтные соответствующим действительным величинам отрезков боковых ребер ($[1A]$, $[1D]$, $[2B]$, $[2E]$, ... и т. д.). Полученные точки $AoBoCoAo$ и $DoEoFoDo$ соединяемы прямыми.

Плоская фигура $AoBoCoAoDoFoEoDo$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Чтобы получить полную развертку призмы, необходимо к развертке боковой поверхности пристроить основания призмы треугольника $AoBoCo$ и треугольника $DoEoFo$, предварительно определив их действительную величину

3.2 Способ раскатки

Этот способ целесообразно использовать для построения развертки поверхности призмы в том случае, когда основание призмы параллельно какой-либо одной плоскости проекции, а ее ребра параллельны другой плоскости проекции.

Пример. Построить развертку боковой поверхности наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$, проекции которой представлены в соответствии с рисунком 3.

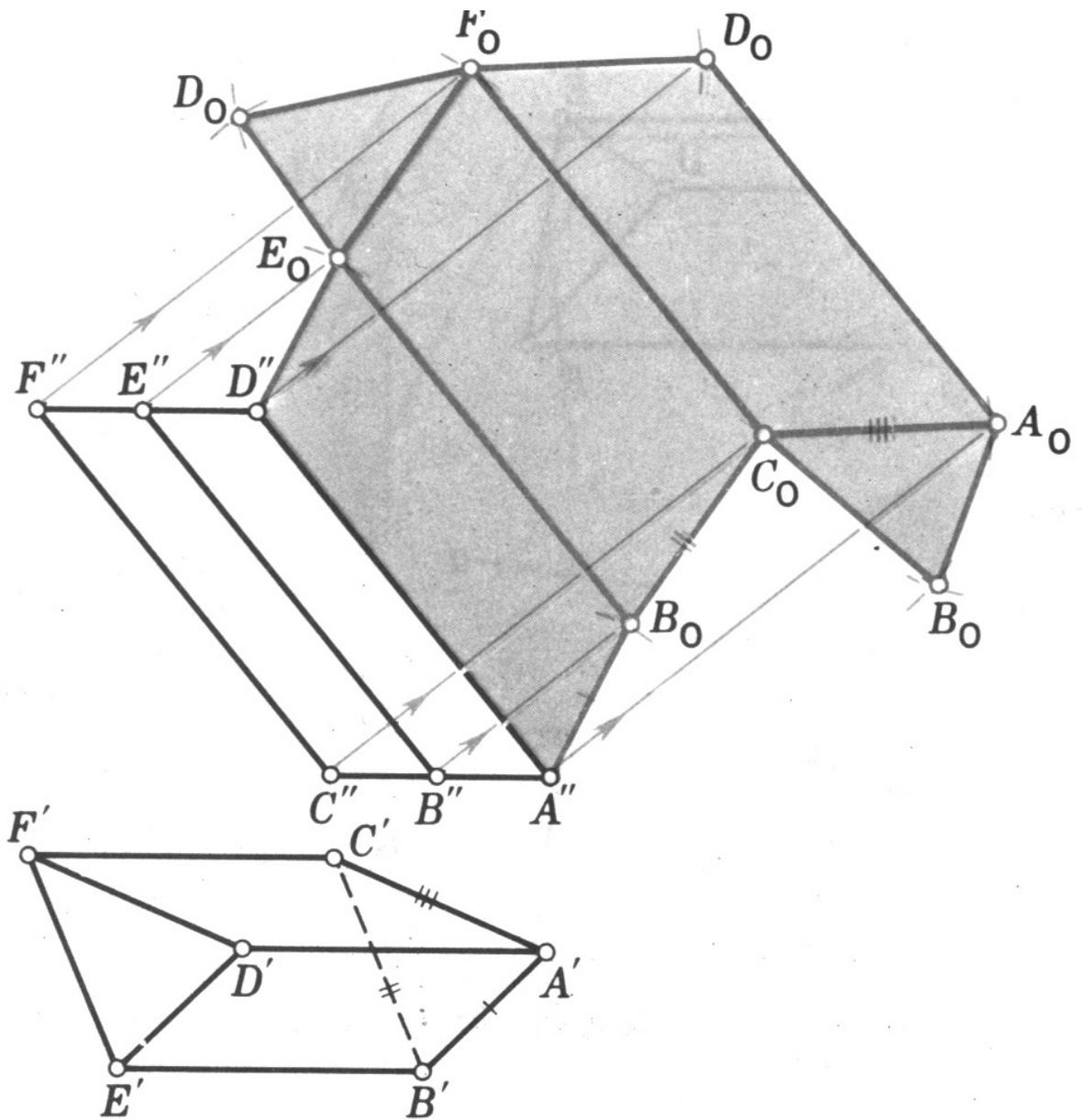


Рисунок 3

Примем за плоскость развертки плоскость P , проходящую через ребро AD , параллельную фронтальной плоскости проекции. Совместим грань $ADEB$ с плоскостью P . Для этого мысленно разрежем поверхность призмы по ребру AD , а затем осуществим поворот грани $ADEB$ вокруг ребра AD ($A''D''$). Для нахождения совмещенного с плоскостью P положения ребра $BoEo$ из точки B'' проводим луч, перпендикулярный к $A''D''$, и засекаем на нем другой радиуса $|A'B'|$, проведенной из центра A'' , точку Bo . Через Bo проводим прямую $BoEo$, параллельную ($A''D''$).

Принимаем совмещенное положение ребра $Bo Eo$ за новую ось и вращаем вокруг нее грань $BEFC$ до совмещения с плоскостью P .

Для этого из точки C'' проводим луч, перпендикулярный к совмещенному ребру $BoEo$, а из точки Bo - дугу окружности радиусом, равным $B'C'$; пересечение дуги с лучом определит положение точки Co . Через Co проводим $CoFo$ параллельно $BoEo$. Аналогично находим положение ребра $AoDo$. Соединив точки $A''BoCoAo$ и $D''EoFoDo$ прямыми, получим фигуру $A''BoCoAoDoFoEoD''$ - развертку боковой поверхности призмы.

Для получения полной развертки призмы достаточно к какому-либо из звеньев ломаной линии $A''BoCoAo$ и $D''EoFoDo$ пристроить треугольники основания $AoBoCo$ и $DoEoFo$.

4 Построение развертки прямой пирамиды

Для построения развертки пирамиды нужно определить натуральную величину всех ее ребер. Ребра основания проецируются в истинную величину на плоскость Π_1 . Согласно рисунку 4 натуральную величину одного из ребер, например SA , определяют способом вращения вокруг оси, проходящей через вершину пирамиды S перпендикулярно к ее основанию. Горизонтальная проекция ребра после вращения займет положение S_1A_1 , параллельное оси Ox . На фронтальной плоскости проекций A_3 перемещается в положение A_3 . Прямая S_2A_2 - натуральная величина бокового ребра пирамиды. Из произвольной точки S радиусом, равным натуральной величине бокового ребра, т. е. $SD=S_2A_2$, проводят дугу окружности, на которой засекают четыре хорды, соответственно равные сторонам основания пирамиды, например: $AD=A_1D_1$; $AB=A_1B_1$; ... Соединяя

точки S, D, A, B, C, D, S получают развертку боковой поверхности. Достаивают прямоугольник основания пирамиды.

Наносят на развертку точки N и F . При вращении ребра SA до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций, точка N , лежащая на этом ребре, перемещается в положение N .

Измеряют величину отрезка S_2N_2 и откладывают ее на развертке ($SN=S_2N_2$). Если вращать ребро BS до положения параллельно оси Ox и займет положение E_2 . Откладывают на ребре BS развертки отрезок $SE=S_2E_2$. Из точки E проводят прямую EF , параллельную ребру AB , и находят на этой прямой точку F ($EF=E_1F_1$).

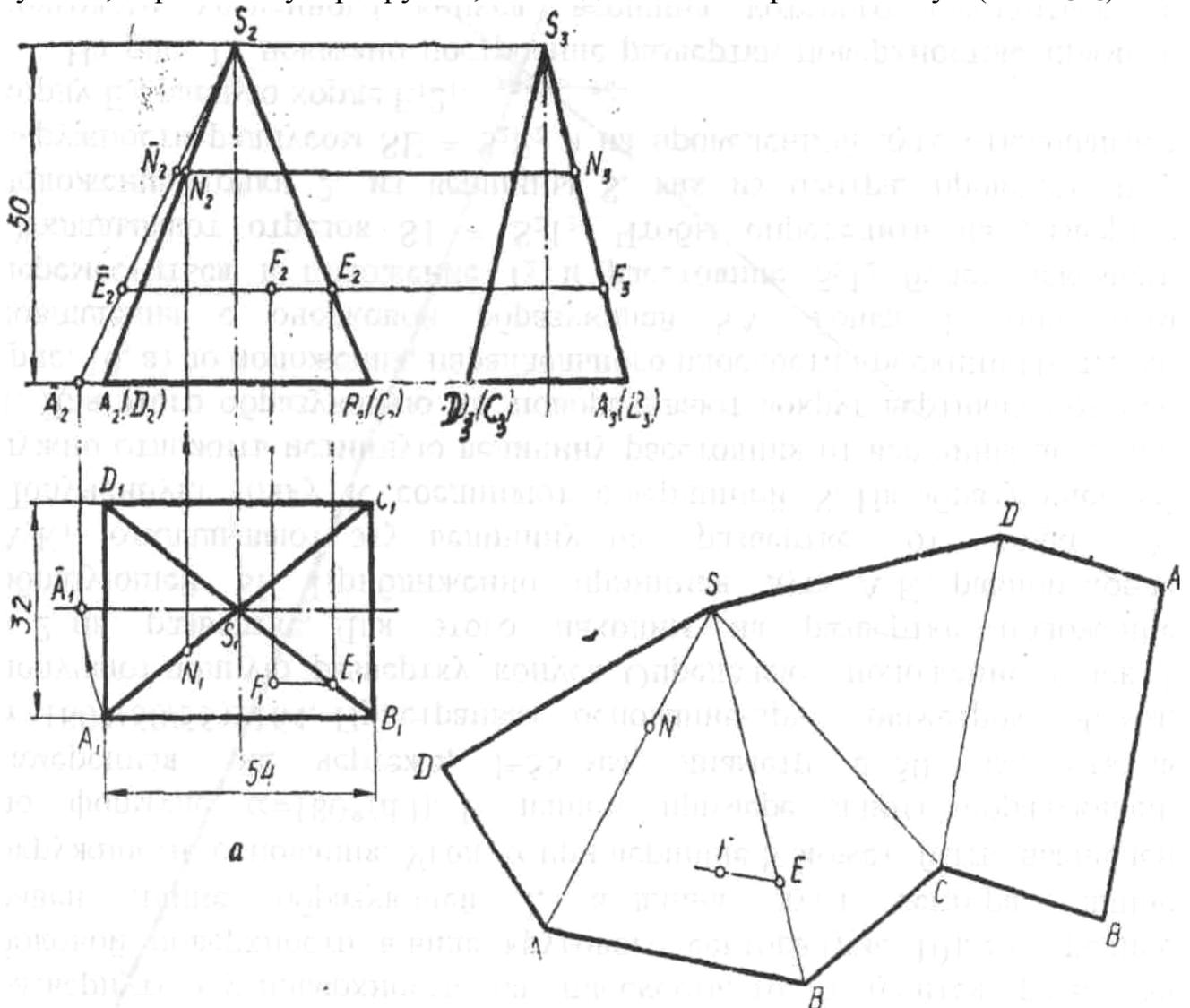


Рисунок 4

5 Построение развертки наклонной пирамиды

5.1 Способ треугольников

При построении развертки боковой поверхности пирамиды $SABC$, проекции которой представлены на рисунке 5 используется способ треугольников. Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников -граней пирамиды. Поэтому построение развертки поверхности пирамиды сводится к определению действительной величины ребер пирамиды и построению по трем сторонам треугольников -граней пирамиды.

На рисунке 5 определение действительной длины ребер пирамиды выполнено с помощью вращения их вокруг оси i ($i \in S$ и $i \perp H$). Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью P (плоскость P параллельна V и $P \in i$

После того, как будут определены действительные величины ребер $[S''A_2]$, $[S''B_2]$, $[S''C_2]$, приступают к построению развертки. Для этого из произвольной точки S_0 проводят произвольную прямую a . Откладывают на ней от точки S_0 $[S_0A_0] = [S''A_2]$. Из точки A_0 проводят дугу радиусом $r_1 = A'B'$, а из точки S_0 - дугу радиусом $R_1 = [S''B_2]$. Пересечение дуг укажет положение вершины B_0 $\Delta S_0A_0B_0$ ($\Delta S_0A_0B_0 = \Delta SAB$ - грани пирамиды). Аналогично находят точки C_0 и A_0 . Соединив точки $A_0B_0C_0A_0S_0$, получим развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$.

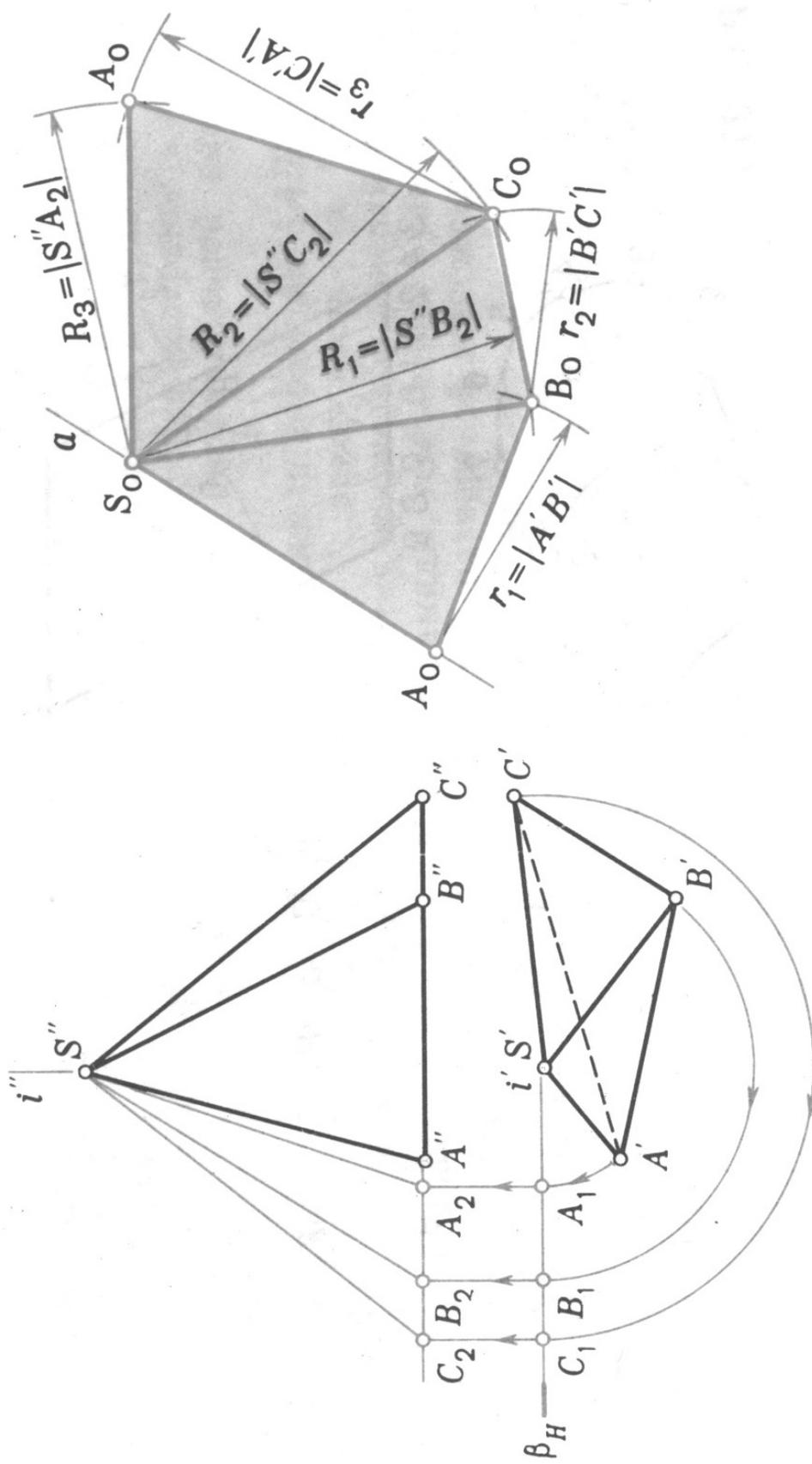


Рисунок 5

6 Развертка прямого цилиндра

Разверткой боковой поверхности цилиндра, представленного на рисунке 6 является прямоугольник, длина которого равна длине окружности основания цилиндра (в нашем случае $\pi d = 3.14 * 40 = 125.6$ мм), а высота равна высоте цилиндра (50 мм). Для получения полной развертки добавляют верхнее и нижнее основания цилиндра, т. е. два круга диаметром 40 мм.

Чтобы перенести на развертку линию 1-2-3-4, на основании прямоугольника откладывают длины дуг окружности между точками $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ (приближенно можно откладывать длины соответствующих хорд). Из точек $B, 2_0, 3_0, 4_0$ проводят вертикальные прямые, на которых откладывают высоты отдельных точек, например: $B1=Z_1; 2_02=Z_2$ и т. д. Точки 1,2,3,4 соединяют плавной кривой.

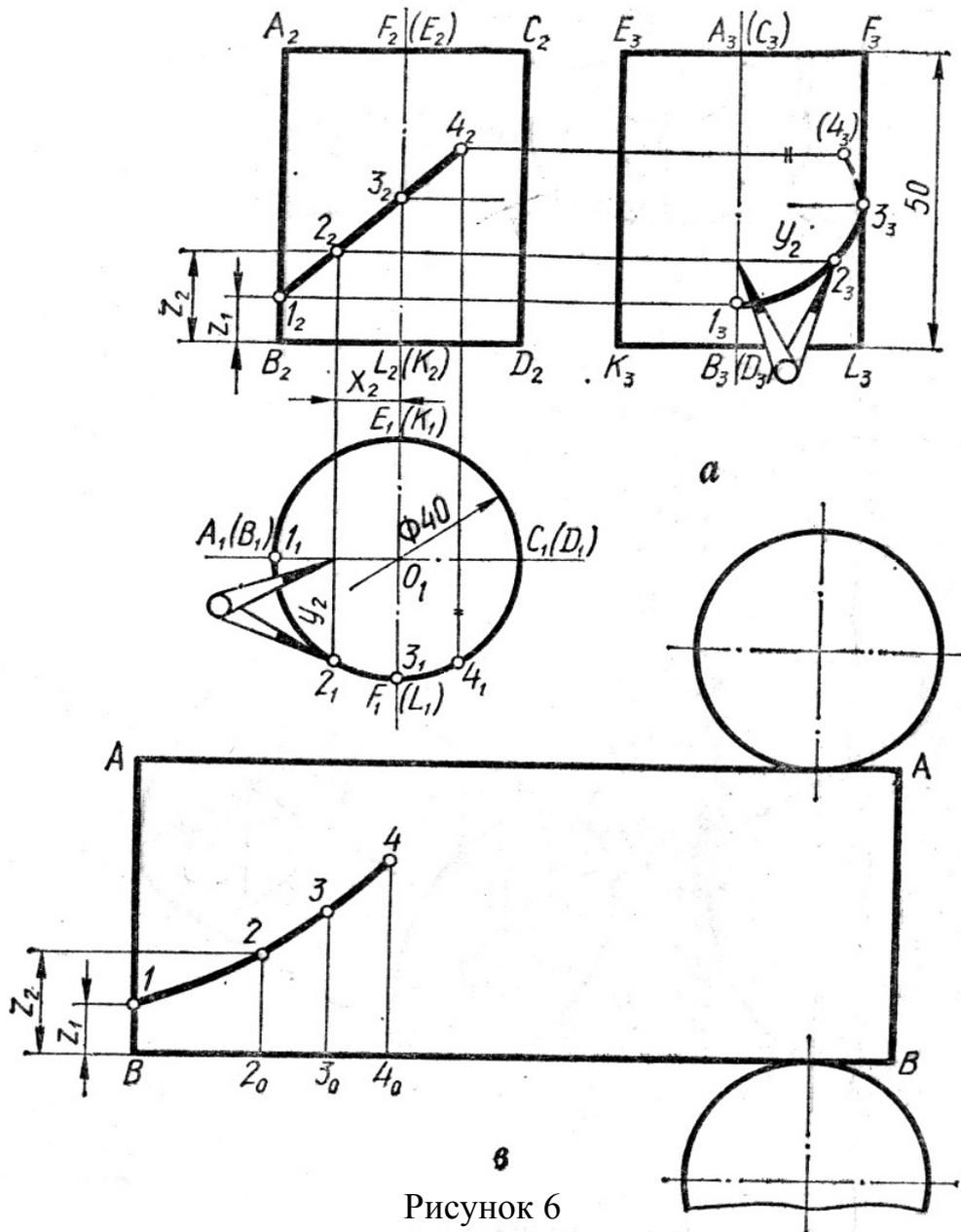


Рисунок 6

7 Построение развертки наклонной цилиндрической поверхности

Для построения развертки наклонной цилиндрической поверхности используются те же способы нормального сечения и раскатки, которые применяются при разворачивании боковой поверхности призмы. В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют (аппроксимируют) призматической поверхностью, вписанной в данную цилиндрическую. Затем задачу решают так же, как это было показано при построении развертки способом нормального сечения на рисунке 7 и способом раскатки на рисунке 8.

При построении развертки поверхности цилиндра вращения предпочтение следует отдать способу нормального сечения, так как в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

Согласно рисунку 8 отрезок $[A_0A_0]$ на развертке равен длине линии нормального сечения. Промежуточные точки $B_0, C_0, \dots, K_0, \dots$, соответствующие точкам B, C, \dots, K поверхности α , определяются путем деления отрезка на такое же число равных частей, на какое разделена окружность нормального сечения цилиндрической поверхности. В этом случае точность построения развертки повысится, так как решение осуществлено без аппроксимации цилиндрической поверхности.

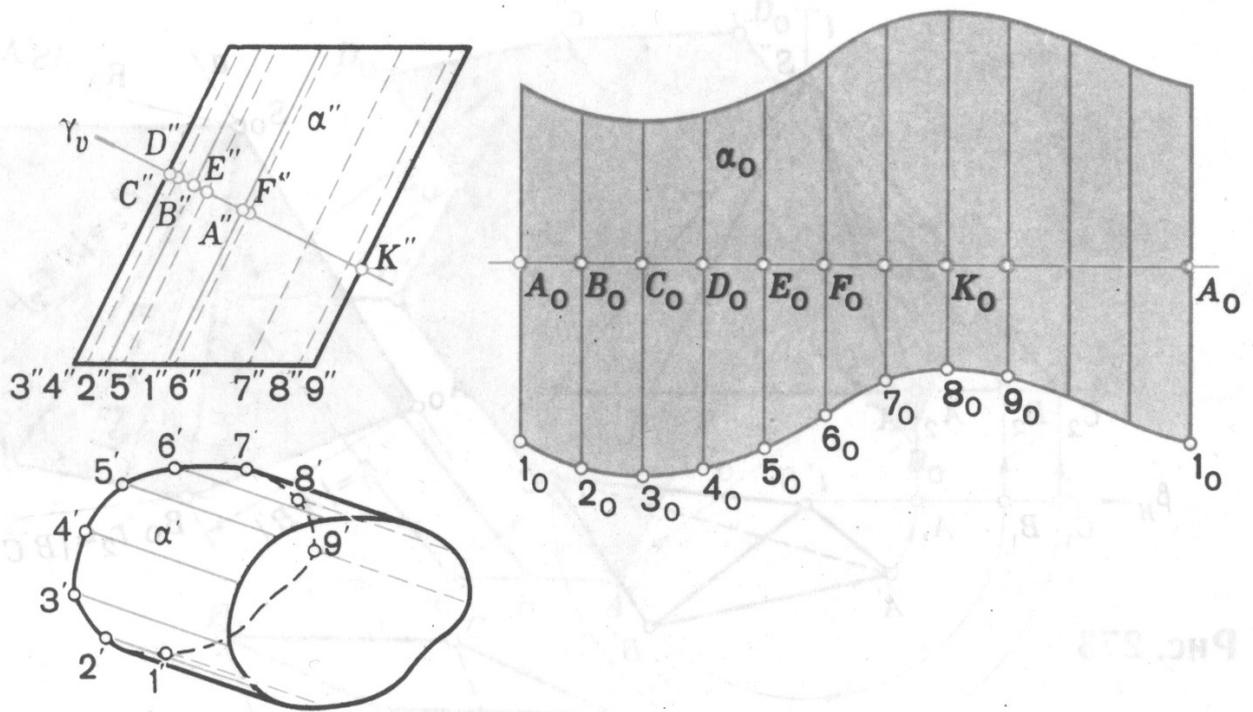


Рисунок 7

На рисунке 8 развертка боковой поверхности цилиндрической поверхности α выполнена способом раскатки.

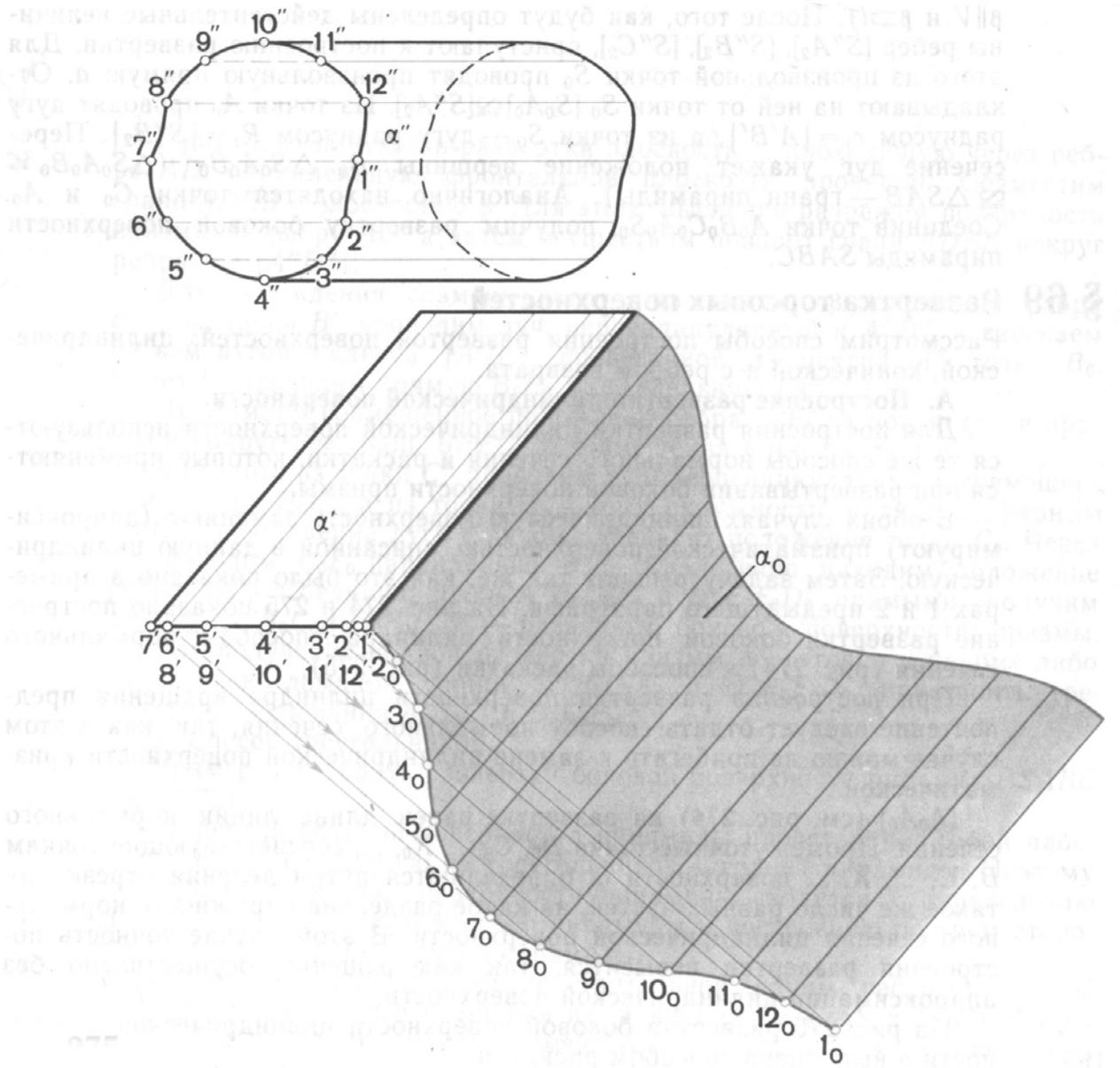


Рисунок 8

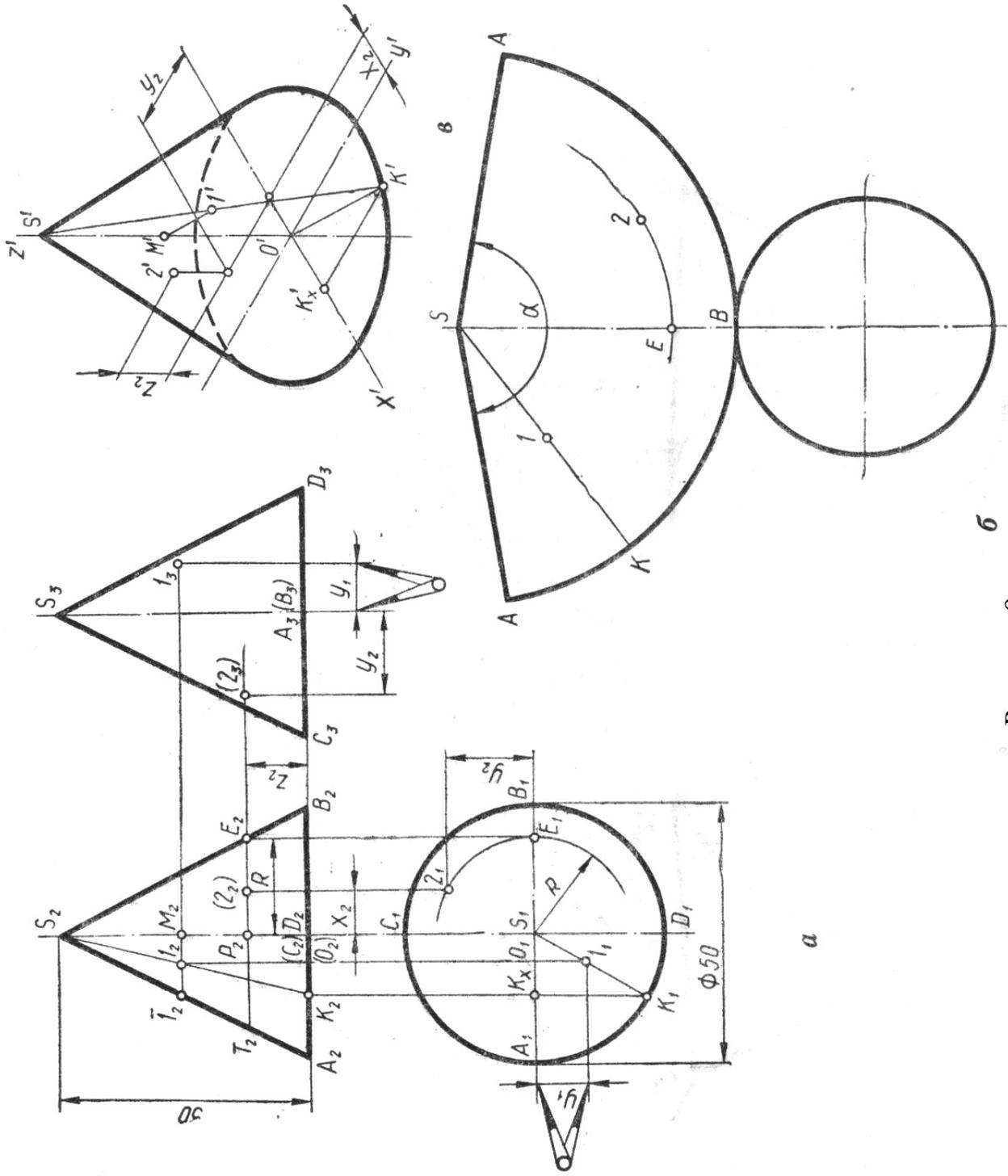


Рисунок 9

8 Развертка прямого конуса

Если разрезать поверхность конуса вдоль его образующей и развернуть эту поверхность на плоскость, то как показано на рисунке 10 получится развертка боковой поверхности в виде кругового сектора. Его радиус равен длине образующей l , а длина дуги сектора - длине окружности основания. Угол α при вершине S может быть вычислен по формуле $\alpha = 180 \cdot (d/l)$. В нашем примере длина образующей, замеренная на чертеже, $l = 55$ мм, диаметр $d = 50$ мм, откуда $\alpha = 180 \cdot (50/55) = 164$. Пристраивая основание-круг диаметром 50 мм, получают полную развертку конуса. Определяют положение точек 1 и 2 на развертке. Для этого находят на развертке положение образующей SK . Приблизительно принимая дугу A_1K_1 равной хорде A_1K_1 , откладывают эту величину на развертке от точки A . Полученную точку K соединяют с вершиной S . На образующей SK нужно отложить истинную величину расстояния от вершины до точки 1. Для этого образующую SK поворачивают вокруг вертикальной оси (рисунок 9а) до положения, параллельного плоскости проекций Π_2 , т.е. до совпадения с очерковой образующей SA . Точка l_2 при этом переместится в положение l_2 и расстояние S_2l_2 будет искомым. Откладывают отрезок $Sl = S_2l_2$. Чтобы определить на развертке положение точки 2, из вершины S , как из центра, проводят дугу окружности радиусом $SE = S_2E_2$ и на проведенной дуге откладывают хорду E_2 , равную хорде E_12_1 .

На рисунке 10 показано построение развертки поверхности прямого кругового усеченного конуса, вершина которого находится за пределами чертежа.

Решение этой задачи осуществляется следующим путем. Строим вспомогательный конус β , подобный данному конусу α . Диаметр d основания конуса β следует выбирать так, чтобы отношение D/d (где D - диаметр окружности основания конуса α) выражалось целым числом. На рисунке 11 оно равно 2. Строим развертку боковой поверхности вспомогательного конуса β - $SoA_0l_02_0...5_0A_0$. Из произвольной точки O_0 , принадлежащей биссектрисе угла A_0SoA_0 , проводим лучи $[O_0A_0]$, $[O_0l_0]$, $[O_02_0]$, ... $[O_0A_0]$ и на них откладываем отрезки $[O_0A_1] = k |O_0A_0|$, $[O_0l_1] = k |O_0l_0|$, $[O_02_1] = k |O_02_0|$, ... $[O_0A_1] = k |O_0A_0|$, где $k = D/d = 2$.

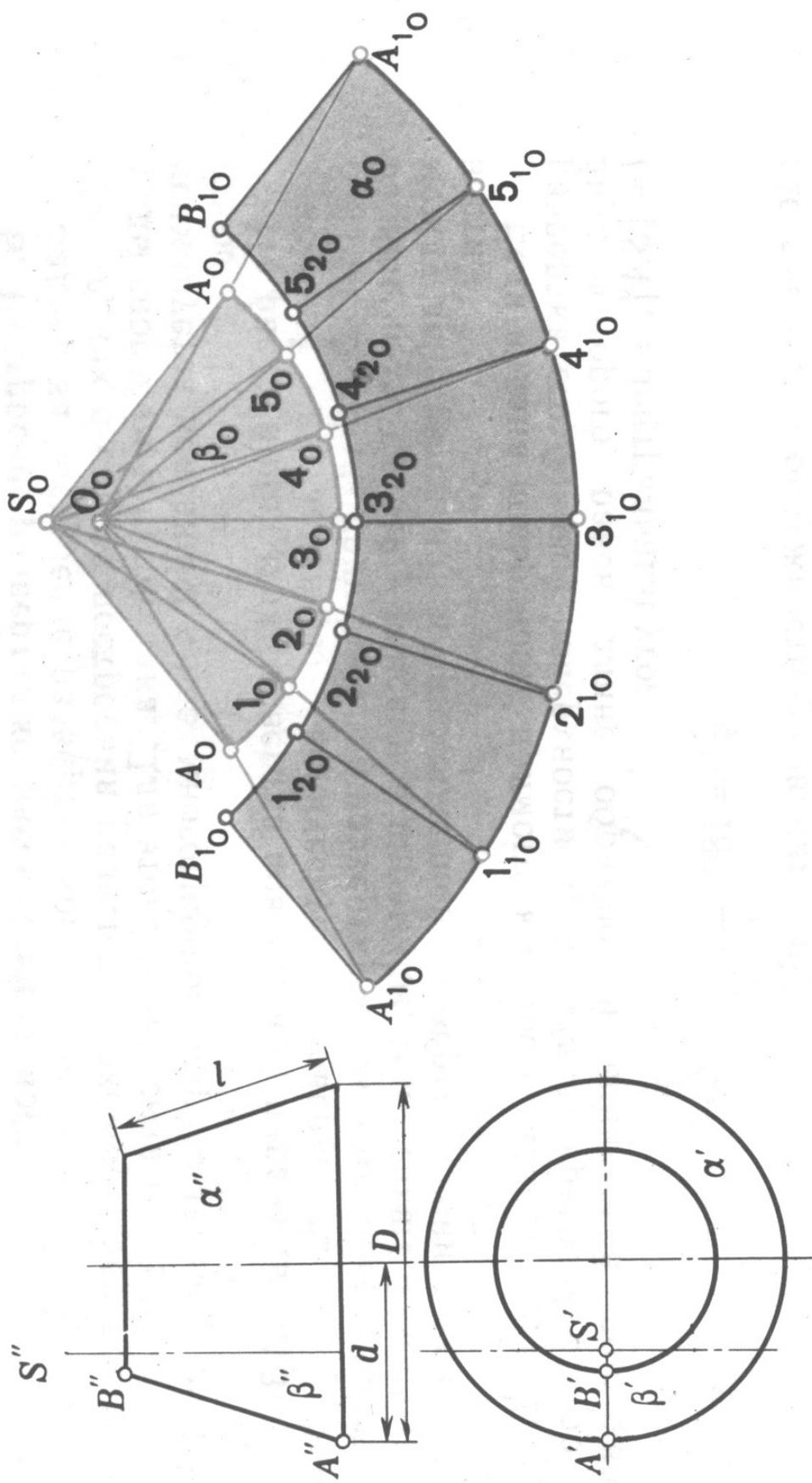


Рисунок 10

На практике достаточно определить положение точки A_1 и через нее провести дугу окружности радиусом, равным длине отрезка $[OoA_1]$ из центра в точке Oo . Эта окружность пересечет лучи $[Oo1o)$, $[Oo2o)$, ... и т.д. в точках 1_1 , 2_1 , ..., и т.д. Из точек A_1 , 1_1 , 2_1 , ..., проводим прямые, параллельные соответствующим прямым $(AoSo)$, $(1oSo)$, $(2oSo)$, ... и на них откладываем отрезки $[A_1 B_1]$, $[1_1 l_2]$ $[2_1 2_2]$, ... равные 1-образующей AB усеченного конуса α .

9 Построение развертки наклонной конической поверхности

Задача на построение развертки конической поверхности решается так же, как в случае построения развертки боковой поверхности пирамиды способом треугольника. Для этого коническая поверхность аппроксимируется вписанной в нее многогранной пирамидой поверхностью.

На рисунке 12 показана развертка поверхности пирамиды $SABCDEF\dots$, вписанной в заданную коническую поверхность α . Фигуру $SoAoBoCoDoEoFoAo$ принимают за развертку конической поверхности. Чем больше число граней у вписанной пирамиды, тем меньше будет разница между действительной и приближенной разверткой конической поверхности.

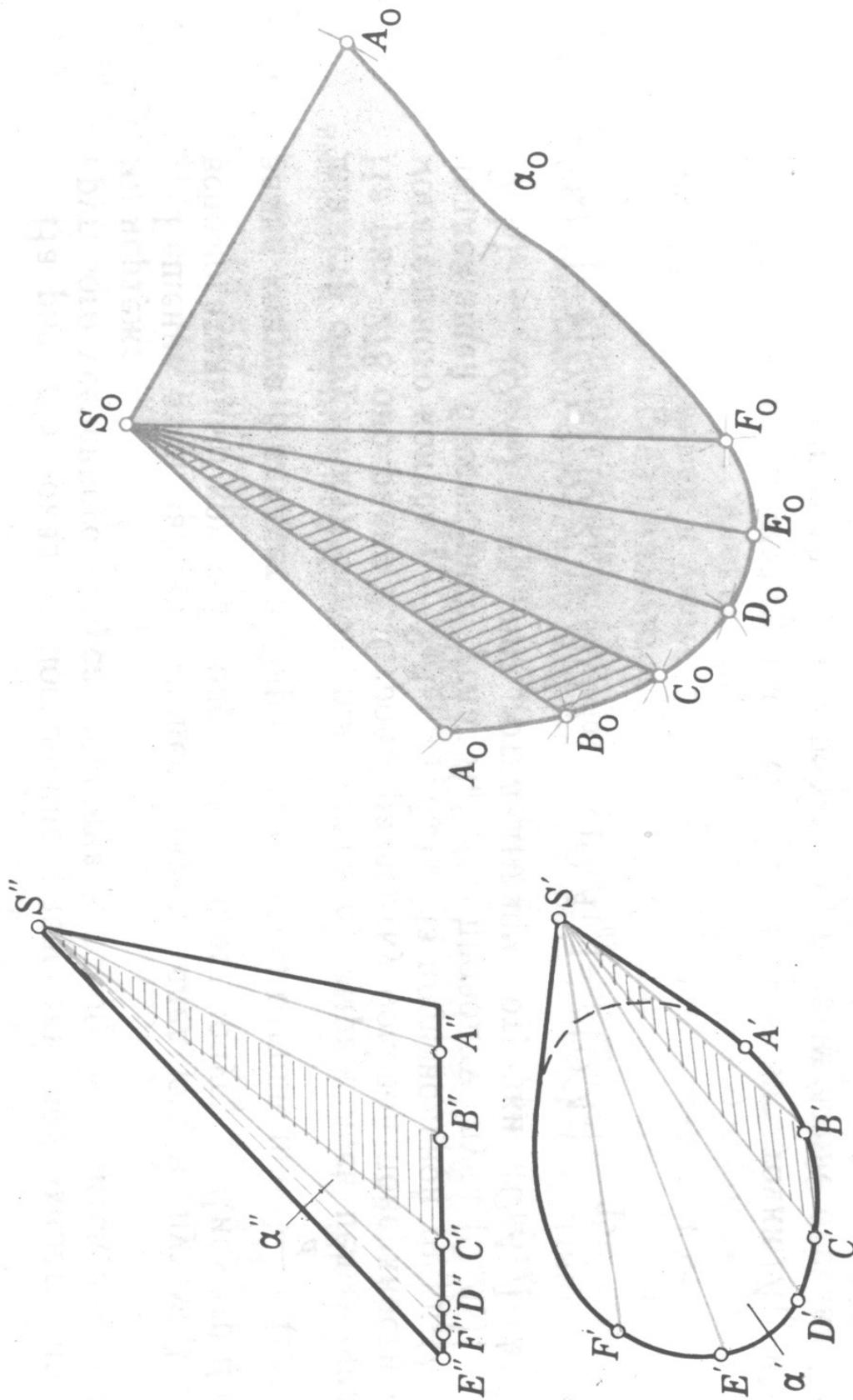


Рисунок 11

10 Построение разверток элементов, конструкций из листового металла

На рисунке 12 дан цилиндр диаметром D с цилиндрическим патрубком диаметра d и коническим - радиуса $г$. При этом D , d и $г$ являются средними расчетными размерами. Построение развертки всех элементов данной конструкции (пояснения о том, как строятся линии перехода, здесь опущены) даны на рисунке 13.

Построим развертку цилиндрического патрубка диаметром d . Прежде чем приступить к построению развертки, необходимо выбрать исходную базу, от которой должны строиться все элементы разворачиваемого предмета. В этом примере базой служит торец патрубка - окружность диаметра d , а на развертке - прямая, равная длине этой окружности πd .

Проведем прямую и на ней отложим отрезок, равный πd .

Разделим его на равное число частей, соответственного числу проведенных нами образующих на патрубке, в данном случае на 8. Через точки деления проведем прямые линии.

Приняв условно, что патрубок будет разрезан вдоль первой образующей, отметим эту образующую на развертке. Здесь она изобразится крайними прямыми. Отложив на них длину, равную расстоянию от торца до точки 1, получим на развертке точку 1. Такую же длину откладываем на пятой прямой, т.к. отрезки 1-й и 5-й образующих равны между собой. Для построения точек 2, 4, 6 и 8 измерим по тем же причинам длину только одной из соответствующих образующих и отложим ее на соответствующих прямых на развертке. Аналогично строятся точки 3 и 7. Полученные точки соединяем плавной кривой.

Построим развертку конического патрубка.

Боковая поверхность конуса вращения, как известно, разворачивается в круговой сектор. Угол сектора подсчитывается по формуле $\phi = r/l \times 360^\circ$, где $г$ - радиус окружности основания, а l - длина образующей конуса.

Подсчитав угол ϕ , строим сектор. Разделив дугу сектора на равное число частей, соответственно числу принятых нами образующих на патрубке, т.е. на 8. Проведем из вершины S к точкам деления пучок прямых (образующих).

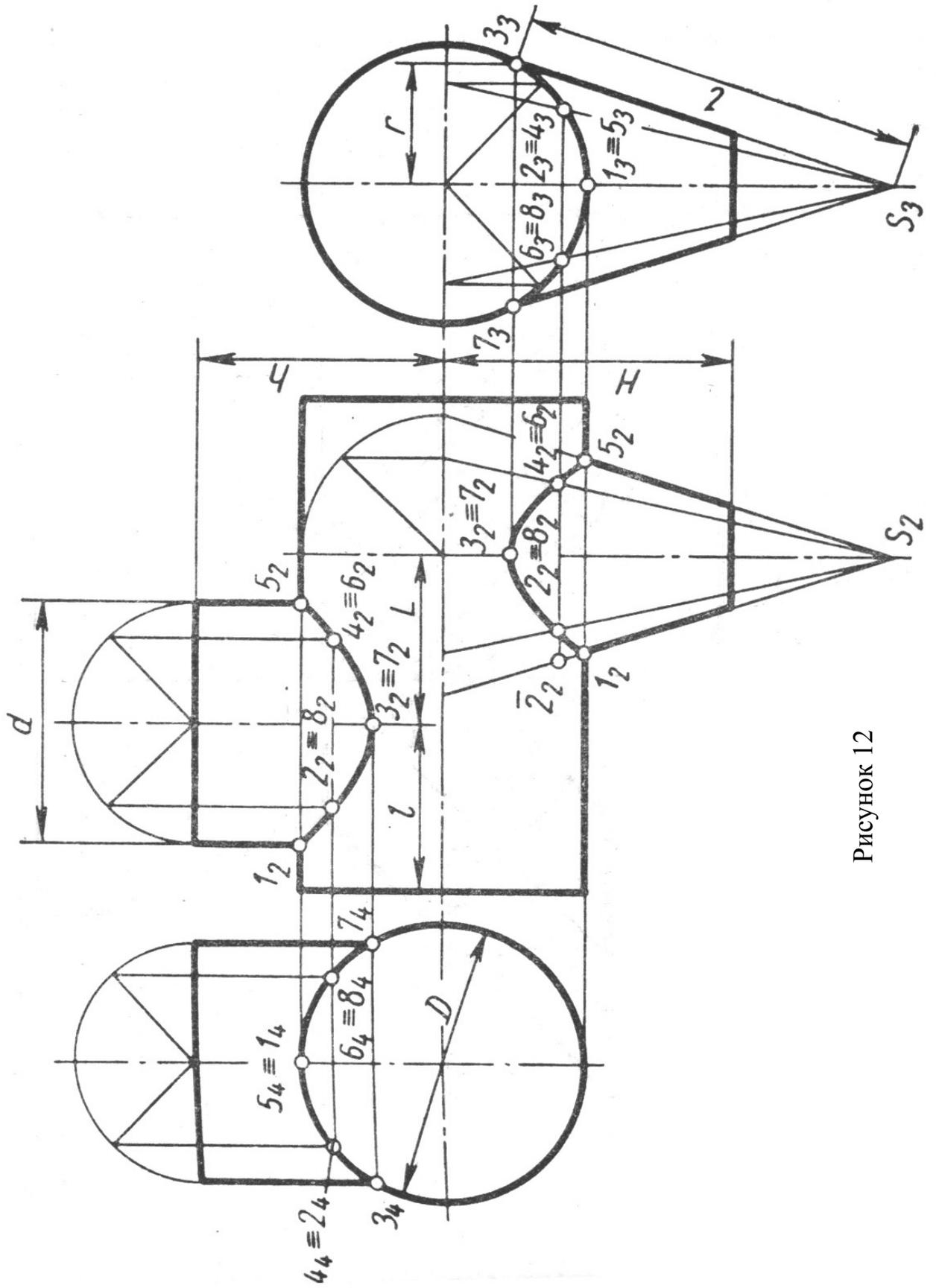
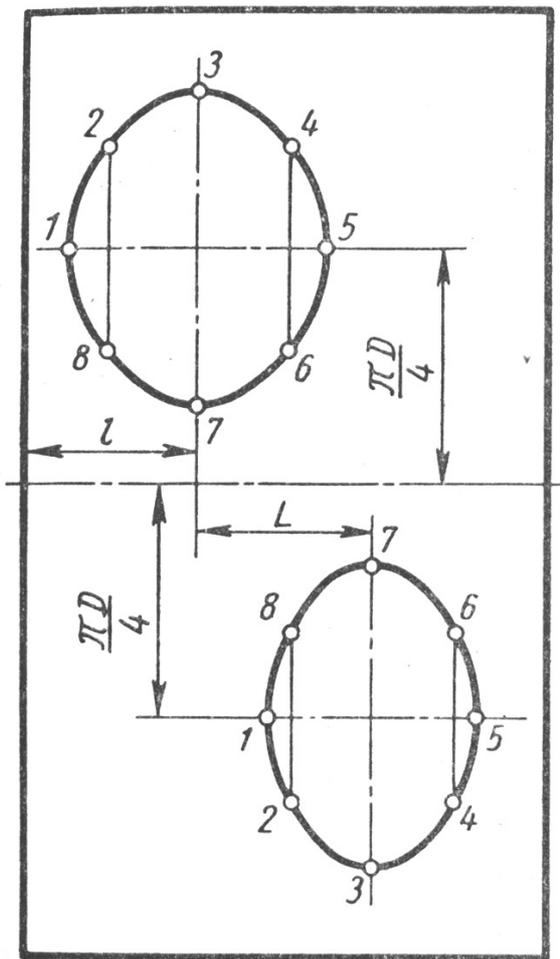
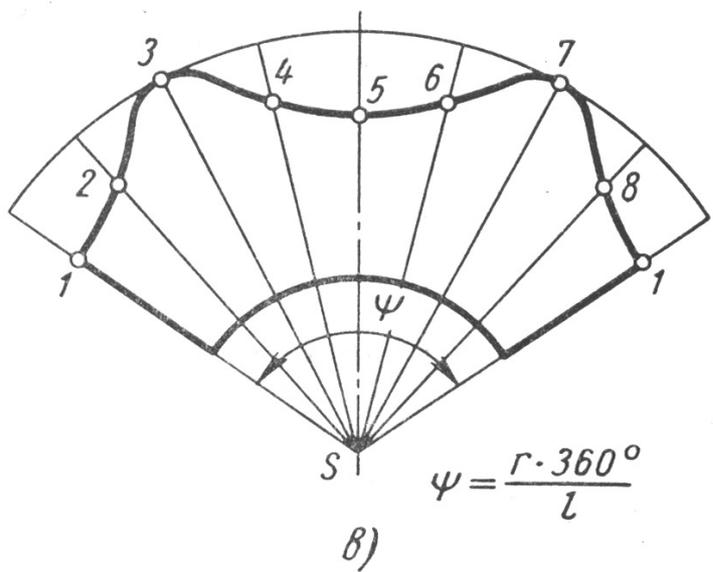


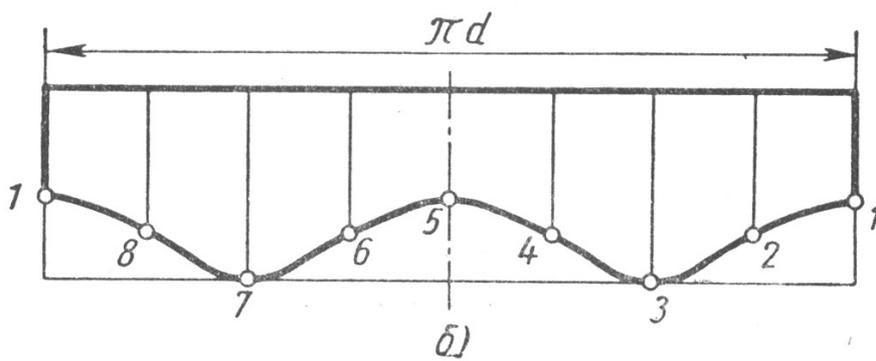
Рисунок 12



2)



8)



6)

Рисунок 13

Пусть точка S служит базой для построения точек линии перехода (за базу можно принять и дугу основания конуса). Примем также, что патрубок разрезан вдоль 1-й образующей. Чтобы нанести точки линии перехода на сектор, необходимо предварительно найти истинные величины образующих, с проектировавшихся в искаженном виде. К ним относятся 2-я, 4-я, 6-я и 8-я образующие. Т.к. отрезки этих образующих равны между собой, достаточно определить натуральную величину одной из этих образующих, например, 2-й. Вращаем эту образующую до положения, параллельного плоскости P_2 . Получим отрезок S_22_2 . Далее наносим натуральные отрезки образующих на соответствующие прямые на секторе. Получим точки 1, 2, 3, 4, 5 и т.д., принадлежащие линии перехода. Торцы патрубка развернутся в дугу окружности.

Построим линии перехода на развертке цилиндра диаметра D .

Развертка цилиндра - прямоугольник, а форма линий пересечения патрубков с цилиндром - кривые, напоминающие эллипсы.

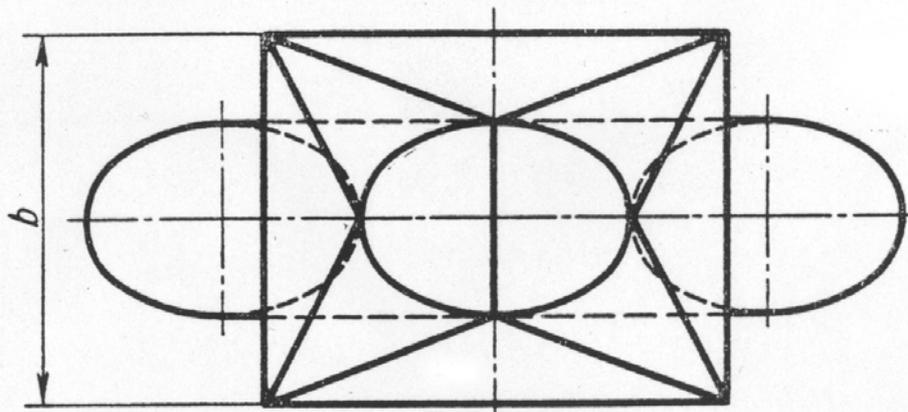
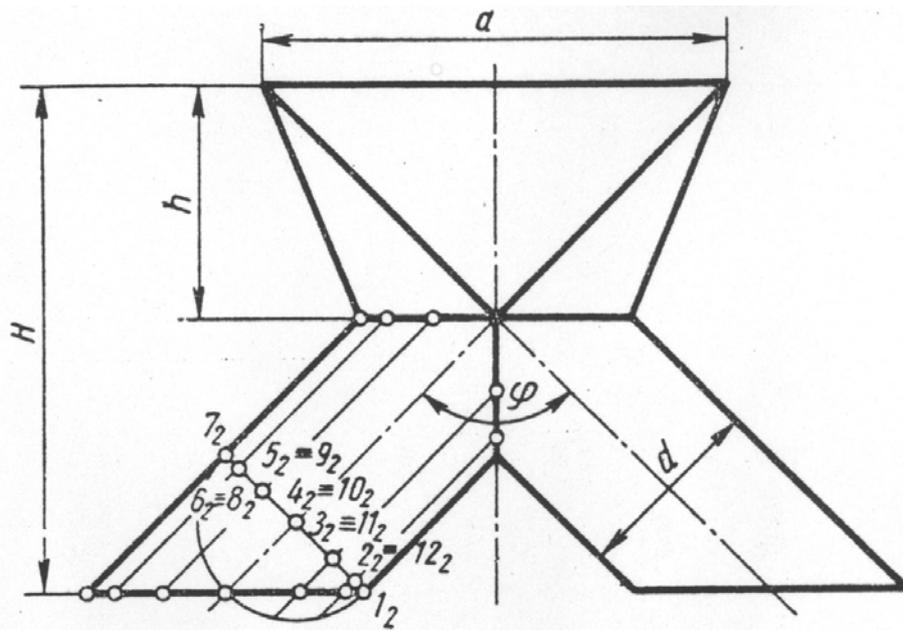
Строим точки этих кривых. Пользуясь конструктивными размерами на рисунке 12, строим из оси симметрии и откладываем отрезки 1-5 на горизонтальных осях и 3-7 на вертикальных, соответственно равные отрезку 1_2-5_2 и дугам 3_4-7_4 и 3_3-7_3 .

Для построения промежуточных точек 2, 4, 6 и 8 измеряем отрезки 2_2-4_2 и откладываем их на соответствующих горизонтальных осях. Через концы отрезков проводим хорды и на них откладываем отрезки 2-8 и 4-6, равные дугам 2_3-8_3 и 4_4-6_4 для линии пересечения цилиндрического патрубка и отрезки 2_3-8_3 и 4_3-6_3 - для конического.

Полученные точки соединяем плавной кривой.

На рисунке 14 изображен бункер с двумя цилиндрическими отводами. Построим развертки элементов данной конструкции.

Строим развертку отвода. Пусть базой будет служить поперечное сечение цилиндра 1-7. Разделим сечение на равное число частей, например на 12, и проведем через точки деления образующие цилиндра. Легко видеть, что все они проектируются на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину. Проведем теперь прямую линию, равную πd , и разделим ее на 12 равных частей по числу образующих на цилиндре. Если отвод разрезать вдоль самой короткой первой образующей, тогда точки поперечного сечения на прямой расположатся в таком порядке, как показано на рисунке 14. Через точки деления проводим вертикальные прямые.



a)

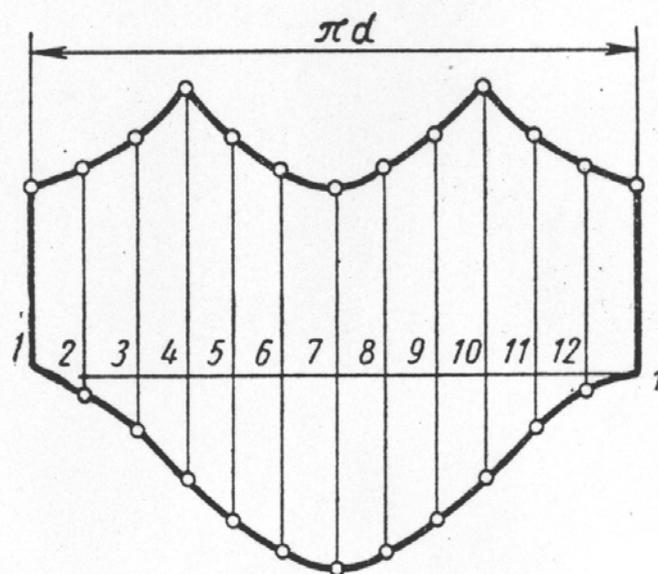


Рисунок 14

Отложив затем на них вверх и вниз соответствующие отрезки образующих, получим с каждой стороны по 12 точек. При этом в верхней части развертки точки 1, 2, 3, 4, 12, 11 и 10 принадлежат линии пересечения отвода с отводом, а точки 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 - линии пересечения отвода с бункером (точки 4 и 10 находятся на стыке кривых). В нижней части развертки все точки относятся к торцу цилиндра. Все эти кривые являются синусоидами.

Строим развертку бункера. Чтобы не затемнять построениями чертеж (на рисунке 14), изобразим бункер отдельно (на рисунке 15). Проанализируем его поверхности. Из чертежа видно, что стенки его состоят из четырех треугольников: C_5B ($C_15_1B_1$); B_1K ($B_11_1K_1$) и противоположный им, сопряженных с частями четырех конических поверхностей, у которых точки C , B , K , E являются вершинами, прямые B_1 (B_11_1) и B_5 (B_15_1) и т.д. - образующими, а кривые 1-5 (1_1-5_1) и 1-6 (1_1-6_1) - частями общего основания всех четырех конусов, представляющего собой эллипс. Проводим на одной из конических поверхностей, например из точки B (B_1B_2), вспомогательные образующие B_1 (B_11_1 , B_21_2); B_2 (B_12_1 , B_22_2) и т.д. и находим их натуральные размеры, а также высоту A_1 треугольника KB_1 . Величину образующих определяем способом параллельного перемещения, а высоты A_1 - вращением. Пусть базой служит прямая KB (K_1B_1 , K_2B_2), равная α .

Условимся, что бункер разрезан по прямой D_1 (D_11_1 , D_21_2).

На рисунке 14 дано построение развертки бункера. Проводим прямую KB и строим треугольник KB_1 . Стороны K_1 и B_1 будут линиями сгиба, а также крайними образующими смежных с треугольником конусов. Чтобы построить развертку конической поверхности, нужно найти на развертке положение точек 1, 2, 3, 4 и 5.

Эти точки находим при помощи засечек. Так, для построения точки 2 делаем две засечки: одну из точки B радиусом $B_2=B_12_1$, другую из точки 1 радиусом 1-2, равным хорде кривой 1_1-2_1 . Для построения точек 3, 4 и 5 поступаем аналогично. Прямая B_5 явится одновременно крайней образующей конуса B_15 и стороной треугольника B_5C . Она также является линией сгиба.

Чтобы построить точку C треугольника B_5C , проводим засечки: из точки B радиусом, равным $b=B_1C_1$, а из точки 5 - радиусом $B_5=B_15_1$. Прямая C_5 является линией сгиба.

Аналогично строится развертка конуса С15. Левая часть развертки симметрична правой. Линии сгиба отмечаем штриховыми линиями с двумя точками.

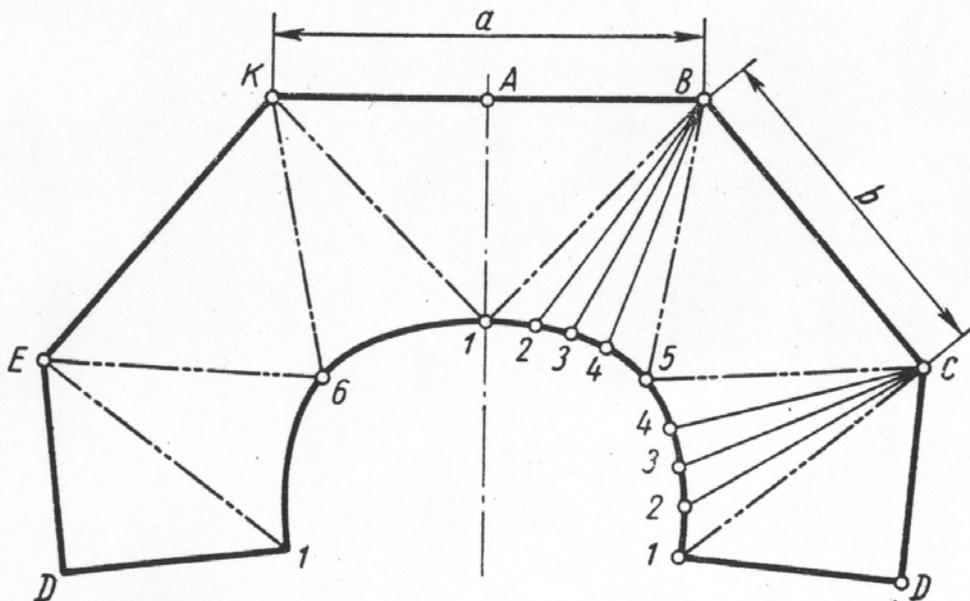
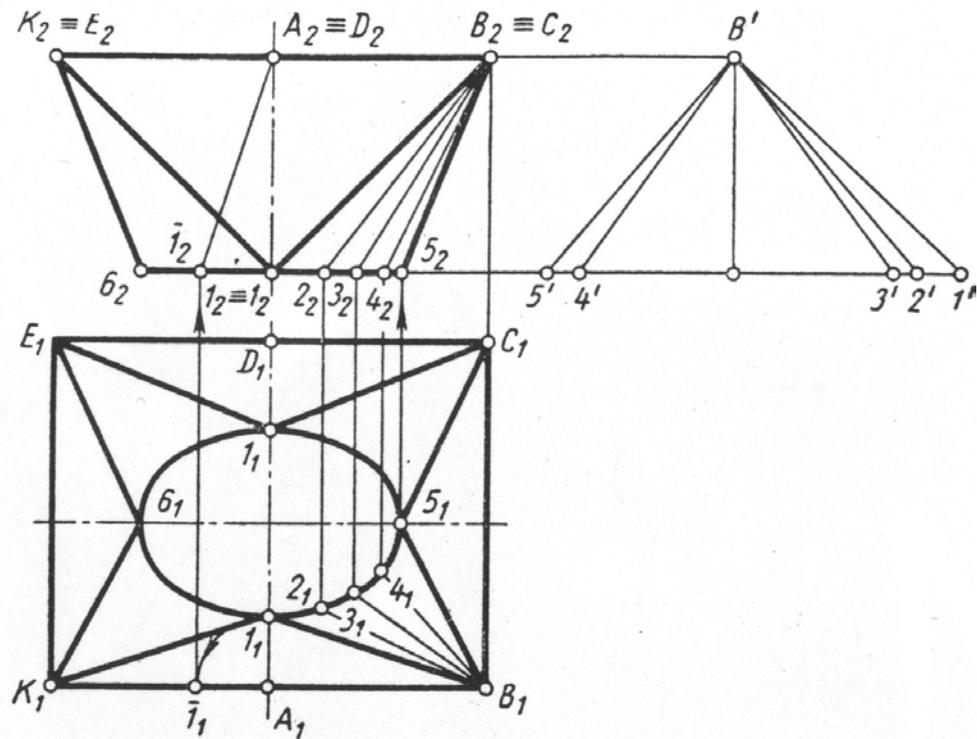


Рисунок 15

Список использованных источников

- 1 Фролов С.А. Начертательная геометрия. -М.: Машиностроение, 1983.- 240 с.
- 2 Гордон В.О., Сименцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. - М.: Наука, 1988. - 272 с.