МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Ю.Л. ВЛАСОВ

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2003

ББК 22.2
В 58
УДК 534

Рецензент
доцент А.С. Зиновьев

Власов Ю.Л.

В 58 **Малые колебания системы с двумя степенями свободы: Методические указания к расчетно-графической работе по дисциплине «Прикладные задачи динамики твердого тела». Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003.-28 с.**

Методические указания включают теоретическое изложение материала, контрольное задание, пример выполнения задания и вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Прикладные задачи динамики твердого тела» для студентов специальностей 150200 и 230100.

ББК 22.2

Введение

Во многих областях современной техники весьма часто возникают колебательные движения различных механических систем.

Колебания, или так называемые вибрации машин и их деталей, при неблагоприятных обстоятельствах могут вызвать значительные деформации и напряжения и, как следствие, быстрый износ конструкций и их разрушение.

В наше время особое значение приобретают различные виды колебаний автомобилей в связи с возрастанием их скорости движения.

Создание рациональных конструкций, а также специальных устройств – так называемых гасителей колебаний, широко применяемых в современной технике для механизации ряда производственных процессов, основаны на положениях, устанавливаемых теорией колебаний.

1 Общие положения

1.1 Малые колебания системы около положения равновесия

Если обобщенные координаты системы в положении равновесия принимать равными нулю, т.е. отсчитывают их от положения равновесия, то колебательным движением в общем случае можно считать такое движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них принимают нулевые значения, по крайней мере, несколько раз.

Малые колебания системы представляют собой такое движение системы, при котором значения обобщенных координат, определяющих положение системы, и обобщенных скоростей в любой момент времени настолько малы, что их можно рассматривать как величины первого порядка малости.

В положении равновесия силы, приложенные к механической системе, составляют уравновешенную систему сил и каждая обобщенная сила равна нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0,$$

где П – потенциальная энергия механической системы.

Следовательно, потенциальная энергия в положении равновесия достигает своего экстремального значения.

Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия.

Строгое определение понятию устойчивого положения равновесия было дано А.М. Ляпуновым:

Равновесие системы называется устойчивым, если для всякого, как угодно малого положительного числа ε можно выбрать два других малых положительных числа η_1 и η_2, что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям:

$$\left| \overset{o}{q}_i \right| < \eta_1; \qquad \left| \dot{q}_i^{\,o} \right| < \text{з}_2,$$

в дальнейшем движении механической системы выполняется условие

$$\left| q_i(t) \right| < \varepsilon$$

для каждой обобщенной координаты.

Достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы определяется теоремой Лагранжа-Дирихле:

если в положении изолированного равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы получим из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1;$$

где Т – кинетическая энергия системы;

q_1 и q_2 – обобщенные координаты;

Q_1 и Q_2 – обобщенные силы,

t – время.

В случае свободных колебаний механической системы:

$$Q = Q^{П}.$$

Здесь $Q^{П}$ – обобщенная сила потенциальных сил. Она выражается через потенциальную энергию П по формуле:

$$Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q}.$$

Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат точек системы и, следовательно, от обобщенной координаты q и не зависит от обобщенной скорости.

1.2 Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах

Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах вычисляется по формуле:

$$T = \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2 \right).$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{22} зависят только от q_1 и q_2. Разложим каждую из этих функций в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат в окрестности положения равновесия. Имеем для A_{11}:

$$A_{11}(q_1, q_2) = (A_{11})_0 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1}\right)_0 \cdot q_1 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}\right)_0 \cdot q_2 + ... \qquad (2)$$

Индекс 0 у величин здесь и далее указывает, что их следует вычислять при $q_1 = q_2 = 0$.

Так как рассматриваем малые отклонения системы от положения равновесия, то в равенстве (2) ограничимся только первыми постоянными членами:

$$A_{11}(q_1, q_2) = (A_{11})_0 = a_{11}.$$

Аналогично получаем:

$$A_{12}(q_1, q_2) = (A_{12})_0 = a_{12},$$

$$A_{22}(q_1, q_2) = (A_{22})_0 = a_{22}.$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – постоянные коэффициенты инерции, которые характеризуют инертность механической системы.

Тогда кинетическая энергия системы будет иметь следующее выражение:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right).$$

Так как кинетическая энергия всегда положительна и равняется нулю только при нулевых значениях обобщенных скоростей, значит, ее коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{3}$$

1.3 Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах

Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы зависит только от обобщенных координат q_1 и q_2, если силовое поле и связи стационарны. Разлагая потенциальную энергию П в окрестности положения равновесия в ряд по степеням обобщенных координат q_1 и q_2, для системы с двумя степенями свободы, имеем:

$$\Pi(q_1, q_2) = (\Pi)_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 \cdot q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 \cdot q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot \frac{q_1^2}{2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 \cdot q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 \cdot \frac{q_2^2}{2} + \ldots$$

Потенциальную энергию в положении равновесия $(\Pi)_0$ принимаем равной нулю. Значения обобщенных сил в положении равновесия системы равны нулю:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0.$$

Окончательно, удерживая члены второго порядка и пренебрегая членами третьего и более высокого порядка, потенциальную энергию выразим в форме:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right).$$

Постоянные величины

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}\right)_0, \qquad c_{12} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0, \qquad c_{22} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_2^2}\right)_0.$$

называются коэффициентами жесткости, которые характеризуют упругие свойства системы.

В положении устойчивого равновесия квадратичная форма для потенциальной энергии определенно положительна и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$c_{11} > 0, \qquad c_{22} > 0,$$
$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{4}$$

1.4 Дифференциальные уравнения свободных колебаний

Для системы с двумя степенями свободы, учитывая формулы для кинетической и потенциальной энергии, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2,$$

$$Q_1 = Q_1^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -\left(c_{11}q_1 + c_{12}q_2\right), \qquad Q_2 = Q_2^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -\left(c_{12}q_1 + c_{22}q_2\right).$$

Подставляя эти значения величин в уравнение (1), получаем линейные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

1.5 Общее решение дифференциальных уравнений свободных колебаний системы с двумя степенями свободы

Частное решение системы уравнений (5) можно представить в следующем виде:

$$q_1 = \mathrm{A}_1 \sin(k\mathrm{t} + \alpha); \qquad q_2 = \mathrm{A}_2 \sin(k\mathrm{t} + \alpha),$$

предположив, что обобщенные координаты q_1 и q_2 изменяются по гармоническому закону.

Где k - круговая частота колебаний; A_1 и A_2 – амплитуды; α – начальная фаза. Постоянные A_1, A_2, k и a подлежат определению.

Подставим значения q_1 и q_2 и их производные

$$\ddot{q}_1 = -k^2 \mathrm{A}_1 \sin(k\mathrm{t} + \alpha), \qquad \ddot{q}_2 = -k^2 \mathrm{A}_2 \sin(k\mathrm{t} + \alpha),$$

в систему уравнений (5). Получим тождества, в которых коэффициенты при $\sin(k\mathrm{t}+a)$ должны равняться нулю. Это дает систему двух однородных линейных уравнений для определения амплитуд A_1 и A_2:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_1(c_{11} - a_{11} k^2) + \mathrm{A}_2(c_{12} - a_{12} k^2) = 0, \\ &\mathrm{A}_1(c_{11} - a_{11} k^2) + \mathrm{A}_2(c_{12} - a_{12} k^2) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Однородная линейная система уравнений имеет решения, отличные от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - (c_{12} - a_{12} k^2)^2 = 0.$$

Только для значений k, удовлетворяющих уравнению частот, существуют отличные от нуля значения A_1, A_2 и, следовательно, $q_1(\mathrm{t})$, $q_2(\mathrm{t})$.

Уравнение частот, как биквадратное уравнение, в общем случае имеет два значения для квадрата частоты k^2. Для системы с двумя степенями свободы, если квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергии удовлетворяют условиям положительной определенности (3) и (4), то эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы оба решения для k^2 были действительными и положительными. Только для действительных и положительных значений k^2 обобщенные координаты q_1 и q_2 выражаются синусоидальной зависимостью от времени. Для значений k^2, не удовлетворяющих этим условиям, движение системы не является колебательным.

Каждой из частот соответствуют определенные значения величин A_1, A_2, α:

$\mathrm{A}_1^{(1)}, \mathrm{A}_2^{(1)}, \alpha_1$ - для частоты k_1 и $\mathrm{A}_1^{(2)}, \mathrm{A}_2^{(2)}, \alpha_2$ - для частоты k_2.

В соответствии с этим получим по два значения обобщенных координат q_1 и q_2:

$$q_1^{(1)} = \mathrm{A}_1^{(1)}\sin(k_1 \mathrm{t} + \alpha_1), \qquad q_2^{(1)} = \mathrm{A}_2^{(1)}\sin(k_1 \mathrm{t} + \alpha_1),$$
$$q_1^{(2)} = \mathrm{A}_1^{(2)}\sin(k_2 \mathrm{t} + \alpha_2), \qquad q_2^{(2)} = \mathrm{A}_2^{(2)}\sin(k_2 \mathrm{t} + \alpha_2), \tag{7}$$

где $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ составляют главное колебание для частоты k_1, а $q_1^{(2)}$ и $q_2^{(2)}$ - для частоты k_2.

Система однородных линейных уравнений (6) дает возможность определить только отношение амплитуд. Для первого и второго главных колебаний соответственно получаем:

$$\beta_1 = \frac{\mathrm{A}_2^{(1)}}{\mathrm{A}_1^{(1)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2},$$

$$\beta_2 = \frac{\mathrm{A}_2^{(2)}}{\mathrm{A}_1^{(2)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

Отношения амплитуд в главных колебаниях β_1, β_2, называют коэффициентами формы. Коэффициенты формы равны отношениям обобщенных координат в главных колебаниях:

$$\beta_1 = \frac{\mathrm{A}_2^{(1)}}{\mathrm{A}_1^{(1)}} = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}}, \qquad \beta_2 = \frac{\mathrm{A}_2^{(2)}}{\mathrm{A}_1^{(2)}} = \frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}}.$$

Коэффициенты формы β_1 и β_2 характеризуют формы главных колебаний и показывают во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания в одной из координат больше (или меньше) амплитуды другой координаты.

Анализ уравнений (7) позволяет сделать следующие выводы:

- если система совершает одно из главных колебаний, то обе обобщенные координаты системы изменяются по гармоническому закону одинаковой частоты и фазы колебаний. Это означает, что обе обобщенные координаты изменяются синхронно, одновременно имея нулевое значение и одновременно достигая максимума;
- в каждом из главных колебаний, амплитуды находятся в постоянном соотношении (β_1 или β_2), не зависящем от начальных условий и зависящем лишь от структуры движущейся системы.

Движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия складывается из двух независимых колебаний, путем суммирования частных решений:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = \mathrm{A}_1^{(1)}\sin(k_1 \mathrm{t} + \alpha_1) + \mathrm{A}_1^{(2)}\sin(k_2 \mathrm{t} + \alpha_2),$$

$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)} = \beta_1 \mathrm{A}_1^{(1)}\sin(k_1 \mathrm{t} + \alpha_1) + \beta_2 \mathrm{A}_1^{(2)}\sin(k_2 \mathrm{t} + \alpha_2).$$

Четыре произвольных постоянных определяются из начальных условий:

$$q_1 = q_{10}, \qquad q_2 = q_{20}, \qquad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \qquad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}.$$

Итак, каждое из колебаний в отдельности является простым гармоническим колебанием, а результирующее движение представляет собой сложное движение, которое является результатом наложения друг на друга главных колебаний различных частот k_1 и k_2. Поэтому результирующее движение не является простым гармоническим колебанием.

2 Вопросы для самоконтроля

1 Какие колебания механической системы являются малыми?

2 Когда положение равновесие системы является устойчивым?

3 Укажите условия устойчивости равновесия механической системы.

4 По какой формуле вычисляют кинетическую энергию системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах?

5 По какой формуле вычисляют потенциальную энергию системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах?

6 Что характеризуют коэффициенты инерции?

7 Что характеризуют коэффициенты жесткости?

8 Приведите дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.

9 Каким соотношениям удовлетворяют коэффициенты инерции и жесткости системы с двумя степенями свободы?

10 Как определяют частоты свободных колебаний системы с двумя степенями свободы?

11 Приведите уравнения, определяющие главные колебания системы.

12 Как определяют формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы?

13 Являются ли результирующее движение системы с двумя степенями свободы гармоническим колебанием?

14 Зависят ли частоты свободных колебаний системы от выбора обобщенных координат?

3 Контрольное задание. Исследование малых свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Определить частоты малых свободных колебаний и формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами пружин.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 1, а схемы механических систем тел 1 – 3 в положении покоя показаны на рисунках 1 – 6.

Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни – тонкими однородными. Во всех случаях качение колес происходит без скольжения.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер варианта	Масса тел, кг			Коэффициенты жесткости пружин, Н/см			Расстояние ℓ, м	Примечания
	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	1	-	30	40	60	-	
2	8	5	-	5	10	25	-	R=0,4 м
3	10	2	4	15	20	40	-	
4	4	3	-	40	20	-	0,8	
5	6	1	-	50	30	-	-	
6	2	7	-	65	55	45	1,2	
7	10	15	-	80	70	40	3,0	
8	12	6	5	60	30	5	-	
9	7	3	2	10	25	10	1,2	
10	9	12	-	35	70	20	-	
11	20	40	-	100	200	150	3,0	
12	6	4	-	40	30	60	2,0	
13	4	10	2	60	70	40	-	
14	11	7	-	100	50	30	2,0	
15	6	2	3	30	15	10	1,5	$m_4 = m_3$
16	7	5	-	40	50	-	1,8	
17	14	13	-	75	85	100	3,5	
18	8	-	-	35	60	45	2,0	
19	8,5	4	-	70	65	75	3,0	
20	1,5	3	2	15	20	10	-	
21	4	6	8	20	60	45	-	R/r = 2

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	20	30	40	300	130	600	6,0	
23	7	10	-	80	40	40	2,5	
24	4,5	3	-	40	60	10	1,5	
25	5	8	-	10	30	25	2,0	
26	2	4	-	15	25	30	1,8	
27	10	12	-	60	40	30	2,4	
28	6	5	7	55	45	-	1,5	
29	4	3	-	40	20	25	1,2	
30	0	5	3	25	45	50	1,0	$m_4 = m_3$
31	8	4	6	80	50	70	-	
32	2	40	-	10	20	-	-	В положении покоя пружины не деформированны. Тело 2 состоит из трех одинаковых стержней
33	3	1	-	8	7	10	0,8	
34	2	3	8	20	40	30	-	R=0,4 м
35	4	6	1	10	40	10	-	
36	2	3	5	20	15	30	0,6	
37	4	5,5	-	40	33	25	1,4	
38	1,5	6	-	20	15	25	-	
39	4	2	1	25	40	10	0,9	Тела 2 и 3 принять за материальные точки
40	5	3	6	35	25	20	1,2	
41	10	2	-	60	40	30	1,7	
42	6	4	2	30	20	1	2,1	
43	5	11	-	60	100	80	1,2	
44	4	2	3	8	10	14	1,4	$m_4 = m_3$
45	8	10	7	20	40	60	0,8	
46	4	6	-	40	10	30	1,8	
47	5,5	8	3	20	30	35	1,2	R/r = 1,5
48	3	2	4	10	15	30	-	R/r = 2

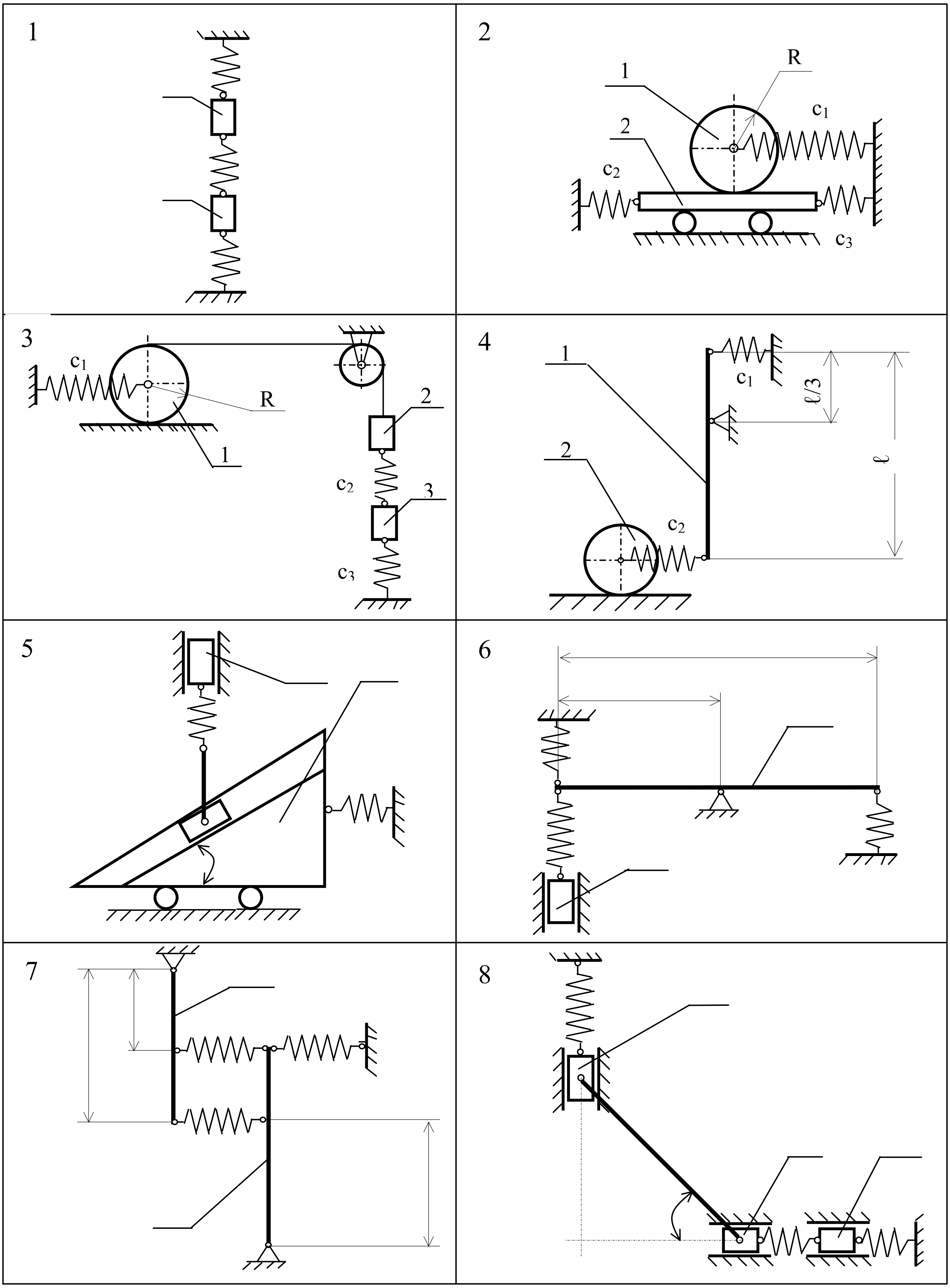

Рисунок 1 – Схемы механических систем

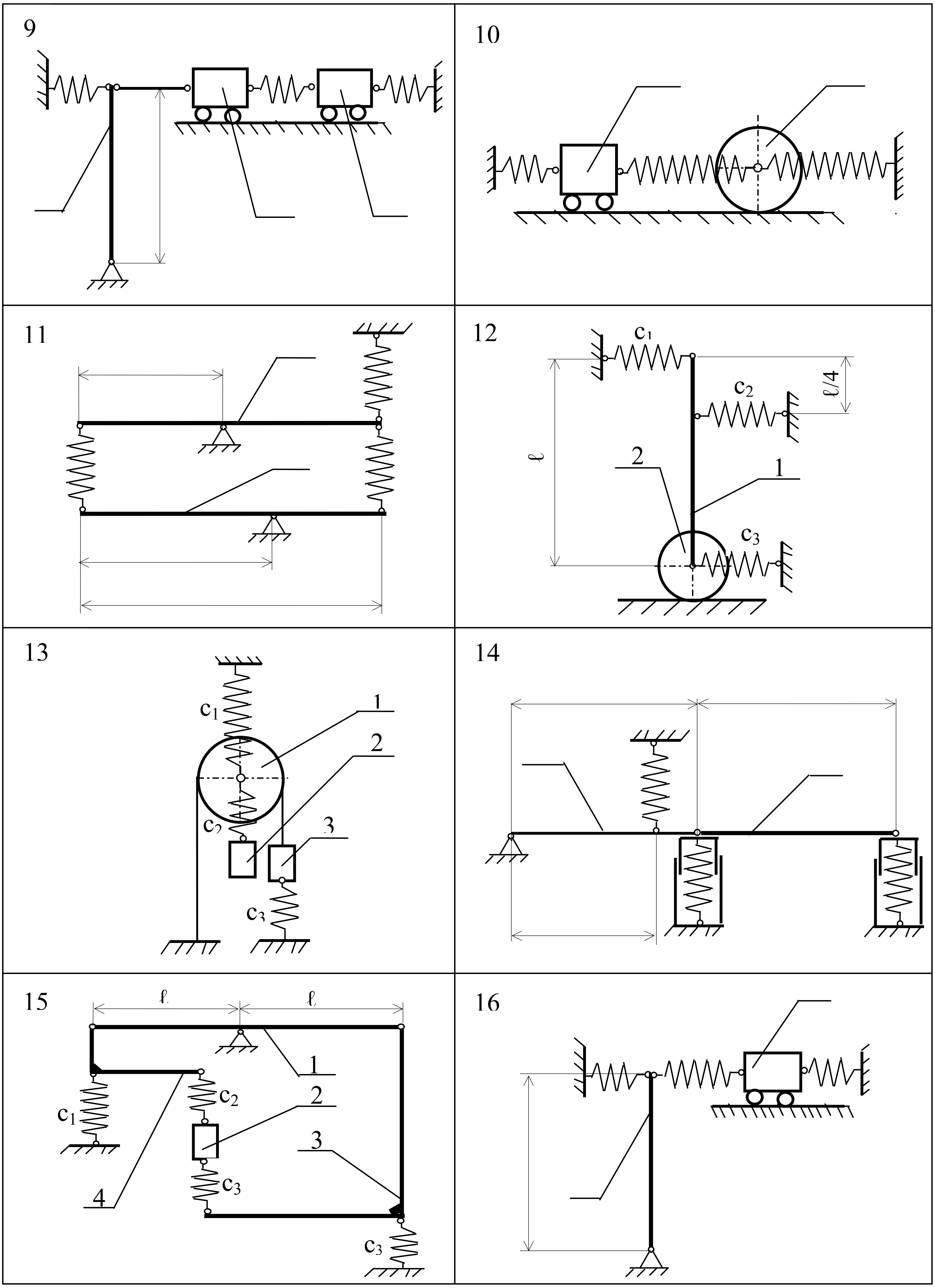

Рисунок 2 – Схемы механических систем

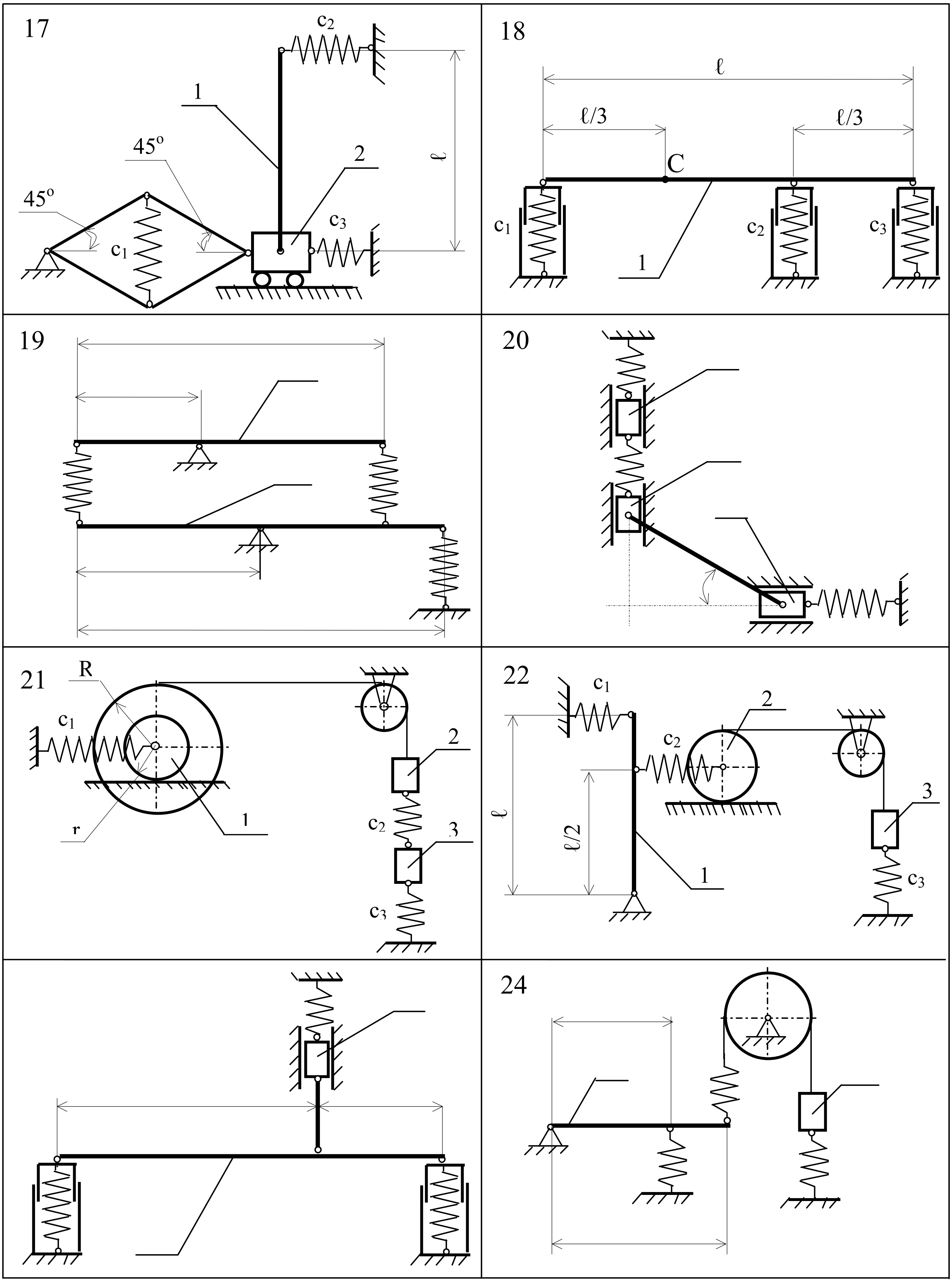

Рисунок 3 – Схемы механических систем

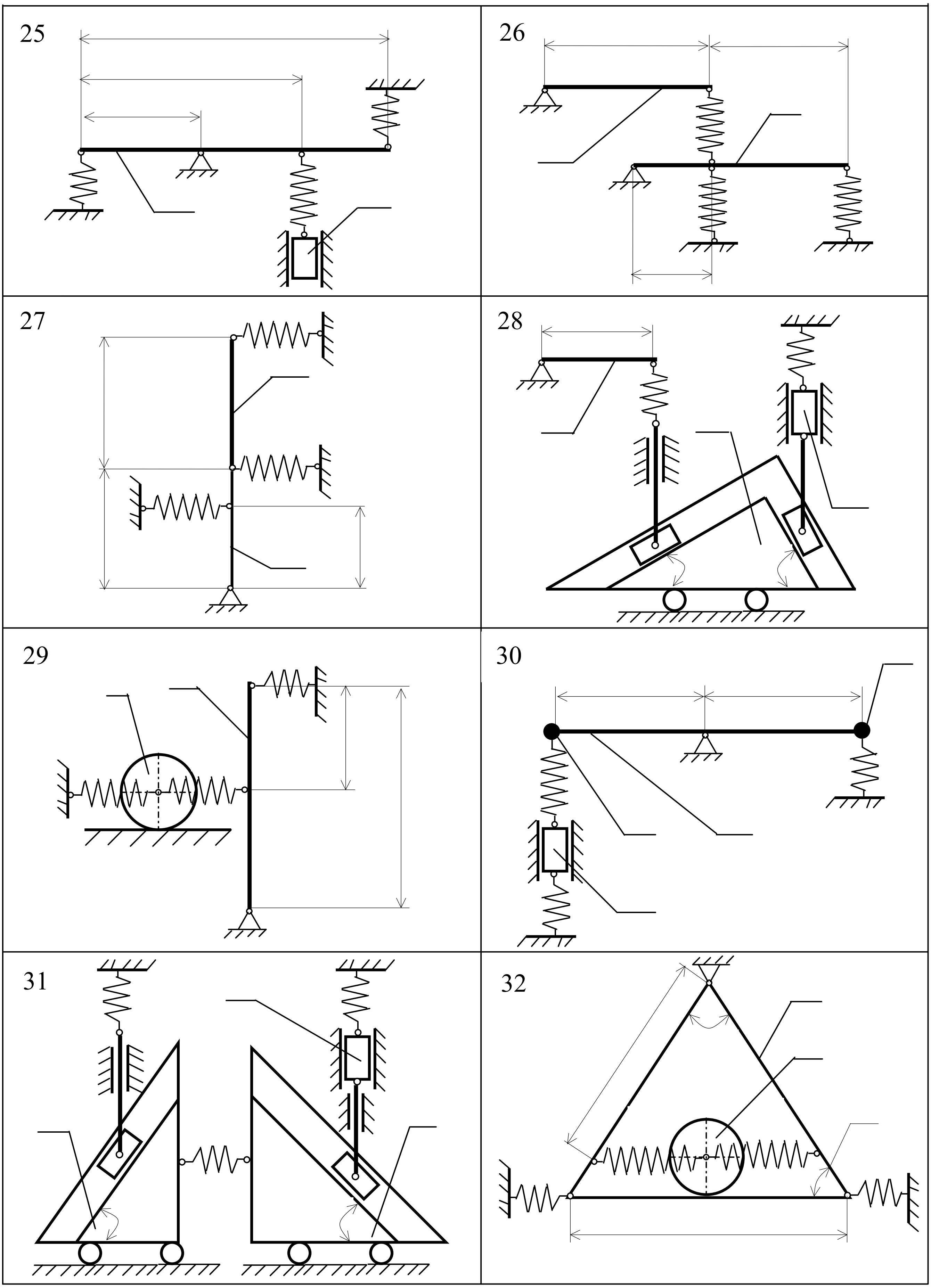

Рисунок 4 – Схемы механических систем

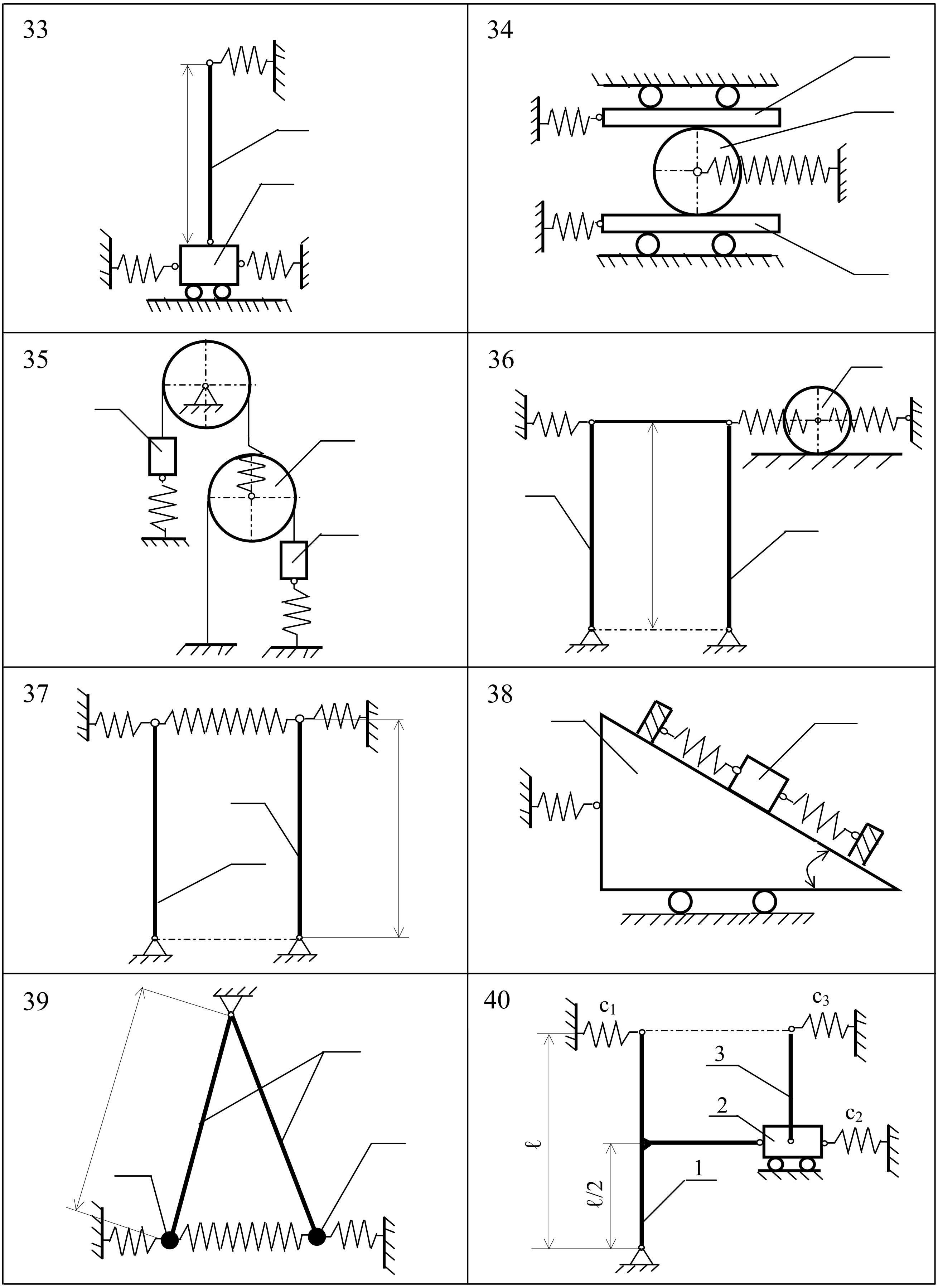

Рисунок 5 – Схемы механических систем

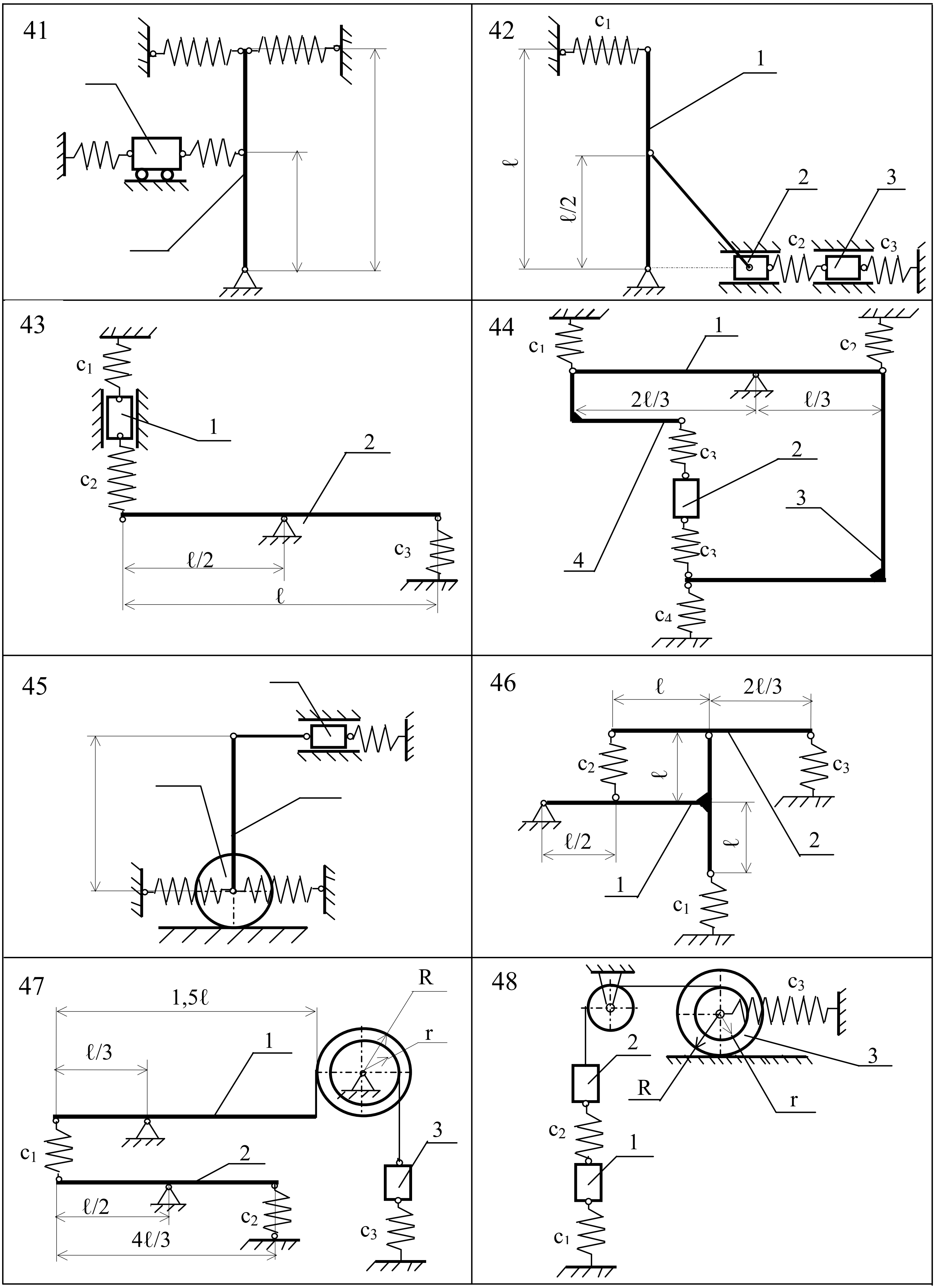

Рисунок 6 – Схемы механических систем

4 Пример выполнения задания

Дано: масса однородного стержня m_1 = 8 кг, масса груза m_2 = 10 кг; ℓ= 0,6 м; коэффициенты жесткости пружин: c_1 =10 Н/см, c_2 =50 Н/см.

Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Решение.

Система состоит из однородного стержня АВ (тело 1) опирающего на неподвижную опору в точке D и скрепленного пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 в точках А и В соответственно и тела 2. Данная механическая система имеет две степени свободы.

В состоянии покоя стержень занимает горизонтальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 деформированы соответственно на величины $\lambda_{ст1}$, $\lambda_{ст2}$.

За обобщенные координаты примем: φ – угол поворота стержня АВ от положения покоя, z – вертикальное перемещение груза 2 от положения покоя. Положение системы показано на рисунке 7.

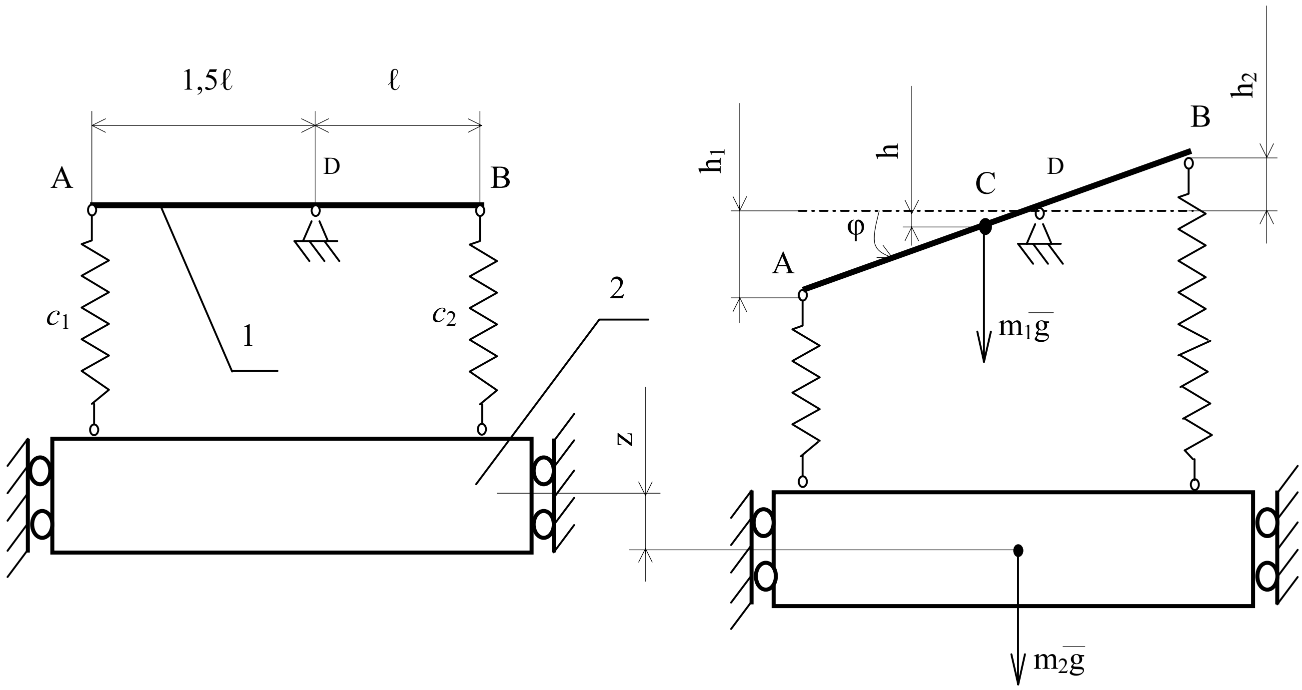

Рисунок 7 – Схема механической системы

Вычислим кинетическую энергию этой системы как сумму кинетических энергий стержня 1 и груза 2.

$$T = T_1 + T_2;$$

$$T = \frac{J_D \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} = \frac{1}{2}\left(J_D \dot{\varphi}^2 + m_2 \dot{z}^2\right),$$

где $\dot{\varphi}$, $\dot{z}$ – обобщенные скорости,

J_D – момент инерции стержня 1 относительно оси вращения, проходящей через точку D.

Момент инерции

$$J_D = J_C + m_1 \cdot d^2;$$

где J_C – момент инерции стержня 1 относительно оси, проходящей через центр масс стержня, точку C,

d = CD – расстояние от центра масс C стержня до оси вращения D.

$$d = 1{,}5\ell - (1{,}5\ell + \ell)/2 = 0{,}25\ell = 0{,}15 \text{ м}.$$

Тогда

$$J_D = \frac{m_1 \cdot (1{,}5\ell + \ell)^2}{12} + m_1 \cdot d^2 = \frac{8 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}6)^2}{12} + 8 \cdot 0{,}15^2 = 1{,}68 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Кинетическая энергия системы будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{z}^2 + 2a_{12}\dot{z}\dot{\varphi} + a_{22}\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{z}^2 + a_{22}\dot{\varphi}^2),$$

где коэффициенты инерции:

$a_{11} = m_2 = 10$ кг,

$a_{12} = 0$,

$a_{22} = J_D = 1{,}68$ кг·м^2.

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий сил тяжести $П_1$ и $П_2$, а также потенциальных энергий деформированных пружин $П_{c1}$ и $П_{c2}$, т.е.:

$$П = П_1 + П_2 + П_{c1} + П_{c2}.$$

$$П_1 = - m_1gh,$$

где $h = CD\cdot\sin\varphi,$

учитывая, что для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$, получаем:

$$П_1 = - m_1g\cdot 0{,}25\ell\varphi.$$

$$П_2 = - m_2gz.$$

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения – в положение покоя.

Из рисунка 7 видно, что деформация пружины c_1 от положения равновесия равна $z - h_1$ или $z - 1{,}5\ell\varphi$, а с учетом статической деформации:

$$\varepsilon_1 = z - 1{,}5\ell\varphi \pm \lambda_{ст1}.$$

Деформация пружины c_2:

$$\varepsilon_2 = z + \ell\varphi \pm \lambda_{ст2}.$$

Потенциальные энергии пружин:

$$П_{c1} = \frac{1}{2}c_1(z - 1{,}5\ell\varphi \pm \lambda_{ст1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{ст1},$$

$$П_{c2} = \frac{1}{2}c_2(z + \ell\varphi \pm \lambda_{ст2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{ст2},$$

$$П = -m_1g0{,}25\ell\varphi - m_2gz + \frac{1}{2}c_1(z - 1{,}5\ell\varphi \pm \lambda_{ст1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{ст1} +$$
$$+\frac{1}{2}c_2(z + \ell\varphi \pm \lambda_{ст2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{ст2}.$$

Раскроем скобки в выражении для потенциальной энергии:

$$П = -m_1g0{,}25\ell\varphi - m_2gz + \frac{1}{2}(c_1z^2 + 2{,}25c_1\ell^2\varphi^2 + c_1\lambda_{ст1}^2 - 1{,}5c_1z\ell\varphi \pm c_1z\lambda_{ст1} \pm$$

$$\pm 1{,}5c_1\ell\varphi\lambda_{ст1} - c_1\lambda_{ст1}^2 + c_2z^2 + c_2\ell^2\varphi^2 + c_2\lambda_{ст2}^2 + c_2z\ell\varphi \pm c_2z\lambda_{ст2} \pm c_2\ell\varphi\lambda_{ст2} - c_2\lambda_{ст2}^2.$$

По теореме Лагранжа-Дирихле в положении равновесия при $z = 0$ и $\varphi = 0$ должны выполняться равенства:

$$\left.\frac{\partial П}{\partial \varphi}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = 0; \qquad \left.\frac{\partial П}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = 0.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = \left(-m_2 g + c_1 z - 1{,}5 c_1 \ell \varphi \pm c_1 \lambda_{cm1} + c_2 z + c_2 \ell \varphi \pm c_2 \lambda_{cm2}\right)\Big|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = -m_2 g \pm c_1 \lambda_{cm1} \pm c_2 \lambda_{cm2},$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = \left(-m_1 g \cdot 0{,}25\ell + 2{,}25 c_1 \ell^2 \varphi - 1{,}5 c_1 z \ell \pm 1{,}5 c_1 \ell \lambda_{cm1} + c_2 \ell^2 \varphi + c_2 z \ell \pm c_2 \ell \lambda_{cm2}\right)\Big|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} =$$

$$= -m_1 g \cdot 0{,}25\ell \pm 1{,}5 c_1 \ell \lambda_{cm1} \pm c_2 \ell \lambda_{cm2}.$$

Следовательно, параметры системы удовлетворяют условиям

$$-m_1 g \cdot 0{,}25\ell \pm 1{,}5 c_1 \ell \lambda_{cm1} \pm c_2 \ell \lambda_{cm2} = 0; \qquad -m_2 g \pm c_1 \lambda_{cm1} \pm c_2 \lambda_{cm2} = 0.$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1 z^2 + 2{,}25 c_1 \ell^2 \varphi^2 - 1{,}5 c_1 z \ell \varphi + c_2 z^2 + c_2 \ell^2 \varphi^2 + c_2 z \ell \varphi),$$

Учитывая это, выражение для потенциальной энергии примет вид:
или

Окончательно получаем

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[(c_1 + c_2) z^2 + (-1{,}5 c_1 \ell + c_2 \ell) z \varphi + (2{,}25 c_1 \ell^2 + c_2 \ell^2) \varphi^2\right]$$

где коэффициенты жесткости:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11} z^2 + c_{12} z \varphi + c_{22} \varphi^2),$$

$c_{11} = c_1 + c_2 =$ 1000 + 5000 = 6000 Н/м,
$c_{12} =$ -1,5$c_1\ell$+ $c_2\ell$ = -1,5·1000·0,6 + 5000·0,6 = 2100 Н,
$c_{22} =$ 2,25$c_1\ell^2$+ $c_2\ell^2$ =2,25·1000·0,6^2 + 5000·0,6^2 = 3810 Н·м.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},$$

где

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = a_{11}\dot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22}\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = a_{11}\ddot{z}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22}\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = c_{11} z + c_{12}\varphi; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_{12} z + c_{22}\varphi.$$

Тогда дифференциальные уравнения малых колебаний системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \\ a_{22}\ddot{z} + c_{12}z + c_{22}\varphi = 0. \end{cases}$$

Частное решение этих уравнений имеет вид:

$$\varphi = A_\varphi \sin(kt + \alpha);$$

$$z = A_z \sin(kt + \alpha),$$

где A_z и A_φ - амплитуды главных колебаний;

k – частоты свободных колебаний;

α – начальная фаза колебаний.

Вычислим вторые производные:

$$\ddot{z} = -k^2 A_z \sin(kt + \alpha); \qquad \ddot{\varphi} = -k^2 A_\varphi \sin(kt + \alpha).$$

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения и приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin(kt + \alpha)$, получим систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_z, A_φ:

$$\begin{cases} A_z(c_{11} - a_{11}k^2) + A_\varphi c_{12} = 0; \\ A_z c_{12} + A_\varphi(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases}$$

Так как при колебаниях амплитуды не равны нулю одновременно, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение частот после раскрытия определителя и группировки членов примет вид:

$$a_{11}a_{12}k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})k^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Подставив значения коэффициентов и решив полученное биквадратное уравнение, получим значения частот свободных колебаний:

$$k_1 = 21{,}33 \text{ с}^{-1}; \quad k_2 = 49{,}11 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты формы, соответствующие частотам k_1 и k_2 в общем случае имеют вид:

$$\beta_1 = \frac{A_{\varphi 1}}{A_{z1}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2};$$

$$\beta_2 = \frac{A_{\varphi 2}}{A_{z2}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

В данном случае $\beta_1 = 0{,}69$; $\beta_2 = -8{,}62$.

Уравнения, определяющие первое главное колебание:

$$z_1 = A_{z1}\sin(21{,}33t + \alpha_1); \qquad \varphi_1 = 0{,}69A_{z1}\sin(21{,}33t + \alpha_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание:

$$z_2 = A_{z2}\sin(49{,}11t + \alpha_2); \qquad \varphi_2 = -8{,}62A_{z2}\sin(49{,}11t + \alpha_2).$$

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решение:

$$z = z_1 + z_2 = A_{z1}\sin(21{,}33t + \alpha_1) + A_{z2}\sin(49{,}11t + \alpha_2);$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0{,}69A_{z1}\sin(21{,}33t + \alpha_1) - 8{,}62A_{z2}\sin(49{,}11t + \alpha_2).$$

Значения A_{z1}, A_{z2} и α_1, α_2 определяются из начальных условий.

5 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

5.1 Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов: В 3-х томах. – Т.2. Динамика. - М.: Наука, 1991. - 640с.

5.2 Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – Т.2. Динамика. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

5.3 Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. –М.: Высшая школа, 1974. –527 с.

5.4 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие / Под ред. Бутенина Н.В. , Лурье А.И. , Меркина Д.Р. –М.: Наука, 1986. - 448 с.

5.5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов /Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского. - М.: Высшая школа, 1985. - 367 с.

5.6 Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. школа, 1990. – 255с.