МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования -

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Л.В. ШАШКОВА, В.К. ШАШКОВА, Е.В.ЦВЕТКОВА

КИНЕМАТИКА

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования - «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов дневного, вечернего и заочного факультетов.

Оренбург 2003

ББК 22.21я73
Ш - 32
УДК 531.1(075)

Рецензент
кандидат технических наук, доцент Э.А.Савченков.

Шашкова Л.В., Шашкова В.К., Цветкова Е.В.
Ш - 32 **Механика.Часть 1. Кинематика: Методические указания – Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2003. – 63 с.**

Методические указания предназначены для студентов дневного, вечернего и заочного факультетов, для изучения раздела «Кинематика» и освоения методики решения задач по данному разделу, а также выполнения домашней контрольной работы по вариантам.

Ш________________ ББК 22.21я73

1 Механика

1.1 Элементы векторной алгебры

В курсе элементарной физики, как известно, приходится оперировать двумя категориями величин – скалярными и векторными.

Существенным отличием вектора от скаляра является направленность вектора, чем и обусловлены особые правила действий над ними, носящие геометрический характер.

Поскольку действия над векторами по существу учащимся известны плохо, то представляется необходимым рассмотреть простейшие операции над векторами перед изложением основного материала. Необходимость этих предпосылок объясняется еще и тем, что векторная запись многих уравнений физики более полно отображает соответствующие процессы и является более простой и компактной.

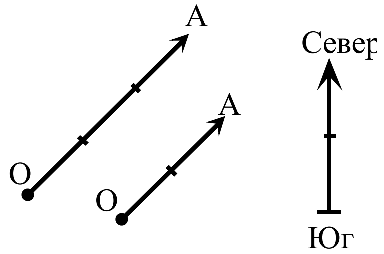


Рисунок 1.1

Вектор определяется абсолютной величиной (модулем) и направлением и на чертежах изображается направленным отрезком, длина которого в определенном масштабе характеризует абсолютную величину вектора. Так, движение какого-либо тела на северо-восток со скоростью 30 м/с может быть изображено отрезком, направленным на северо-восток (и только туда!) и имеющим длину, определяемую масштабом; например, при масштабе в 1 см 10 м/с длина отрезка ОА должна быть 3 см, а при масштабе в 1 см 15 м/с – 2 см и т.д. (рисунок 1.1). Точка О называется началом вектора, точка А – его концом.

Принято для отличия векторов от скаляров обозначать в тексте векторы **жирными** буквами или над буквами ставить черту или стрелку. Например: **a, v, E** или $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{E}$.

Абсолютные значения векторов обозначают теми же буквами, но без всякого выделения их, например: a, v, E или $|\vec{a}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{E}|$.

Формально векторные равенства имеют тот же вид, что и скалярные, например, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Стрелки же над буквами означают, что мы имеем дело с векторами и, значит, операции над ними производятся по особым правилам, о которых речь будет идти в дальнейшем. В частности, такая запись означает, что если a = 2 и b = 3, то c не обязательно будет равно 5.

1.1.1 Умножение вектора на скаляр

Умножение вектора $\vec{a}$ на какой – либо положительный скаляр дает вектор того же направления, что и вектор $\vec{a}$, но в n раз больший по величине (рисунок 1.2).

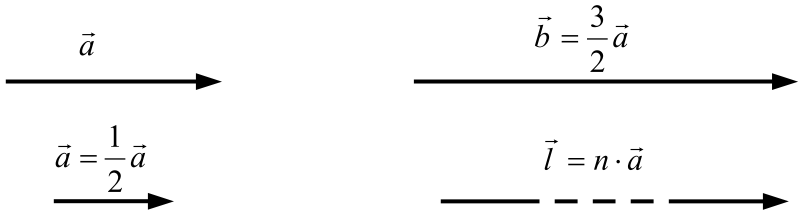
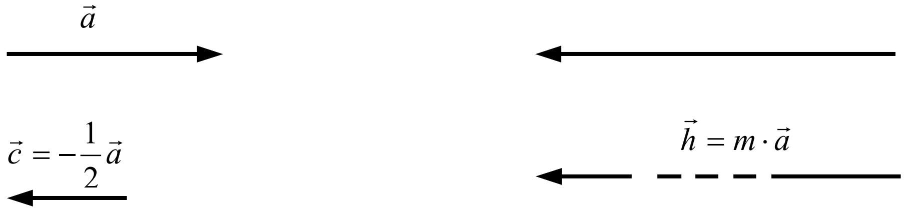


Рисунок 1.2

Умножение вектора $\vec{a}$ на отрицательный скаляр m дает вектор противоположного вектору $\vec{a}$ направления и в $|m|$ раз больший по величине (рисунок 1.3).



Рисунок

1.1.2 Сложение векторов

Сложить несколько векторов – это значит заменить несколько на самом деле имеющихся векторов таким одним, который был бы эквивалентен всем замененным. Результирующий вектор находят как замыкающую той ломаной линии, звеньями которой являются составляющие векторы. Например, надо сложить изображенные на рисунке 1.4 векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$.

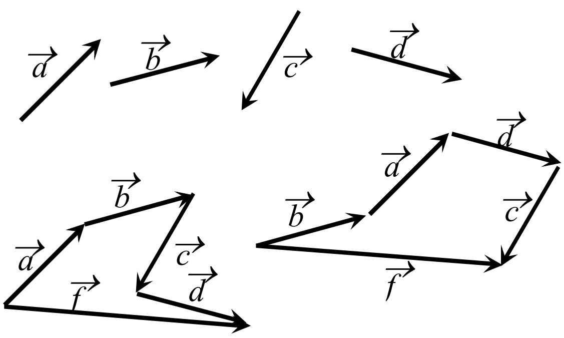


Рисунок 1.4

Для этого пристраивают в любом порядке к концу одного (предыдущего) вектора начало другого (последующего).

Результирующий вектор $\vec{f}$ направлен от начала первого слагаемого к концу последнего. При этом имеет место коммутативность, т.е. то, что от перестановки составляющих сумма не меняется. Из рисунка 1.4 видно, например, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}$.

В частном случае сложения двух векторов при построении получается треугольник, две стороны которого – составляющие, а третья – результирующий вектор.

1.1.3. Вычитание векторов

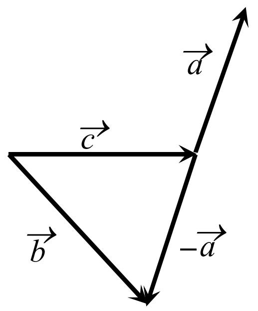


Рисунок 1.5

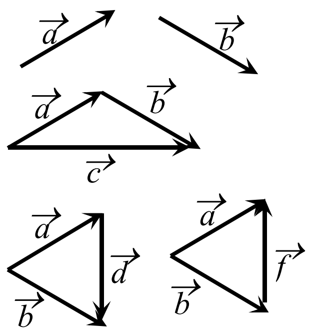


Рисунок 1.6

Как и в случае скаляров, вычитание векторов есть действие, обратное сложению. Рассмотрим вычитание на примере двух векторов.

Пусть надо из вектора $\vec{c}$ вычесть вектор $\vec{a}$ и тем найти их разность $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$. Чтобы найти разности двух векторов $\vec{c}$ и $\vec{a}$, надо к вектору $\vec{c}$ прибавить вектор (-$\vec{a}$), т.е. вектором $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$ будет вектор, направленный от начала вектора $\vec{c}$ к концу вектора (-$\vec{a}$) (рисунок 1.5). На рисунке 1.6 показаны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, их сумма $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, разности $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{f}=\vec{a}-\vec{b}$.

Из рисунка 1.7 видно, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, одна диагональ ($\vec{c}$) имеет смысл суммы, а другая ($\vec{d}$) – разности векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$. В процессе изменения вектора могут меняться обе характеристики вектора: и его величина (модуль) и направление. На рисунке 1.8 показан некоторый вектор, изменившийся от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$, а также $\Delta\vec{v}$ -

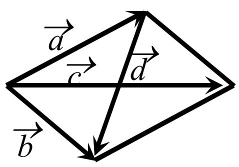


Рисунок 1.7

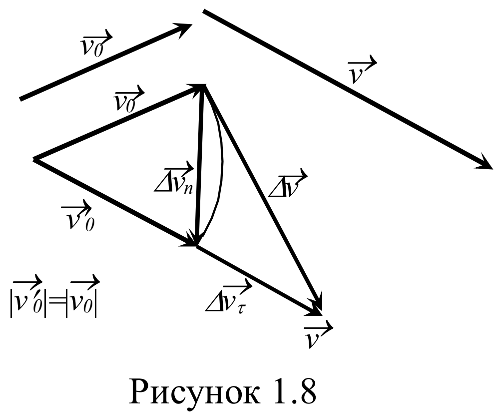


Рисунок 1.8

полное изменение вектора с учетом изменения его по величине ($\Delta\vec{v}_\tau$) и по направлению ($\Delta\vec{v}_n$). Легко видеть, что:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n\,.$$

1.1.4 Разложение вектора на составляющие

Часто бывает необходимо заменить один вектор такими несколькими, которые в сумме своей были бы эквивалентны этому замененному. Такая операция называется разложением вектора на составляющие векторы. Рассмотрим три случая, когда составляющих векторов должно получиться два:

1) известны кроме раскладываемого вектора направления составляющих. Подлежат нахождению величины составляющих векторов. Очевидно, геометрически задача сводится к построению треугольника по одной из сторон и прилежащим к ней двум углам и нахождению сторон получившегося треугольника (или параллелограмма);
2) известен кроме раскладываемого вектора один из составляющих векторов. Надо найти второй составляющий вектор. Геометрически задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними (или к построению параллелограмма по диагонали, одной из сторон и углу между ними), определению третьей стороны треугольника и угла, составляемого этой стороной с одной из заданных сторон (или соответствующих элементов параллелограмма);
3) известны кроме раскладываемого вектора величины составляющих векторов. Надо найти их направления. Геометрически задача сводится к построению треугольника по трем сторонам (или параллелограмма по диагонали и сторонам) с последующим определением углов треугольника (или параллелограмма).

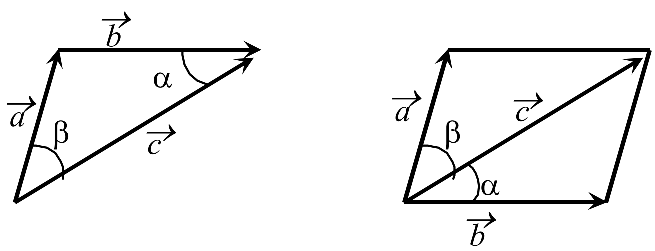


Рисунок 1.9

На рисунке 1.9 пояснены эти три случая. Первому случаю соответствует построение параллелограмма или треугольника по известным c, α и β с последующим определением a и b. Второму случаю – построение по заданным c, α и β (или c, b и a) с последующим определением b и α (или a и β). Третьему случаю – построение по известным c, a, b с последующим определением α и β.

1.1.5 Решение векторных треугольников

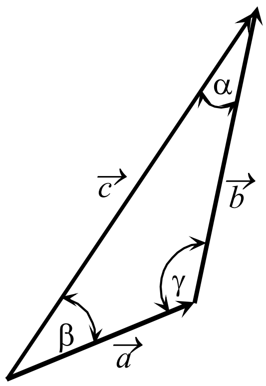


Рисунок 1.10

Решение векторных многоугольников, т.е. таких, сторонами которых являются векторы, производится по тем же правилам, что и решение обычных многоугольников.

В том случае, когда получившаяся фигура является косоугольным треугольником, ее решение сводится к применению теоремы косинусов и теоремы синусов (и редко теоремы тангенсов).

Теорема косинусов: *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

Так, для случая, изображенного на рисунке 1.10 имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Теорема синусов: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих этим сторонам углов.

Для случая, изображенного на рисунке 1.10 имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ ; \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\ ; \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

В том случае, когда треугольник получается прямоугольным, решение упрощается. Рассматривать этот случай мы не будем.

1.1.6 Проекции вектора на оси координат и сопоставление векторному равенству скалярных равенств

Ведем понятие о проекциях вектора на оси координат.

Пусть на плоскости задан вектор $\vec{c}$. Введем в этой же плоскости две взаимноперпендикулярные оси координат x и y, положительные направления которых указаны стрелками. Тогда вектор $\vec{c}$ определится своей величиной c и углом, который он составляет с какой-либо осью, например, осью x (рисунок 1.11).

Разложим вектор $\vec{c}$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленные вдоль осей x и y, и

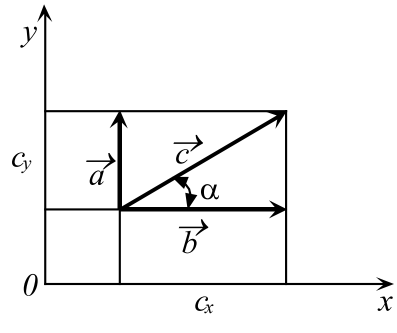


Рисунок 1.11

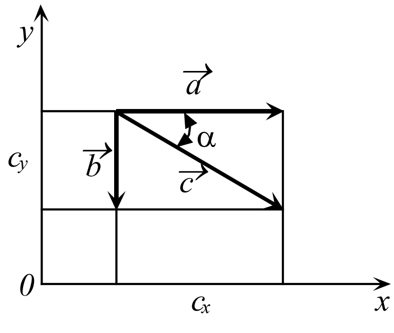


Рисунок 1.12

спроектируем их на оси координат. Тогда проекции этих векторов будут одновременно и проекциями вектора $\vec{c}$ на оси координат. Проекция вектора считается положительной, если соответствующая составляющая вектора направлена в сторону положительного направления оси, и наоборот. Например, на рисунке 1.12 c_x и c_y положительны, так как соответствующие им составляющие вектора $\vec{c}$ ($\vec{a}$ или $\vec{b}$) направлены в стороны положительных значений x и y.

На рисунке 1.13 проекция c_x положительна (так как соответствующая ей составляющая вектора $\vec{c}$ направлена вдоль положительных значений оси x), а проекция c_y отрицательна (так как соответствующая ей составляющая вектора $\vec{c}$ направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси y).

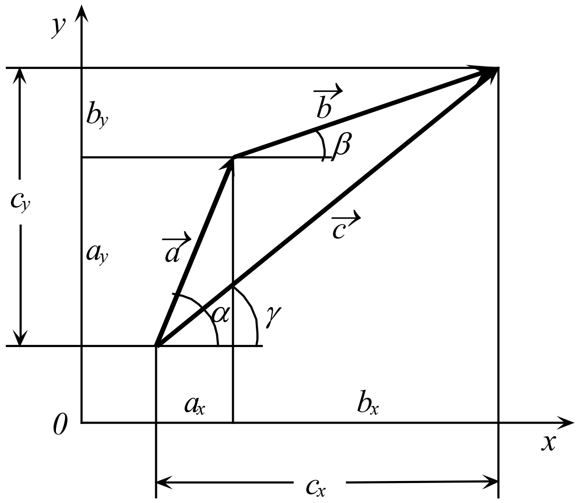


Рисунок 1.13

Очевидно, что задание вектора его величиной и углом, который он составляет с какой-либо осью, совершенно эквивалентно заданию проекций этого вектора на оси.

Действительно, зная c и α, можно найти $c_x = c{\cdot}\cos\alpha$ и $c_y = c{\cdot}\sin\alpha$. Верно и обратное: зная проекции вектора, можно найти его величину и направление, а именно:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{и} \quad tg\alpha = \frac{c_y}{c_x}.$$

Пусть теперь нам задано векторное равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Изобразим три этих вектора в соответствии со сказанным выше. Проектируя все векторы на оси координат (рисунок 1.13), получим очевидные равенства:

$$c_x = a_x + b_x \text{ или } c_x = a\cos\alpha + b\cos\beta;$$
$$c_y = a_y + b_y \text{ или } c_y = a\sin\alpha + b\sin\beta;$$

т.е. по проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ легко находятся проекции суммарного вектора $\vec{c}$. Но проекции вектора вполне определяют сам вектор, именно:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{и} \quad tg\gamma = \frac{c_y}{c_x}$$

Таким образом, всякому векторному равенству вида:

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + ... + \vec{k} = \vec{i} + \vec{f} - ...\vec{h} \qquad (1)$$

можно сопоставить на плоскости два скалярных равенства проекций векторов:

$$a_x + b_x - c_x + ... + k_x = i_x + f_x - ... + h_x \tag{2}$$

$$a_y + b_y - c_y + ... + k_y = i_y + f_y - ... + h_y \tag{3}$$

При этом полученная система совершенно эквивалентна исходному векторному равенству в том смысле, что позволяет определить проекции интересующего нас вектора по проекциям остальных векторов.

В случае, если векторы лежат не в одной плоскости, то к двум равенствам проекций на оси x и y добавляют третье равенство проекций векторов на ось z, ибо в трехмерном случае вектор определяется тремя проекциями на оси.

Надо запомнить, что знаки, стоящие в равенствах (2) и (3), никакого отношения к знакам проекций векторов не имеют и означают лишь те действия, которые производят с векторами и их проекциями. Эти знаки просто переносятся из векторного равенства (1) в (2) и (3); о знаках же проекций следует судить по сказанному в пояснении к рисункам 1.11 и 1.12.

Решение векторных равенств, как видно, может быть сделано как с помощью теорем синусов и косинусов, так и с помощью сопоставления векторному равенству скалярных. Первый способ удобен в том случае, если в векторном треугольнике задан один из углов. В случае же, если все углы задаются по отношению к одному и тому же направлению, удобен второй способ.

1.2 Кинематика

Кинематика изучает различные механические движения тел без рассмотрения причин вызывающих эти движения.

Алгоритм решения задач по кинематике:

1) прочитать условие задачи и выяснить характер движения;
2) записать условие задачи, выразив все величины в единицах СИ;
3) сделать чертеж (при необходимости). На чертеже указать систему и начало координат, вектор скорости и ускорения;
4) используя основные формулы кинематики, подобрать формулы, необходимые для решения данной задачи. Уравнения записать в проекциях на оси координат;
5) найти искомую величину в общем виде и проверить размерность;
6) вычислить искомую величину и проанализировать ответ.

1.2.1 Равномерное прямолинейное движение. Относительность движения.

Равномерным прямолинейным движением называется такое прямолинейное движение, при котором материальная точка (тело) движется по прямой и в любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

мещения.

Перемещением материальной точки за некоторый промежуток времени называется вектор перемещения $\Delta \bar{r} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$

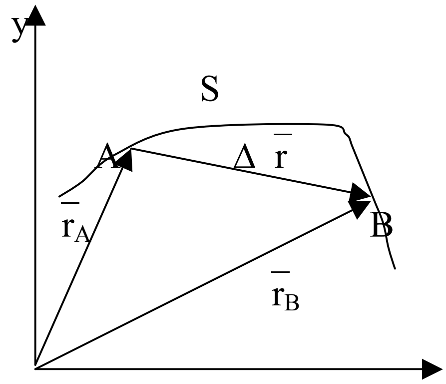


Рисунок 1.14

Пройденный путь S представляет собой скалярную величину, равную расстоянию, пройденному материальной точкой по ее траектории. Пройденный путь и длина вектора перемещения совпадают, $S = |\Delta \bar{r}|$, **только при движении тела по прямой в одном направлении.** Во всех других случаях модуль перемещения меньше длины пути (рисунок 1.14).

Пример. Точка последовательно перемещается из положения О в положение А, затем в В, С и т.д. (рисунок 1.15). Путь, пройденный точкой, будет равен сумме длин участков траектории S=ОА+АВ+ВС+СД+ДЕ. Вектор перемещения $\Delta \bar{r} = \overline{OE}$ соединяет начальное положение О с конечным ее положением Е. Модуль вектора перемещения $\Delta \bar{r} = \overline{OE}$ неравен пути S, пройденному точкой.

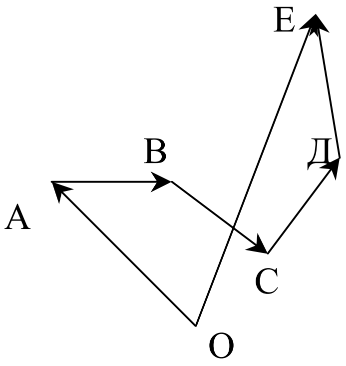


Рисунок 1.15

Пример. Велосипедист движется по траектории в форме окружности радиуса R. За какой-то промежуток времени он проехал половину длины окружности. Модуль вектора перемещения велосипедиста при этом равен диаметру окружности (2R), а пути – половине длины окружности (πR).

Скорость материальной точки представляет собой вектор, характеризующий направление и быстроту перемещения материальной точки относительно тела отсчета. Аналогично, **вектор ускорения** характеризует быстроту и направление изменения скорости материальной точки относительно тела отсчета.

Вектор скорости равномерного прямолинейного движения материально точки **направлен вдоль ее траектории в сторону движения.**

Вектор скорости при равномерном прямолинейном движении равен вектору перемещения за любой промежуток времени, поделенному на этот промежуток времени: $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Примем линию, по которой движется материальная точка, за ось координат OX, причем за положительное направление оси выберем направление движения точки. Тогда, спроецировав векторы $\bar{r}$ и $\bar{v}$, на эту ось, для проекций $\Delta r_x=|\Delta\bar{r}|$ и $\Delta v_x=|\Delta\bar{v}|$ этих векторов мы можем записать:

$$v_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$$

отсюда получаем **уравнение равномерного движения:**

$$\Delta r_x=v_x \cdot t$$

Т.к. при равномерном прямолинейном движении $S=|\Delta\bar{r}|$, можем записать:

$$S_x=v_x \cdot t$$

Тогда для **координаты тела** в любой момент времени имеем:

$$X=X_0+S_x=X_0+v_xt,$$

где X_0 – координата тела в начальный момент t=0.

На рисунке 1.16 представлены графики зависимости скорости, и пути равномерного прямолинейного движения от времени.

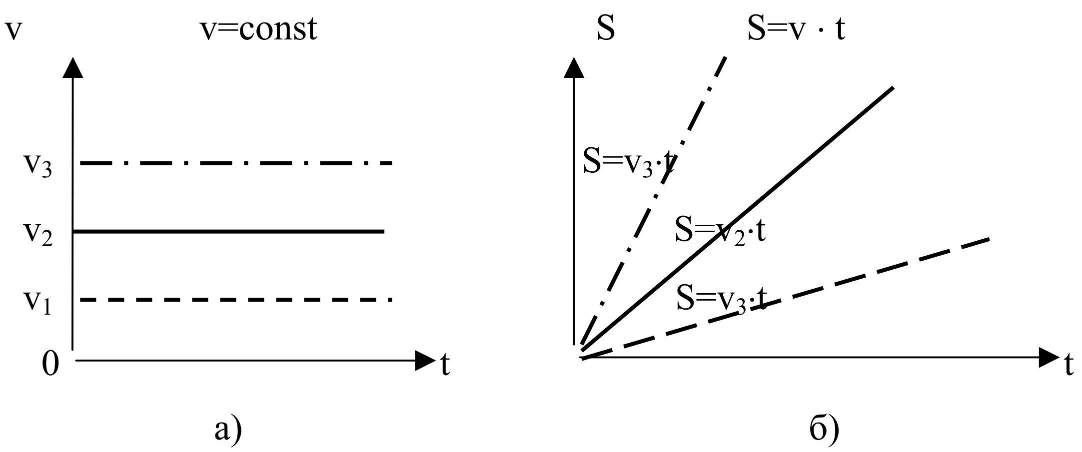


Рисунок 1.16

Чем больше скорость, тем больше наклон графика зависимости пути, пройденного телом, от времени. При $X_0=0$ графики координаты и пути прямолинейного равномерного движений совпадают (см. рисунок 1.15 б).

Пример. Уравнение движения тела дано в виде x=4-3t. Определить начальную координату тела, скорость движения и перемещения тела за 2 секунды.

Дано:	Найти:
X=4-3t	x_0 - ?
t_1=2c	v_x - ?
	S - ?

Решение :

Сравним данное уравнение движения тела с уравнением движения в общем виде:

$$x=x_0+v_x t$$
$$x=4-3t$$

Очевидно, что x_0=4м, v_x=-3м/с (знак «-» означает, что направление скорости не совпадает с направлением оси O_x, т.е. они противоположно направлены). Перемещение тела найдем по формуле: $S=x-x_0$. конечную координату x можно определить, подставляя в уравнение движения время t_1: $x=4-3t_1$. В общем виде формула перемещения:

$$S= 4-3t_1-x_0=4-3t_1-4= -3t_1$$
$$S= -3 \cdot 2= -6м.$$

(Тело движется в отрицательном направлении оси O_x).

Ответ: X_0=4м; v_x=-3м/с; S= -6м.

Как следует из определения механического движения, оно представляет собой изменение положения тела относительно других тел. Следовательно, понятие **относительности движения** входит уже в само понятие механического движения. Сущность относительности движения заключается в том, что описать какое – либо движение можно только сделав выбор тела, относительно которого данное движение будет рассматриваться, т.е. выбрав **тело отсчета.**

Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов образует **систему отсчета.**

Движение одного и того же тела описывается по-разному относительно различных систем отсчета, причем **эти системы могут двигаться друг относительно друга.**

Пусть некая материальная точка движется в произвольном направлении равномерно и прямолинейно со скоростью $\overline{v'}$ относительно подвижной системы отсчета X′ O′ Z′, которая в свою очередь движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\overline{U}$ относительно неподвижной системы отсчета OXZ.

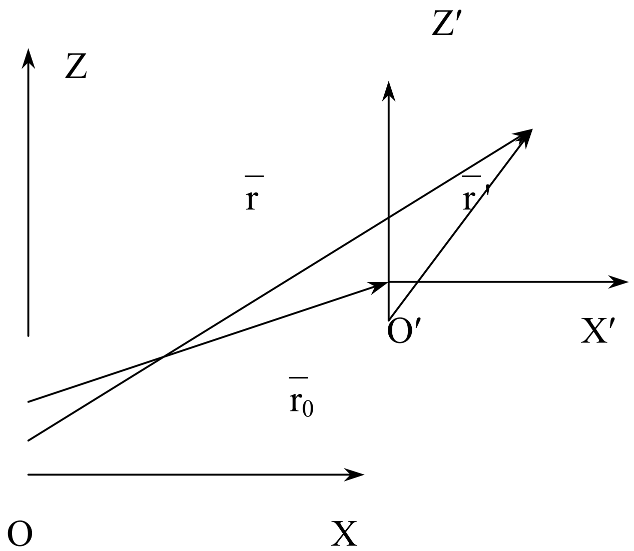


Рисунок 1.17

Допустим, что в начальный момент времени (t=0) начала этих систем координат (точки O и O′) и их одноименные оси совпадают, а через промежуток времени t занимают положение, показанное на рисунке 1.17 (оси Oy и Oy′ направлены перпендикулярно плоскости чертежа за чертеж).

Пусть за указанный промежуток времени материальная точка перемещается из точки O′ в точку A, т.е. ее перемещение относительно подвижной системы отсчета X′O′Z′ равно $\bar{r}'$. За это время подвижная система отсчета перемещается из точки O на расстояние $\bar{u}t$, т.е. перемещение равно $\bar{r}_0$. Поэтому относительно неподвижной системы отсчета рассматриваемая материальная точка движется по прямой | OA| и ее перемещение: $r = \bar{r}' + \bar{r}_0$.

Почленно разделив это соотношение на промежуток времени t, в течение которого происходит описываемое движение, получим:

$$\frac{\vec{r}}{t} = \frac{\vec{r}'}{t} + \frac{\vec{r}_0}{t},$$

где $\frac{\vec{r}}{t} = \bar{v}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета,

$\frac{\vec{r}'}{t} = \bar{v}'$ - скорость материальной точки относительно подвижной системы отсчета,

$\frac{\vec{r}_0'}{t} = \bar{u}$ - скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

$$v = \bar{v}' + \bar{u}$$

Последняя формула выражает **классический закон сложения скоростей:** скорость движения тела относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости этого тела относительно подвижной системы отсчета и скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы.

Пример. Скорость вертикального подъема груза краном v_1=0,2 м/с, скорость тележки крана v_2=0,1м/с. определить скорость движения груза относительно Земли.

Дано:

v_1=0,2 м/с

v_2=0,1 м/с

Найти:

v – ?

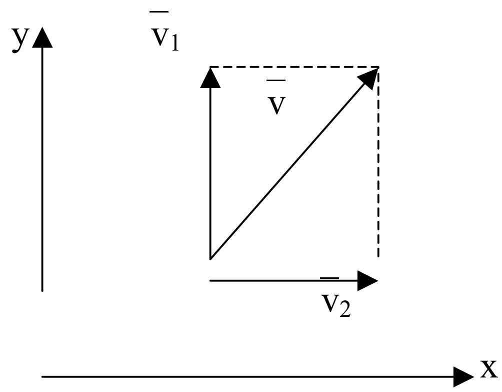


Рисунок 1.18

Решение:

Свяжем неподвижную систему отсчета с Землей, а подвижную с тележкой крана. Сделаем чертеж (рисунок 1.18).

По правилу сложения скоростей :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$$

По условию задачи скорость $\bar{v}_1$ направлена вверх, а скорость $\bar{v}_2$ горизонтально. Векторы скоростей складываются по правилу параллелограмма. Модуль скорости груза относительно Земли найдем по теореме Пифагора:

$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, где v_1 – собственная скорость движения (подъема груза), v_2 – скорость тележки крана (подвижной системы отсчета).

$v = \sqrt{0.2^2 + 0.1^2} \approx 0{,}22$м/с . Ответ: $v \approx 0{,}22$ м/с.

Пример. Лодочник перевозит пассажиров с одного берега на другой за время t=10 мин по траектории АВ. Скорость течения реки v_p=0,3 м/с, ширина реки 240 м. С какой скоростью v относительно воды и под каким углом α к берегу должна двигаться лодка, чтобы достичь другого берега за указанное время?

Дано:

v_p=0,3 м/с.

l=240 м.

t=10мин=660 с.

Найти:

v' - ?

α - ?

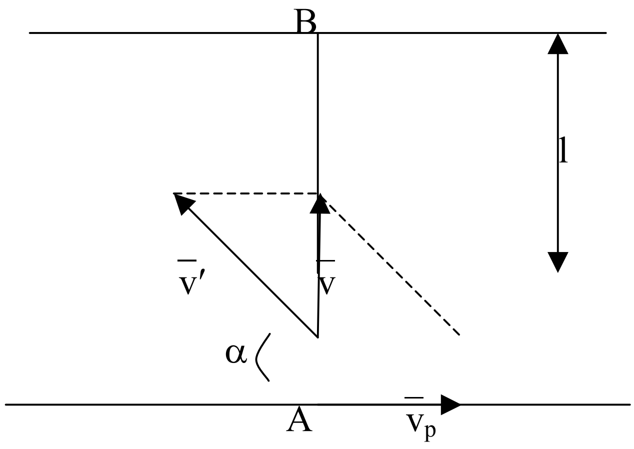


Рисунок 1.19

Решение:

Примем берег за неподвижную систему отсчета. Тогда относительно берега скорость лодки равна: $v = \frac{l}{t}$.

Эта скорость (рисунок 1.19), является суммой двух скоростей: скорости лодки относительно воды $\bar{v}'$ (скорости относительно подвижной системы отсчета) и скорости реки $\bar{v}_p$ (скорости самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной). По закону сложения скоростей: $\bar{v} = \bar{v}_p + \bar{v}'$.

Так как по условию задачи скорость лодки относительно берега направлена вдоль АВ, а скорость реки перпендикулярно АВ, то скорость лодки относительно воды:

$$v' = \sqrt{v^2 + v_p^2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$v' = \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 + v_p^2} = \sqrt{\left(\frac{240}{600}\right)^2 + 0{,}3^2} = 0{,}5\ м/с$$

Искомый угол можно найти из выражения:

$$tg\alpha = \frac{v}{v_p} = \frac{l}{t \cdot v_p}$$

$$tg\alpha = \frac{240}{600 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}4}{0{,}3} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = arctg\frac{4}{3} \approx 53^o$$

Ответ: v'=0.5 м/с, $\alpha \approx 53^o$

1.2.2 Неравномерное движение

Движение, при котором за равные промежутки времени тело совершает неравные перемещения называют **неравномерным** или **переменным.**

Средней скоростью $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{cp}}$ называется величина, равная отношению перемещения тела $\Delta\bar{r}$ за некоторый промежуток времени Δt к этому промежутку:

$$\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Модуль средней скорости определяется как отношение пути ΔS, пройденного телом за некоторый промежуток времени, к этому промежутку:

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Пример. Поезд прошел первую половину пути со скоростью v_1=72 км/ч, вторую половину пути – со скоростью 36 км/ч. Определить среднюю скорость поезда на всем пути.

Дано:
v_1=72 км/ч=20 м/с.
v_2=36 км/ч=10 м/с.
$S_1=S_2=S/2$.
Найти: v_{cp} - ?
Решение:
Средняя скорость прохождения пути:
$v_{cp}=\frac{S}{t}$, где $S=S_1+S_2$ и $S_1= S_2= S/2$

Время движения складывается из двух разных промежутков времени: t_1 – времени, в течении которого поезд движется со скоростью v_1 и равного

$$t_1=\frac{S_1}{v_1}=\frac{S}{2v_1}$$

и t_2 – времени, в течение которого поезд движется со скоростью v_2 и равного:

$$t_2=\frac{S_2}{v_2}=\frac{S}{2v_2}$$

Тогда, $t=t_1+t_2=\frac{S}{2v_1}+\frac{S}{2v_2}$. Представим это выражение в определении скорости, предварительно упростив. Получим:

$$v_{ср}=\frac{S}{S(\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2})}=\frac{1}{\frac{v_2+v_1}{2v_1\cdot v_2}}=\frac{2v_1\cdot v_2}{v_2+v_1}=\frac{2\cdot 20\cdot 10}{20+10}=\frac{400}{30}=13{,}3\text{ м/с}$$

Ответ: $v_{ср}$=13,3 м/с.

Пример. Поезд прошел первую половину времени движения со скоростью 36 км/ч, вторую половину времени со скоростью 54 км/ч. Определить среднюю скорость движения поезда.

Дано:
v_1=36 км/ч=10 м/с.
v_2=54 км/ч=15 м/с.
$t_1=t_2=t/2$.
Найти: $v_{ср}$ - ?

Решение: Средняя скорость движения поезда $v_{ср}=\frac{S}{t}$.

Длина пути складывается из двух различных участков пути: на первом поезд движется со скоростью v_1 и длина участка пути $S_1=v_1t_1=\frac{v_1t_1}{2}$, на втором поезд движется со скоростью v_2 и длина этого участка пути $S_2=v_2t_2=\frac{v_2t_2}{2}$.

Тогда весь путь равен: $S=S_1+S_2=\frac{v_1t}{2}+\frac{v_2t}{2}=t(\frac{v_1}{2}+\frac{v_2}{2})=\frac{t}{2}(v_1+v_2)$

Найдем среднюю скорость движения $v_{ср}=\frac{t(v_1+v_2)}{2t}=\frac{v_1+v_2}{2}$

В этом случае среднюю скорость движения можно находить как **среднее арифметическое скоростей** на различных участках пути (**если время движения одинаково**).

$$v_{ср}=\frac{10+15}{2}=12{,}5\text{ м/с}$$

Ответ: $v_{ср}$=12,5 м/с.

Направление вектора средней скорости $\bar{v}_{ср}$ совпадает с направлением $\Delta\bar{r}$, (рисунок 1.20).

При неограниченном уменьшении Δt $\bar{v}_{ср}$ стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной** скоростью.

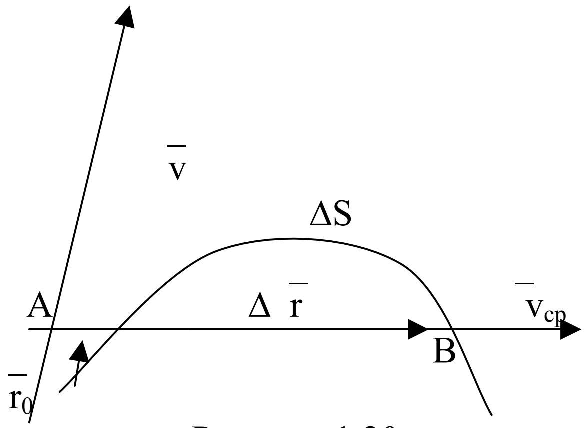


Рисунок 1.20

Итак, **мгновенная скорость** $\bar{\mathbf{v}}$ есть предел, к которому стремится средняя скорость $\bar{v}_{ср}$, когда промежуток времени движения стремится к нулю.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Из курса математики известно, что предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю представляет собой первую производную этой функции по данному аргументу.

Поэтому: $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$

Мгновенная скорость $\bar{\mathbf{v}}$ есть векторная величина, равная первой производной радиуса – вектора движущейся точки по времени.

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то **вектор скорости** $\bar{\mathbf{v}}$ **направлен по касательной** к траектории в сторону движения (рисунок 1.19).

По мере уменьшение Δt путь ΔS все больше будет приближаться к $|\Delta\bar{r}|$, поэтому **модуль мгновенной скорости:**

$$v = |\bar{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Таким образом, **модуль мгновенной скорости v** равен первой производной пути по времени $v = \frac{dS}{dt}$

При неравномерном движении тела его скорость непрерывно изменяется. Как быстро изменяется скорость тела, показывает величина, которая называется **ускорением.**

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t+\Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\bar{v}$ к интервалу времени Δt: $a_{ср} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$

Мгновенным ускорением $\bar{\mathbf{a}}$ в момент времени t будет предел среднего ускорения: $\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$

Таким образом, **ускорение** $\bar{\mathbf{a}}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

В данной системе отсчета вектор ускорения может быть задан проекциями на соответствующие координатные оси (проекциями a_x, a_y, a_z).

Составляющая $\bar{\mathbf{a}}_\tau$ вектора ускорения, направленная **вдоль касательной к траектории** в данной точке, называется **тангенциальным (касательным) ускорением.** Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости **по модулю.** Вектор $\bar{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости (рисунок 1.21, а) и в противоположную сторону – при убывании скорости (рисунок 1.21, б).

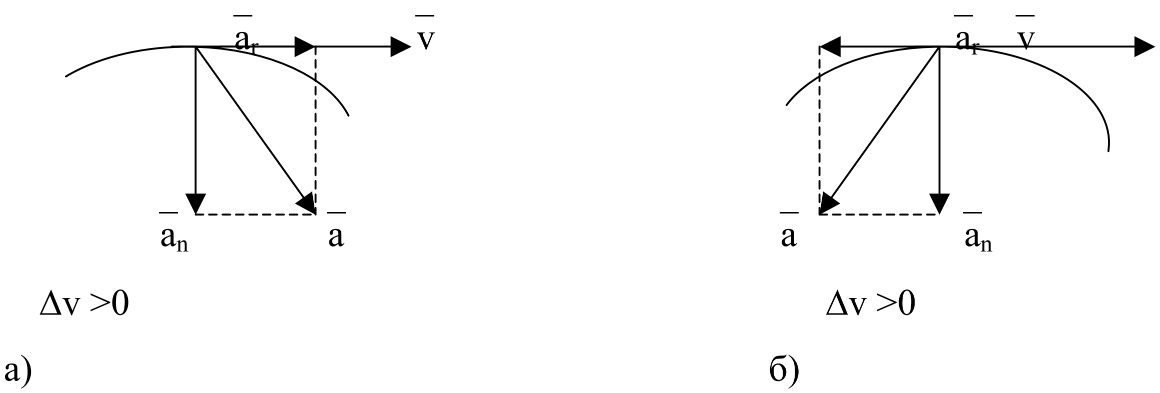


Рисунок 1.21

Тангенциальная составляющая ускорения $\mathbf{a}_\tau$ равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю: $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

Вторая составляющая ускорения, равная: $a_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по **нормали к траектории** к центру ее кривизны (поэтому ее называют так же **центростремительным** ускорением).

Полное ускорение есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Пример. Пусть x возрастает пропорционально квадрату времени, т.е. $x = At^2$. Чему равна мгновенная скорость в момент времени t_1 - ?

Дано:

$x = At^2$

Найти:

v - ?

Решение:

В общем случае производная от степенной функции t^n записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$$

Мгновенная скорость определяется:

$$v=\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(at^2) = a\frac{d(t^2)}{dt} = 2at$$

Ответ: В момент времени t_1 имеем $v=2at_1$

Пример. Зависимость пройденного телом пути S от времени t задается уравнением $S=At-Bt^2+Ct^3$, где A=2 м/с, B=3 м/с^2, C=4 м/с^3.
Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a тела от времени t; б) расстояние S, скорость v и ускорение a тела через время t=2 с после начала движения.

Дано:

$S=At-Bt^2+Ct^3$

A=2 м/с, B=3 м/с^2, C=4 м/с^3.

Найти:

а) v(t)-?, a(t)-?

б) S-? V-? a-? при t=2 с.

Решение:

а) Скорость тела: v=ds/dt

$v=A-2Bt+3Ct^2$;

$v=2-6t+12t^2$ м/с

Ускорение тела a=dv/dt

$a=-2B+6Ct$

$a=-6+24t$ м/с^2

б) Расстояние, пройденное телом, $S=2t-3t^2+4t^3$. Тогда через время t=2 с имеем:

S=24 м; v=38 м/с; a=42 м/с^2.

1.2.3 Равнопеременное прямолинейное движение

Равнопеременным называется движение, при котором скорость тела (материальной точки) за любые равные промежутки времени изменяется одинаково, т.е. на равные величины. Это движение может быть **равноускоренным** и **равнозамедленным.**

Если направление ускорения $\bar{a}$ совпадает с направлением скорости $\bar{v}$ точки, движение называется **равноускоренным.**

Если направление векторов $\bar{a}$ и $\bar{v}$ противоположны, движение называется **равнозамедленным.**

При равнопеременном прямолинейном движении ускорение остается постоянным и по модулю и по направлению ($\bar{a}$=const). При этом **среднее** ускорение $\bar{a}_{ср}$ равно **мгновенному** ускорению $\bar{a}$ вдоль траектории точки. Нормальное ускорение при этом отсутствует ($\bar{a}_n=0$).

Изменение скорости $\Delta\bar{v}=\bar{v}-\bar{v}_0$ в течении промежутка времени

$\Delta t = t - t_0$ при равнопеременном прямолинейном движении равно: $\Delta\overline{v} = \overline{a}\,\Delta t$, или $\overline{v} - \overline{v}_0 = \overline{a}(t - t_0)$.

Если в момент начала отсчета времени (t_0) скорость точки равна $\overline{v}_0$ (начальная скорость) и ускорение $\overline{a}$ известно, то скорость $\overline{v}$ в произвольный момент времени t:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{a}t$$

Проекция вектора скорости на ось OX связана с соответствующими проекциями векторов начальной скорости и ускорения уравнением:

$$v_x = v_{0x} \pm a_x t$$

Аналогично записываются уравнения для проекций вектора скорости на другие координатные оси.

Вектор перемещения $\Delta\overline{r}$ точки за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ при равнопеременном прямолинейном движении с начальной скоростью $\overline{v}_0$ и ускорением $\overline{a}$ равен: $\Delta\overline{r} = \overline{v}_0\Delta t + \frac{\overline{a}(\Delta t)^2}{2}$, а его проекция на ось OX (или перемещение точки вдоль соответствующей оси координат) при $t_0=0$ равна:

$$\Delta r_x = v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

Путь S_x, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ в равнопеременном прямолинейном движении с начальной скоростью $\overline{v}_0$ и ускорением $\overline{a}$, при $t_0=0$ равен:

$$S_x = v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

При $v_0=0$ путь равен:

$$S_x = \frac{a_x t^2}{2}$$

Так как координата тела равна **$X=X_0+S$, то уравнение движения тела имеет вид:**

$$X = \pm x_0 \pm v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

Возможно так же при решении задач использовать формулу:

$$S = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Пример. Ускорение автомобиля равно $a=-4$ м/с^2. Что это означает?

Решение: Ускорение автомобиля отрицательно, следовательно, скорость его уменьшается, т.е. автомобиль тормозит. Его скорость уменьшается на 4 м/с за каждую секунду.

Пример. Судя по спидометру, за 1 минуту скорость автобуса изменилась с 18 до 72 км/ч. С каким средним ускорением двигался автобус?

Дано: $\xrightarrow{\overline{a}}$

$t=1$ мин$=60$ с.

$v_0=18$ км/ч$=5$ м/с. $\overline{v}_0$ $\overline{v}$

v=72 км/ч=20 м/с.

Найти:

a -?

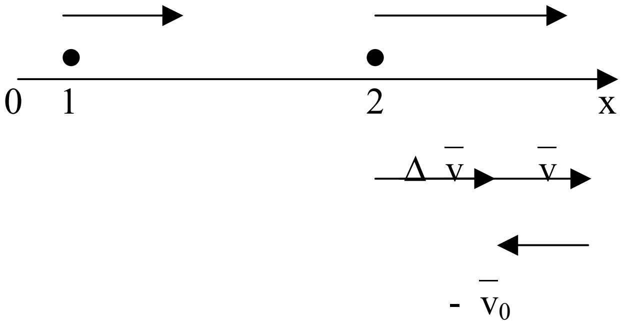


Рисунок 1.22

Решение:

Движение автобуса носит равноускоренный характер, $a_x>0$.

Направим ось ОХ по направлению автобуса и изобразим векторы конечной и начальной скорости, вектор ускорения (рисунок 1.22).

По определению ускорения:

$$\bar{a}=\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}=\frac{\bar{v}-\bar{v}_0}{t}$$

Так как векторы скорости совпадают с направлениями оси ОХ, следовательно, их проекции положительны:

$$a_x=\frac{v_x-v_{x0}}{t}>0$$

Вычислим значение ускорения:

$$\mathrm{a}=\frac{20-5}{60}=0{,}25 м/с^2 \quad [\frac{м/с}{с}=\frac{м}{с^2}]$$

Ответ: *a*=0,25 м/с.

Пример. Самолет летел со скоростью 216 км/ч и стал двигаться с ускорением 9 м/с^2 в течении 20 секунд. Какое расстояние пролетел самолет за это время и какой скорости он достиг?

Дано:

v_0=216 км/ч=60 м/с

a=9 м/с^2

t=20 с

Найти:

S - ? v - ?

Решение:

Движение самолета равноускоренное, $a_x>0$

1 способ

Перемещение самолета можно определить по формуле:

$S=v_0t+\dfrac{a\ t^2}{2}$ (движение прямолинейное, направление скорости, ускорения и оси ОХ совпадают, поэтому индекс “x” можно не писать).

$$S=60\cdot 20+\frac{9\cdot 20^2}{2}=3000м=3км$$

Конечную скорость самолета можно определить по формуле:

$$v=v_0+at$$

$$v=60+9\cdot 20=240 \text{ м/с}$$

Ответ: S=3000 м=3 км; v=240 м/с.

2 способ

Можно сначала определить конечную скорость самолета: $v=v_0+at$, а затем определить перемещение самолета по формуле:

$$S=\frac{v^2-v_0{}^2}{2a}$$

$$S=\frac{240^2-60^2}{2\cdot 9}=\frac{(240\ \ +60\ \ )\cdot(240-60)}{18}=300\frac{180}{18}=300м$$

(при вычислении воспользовались формулой сокращенного умножения).

Пример. Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один, имея скорость 18 км/ч, движется равнозамедленно, с ускорением 20 см/с^2, другой, имея скорость 5,4 км/ч, движется равноускоренно с ускорением 0,2 м/с^2. Через какое время велосипедисты встретятся и какое перемещение совершит каждый из них до встречи, если расстояние между ними в начальный момент времени 130 м ?

Дано:

v_{01}=18 км/ч=5 м/с

a_1=20 см/с^2=0,2м/с

v_{02}=5,4 км/ч=1,5 м/с

a_2=0,2м/с

x_{02}=130 м

Найти:

S_1 - ? S_2 - ? t_1- ?

Рисунок 1.23

Решение: Пусть ось ОХ совпадает с направлением движения первого велосипедиста, а начало координат с точкой О, в которой он находился в момент времени t=0 (рисунок 1.23).

Тогда уравнения движения велосипедиста таковы:

$$x_1=v_{01}t-\frac{a_1t^2}{2}\ \text{(т.к. } a_{1x}=-a_1;\ x_{01}=0)$$

$$x_2=x_{02}-v_{02}t-\frac{a_2t^2}{2}\ \text{(т.к. } v_{2x}=-v_{02} \text{ и } a_{2x}=-a_2)$$

В момент встречи в точке А: $t=t_1$; $x_1=x_2$

Тогда получим равенство:

$v_{01}t_1 - \frac{a_1t_1^2}{2} = x_{02} - v_{02}t - \frac{a_2t_1^2}{2}$, откуда

$v_{01}t_1 + v_{02}t_1 = x_{02}$, т.к. $a_1 = a_2$ $t_1 = \frac{x_{02}}{v_{01} + v_{02}}$; $t_1 = \frac{130}{5 + 1,5} = 20c$

Определим перемещение каждого до встречи.

$$S_1 = x_1 - x_{01} = v_{01}t - \frac{a_1t_1^2}{2} = 5 \cdot 20 - \frac{0,2 \cdot 20^2}{2} = 60 \text{ м}$$

$$S_2 = |x_2 - x_{02}| = v_{02}t_1 + \frac{a_2t_1^2}{2} = 1,5 \cdot 20 + \frac{0,2 \cdot 20^2}{2} = 70 \text{ м}$$

Ответ: S_1=60 м; S_2=70 м; t_1=20 с.

Пример. Условие движения тела дано в виде $x = 15t + 0,4t^2$. Определить начальную скорость движения тела, а также координату и скорость тела через 5 с.

Дано:
$X(t) = 15t + 0,4t^2$
T = 5с.
Найти:
a -? v_0 - ? x - ? v - ?

Решение: Сравним данное уравнение движения тела с уравнением движения в общем виде:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = 15t + 0,4t^2$$

Очевидно, что $x_0 = 0$, а коэффициенты при t и t^2 равны v_0 = 15м/с и $a/2$ = 0,4 м/с^2, откуда a = 0,8 м/с^2.

Координату тела через 5с. найдем из уравнения, подставляя вместо t время:
$x = 15 \cdot 5 + 0,4 \cdot 5^2 = 85$ м.

Скорость тела определим по формуле: $v = v_0 + at = 15 + 0,8 \cdot 5 = 19$ м/с

Ответ: a = 0,8 м/с^2; v_0 = 15 м/с; x = 85м; v = 19 м/с.

1.2.4 Свободное падение тел

Движение тела, брошенного вертикально вверх.

Свободным падением называется движение, которое совершило бы тело только под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха. При свободном падении тела с небольшой высоты h от поверхности Земли (h «$R_з$, где $R_з$ – радиус Земли) оно движется с **постоянным ускорением $\bar{g}$, направленным вертикально вниз.**

Ускорение $\bar{g}$ называется ускорением свободного падения. Оно одно и тоже для всех тел и зависит лишь от высоты над уровнем моря и от географической широты.

Если в момент начала отсчета времени (t_0=0) тело имело скорость $\bar{v}_0$, то по истечении произвольного промежутка времени $\Delta t = t - t_0$ **скорость тела при свободном падении** будет:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{g}t$$

При начальной скорости падения, равной нулю (v_0=0), скорость тела в произвольный момент времени t:

$$\bar{v} = \bar{g}\,t$$

Путь h, пройденный телом в свободном падении, к моменту времени t: $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. Если начальная скорость тела равна нулю (v_0=0), то $h=\frac{gt^2}{2}$.

Модуль скорости тела после прохождения в свободном падении пути h находится из формулы $S=\frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$

Т.к. $v_k^2 - v_0^2 = 2gh$, то $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

или при v_0=0 $v = \sqrt{2gh}$

Если координатная ось ОУ направлена вертикально сверху вниз, то модуль скорости тела в произвольной точке траектории с координатой у:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(y - y_0)}$$

Продолжительность Δt свободного падения без начальной скорости (v_0=0) с высоты h: $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Пример. Тело падает вертикально вниз с высоты 20 м без начальной скорости.

Определить: 1) путь h, пройденный телом за последнюю секунду падения, 2) среднюю скорость падения $v_{ср}$, 3) среднюю скорость на второй половине пути $v_{ср2}$.

Считать $g=10 м/с^2$

Дано:

h_0=20м

$\Delta t = 1c$

Найти:

h-? $v_{ср}$-? $v_{ср2}$ -?

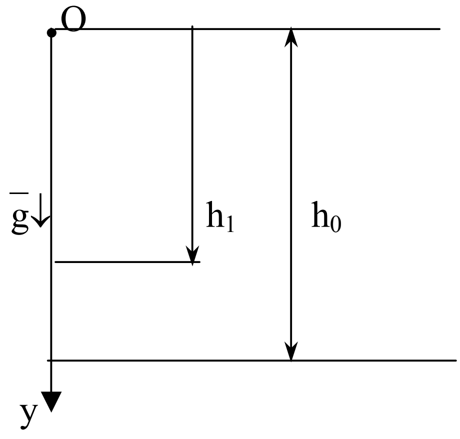


Рисунок 1.24

Решение: Направим ось y вертикально вниз, и пусть начало координат совпадает с начальным положением тела (рисунок 1.24).

Согласно формуле: h=$\frac{gt^2}{2}$, уравнение движения запишется в виде:

$$y = \frac{gt^2}{2}$$

в момент падения на землю y=h_0. Отсюда время движения тела:

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

За время (t-Δt) тело прошло путь $h_1 = \frac{g(t-\Delta t)^2}{2}$

Путь за последнюю секунду равен:

$$h_0 - h_1 = h_0 - \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \Delta t\right)^2$$

$$h = 20 - \frac{10\left(\sqrt{2 \cdot 20/10} - 1\right)^2}{2} = 15\text{м}$$

Тело прошло путь h_0. Время движения $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$. Тогда средняя скорость падения $v_{\text{ср}}$=h_0/t; или $v_{\text{ср}}$= $\sqrt{\frac{gh_0}{2}}$, $v_{\text{ср}}$=$\sqrt{\frac{10 \cdot 20}{2}} = 10\text{м}/\text{с}$

Для определения средней скорости на второй половине пути необходимо узнать время, за которое эта часть пути пройдена. Время движения на второй половине пути равно полному времени полета t минус время t_1, затраченное на прохождение первой половины пути.
Время t_1 находится из уравнения

$\frac{h_0}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$, т.е. t_1=$\sqrt{\frac{h_0}{g}}$

Таким образом, t_2=t-t_1=$\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{h_0}{g}} = \sqrt{\frac{h_0}{g}}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Следовательно, $v_{\text{ср}2}$=$\frac{h_0}{2t_2} = \sqrt{\frac{gh_0}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{\frac{10 \cdot 20}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 17\text{м}/\text{с}$

Ответ: h=15м; $v_{\text{ср}}$=10м/с; $v_{\text{ср}2}$=17м/с.

При движении тела вертикально вверх с начальной скоростью $\bar{v}_0$, ускорение тела равно ускорению свободного падения $\bar{g}$.
На участке до наивысшей точки подъема движение тела является равнозамедленным, а после достижения этой точки – свободным падением без начальной скорости.

Скорость тела в произвольный момент времени t от начала движения независимо от того, рассматривается лишь подъем тела или его опускание после достижения наивысшей точки, равна

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{g}t$$

Пример. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20м/с. Определить скорости тела $\bar{v}_1$и $\bar{v}_2$ в момент времени t_1=1,5с и t_2=3,2с от начала движения. Считать, что координатная ось Оу направлена снизу вверх (рисунок 1.25)

Дано:

v_0=20м/с
t_1= 1,5 м/с
t_2=3,2 м/с

Найти:

v_1-? v_2-?

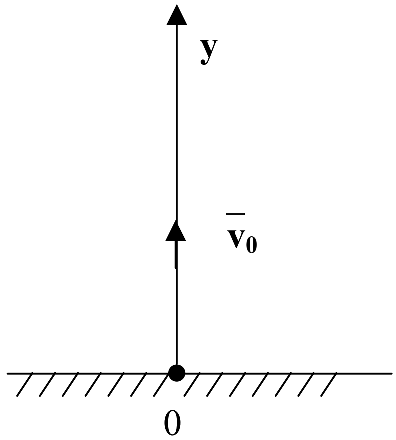


Рисунок 1.25

Решение: Выражения для проекций v_{1y} и v_{2y} искомых скоростей:

$v_{1y} = v_0 - gt_1$, $v_{2y} = v_0 - gt_2$ откуда

v_{1y}=(20-9,8·1,5)≈5м/с, v_{2y}=(20-9,8·3,2)≈-11м/с.

Знаки проекций v_{1y} и v_{2y} говорят о том, что вектор скорости $\bar{v}_1$ будет направлен вертикально вверх (тело еще не достигло наивысшей точки подъема), а вектор $\bar{v}_2$ – вертикально вниз (в момент времени t_2 тело движется вниз).

Вектор перемещения Δr **тела** за произвольный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ при условии t_0=0 равен

$$\Delta\bar{r} = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{g}t^2}{2}$$

В момент времени $t_{под}$, соответствующий наибольшему подъему тела над точкой бросания (**когда $y=y_{мах}$ или высота подъема тела максимальна $h=h_{мах}=y_{мах}-y_0$**) **скорость тела станет равна нулю:**

$v=v_0-gt_{под}=0$ откуда $t_{под}=v_0/g$

в этот момент направление движения тела изменяется на противоположное.

Максимальная высота подъема тела над точкой бросания

$$h_{мах}=y_{мах}-y_0=\frac{v_0^2}{2g}$$

Пример. Тело бросают вертикально вверх с высоты h_0=1,5м над поверхностью Земли у края ямы глубиной h=3,5 м. Начальная скорость тела равна 2,3 м/с. Определить, в какой момент времени t_k от начала движения (t_0=0) тело достигнет дна ямы, и найти путь S, пройденный телом за это время.

Дано:
h_0=1,5 м
h=3,5 м
v_0=2,3 м/с
Найти:
t_k - ? S- ?

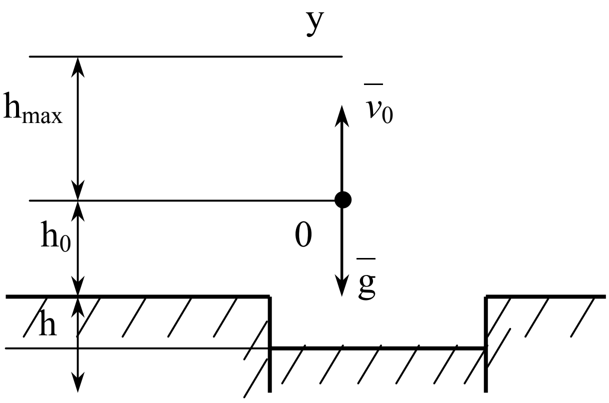


Рисунок 1.26

Решение: Совместим начало отсчета координат с точкой бросания тела, а координатную ось Оу направим вертикально вверх (рисунок 1.26). Зависимость координаты y от времени при этом будет иметь вид

$$y=y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

где y_0 – начальная координата.

Полагая в этом уравнении $t=t_k$, $y_0=0$, $y= - (h_0 + h)$, имеем

$$- (h_0 + h) = v_0 t_k - \frac{gt_k^2}{2} ,$$

откуда $gt_k^2 - 2 v_0 t_k - 2(h_0 + h)=0$ и $t_{k1,2} = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 + h)}}{g}$

Корень $\quad t_{k2} = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 + h)}}{g}$

При заданных условиях не имеет смысла, т.к. оказывается, что $t_{k2} <0$.

Таким образом,

$$t_k = t_{k1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 + h)}}{g} = \frac{2{,}3 + \sqrt{(2{,}3)^2 + 2 \cdot 9{,}8(1{,}5 + 3{,}5)}}{9{,}8} \approx 1{,}3 \text{ c}$$

Путь S, пройденный телом, равен

$$S=2h_{max}+h_0+h,$$

Где h_{max} – максимальная высота подъема тела над точкой бросания, причем $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

Следовательно, $S=2\dfrac{v_0^2}{2g} + h_0 + h = \dfrac{v_0^2}{g} + h_0 + h = \dfrac{(2{,}3)^2}{9{,}8} + 1{,}5 + 3{,}5 \approx 5{,}5$ м

Ответ: t_k=1,3 с; S=5,5 м.

Скорость $v_в$ – тела в момент его возвращения в исходную точку после движения вертикально вверх и вниз равна по модулю начальной скорости тела $v_в = v_0$. Направление векторов $\bar{v}_в$ и $\bar{v}_0$ противоположны.

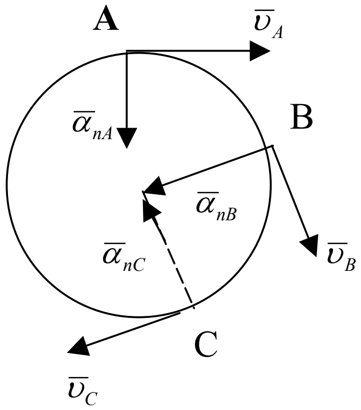
Продолжительности движения тела от исходной точки до наивысшей и от наивысшей до исходной равны между собой.

$$\Delta t_{под} = \Delta t_{опуск} = \frac{v_0}{g}$$

1.2.5 Равномерное движение точки по окружности

Движение по окружности является простейшим примером криволинейного движения.

Скорость $\bar{\upsilon}$ движения по окружности называется **линейной (окружной)** скоростью. При равномерном движении по окружности модуль v мгновенной скорости материальной точки с течением времени не изменяется:



υ=const

($\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon_C$ на рисунке 1.27)

Рисунок 1.27

Движущаяся точка за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности.

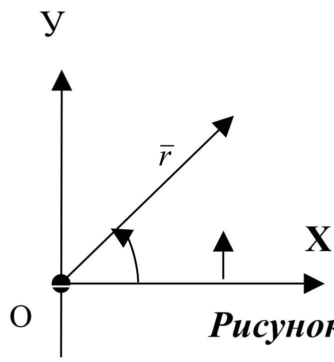
Тангенциальное ускорение при равномерном движении точки по окружности отсутствует **(**$\bar{\alpha}_\tau = 0$**).**

Изменение вектора скорости $\bar{\upsilon}$ **по направлению характеризуется нормальным ускорением** $\bar{\alpha}_n$**,** которое называется также центростремительным ускорением. В каждой точке траектории вектор $\bar{\alpha}_n$ направлен по радиусу к центру окружности, а его модуль равен

$$\alpha_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

где R – радиус окружности

При описании механического движения, в частности движения по окружности, наряду с прямоугольной декартовой системой координат используется полярная система координат. Положение точки М на какой-то плоскости (например, ХОУ) определяется двумя полярными координатами: **модулем r радиуса вектора точки и углом φ - угловой координатой, или полярным углом** (рисунок 1.28).



*Угол φ отсчитывается от оси ОХ до радиуса-*вектора $\bar{r}$ против часовой стрелки. Точку О
М в этом случае называют **полюсом системы координат.**

Рисунок 1.28

Совместим полюс координат системы с центром окружности, по которой движется материальная точка; тогда r=R (рисунок 1.29), *а изменение положения точки на окружности может быть охарактеризовано изменением $\Delta\varphi$* угловой координаты точки: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

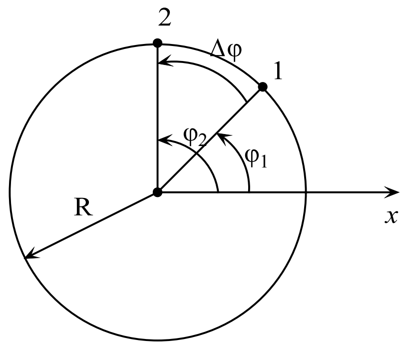


Рисунок 1.29

Угол $\Delta\varphi$ называется углом поворота радиуса – вектора точки. Элементарные *(бесконечно малые) углы поворота рассматриваются как векторы.*

Модуль вектора dφ равен углу поворота. **Направление вектора d**φ совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого, вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта** (рисунок 1.30).

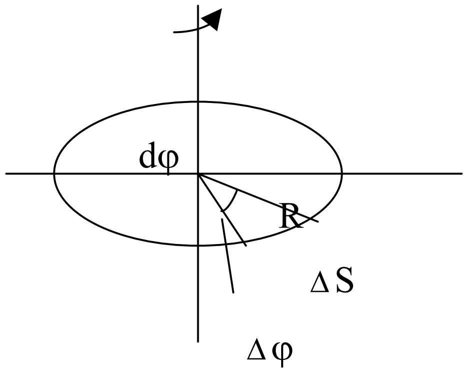


Рисунок 1.30

Средней угловой скоростью движения точки по окружности вокруг оси называется величина $\omega_{ср}$**,** равная отношению угла поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора точки за промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Угловой скоростью (мгновенной угловой скоростью) ω называется предел, к которому стремится средняя угловая скорость при бесконечном уменьшении промежутка времени Δt, или первая производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Вектор $\overline{\omega}$ **направлен** вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. также как и d$\overline{\varphi}$ (рисунок 1.31)

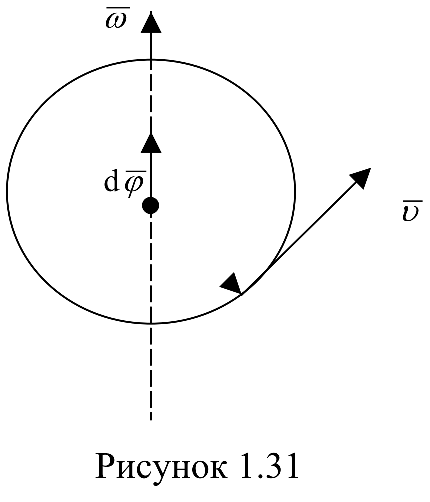


Рисунок 1.31

При **равномерном** движении точки по окружности за любые равные промежутки времени углы поворота ее радиус-вектора одинаковы. Следовательно, при таком движении мгновенная угловая скорость равна средней угловой скорости:

$$\omega = \omega_{ср}$$

Угол поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора точки, **равномерно** движущейся по окружности, равен

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Промежуток времени T, в течении которого точка совершает один полный оборот по окружности, называется **периодом обращения (периодом вращения)** , а величина ν, обратная периоду:

$\nu=\frac{1}{T}$, **- частотой обращения (частотой вращения).**

За один период угол поворота радиус-вектора точки равен 2π рад, поэтому

$2\pi=\omega T$, откуда $T=2\pi/\omega$, или $\omega=2\pi/T=2\pi\nu$

Линейная $\bar{\upsilon}$ **и угловая** $\bar{\omega}$ скорости связаны соотношением:

$$\upsilon=\omega R$$

Это видно из следующего вывода:

$$\upsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=R\omega$$

Пример. Определить модуль скорости и центростремительного ускорения точек земной поверхности на экваторе. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Дано:

$R=6400$ км $= 6{,}4\cdot10^6$ м

$T=24$ ч $= 8{,}64\cdot10^4$ с

Найти: υ - ? $a_{цс}$ - ?

Решение:

Точки земной поверхности на экваторе движутся по окружности радиуса R, поэтому модуль их скорости

$$\upsilon=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}4\cdot 10^6}{8{,}64\cdot 10^4}=465 \text{ м/с}$$

Центростремительное ускорение:

$$a_{цс}=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{4{,}65\cdot 10^2}{6{,}4\cdot 10^6}=0{,}034 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $\upsilon=465$ м/с, $a_{цс}=0{,}034$ м/с^2

Пример. Шкив делает 100 оборотов за 1 мин. Каковы частота вращения шкива и период вращения?

Дано:

N=100

t=1 мин=60 с.

Найти:

ν - ? Т-?

Решение:

Шкив, вращаясь равномерно, делает N оборотов за t секунд. Следовательно, число оборотов за 1 секунду (частота вращения)

$\nu = \frac{N}{t} = \frac{100}{60} \approx 1{,}7$ с$^{-1}$

Время одного полного оборота (период вращения)

$T = \frac{t}{N} = \frac{60}{100} = 0{,}6$ с

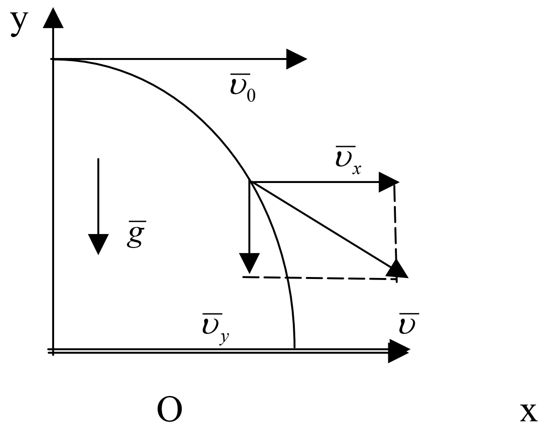
Период вращения можно определить и другим способом

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1{,}7} = 0{,}6$ с.

Ответ: ν=1,7 с$^{-1}$, Т=0,6 с

1.2.6 Движение тела, брошенного под углом к горизонту и брошенного горизонтально с некоторой высоты

Движение тела, брошенного с некоторой высоты, можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении со скоростью υ_x , равной начальной скорости бросания υ_0 ($\upsilon_x = \upsilon_0$), и свободное падение с высоты, на которой находилось тело в момент бросания, с ускорением $\bar{g}$. Для описания этого движения выбирают прямоугольную систему координат хОу. Траектория движения является ветвь параболы (рисунок 1.32).



Уравнение движения по осям Ох и Оу:

$x = x_0 + \upsilon_0 t$

$y = y_0 - g\frac{t^2}{2}$

Рисунок 1.32

Скорость тела в любой точке траектории можно определить по формуле:

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$

При этом, **время полета связано с вертикальной составляющей движения. Дальность полета – с горизонтальной.**

Пример. С башни высотой H=25 м горизонтально брошен камень со скоростью υ_0=15 м/с. Найти:

1) сколько времени камень будет в движении;
2) на каком расстоянии S_x от основании башни он упадет на землю;
3) с какой скоростью υ он упадет на землю;
4) какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю.

Дано:
h=25 м
$\upsilon_0 = \upsilon_x$ = 15 м/с
Найти: t, L, v, φ

Решение:

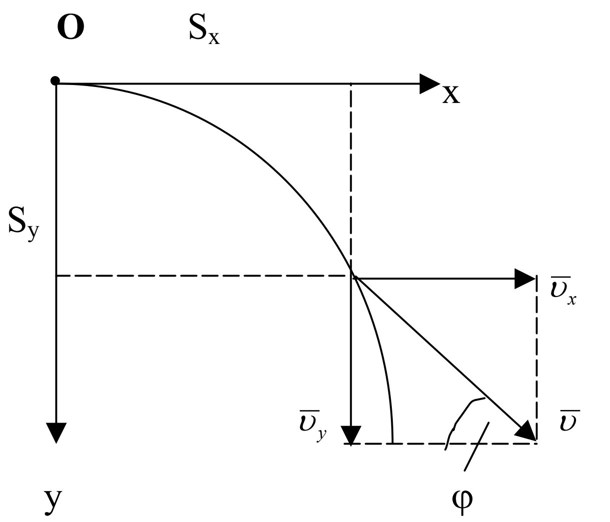


Рисунок 1.33

Перемещение брошенного горизонтального камня можно разложить на два: горизонталь ное S_x и вертикальное S_y - (рисунок 1.33).

Применяя закон независимости движения, имеем

$S_y = H = \frac{gt^2}{2}$, $S_x = \upsilon_0 t$.

Отсюда, 1) время движения t

$t = \sqrt{\frac{2S_y}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}25}{9{,}81}} = 2{,}26$ с

2) $S_x = L = v_0 t = 15 \cdot 2{,}26 = 33{,}9$ м

3) $v_y = gt = 9{,}81 \cdot 2{,}26 = 22{,}1$ м/с

$v = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{15^2 + 22{,}1^2} = 26{,}7$ м/с

4) $\text{Sin}\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = 0{,}827 \Rightarrow \varphi = 55^0 48^I$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, также можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении с начальной скоростью

$v_{0x}=v_0\mathrm{Cos}\,\alpha$

и свободное падение с начальной скоростью

$v_{0y}=v_0\mathrm{Sin}\,\alpha$, (рисунок 1.34)

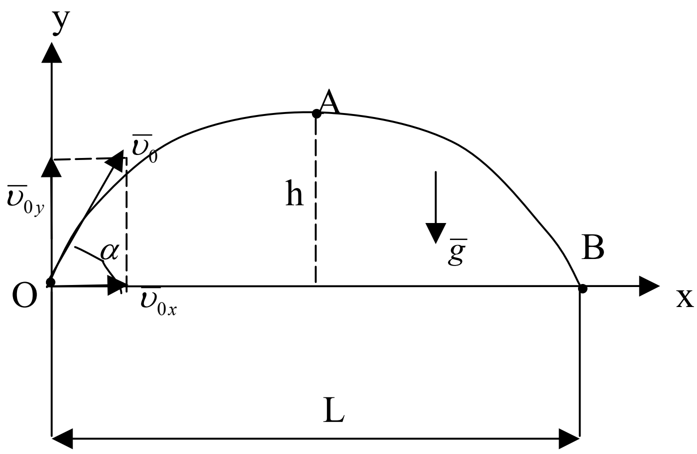


Рисунок 1.34

где α - угол между направлениями вектора скорости $\overline{\upsilon}_0$ и осью Ox.

Траекторией такого движения является парабола.

Уравнения движения примут вид:

Ox: $x_0+\upsilon_0 t$

Oy: $y_0+\upsilon_0 t-\frac{gt^2}{2}$

Скорость тела в любой точке траектории:

$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$, где $\upsilon_x=\upsilon_{0x}$

$\upsilon_y=\upsilon_{0y}-gt$

Пример. Предположим, что с некоторой высоты падают два тела: одно падает без начальной скорости, другое имеет некоторую начальную скорость, направленную горизонтально. Сопротивлением воздуха здесь и далее будем пренебрегать. Сравните времена падения указанных тел.

Решение: Движение тела, брошенного горизонтально, можно рассматривать в виде двух движений: по вертикали и горизонтали. Время полета связано с вертикальной составляющей движения. Поскольку вертикальное перемещение тел в обоих случаях определяется одними и теми же данными (одной и той же высотой H, отсутствием вертикальной составляющей начальной скорости), то отсюда следует, что **время полета обоих тел одно и то же:**

Т.к. $H=\frac{gt^2}{2}$, то $t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$

Пример. А теперь рассмотрим более сложный случай. Предположим, что оба тела падают с высоты без начальной скорости, но одно из них встречает на своем пути закрепленную площадку, наклоненную под углом 45^0 к горизонту. В результате удара о площадку направление скорости тела становится горизонтальным. Место удара о площадку находится на высоте h. Сравните падение указанных тел (рисунок 1.35)

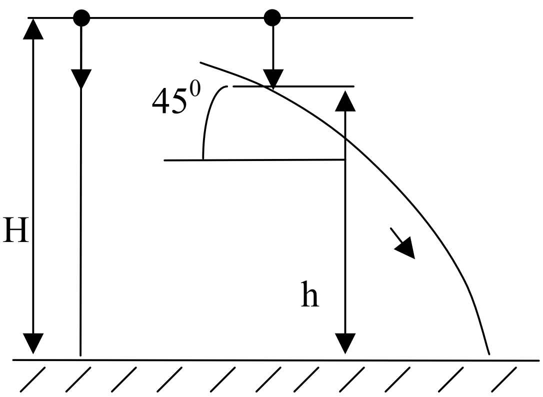


Рисунок 1.35

Решение: До уровня площадки оба тела падают **одно и то же время.** В результате удара о площадку одно из тел приобретает **горизонтальную составляющую скорости.** Горизонтальная составляющая скорости не может повлиять на вертикальную составляющую движения тела. Казалось бы, что и времена падения обоих тел должны быть одинаковы и в этом случае.

Однако удар о площадку приводит не только к появлению горизонтальной составляющей скорости тела, но и к исчезновению вертикальной составляющей скорости. А это, конечно, не может не отразиться на времени падения тела. **При ударе о площадку тело теряет вертикальную скорость и падает с высоты h без начальной вертикальной скорости.** Площадка **задерживает** вертикальное перемещение тела и вследствие этого **увеличивается время падения.**

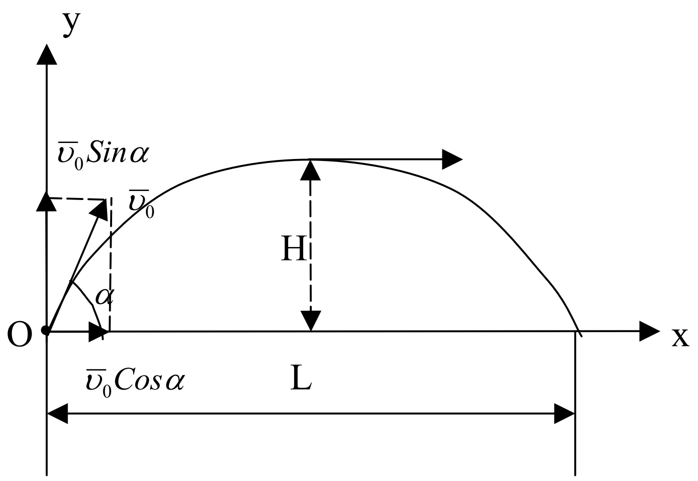
Время падения тела **не испытавшего удара о площадку** равно:

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

А время падения тела, **испытавшего удар о площадку,** равно:

$$t=\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}+\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Пример. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Определить время полета t, максимальную высоту H подъема и дальность L полета.



Дано:

α, υ_0

Найти:

t-?, H-?, L-?

Рисунок 1.36

Решение: Как обычно задача начинается с выявлением **сил,** действующих на тело. На тело действует только **сила тяжести**, поэтому в **горизонтальном направлении оно перемещается равномерно, а в вертикальном направлении – равнопеременно с ускорением $\overline{g}$.**

Будем рассматривать вертикальную и горизонтальную составляющие движения тела по отдельности, для этого **разложим вектор начальной скорости на вертикальную** (υ_0Sinα) **и горизонтальную** (υ_0Cosα) **составляющие** (рисунок 1.36).

Начнем рассматривать вертикальную составляющую движения.

Время полета $t=t_1+t_2$,
где t_1 – время подъема (тело движется по вертикали равнозамедленно),
t_2 - время спуска (тело движется по вертикали равнозамедленно).

Вертикальная скорость тела в **наивысшей** точке траектории (при $t=t_1$) равна очевидно **нулю.** С другой стороны, эта скорость может быть выражена при помощи формулы зависимости скорости равнозамедленного движения от времени. Отсюда, получаем:

$$O=\upsilon_0 Sin\alpha - gt_1$$

или $$t_1=\frac{\upsilon_0 Sin\alpha}{g} \qquad (4)$$

Зная t_1, **находим H:**

$$H=\upsilon_0 Sin\alpha\, t_1-\frac{gt_1^2}{2} \qquad (5)$$

Подставим (1) в (2)

$$H=(\upsilon_0 Sin\alpha)\left(\frac{\upsilon_0 Sin\alpha}{g}\right)-\frac{g\left(\frac{\upsilon_0 Sin\alpha}{g}\right)^2}{2}=\frac{\upsilon_0^2 Sin^2\alpha}{g}-\frac{\upsilon_0^2 Sin\alpha}{2g}=\frac{\upsilon_0^2 Sin^2\alpha}{2g}$$

Время спуска t_2 можно вычислить, рассмотрев падение тела с известной высоты H без начальной вертикальной скорости:

$t_2=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\frac{\upsilon_0 Sin\alpha}{g}$, отсюда следует, что $t_1=t_2$.

Полное время полета:

$$t=\frac{2\upsilon_0 Sin\alpha}{g}$$

Для нахождения **дальности полета L** необходимо обратиться к **горизонтальной составляющей** движения тела. Как уже отмечалось, по горизонтали тело перемещается равномерно.

Отсюда находим:

$$L=(\upsilon_0 Cos\alpha)t=(\upsilon_0 Cos\alpha)\left(\frac{2\upsilon_0 Sin\alpha}{g}\right)=\frac{\upsilon_0^2 Sin2\alpha}{g}$$

Ответ: $H=\frac{\upsilon_0^2 Sin^2\alpha}{2g}$, $t=\frac{2\upsilon_0 Sin\alpha}{g}$, $L=\frac{\upsilon_0^2 Sin2\alpha}{g}$

1.2.7 Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси

Для кинематического описания вращательного движения **абсолютно твердого тела** вокруг какой-то неподвижной оси используются **те же величины** (и уравнения связи между ними), что и для описания движения точки по окружности.

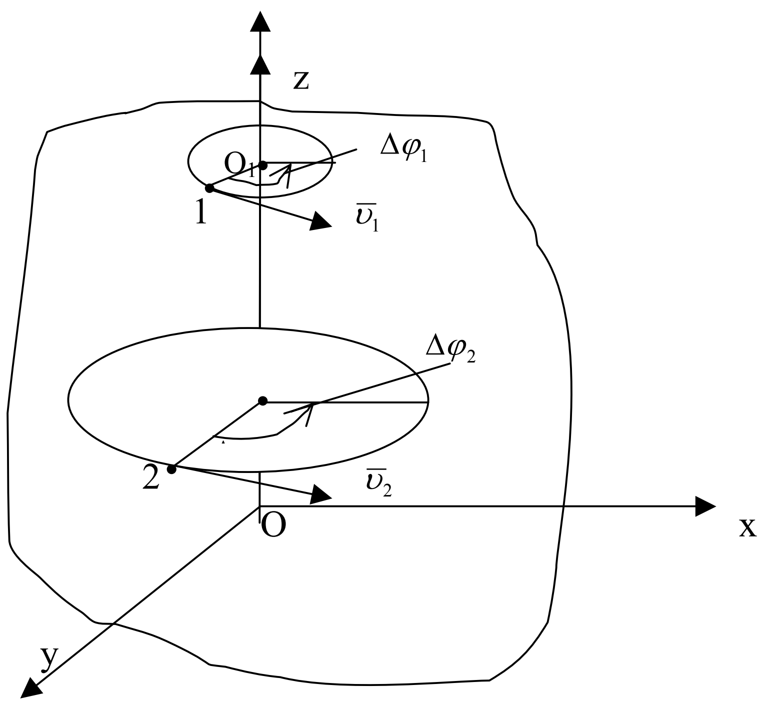


Рисунок 1.37

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси за промежуток времени Δt **углы поворота радиус-векторов различных точек тела одинаковы** (на рисунке 1.37). Угол поворота $\Delta\varphi$, средняя ω_{cp} и мгновенная ω угловые скорости характеризуют вращательное движение всего абсолютно твердого тела в целом.

Линейная скорость $\overline{\upsilon}$ какой-либо точки абсолютно твердого тела пропорционально расстоянию R точки от оси вращения:

$$\upsilon = \omega R = 2\pi\nu R = \frac{2\pi}{T}R$$

При равномерном вращательном движении абсолютно твердого тела углы поворота тела за любые равные промежутки времени **одинаковы** **(**$\Delta\varphi = const$**) и мгновенная угловая скорость** тела равна **средней угловой скорости** ($\omega=\omega_{ср}$). **Тангенциальные ускорения** α_τ у различных точек абсолютно твердого тела отсутствуют **(**$\overline{\alpha}_\tau = 0$**),** а **нормальное (центростремительное) ускорение** α_n какой-либо точки тела **зависит от ее расстояния R до оси вращения:**

$$\alpha_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\nu^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2}R$$

Вектор $\overline{\alpha}_n$ направлен в каждый момент времени по радиусу траектории точки к оси вращения.

При **неравномерном** вращательном движении абсолютно твердого тела **углы поворота** тела за любые равные промежутки времени **неодинаковы. Угловая скорость тела** ω с течением времени **изменяется.**

Средним угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon_{cp}}$ в промежутке времени $\Delta t=t_2-t_1$ называется физическая величина, равная отношению изменения угловой скорости $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$ вращающегося тела за промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\varepsilon_{ср}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Если угловая скорость за произвольные одинаковые промежутки времени изменяется **одинаково** ($\Delta\omega_{12} = \Delta\omega_{34}$ и т.д.), то $\boldsymbol{\varepsilon_{cp}}$**=const (равнопеременное вращение).**

Угловым ускорением (мгновенным угловым ускорением) вращающегося тела в момент времени t называется величина ε, равная пределу, к которому стремится среднее угловое ускорение за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ при бесконечном уменьшении Δt, или, угловое ускорение – это первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Изменение $\Delta\omega$ **угловой скорости** абсолютно твердого тела за промежуток времени $\Delta t=t-t_0$ при равнопеременном вращательном движении с угловым ускорением ε

$\Delta\omega = \varepsilon \Delta t = \varepsilon (t - t_0)$

Если **при t_0=0** начальная угловая скорость тела равна ω_0, то в произвольный момент времени t угловая скорость тела будет

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$

При **ω_0=0** угловая скорость тела в произвольный момент времени

$\omega = \varepsilon t$

Угол поворота $\Delta\varphi$ тела вокруг оси за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ при **равнопеременном** движении : $\Delta\varphi = \omega_0 \Delta t + \frac{\varepsilon (\Delta t)^2}{2}$

При условии **t_0=0:** $\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Если **ω=0** при **t_0=0**, то $\Delta\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$

При вращении тела вокруг неподвижной оси **вектор углового ускорения направлен** вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости.

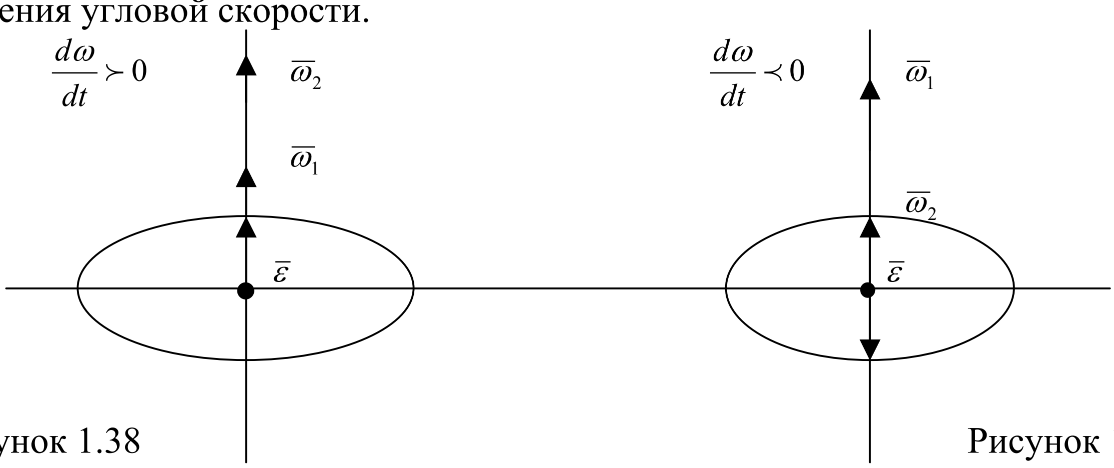


Рисунок 1.38 Рисунок 1.39

При ускоренном движении вектор сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рисунок 1.38), при замедленном – противонаправлен ему (рисунок 1.39).

Тангенциальная составляющая ускорения

$\alpha_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$; $\upsilon = \omega R$, поэтому $\alpha_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\upsilon}{dt} = R\varepsilon$

Нормальная составляющая ускорения:

$$\alpha_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Таким образом, **связь между линейными и угловыми** величинами выражается следующими формулами:

S=Rφ, $\upsilon = \omega R$, $\alpha_\tau = R\varepsilon$, $\alpha_n = \omega^2 R$

В таблице 1 дано сопоставление уравнений поступательного движения с уравнениями вращательного движения.

Таблица 1.

Поступательное движение	Вращательное движение
Равномерное	
S=υt υ=const α=0	$\varphi = \omega t$ ω=const ε =0
Равнопеременное	
S=$\upsilon_0 t \pm \dfrac{\alpha t^2}{2}$ $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha t$ $\upsilon_k - \upsilon_0^2 = 2\alpha S$ $\alpha = const$	$\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\omega_k^2 - \omega_0^2 = 2\varphi\varepsilon$ ε =const
Неравномерное	
S=$f(t)$ $\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$ $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$	$\varphi = f(t)$ $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ ε $= \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

Пример. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости ω=20 рад/с через N=10 об после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса

Дано:

ω=20 рад/с

N=10 об

Найти: ε

Решение:

При равнопеременном вращательном движении имеют место следующие два уравнения движения:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (6)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (7)$$

По условию $\omega_0 = 0$, тогда уравнения (6) и (7) примут вид

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (8)$$

$$\omega = \varepsilon t \qquad (9)$$

Решая (8) и (9) совместно и учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, получим окончательно

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N} = 3{,}2\ \text{рад/с}^2$$

Пример. Колесо радиусом R=10 см вращается с постоянным угловым ускорением ε =3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения:

1) угловую скорость;
2) линейную скорость;
3) тангенциальное ускорение;
4) нормальное ускорение;
5) полное ускорение;
6) угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

Дано:

R=10 см=0,1 м

ε=3,14 рад/с^2

t=1с

Найти:

ω, υ, α_τ, α_n, α, φ

Решение:

При равнопеременном вращательном движении угловая скорость ω связана со временем t уравнением $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию $\omega = 0$ и тогда $\omega = Et$

Поэтому: 1) $\omega = \varepsilon t = 3{,}14 \cdot 1 = 3{,}14$ с$^{-1}$

2) т.к. $\upsilon = \omega R = 3{,}14 * 0{,}1 = 0{,}314$ м/с

3) $\alpha_\tau = \varepsilon R = 3{,}14 \cdot 0{,}1 = 0{,}314$ м/с^2

4) $\alpha_n = \omega^2 R = (3{,}14)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}986$ м/с^2

5) $\alpha = \sqrt{\alpha_\tau^2 + \alpha_n^2} = \sqrt{0{,}314^2 + 0{,}986^2} = 1{,}03$ м/с^2

6) $\sin \frac{\alpha_\tau}{\alpha} = \frac{0{,}314}{1{,}03} = 0{,}305 \Rightarrow \varphi = 17^0 46^I$

1.3 Контрольная работа № 1

Таблица вариантов индивидуальных домашних заданий по теме 1.2 Кинематика

Таблица 2.

Вариант	Номера задач							
1	1	20	21	40	41	60	70	71
2	2	19	22	39	42	59	62	72
3	3	18	23	38	43	58	68	73
4	4	17	24	37	44	57	67	74
5	5	16	25	36	45	56	66	75
6	6	15	26	35	46	55	65	76
7	7	14	27	34	47	54	64	77
8	8	13	28	33	48	53	63	78
9	9	12	29	32	49	52	62	79
10	10	11	30	31	50	51	61	80

1.4 Теоретические вопросы для подготовки по теме «Кинематика».

Элементы векторной алгебры. Механическое движение. Модели в механике (материальная точка, абсолютно твердое тело). Виды движения (поступательное, вращательное). Система отсчета. Кинематические уравнения движения материальной точки. Траектория, путь, перемещение. Средняя и мгновенная скорость. Относительность движения. Закон сложения скоростей. Среднее и мгновенное ускорение. Составляющие ускорения (нормальное и тангенциальное). Угловая скорость и угловое ускорение. Связь между линейной и угловой скоростью и линейным и угловым ускорением. Уравнения поступательного и вращательного движения точки (тела) при различных видах движения: равномерного, равнопеременного, неравномерного.

1.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Бегун бежал 4 с со средней скоростью 10 м/с и 5 с – со скоростью 12 м/с. С какой средней скоростью он пробежал всю дистанцию?

2. Первую половину пути, равную 1500 м, конькобежец бежал со скоростью 6 м/с, а вторую – 12 м/с. С какой средней скоростью бежал конькобежец?

3. Из двух точек А и В, расположенных на расстоянии 90 м друг от друга одновременно, в одном направлении начали движение два тела. Тело, движущееся из точки А, имело скорость 5 м/с, а тело, движущееся из точки В, - скорость 2 м/с. Через какое время первое тело нагонит второе? Какое перемещение совершит каждое тело?

4. Теплоход на подводных крыльях шел вниз по реке со скоростью $v =$ 80 км/ч, а вверх – со скоростью $v' = 76$ км/ч. Определить скорость теплохода v_1 в стоячей воде и скорость v_2 течения реки.

5. Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение 55 секунд. По неподвижному эскалатору пассажир мог бы подняться за 3,5 минуты. За какое время поднимется пассажир по движущемуся эскалатору?

6. Сколько времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью 54 км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2 = 36$ км/ч, длина поезда 150 м?

7. Лодка движется поперек реки перпендикулярно ее берегам со скоростью 2 м/с. Под каким углом к выбранному направлению оси у и с какой скоростью относительно поверхности воды гребец держит курс, если скорость течения реки 5 км/ч.

8. Пассажирский катер проходит расстояние 150 км между двумя пристанями по течению за 2 часа, а против течения за 3 часа. Определите скорость катера в стоячей воде и скорость течения воды в реке.

9. Пароход идет по реке от пункта А до пункта В со скоростью $v_1 = 10$ км/ч, а обратно – со скоростью $v_2 = 16$ км/ч. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ парохода и скорость u течения реки.

10. Найти среднюю скорость v относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90^0$ к течению. Скорость течения реки U = 1 м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 2$ м/с.

11. Поезд, имея скорость 70 км/ч, стал двигаться равнозамедленно и через 10 секунд снизил скорость до 52 км/ч. С каким ускорением двигался поезд на этом участке? Какое при этом он прошел расстояние?

12. Расстояние между двумя станциями метрополитена l = 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую – равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда v = 50 км/ч. Найти ускорение a и время t движения поезда между станциями.

13.Поезд движется со скоростью v_0 = 36 км/ч. Если выключить ток, то поезд двигаясь равнозамедленно, остановится через время t = 20 с. Каково ускорение a поезда? На каком расстоянии S до остановки надо выключить ток?

14. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} и ускорение a_1. Одновременно с телом 1 начинает двигаться равнозамедленно тело 2, имея начальную скорость v_{20} и ускорение a_2. Через какое время t после начала движения оба тела будут иметь одинаковую скорость.

15. Самолет взлетает с аэродрома под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту со скоростью v = 60 м/с. Какой высоты h достигнет он через t = 10 с и на какое расстояние S (в горизонтальном направлении) удалится от места взлета.

16. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} = 2 м/с и ускорение a. Через время t = 10 с после начала движения тела 1 из этой точки начинает двигаться равноускоренно тело 2, имея начальную скорость v_{20} = 12 м/с и то же ускорение a. Найти ускорение a, при котором тело 2 сможет догнать тело 1.

17. Посадочная скорость пассажирского самолета 135 км/ч, а длина пробега его 500 м. Определить время пробега по посадочной полосе и ускорение самолета, считая движение равнозамедленным.

18. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, за пятую секунду прошло путь 18 м. Чему равно ускорение и какой путь тело прошло за 5 с ?

19. Тело, имея начальную скорость 5 м/с, прошло за пятую секунду путь, равный 4,5 м. Определить ускорение и путь, пройденный телом за 10 секунд.

20. Мимо поста прошел автомобиль, который двигался с постоянной скоростью 72 км/ч. Спустя 2 мин с поста отправился в том же направлении второй автомобиль который, через 25 секунд достигнув скорости 90 км/ч, двигался равномерно. Через сколько времени и на каком расстоянии от поста второй автомобиль догонит первый?

21. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A - Bt + Ct^2$, где A = 6 м, B = 3 м/с и C = 2 м/с^2. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ и среднее ускорение $\vec{a}$ тела для интервала времени $1 \leq t \leq 4$ с.

22. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где A = 3 м, B = 2 м/с, C = 1 м/с^2. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ и ускорение $\vec{a}$ тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

23. Зависимость пройденного пути от времени $S = A + Bt + Ct^2 + Дt^3$, где C = 0,14 м/с^2 и Д = 0,01 м/с^2. через какое время t тело будет иметь ускорение a = 1 м/с^2?

24. Аэростат поднимается вертикально вверх с некоторым ускорением. Когда скорость подъема аэростата была равна v_1 = 10 м/с, из него выпал предмет. На какой высоте выпал предмет, если на землю он упал через t_0 = 5 с. Найти скорость, с которой предмет упал на землю.

25. Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью v_0. Когда оно достигло высшей точки подъема на высоте H = 100 м от поверхности земли, из того же начального пункта и с той же начальной скоростью брошено второе тело. На какой высоте h тела встретятся? Какие они будут иметь скорости в момент встречи? С какой начальной скоростью брошены тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

26. С высоты h = 1000 м падает тело без начальной скорости. Одновременно с высоты H = 1100 м падает другое тело с некоторой начальной скоростью. Оба тела достигли земли в один и тот же момент времени. Найти начальную скорость 2-го тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

27. Тело брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3 с. Какова была начальная скорость тела v_0 и на какую высоту оно поднялось?

28. Камень бросили вертикально вверх на высоту h_0 = 10 м. Через какое время t он упадет на землю? На какую высоту h поднимется камень, если начальную скорость камня увеличить вдвое?

29. Тело, падающее без начальной скорости с некоторой высоты h_1, прошло последние h_2 = 30 м за время t_2 = 0,5 с. Найти высоту падения h_1 и время падения t_1. Сопротивлением воздуха пренебречь.

30. Одно тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с некоторой начальной скоростью, а другое падает с высоты без начальной скорости. Движения начались одновременно и проходят по одной прямой. Найти начальную скорость первого тела, если известно, что через t с после начала движения расстояние между телами равно S.

31. С аэростата, находящегося на высоте h = 300 м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью v = 5 м/с, аэростат опускается со скоростью v = 5 м/с; б) аэростат неподвижен.

32. Тело падает с высоты h = 19,6 м с начальной скоростью $v_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1 с своего движения?

33. Тело падает с высоты h = 19,6 м с начальной скоростью $v_0 = 0$. За какое время тело пройдет первый и последний 1 м своего пути?

34. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты h падает тело и какое время t его падения?

35. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, тело 2 падает с высоты h без начальной скорости. Найти зависимость расстояния l между телами 1 и 2 от времени t, если известно, что тела начали двигаться одновременно.

36. Маховик диаметром Д = 1,5 м делает n = 600 об/мин. Масса маховика m = 0,5 т. Найти угловую скорость вращения ϖ маховика, линейную скорость v движения точек на ободе колеса, кинетическую энергию маховика $W_к$, считая его массу сосредоточенной на ободе. Выразить кинетическую энергию маховика через его угловую скорость

37. Камень, привязанный к веревке длиной 80 см, вращается в вертикальной плоскости, делая 240 об/мин. В тот момент, когда скорость камня была направлена вертикально вверх, веревка оборвалась. На какую высоту взлетел камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.

38. Вал, диаметром 40 см с насаженным на нем шкивом диаметром 2,0 м вращается равномерно. Во сколько раз линейная скорость и центростремительное ускорение на ободе шкива больше, нежели на внешней границе вала?

39. Найти угловую скорость ω: а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки на часах; в) минутной стрелки на часах; г) искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите с периодом вращения T = 88 мин. Какова линейная скорость v движения этого искусственного спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии h = 200 км от поверхности Земли?

40. Найти линейную скорость v вращения точек земной поверхности на широте Ленинграда ($\varphi = 60^0$).

41. С какой линейной скоростью должен двигаться самолет на экваторе с востока на запад, чтобы пассажирам этого самолета Солнце казалось неподвижным?

42. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии l = 0,5 м друг от друга, вращается с частотой n = 1600 об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска, при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 12^0$. Найти скорость v пули.

43. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раз больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии r = 5 см ближе к оси колеса.

44. Колесо, вращаясь равноускоренно через время t = 1 мин после начала вращения приобретает частоту n = 720 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

45. Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время t = 1 мин уменьшило свою частоту с n_1 = 300 об/мин до n_2 = 180 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

46. Вентилятор вращается с частотой n = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

47. Вал вращается с частотой n = 180 об/мин. С некоторого момента вал начинает вращаться равнозамедленно с угловым ускорением ε = 3 рад/с^2. Через какое время t вал остановится? Найти число оборотов N вала до остановки.

48. Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 5 см/с^2. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному; б) вдвое больше тангенциального?

49. Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки v = 79,2 см/с.

50. Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время t = 20 с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки v = 10 см/с.

51. На каком расстоянии от намеченной точки на земле самолет, летящий на высоте 180 м со скоростью 360 км/ч, должен сбросить груз? Дальность полета в воздухе составляет 30% дальности в безвоздушном пространстве.

52. Из самолета летящего на высоте 125 м со скоростью 144 км/ч, сброшен груз. На какое расстояние по горизонтали уйдет самолет от точки приземления груза за время падения его? Сопротивление воздуха уменьшает дальность полета груза в 4 раза.

53. Вертолет летит горизонтально со скоростью v_1 = 180 км/ч на высоте h = 500 м. С вертолета нужно сбросить груз на теплоход, движущийся встречным курсом со скоростью v_2 = 24 км/ч. На каком расстоянии от теплохода по горизонтали летчик должен сбросить груз?

54. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью v_x он брошен? С какой скоростью он упал на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

55. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии l = 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на Δ h = 1 м меньше высоты h, с которой брошен мяч. С какой скоростью v_x брошен мяч? Под каким углом φ мяч подлетает к поверхности стенки?

56. Мальчик бросил горизонтально мяч из окна, расположенного на высоте 15 м. Сколько времени летел мяч до земли и с какой скоростью он был брошен, если мяч упал на расстоянии 5,3 м от основания дома.

57. Шарик, движущийся по столу со скоростью 1 м/с упал, скатившись на расстояние 0,45 м от стола. Какова высота стола?

58. На холме высотой 20 м установлено оружие и произведен выстрел в горизонтальном направлении. На каком расстоянии от места выстрела упадет снаряд, если скорость вылета снаряда из ствола орудия 600 м/с? Дальность полета снаряда в воздухе составляет 30% дальности полета в безвоздушном пространстве.

59. Камень, брошенный горизонтально, через время t = 0,5 с после начала движения имел скорость v, в 1,5 раза большую скорости v_x в момент бросания. С какой скоростью v_x был брошен камень?

60. Камень брошен горизонтально со скоростью v_x = 15 м/с. Найти нормаль-

ное a_n и тангенциальное a_τ ускорение камня через время t = 1 с после начала движения.

61. Камень брошен горизонтально со скоростью v_x = 10 м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время t = 3 с после начала движения.

62. Струя воды в гидромониторе вылетает из ствола со скоростью 50 м/с под углом 30^0 к горизонту. Найти дальность полета и наибольшую высоту подъема.

63. Пуля из пружинного пистолета, установленного на высоте H = 80 см от пола, вылетает со скоростью v = 5 м/с. Определить дальность L полета пути, а также величину и направление ее конечной скорости $v_к$. Сопротивлением воздуха движению пули пренебречь.

64. Пружинный пистолет установлен на горизонтальной поверхности так, что его ствол направлен под углом α к горизонту. При каком значении α дальность полета пули при выстреле будет максимальной? Определить максимальную дальность полета пули при скорости вылета v_0 = 7 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

65. Из орудия сделали выстрел вверх по склону горы. Угол наклона горы к горизонту $\alpha = 30^0$, угол наклона ствола орудия к горизонту $\beta = 60^0$, скорость вылета снаряда v = 21 м/с. Найти расстояние от орудия до точки падения снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

66. По кривому желобу, установленному на стене на высоте h = 3,0 м от пола, скатывается шарик со скоростью v_0 = 7 м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. На каком расстоянии l от конца желоба шарик упадет на пол? Сопротивлением воздуха пренебречь.

67. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы высота его подъема была равна дальности полета?

68. Под каким углом надо бросить тело, чтобы дальность полета была наибольшей?

69. Тело брошенное под углом к горизонту, находилось в полете 4 с. Какой наибольшей высоты достигло тело?

70. Тело брошено со скоростью v_0 под углом к горизонту. Время полета t = 2,2 с. На какую высоту h поднимется тело?

71. Камень, брошенный со скоростью v_0 = 12 м/с под углом $\alpha = 45^0$ к гори-

зонту, упал на землю на расстояние l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости v_0 он упал на то же место.

72. Тело брошено со скоростью v_0 = 14, 7 м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время t = 1,25 с после начала движения.

73. Тело брошено со скоростью v_0 = 10 м/с под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела через время t = 1 с после начала движения.

74. Мяч брошен со скоростью v_0 = 10 м/с под углом $\alpha = 40^0$ к горизонту. На какую высоту h поднимется мяч? На какое расстояние l от места бросания он упадет на землю? Какое время t он будет в движении?

75. На спортивных состязаниях в Ленинграде спортсмен толкнул ядро на расстояние l_1 = 16,2 м. На какое расстояние l_2 полетит такое же ядро в Ташкенте при той же начальной скорости и при том же угле наклона ее к горизонту. Ускорение свободного падения в Ленинграде g_1 = 9,819 м/с^2, в Ташкенте g_2 = 9,801 м/с^2.

76. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела h = 3 м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории R = 3 м.

77. С башни высотой h_0 = 25 м брошен камень со скоростью v_0 = 15 м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На какое расстояние он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

78. Мяч, брошенный со скоростью v_0 = 10 м/с под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии l = 3 м от места бросания. Когда происходит удар мяча о стенку (при подъеме мяча или при его опускании)? На какой высоте h мяч ударит о стенку (считая от высоты, с которой брошен мяч)? Найти скорость v мяча в момент удара.

79. Под каким углом нужно бросать тело, чтобы высота подъема равнялась половине дальности полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

80. Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигнет мяч во время игры, если он от одного игрока летит к другому t = 2 с?

Список использованных источников

1. Трофимова Т.И. Курс физики: Учебник. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с., ил.
2. Парфентьева Н.А., Фомина М.В. Решение задач по физике: В помощь поступающим в ВУЗы. Часть 1. Издание 2-е, исправленное. – М.: Мир, 1995. – 216 с., ил.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1973. – 464 с., ил.
4. Яворский Б.М., Селезнев Ю.А. Справочное руководство по физике. Издание 4-е, исправленное. – М.: Наука, 1989. – 576 с., ил.
5. Кобушкин В.К. Методика решения задач по физике: Учебное пособие. Издание 2-е. – Л.: ЛГУ, 1972. - 247 с., ил.
6. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982. – 272 с., ил.
7. Савельев И.В. Курс физики: Учебник. – М.: Наука, 1989. – 304 с., ил.
8. Гурский И.П. Элементарная физика с примерами решения задач: Учебное пособие. Издание 2-е, исправленное. – М.: Наука, 1976. – 463.