

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
“Оренбургский государственный университет”

Е.В. БУРЬКОВА

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Рекомендовано к изданию Ученым советом  
государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
“Оренбургский государственный университет”  
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по  
специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Оренбург 2005

УДК 338.24.01  
ББК 65.050  
Б 91

Рецензент  
доктор технических наук, профессор В.И. Чепасов

Б 91 **Бурькова Е.В.**  
**Основы теории управления [Текст]: учебное пособие/ Е.В. Бурькова. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. - 120с.**

ISBN

В курсе лекций изложены основы теории автоматического регулирования. Учебное пособие предназначено для студентов специальности 220100 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Б 0605010201

ББК 65.050

ISBN

© Бурькова Е.В., 2005  
© ГОУ ОГУ, 2005

## Введение

Теория автоматического управления и теория автоматического регулирования входят в науку под общим названием «Техническая кибернетика», которая в настоящее время получила значительное развитие. Техническая кибернетика изучает общие закономерности сложных динамических систем управления.

Проектирование систем автоматического управления и регулирования можно вести двумя путями: методом анализа, когда при заранее выбранной структуре системы определяют ее параметры; и методом синтеза, когда по требованиям к системе выбирают наилучшую ее структуру и параметры. В теории автоматического регулирования основными являются проблемы: устойчивости, качества переходных процессов, статической и динамической точности, автоколебаний, оптимизации, синтеза и отождествления.

Формирование систем автоматического регулирования, как правило, выполняют на основе аналитических методов анализа и синтеза. Любая система – это сложный динамический объект, в котором принятие технологических решений при функционировании осуществляется в условиях априорной неопределенности. Это связано со стохастической неопределенностью выходных параметров и недостаточной информацией о возмущающих факторах, влияющих на стабильность и точность работы системы. Указанную неопределенность можно уменьшить разработкой математических моделей, представляющих собой зависимости между входными и выходными параметрами системы. На этапе проектирования систем регулирования на основе принятых допущений составляют математическую модель системы и выбирают предварительную ее структуру. В зависимости от типа моделей выбирают метод расчета для определения параметров, обеспечивающих заданные показатели устойчивости, точности и качества. После этого уточняют математическую модель и с использованием средств математического моделирования исследуют динамические процессы в системе.

Как правило, вследствие неточности построения математических моделей, результаты испытаний реальной системы не соответствуют желаемым. Поэтому инженер-проектировщик должен повторить процедуру синтеза, используя все доступные средства. Многие системы управления создаются путем использования серийных промышленных регуляторов и экспериментальной настройки их параметров в процессе их пошагового тестирования совместно с физическим объектом. Для анализа и синтеза линейных непрерывных дискретных систем, а также нелинейных непрерывных систем используются методы компьютерного моделирования с помощью программы SIMULINK™, входящей в состав интегрированной среды MATLAB™. Известны и другие программные пакеты для моделирования систем автоматического регулирования. Выбор программных средств осуществляется исходя из проектных требований к системе.

# 1 Предмет, задачи и цель дисциплины «Теория систем автоматического регулирования»

## 1.1 Основные понятия и определения

Любой технологический процесс осуществляется операциями двух видов: рабочими и операциями управления. Соответственно замена человека в рабочих операциях называется механизацией, а замена человека в операциях управления называется автоматизацией.

Более широко под автоматизацией понимают процесс создания системы. Система – это совокупность элементов или устройств, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих определенную целостность, единство.

Основной характеристикой всякой системы является ее структура, под которой понимают совокупность элементов и связей между ними, определяемую исходя из распределения функций и целей, поставленных перед системой. Под внешней средой понимают множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему и находящихся под ее влиянием.

Свойства системы – качества, позволяющие описывать систему, это совокупность параметров количественных или качественных.

Основными этапами процесса создания системы являются:

- анализ целесообразности автоматизации;
- разработка технологического процесса как основы дальнейшего проектирования;
- выбор, расчет и проектирование системы управления;
- уточнение технико-экономических показателей системы: производительности, надежности, экономической эффективности;
- изготовление, внедрение и эксплуатация разработанной системы автоматизации.

В основе автоматизации лежит процесс управления. Управление это целеобусловленное, целеподчиненное субъектно-объектное взаимодействие. Главным в процессе управления является цель. Цель управления ставится человеком или группой людей – субъектом управления. Для достижения поставленной цели субъект ищет средства. К средствам относится последовательность операций в процессе управления. Используя разные средства, получают результат. Такое взаимодействие показано на рисунке 1.1.

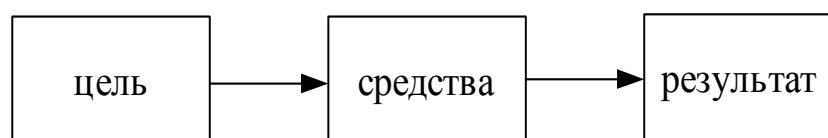


Рисунок 1.1 – Схема достижения цели

В соответствии с поставленной целью субъект управления выделяет из окружающей природы главное из средств достижения цели - объект управления.

Природа объекта управления в сильной степени влияет на характер процесса управления.

Объектом изучения в теории автоматического управления являются автоматические системы. Автоматические системы – это совокупность управляемого объекта и автоматически управляемых устройств, взаимодействующих между собой.

Принцип действия всякой системы автоматического регулирования заключается в том, чтобы обнаруживать отклонения регулируемых величин, характеризующих работу объекта или протекание процесса от требуемого режима и при этом воздействовать на объект или процесс так, чтобы устранять эти отклонения.

В теории автоматического регулирования основными являются проблемы: устойчивости, качества переходных процессов, статической и динамической точности, автоколебаний, оптимизации, синтеза и отождествления (идентификации).

Задачи общей теории автоматического регулирования заключаются в решении перечисленных проблем. При поиске решений используются:

- методы анализа устойчивости замкнутых систем автоматического регулирования;
- методы оценки качественных показателей систем автоматического регулирования;
- методы повышения точности систем автоматического регулирования;
- методы коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования.

Под управляемым объектом понимают любую машину, аппарат, или их составные части. Такая система реализует автоматически, (без участия человека) в замкнутом контуре, все выработанные человеком алгоритмы управления. Роль человека при этом сводится к запуску системы, эпизодическому контролю за её правильной работой, наладке, профилактическому осмотру, остановке системы.

Для осуществления автоматического управления необходимо:

- собрать информацию о текущем технологическом процессе с помощью датчиков,
- преобразовать информацию согласно алгоритму для управляющего воздействия,
- с помощью управляющего воздействия изменить технологический процесс для достижения поставленной цели,
- проверить выполнение поставленной задачи и при необходимости скорректировать.

Управляющее воздействие систем автоматического управления определяется характером поступающей информации. Это характеристики и параметры объекта. Различают два вида информации – начальную и рабочую.

Начальной (априорной) информацией называется совокупность сведений об управляемом процессе и системе управления, имеющих в нашем распоряжении до начала функционирования системы. Рабочей называется информация, получаемая в процессе функционирования системы.

Управление сложным объектом осуществляется на основе алгоритма управления. Алгоритмом называется предписание, определяющее содержание и последовательность операций, переводящих исходные данные в искомый результат.

Одним из основных признаков, характеризующих алгоритмы управления, является конфигурация цепей воздействия. Согласно этому признаку автоматические системы можно разделить на системы с незамкнутой цепью управления (с прямым управлением), системы с замкнутой цепью управления и комбинированные, основанные на сочетании незамкнутых и замкнутых систем управления.

Обратная связь – существенный признак замкнутых автоматических систем (в разомкнутых системах обратная связь отсутствует). За счёт обратной связи повышается точность системы при длительной эксплуатации в условиях непрерывных возмущений, осуществляется самоконтроль и самоустранение возникающих ошибок.

В замкнутых системах в качестве входных воздействий для управляющих устройств являются внешние возмущения.

В разомкнутой системе автоматического управления для реализации алгоритма работы используется только априорная (начальная) информация об объекте. Работа разомкнутых систем автоматического управления не зависит от конечного результата их действий, в них отсутствует самоконтроль. Поэтому, при малейшем нарушении параметров системы, она не в состоянии, без вмешательства человека, обеспечить заданную выходную характеристику. В то же время обратная связь в замкнутых автоматических системах может явиться источником неустойчивой работы системы, что вынуждает использовать стабилизирующие средства.

Функциональная схема состоит из функциональных элементов и показывает целенаправленную взаимосвязь между этими элементами, воздействиями и координатами системы. Функциональный элемент представляет собой конструктивно обособленную часть систем автоматического регулирования, выполняющую определённые функции. На вход системы подаётся задающее воздействие  $X$ , которое преобразуется управляющим устройством (УУ) в управляющее воздействие  $u$ . Под действием управления изменяется состояние объекта управления (ОУ), характеризуемое координатой  $y$  (выходной величиной). Примеры функциональных схем приведены на рисунке 1.2.

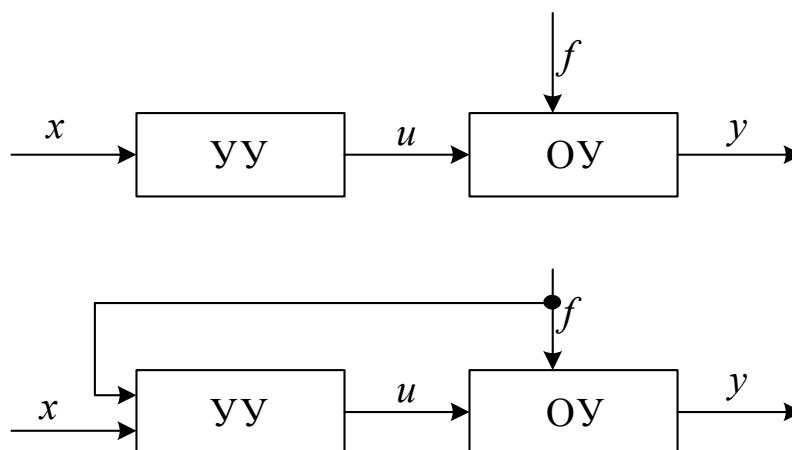


Рисунок 1.2 – Функциональные схемы разомкнутых систем

Наличие возмущающих воздействий  $f$  приводит к тому, что действительное значение управляемой координаты  $y$  отличается от желаемого, т.е. появляется ошибка, которая может быть велика. Для её уменьшения применяются разомкнутые системы с регулированием по возмущению.

## 1.2 Основные элементы систем автоматического управления и регулирования

Система автоматического регулирования состоит из объекта регулирования, датчика и автоматического регулятора. В автоматический регулятор входят различные усилители, а также измерительные и исполнительные элементы и регулирующие устройства. На рисунке 1.3 показана типовая схема системы автоматического регулирования, состоящая из задающего устройства 1, на вход которого поступает управляющее воздействие  $x(t)$ ; сравнивающих устройств I и II; усилительных элементов 2, 4, 5; исполнительного элемента 6; корректирующих устройств последовательного действия 3 и параллельного действия 8; объекта регулирования 7 и измерительного элемента 9. Устройства 1, 2, 9 образуют датчик, устройства 3–6 и 8 – регулятор.

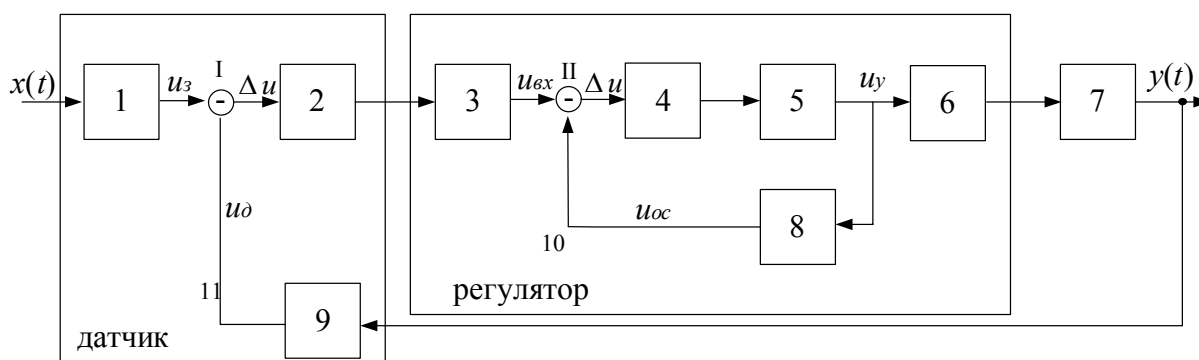


Рисунок 1.3 – Структурная схема систем автоматического регулирования

В целом ряде систем автоматического регулирования усилители осуществляют не только усиление сигнала, но и его преобразование (например, непрерывного сигнала в дискретный). Устройства, выполняющие такие действия, называют преобразующими устройствами. К преобразующим устройствам относятся цифровые датчики для замера углов поворота или перемещения, реле, цифровые вычислительные устройства, а также аналоговые вычислительные устройства.

Все устройства системы соединяются друг с другом с помощью линий связи. Элемент 8 с линией 10 образует внутреннюю обратную связь, за счет действия которой на входе элемента 4 образуется разность напряжений:

$$\Delta u = u_{ex} \pm u_{oc},$$

где  $u_{oc}$  – напряжение внутренней обратной связи.

Как правило, внутренняя обратная связь осуществляет не только передачу самого сигнала  $u_y$ , но и учитывает его изменение во времени, поэтому ее называют гибкой обратной связью. Линия 11 представляет собой главную обратную связь системы. За счет действия главной обратной связи в системе образуется сигнал ошибки, характеризующей точность работы всей системы регулирования

$$\Delta u = u_z - u_{\partial},$$

где  $u_z$  – напряжение задающего устройства;

$u_{\partial}$  – напряжение на выходе датчика.

### 1.3 Принципы управления

1. Принцип разомкнутого управления. Разомкнутое – это такое управление, при котором результат не контролируется. Целевой (желаемый) сигнал подается непосредственно на исполнительное устройство, то есть средство, преобразующее слабый сигнал управления в управляющее воздействие необходимой физической природы и мощности (рисунок 1.4)

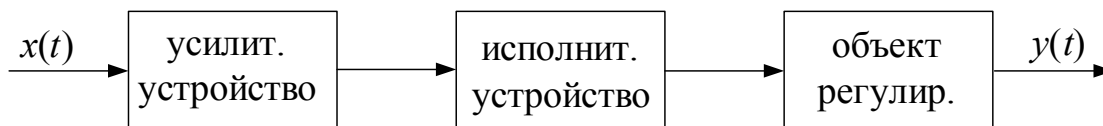


Рисунок 1.4 – Схема разомкнутого управления

Достоинством принципа является простота схемы, такие системы недороги и надежны в работе. Но этот принцип применим только при полной информации о возможных возмущениях и о поведении объекта управления.

2. Принцип управления по отклонению (принцип Ползунова-Уатта). Это управление, при котором в системе имеется главная обратная связь (то есть



связь между управляемой величиной и управляющим воздействием). Этот принцип называется принципом Ползунова-Уатта. Структурно-функциональная схема приведена на рисунке 1.5.

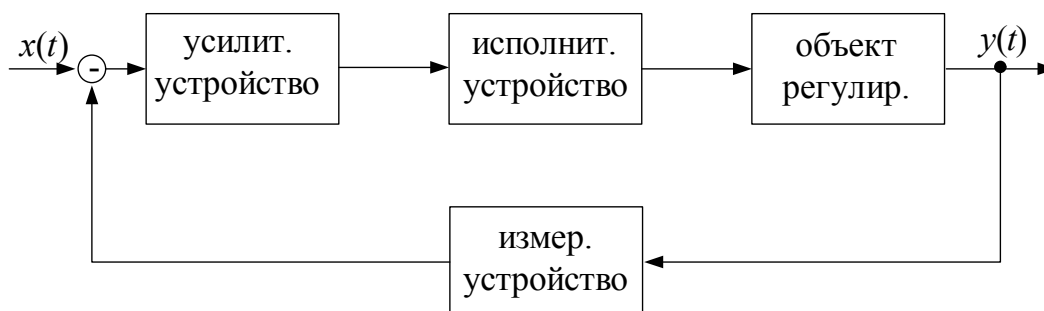


Рисунок 1.5 – Схема управления по отклонению

Достоинством принципа является его повышенная, по сравнению с первым принципом, точность достижения целевой функции. Недостаток – усложнение схемы, что может привести к ее неустойчивости.

3. Принцип управления по возмущению (принцип Понселе). Это управление, при котором управляющее воздействие формируется с учетом информации о возмущении. Схема приведена на рисунке 1.6.

Достоинством систем, использующих этот принцип, является опережающая подготовка объекта управления к возмущению.

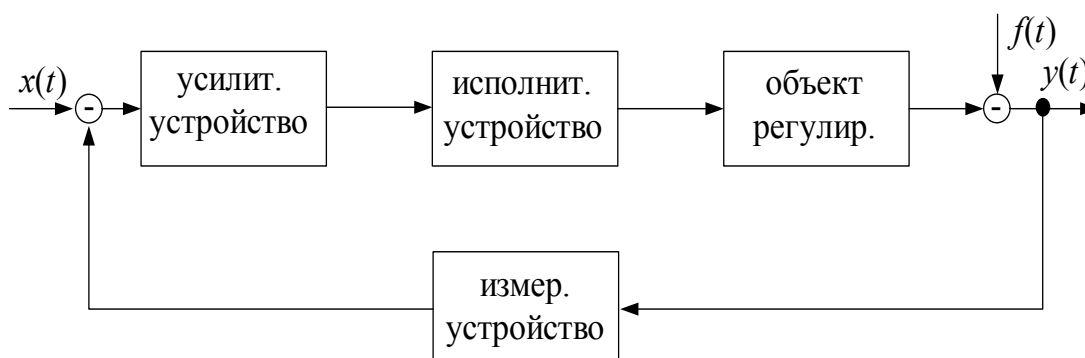


Рисунок 1.6 – Функциональная схема управления по возмущению

4. Принцип комбинированного управления. Это одновременное управление и по отклонению и по возмущению. Схемы, приведены на рисунках 1.7, 1.8.

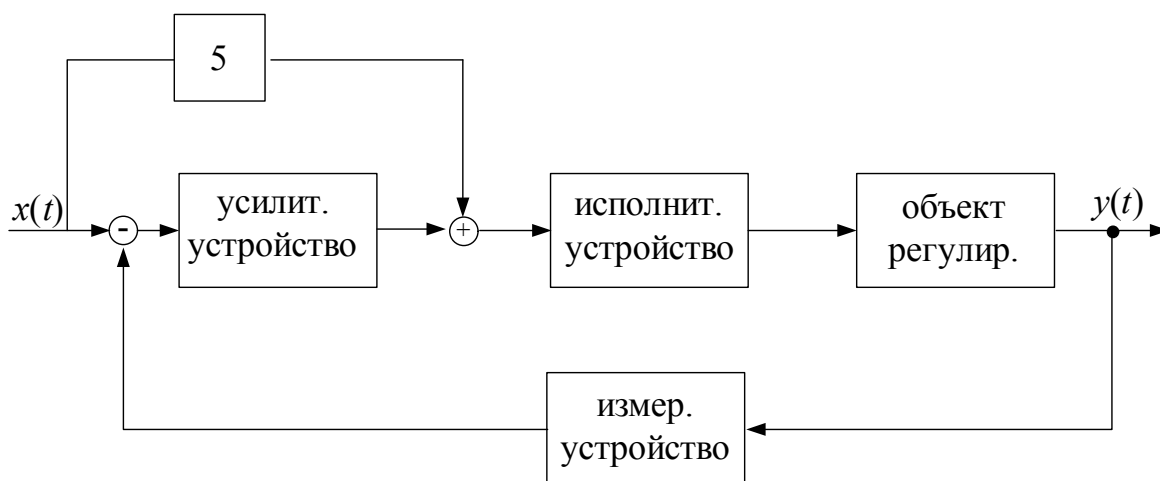


Рисунок 1.7 – Схема комбинированного цикла с компенсацией ошибки по управлению

5 – элемент, компенсирующий ошибку от действия, управляющего сигнала;

6 – элемент, компенсирующий ошибку от возмущающего воздействия.

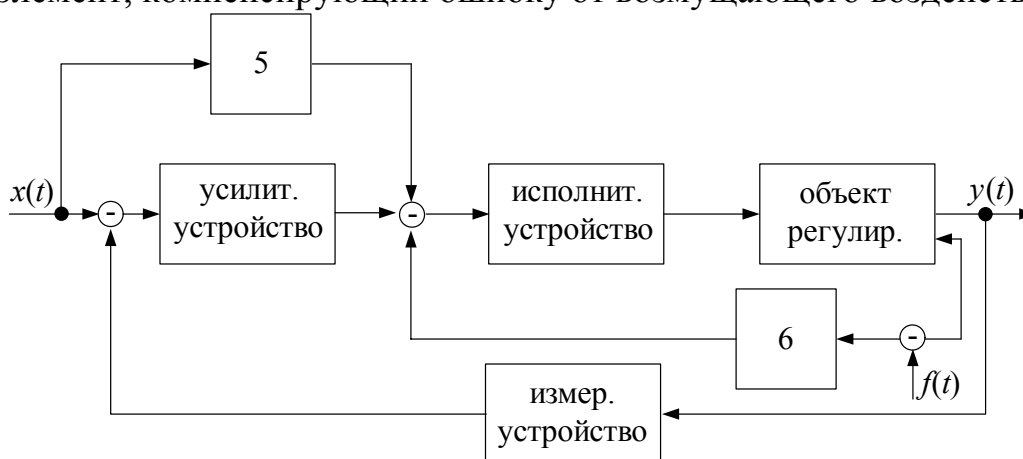


Рисунок 1.8 – Схема комбинированного цикла с компенсацией ошибок по управлению и возмущению

Этот принцип управления позволяет достигать самых лучших показателей качества по сравнению со всеми другими. Но он является самым сложным.

Управляющее устройство (УУ) совместно с регулирующими обратными связями образует регулятор. Совокупность объекта управления и регулятора представляет собой систему автоматического регулирования.

Система автоматического регулирования в процессе работы может находиться в разных состояниях. Возможны два качественно отличных друг от друга состояния системы: установившееся и неустойчивое.

В установившемся режиме регулируемая величина сохраняет постоянное значение, совершает незатухающие колебания или движения с постоянной скоростью.

Неустойчивый режим является следствием изменения внешнего воздействия. Регулируемая величина при этом изменяется во времени.

Изменение состояния системы под действием любого возмущения называется переходным процессом.

Обратные связи способствуют формированию статических и динамических характеристик системы. Системы, имеющие одну обратную связь, называются одноконтурными. Системы, имеющие кроме главной обратной связи дополнительные, называются многоконтурными.

Жёсткие обратные связи действуют как в установившемся, так и в переходном режимах системы. Они передают на узлы суммирования воздействия, зависящие от контролируемых величин. Средствами жёстких обратных связей являются датчики, передающие сигналы на узел сравнения.

Гибкие обратные связи действуют только в период переходного процесса. В установившемся режиме их действие прекращается. Они передают воздействия, являющиеся производными или интегралами величин, меняющихся во времени.

По оказываемому воздействию обратные связи могут быть положительными или отрицательными. Обратная связь называется положительной, если при увеличении сигнала на выходе управляющий на входе увеличивается. Обратная связь отрицательная, если сигнал на входе уменьшается.

## **2 Классификация систем автоматического регулирования. Виды воздействий**

### **2.1 Классификация систем автоматического управления**

Классификация систем автоматического управления представлена на рисунке 2.1

Классификация по характеру изменения величин:

- системы непрерывного действия;
- системы импульсного действия (АМ, ФМ, ЧМ, ШИМ, ЧИМ, ...);
- системы дискретного действия (01001011110101100010101);
- системы релейного действия.

Классификация по математическим признакам:

- линейные системы;
- нелинейные системы;
- существенно нелинейные.

Классификация по способу настройки:

- 1) не адаптивные системы;
- 2) адаптивные системы:
  - ) системы с переменной структурой;
  - ) системы с самонастройкой программ;
  - ) системы с самонастройкой параметров;
  - ) системы с самонастройкой структуры.



Рисунок 2.1 – Классификация систем автоматического регулирования

Классификация по типу ошибки в статике:

- статические системы автоматического регулирования;
- астатические системы автоматического регулирования.

Классификация по алгоритмам функционирования (по назначению):

- системы стабилизации;
- системы слежения.

Системы автоматического управления и регулирования можно классифицировать по различным признакам: принципу действия, характеру сигналов, математическому описанию, виду используемой энергии и т.д.

Все многообразие систем автоматического регулирования можно подразделить на четыре класса: системы, работающие по разомкнутому, замкнутому, комбинированному циклу, и самонастраивающиеся системы.

Для нормального функционирования самонастраивающихся систем не требуется полных знаний о характере процесса регулирования, так как в процессе работы эти системы приспосабливаются к изменяющимся внешним условиям.

Системы автоматического регулирования, работающие по замкнутому циклу, делятся на системы автоматической стабилизации, системы программного регулирования и следящие системы.

В системах автоматической стабилизации управляющие воздействия являются постоянными, заранее заданными величинами. Системы программного регулирования отличаются тем, что в них управляющие воздействия являются известными заданными функциями времени. В следящих системах управляющие воздействия представляют собой функции времени, заранее неизвестные.

Системы автоматического регулирования, работающие по разомкнутому циклу, делятся на системы компенсации и разомкнутые системы программного регулирования. Системы компенсации уменьшают влияние возмущающих воздействий на регулируемые переменные путем изменения самих воздействий.

По характеру сигналов системы можно разделить на непрерывные, дискретные, дискретно-непрерывные и релейные. В непрерывных системах все сигналы в устройствах и объектах регулирования представляют собой непрерывные функции времени. В дискретных системах все сигналы квантуются по времени, а в дискретно-непрерывных – как по времени, так и по уровню. Элементы, осуществляющие квантование сигнала по уровню, называются релейными, а системы с подобными элементами – релейными.

По математическому описанию все системы делятся на линейные и нелинейные (по виду дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы в динамике).

По виду используемой энергии все системы можно разделить на электрические, гидравлические, пневматические, электрогидравлические, и т.д.

В зависимости от числа регулируемых величин системы могут быть одномерными, двухмерными и многомерными.

## 2.2 Статические и астатические системы автоматического регулирования

Системы автоматического регулирования при действии управляющих и возмущающих воздействий принято подразделять на статические и астатические в зависимости от наличия в них ошибок в установившемся состоянии.

Пусть дана система автоматического регулирования, которая изображена на рисунке 2.2.

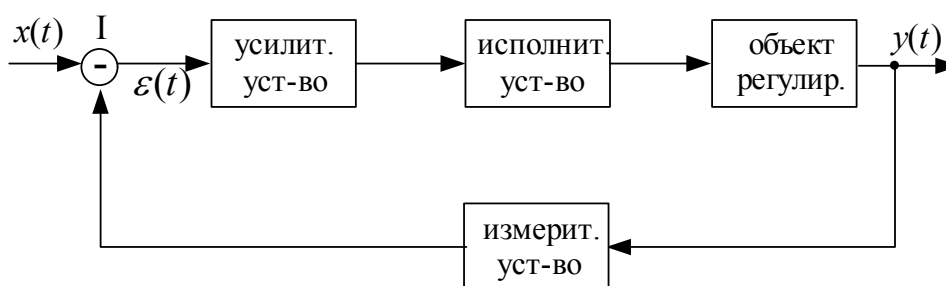


Рисунок 2.2 – Схема системы автоматического регулирования

Нетрудно найти зависимость динамической ошибки от времени для системы в установившемся состоянии. Динамическая ошибка системы определяется с помощью следующего выражения

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$$

При установившихся значениях  $x_{уст}$  и  $y_{уст}$  находим установившуюся ошибку системы:

$$\varepsilon_{уст} = x_{уст} - y_{уст}$$

В зависимости от значения  $\varepsilon_{уст}$  и определяется тип системы автоматического регулирования.

Система автоматического регулирования называется статической по отношению к управляющему воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся значению, ошибка также стремится к постоянному значению, зависящему от величины управляющего воздействия. На рисунке 2.3, а показано изменение характеристик  $y(t)$  и  $x(t)$  для статических систем автоматического регулирования. Из этого рисунка видно, что в установившемся состоянии у статической системы имеется ошибка  $\varepsilon_{уст}$ .

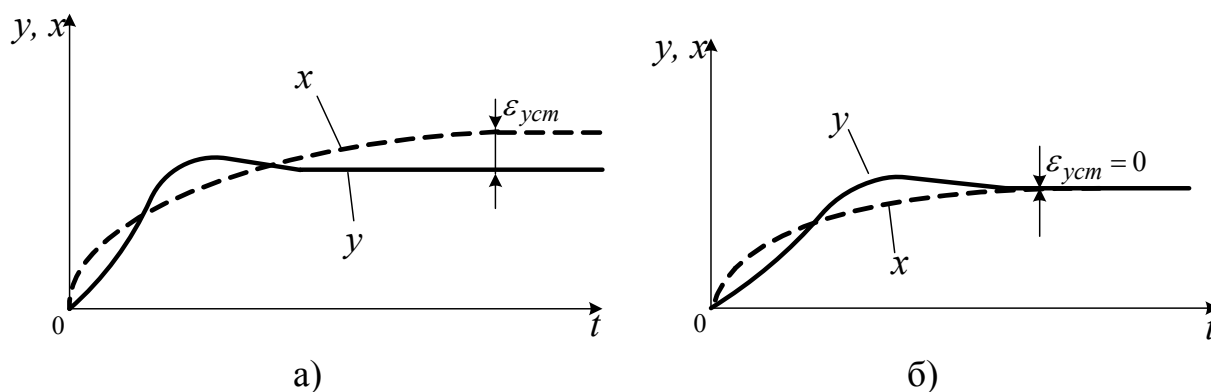


Рисунок 2.3 – Изменение характеристик  $y(t)$  и  $x(t)$  в системах автоматизированного регулирования

Система автоматического регулирования называется астатической по отношению к управляющему воздействию, если при воздействии, стремящемся к установившемуся значению, ошибка стремится к нулю независимо от величины воздействия. На рисунке 2.3, б показано изменение характеристик  $y(t)$  и  $x(t)$  для астатической системы автоматического регулирования. Как видно из рисунка 2.3, б для астатической системы  $\varepsilon_{уст} = 0$ .

На основании этого можно сделать вывод о том, что астатические системы лучше статических, и они нашли более широкое применение.

Рассмотрим, как реагируют статические и астатические системы на возмущающие воздействия. На рисунке 2.4, а показано изменение характеристик  $y(t)$  и  $x(t)$  для статической системы автоматического регулирования изображенной на рисунке 2.5.

В установившемся состоянии у такой системы также имеется статическая ошибка  $\varepsilon_{уст}$ . На рисунке 2.4, б показаны характеристики  $y(t)$  и  $x(t)$  аста-

тической системы автоматического регулирования. В этом случае в установившемся режиме имеем  $\varepsilon_{уст} = 0$ .

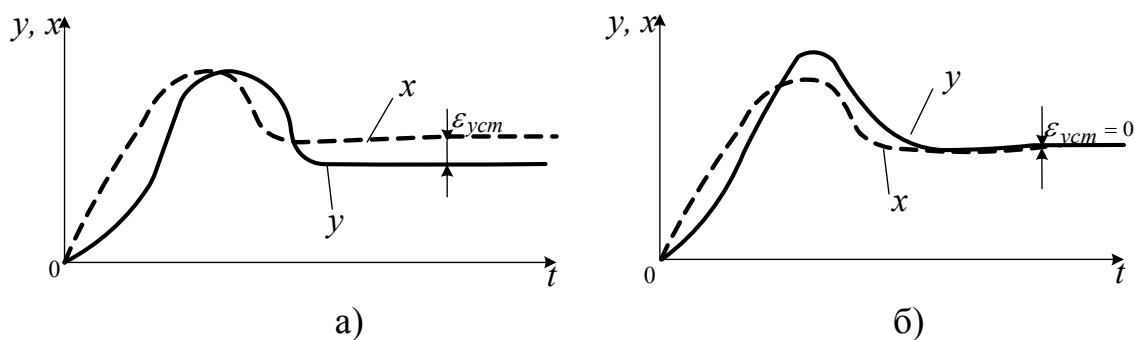


Рисунок 2.4 – Изменение характеристик  $y(t)$  и  $x(t)$  в системах автоматического регулирования

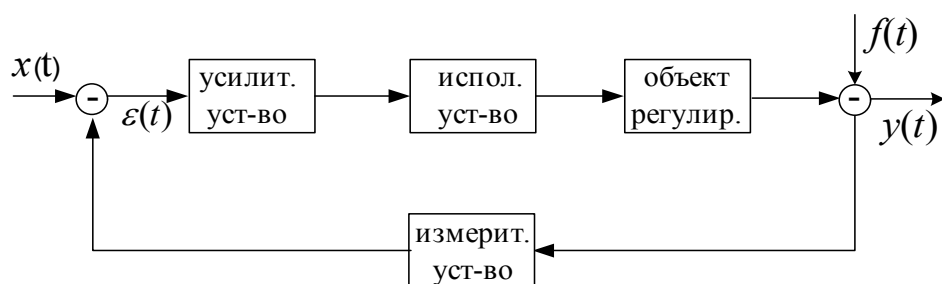


Рисунок 2.5 – Структурная схема системы автоматического регулирования с возмущением

Таким образом, система автоматического регулирования является статической по возмущающему воздействию, если при его приложении ошибка стремится к некоторому установившемуся значению, также зависящему от величины возмущающего воздействия. В системах автоматического регулирования, астатических относительно возмущающего воздействия, ошибка в установившемся состоянии стремится к нулю.

На ряду со статическими и астатическими системами существуют статические и астатические регуляторы. К статическим относят регуляторы, у которых от действия единичного ступенчатого сигнала на входе выходной сигнал асимптотически устанавливается на уровне некоторой конечной величины. У астатических регуляторов от действия единичного ступенчатого сигнала на входе происходит линейное или нелинейное нарастание сигнала на выходе без ограничений по уровню.

### 2.3 Виды управляющих и возмущающих воздействий

Системы автоматического управления и регулирования подвергаются воздействиям двух видов: внутренним и внешним.

Внутренние воздействия возникают как результат взаимодействия элементов между собой. Типичным примером внутреннего воздействия является действие регулятора на объект.

Внешнее воздействия на систему может передаваться как через объект регулирования, так и через любой другой элемент системы. Наряду с активными внешними воздействиями встречаются воздействия, рассматриваемые как помехи. В дальнейшем внешние воздействия на систему через объект будем обозначать  $f(t)$ .

При анализе динамических процессов в системах автоматического регулирования в качестве сигналов управления или возмущения выбирают некоторые типовые сигналы. Сигнал изображенный на рисунке 2.6, представляет собой ступенчатое воздействие. Аналитически ступенчатое воздействие записывается следующим образом:

$$x(t) = \begin{cases} a & \text{при } t < 0; \\ b & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

$a$  – постоянное значение в предыдущий период,  $b$  – новое постоянное значение в последующий период.

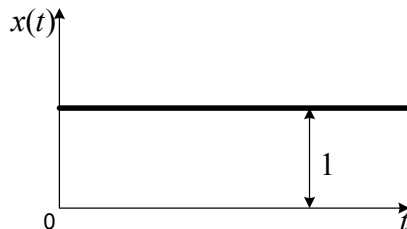


Рисунок 2.6 – Единичное ступенчатое воздействие

Частный случай ступенчатого воздействия – единичное ступенчатое воздействие:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

К воздействию такого рода наиболее часто прибегают при оценке качества процессов регулирования.

Следующий вид воздействия – импульсное возмущение, изображенное на рисунке 2.7 а, б, в.



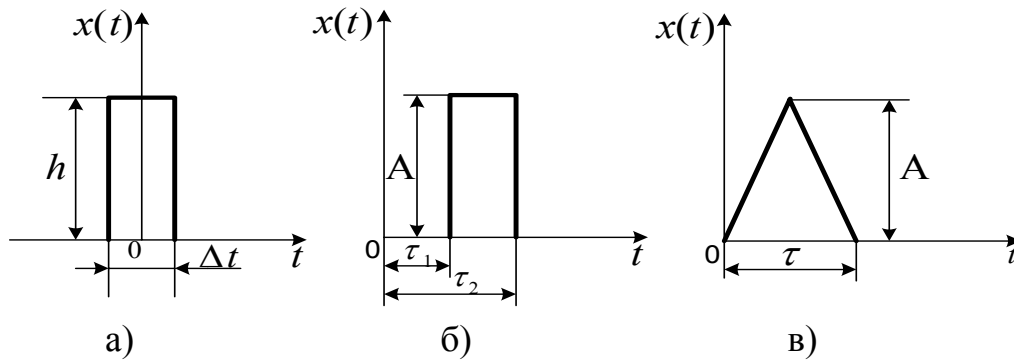


Рисунок 2.7 – Импульсные сигналы

Импульсный сигнал можно рассматривать как предел прямоугольного импульса высотой  $h$  и длительностью  $\Delta t$ . При  $h \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , площадь импульса  $h\Delta t = A$ . Импульсный сигнал представляет собой производную от ступенчатого сигнала

$$x(t) = A \cdot 1'(t)$$

$$x(t) = A\delta(t),$$

где  $\delta(t)$ - дельта-функция, равная производной  $1'(t)$  от единичной ступенчатой функции  $1(t)$ . Математически дельта-функция выражается так

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

причем  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_1) dt = 1;$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t - t_1) dt = \varphi(t_1).$$

Первое свойство означает, что, несмотря на пренебрежимо малую длительность функции, площадь, ограниченная ею, имеет конечное значение равное единице.

Второе свойство означает, что импульсная функция, полученная как произведение произвольной функции  $\varphi(t)$  на дельта-функцию  $\delta(t)$ , существует лишь в момент  $t_1$  и площадь ее равна значению функции  $\varphi(t)$  в точке  $t_1$ .

Если для сигналов управления справедливы соотношения

$$\begin{cases} x(t) = 0, & t < 0 \\ x(t) = at, & t \geq 0 \end{cases},$$

то управляющее воздействие изменяется по линейному закону (рисунок 2.8). Такое воздействие называют скачком скорости.

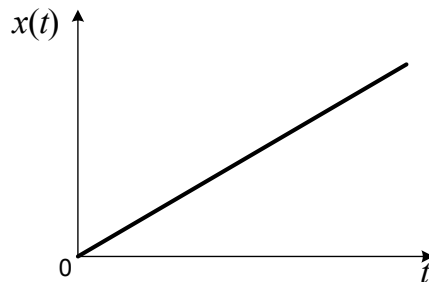


Рисунок 2.8 – Линейно изменяющееся воздействие

Возможен степенной закон изменения управляющего воздействия (рисунок 2.9). Такое воздействие называют скачком ускорения.

$$\begin{cases} x(t) = 0, & t < 0 \\ x(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots = \sum_{i=0}^n x_i t^i, & t \geq 0 \end{cases}$$

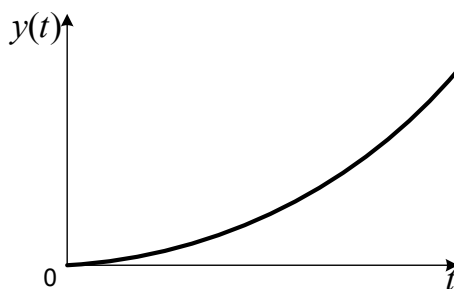


Рисунок 2.9 – Воздействие, изменяющееся по степенному закону

Скачок скорости и скачок ускорения – возмущения, являющиеся стандартными для следящих систем, которые работают в режиме постоянной скорости  $x(t) = at$  или постоянного ускорения  $x(t) = bt^2$ .

Периодическое возмущение это возмущение, изменяющееся периодически во времени. Оно удобно для исследования автоматических систем, работающих в режиме незатухающих колебаний. Самым простым периодическим возмущением является гармоническое колебание единичной амплитуды  $x(t) = x_0 \sin \omega_0 t$  (рисунок 2.10, а). На многие объекты систем регулирования действуют периодические сигналы в виде треугольных импульсов (рисунок

2.10, б), периодически повторяющихся парабол (рисунок 2.10, в). В ряде случаев в качестве типового возмущения используют периодически повторяющуюся ступенчатую функцию с максимальным (или минимальным) значением  $\pm x_1$  (рисунок 2.10, г).

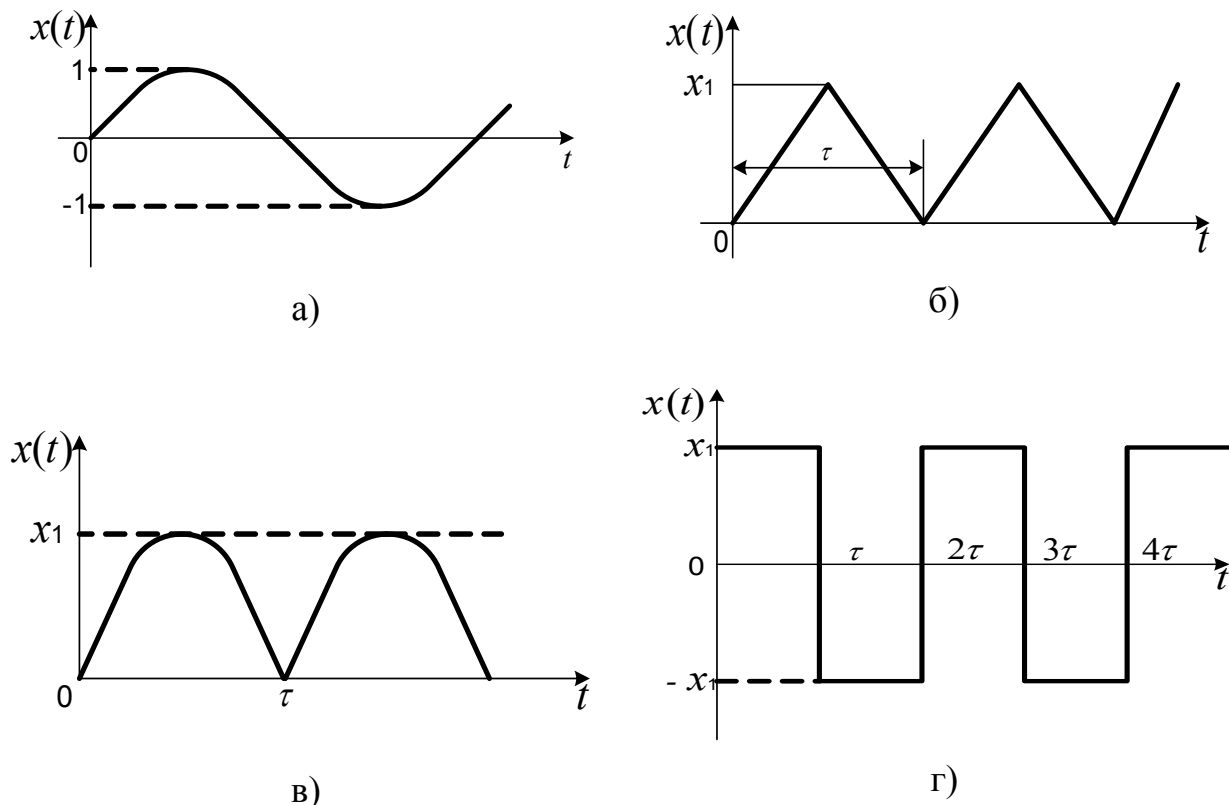


Рисунок 2.10 – Периодические воздействия

Существуют системы автоматического регулирования, на вход которых наряду с регулярным воздействием поступает сигнал в виде флуктуаций, представляющих собой случайные функции от времени, т.е. такие функции, значение которых при каждом данном аргументе являются случайной величиной. Сигнал этого типа относится к случайным воздействиям и может быть представлен в виде суммы стандартных воздействий (рисунок 2.11). Уровень случайной функции может изменяться в широких пределах.

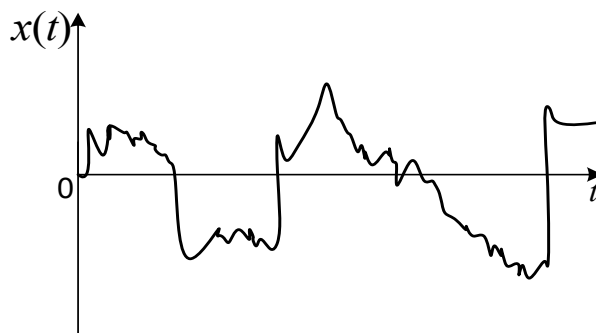


Рисунок 2.11 – Случайное воздействие

## **3 Характеристика элементов систем автоматического регулирования. Математическое описание систем автоматического регулирования**

### **3.1 Краткая характеристика основных элементов систем управления**

Объекты регулирования являются теми основными динамическими элементами систем, в которых с помощью регуляторов или следящих систем должны поддерживаться заданные режимы работы. К ним относятся различные машины и установки, управляемые регулирующими органами.

Объекты регулирования имеют самую различную физическую природу, и их поведение может быть описано несколькими методами: в виде принципиальных схем и блок-схем, дополненных словесным описанием; логическими зависимостями в булевой форме; экспериментально определенными кривыми и таблицами; математическими зависимостями в виде дифференциальных уравнений.

Методы описания объектов в виде дифференциальных и разностных уравнений позволяют получать обобщенные зависимости, характеризующие поведение объектов в статических и динамических режимах. Большое значение при описании объектов регулирования имеет принятая степень идеализации процессов, протекающих в объектах. Если динамика линейного объекта определяется конечным числом переменных, то его поведение отображается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если число переменных бесконечно велико – дифференциальными уравнениями в частных производных.

В теории автоматического регулирования применяют несколько способов составления уравнений динамики объектов регулирования:

- когда дифференциальные уравнения составляются аналитически на основе анализа физических процессов;
- с помощью экспериментально определенных статических характеристик объекта, представленных в виде графиков;
- по данным таблиц, полученных также экспериментальным путем, с последующей их обработкой методом регрессионного анализа;
- с использованием аналогового или цифрового моделирования.

В системах автоматического регулирования для получения необходимой информации о процессах регулирования используют различные измерительные устройства. Если для обеспечения процесса регулирования требуется высокая точность измерений или надо измерить несколько различных параметров, то применяют измерительные системы, состоящие из нескольких измерительных устройств.

Измерительные устройства содержат чувствительные элементы, реагирующие на перемещение, угловую скорость, давление, температуру, частоту, расход жидкости или газа и т. д. как правило, чувствительный элемент не толь-

ко реагирует на отклонение регулируемой величины от установленного значения, но и преобразует ее к виду, удобному для дальнейшего использования.

Чувствительный элемент, в котором одновременно с измерением физическая величина преобразуется в другую форму, называют датчиком.

Измерительные устройства классифицируют по типу измеряемых и по типу измерительных величин (рисунок 3.1).



Рисунок 3.1 – Схема классификации измерительных устройств по типу измеряемых величин

Статическая характеристика измерительных устройств определяет функциональную связь между измеряемой величиной  $x$  и выходным сигналом  $y$ , т.е.  $y = f(x)$ . Весьма важной характеристикой измерительного устройства является чувствительность.

Под чувствительностью измерительного устройства понимают отношение приращения выходной величины  $\Delta y$  к приращению измеряемой величины  $\Delta x$ :

$$S = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Динамическая характеристика измерительного устройства определяется временем протекания переходного процесса  $t_{\min}$  или частотой собственных колебаний  $\omega_0$  и степенью демпфирования  $\xi$ , или полосой пропускания по частоте  $\omega_n$ .

Сигналы, полученные от чувствительных элементов или датчиков в большинстве случаев имеют недостаточную мощность, чтобы непосредственно привести в движение регулирующий орган. В связи с этим необходимо применение усилителей.

Усилительные элементы по виду используемой энергии можно разделить на электрические, гидравлические и пневматические. К усилителям, используемым в системах автоматического регулирования, предъявляют следующие основные требования:

- усилитель должен иметь требуемый коэффициент усиления по мощности и другим параметрам, если он является одновременно преобразователем;
- характеристика усилителя должна быть возможно ближе к линейной;

- зона нечувствительности усилителя не должна превышать допустимой величины;
- постоянная времени усилителя должна быть минимальна, и не превышать заданных пределов.

Преобразующие устройства выполняют самые различные функции в системах автоматического регулирования. Существуют преобразующие устройства четырех типов. В-первых из них осуществляется эквивалентное преобразование сигнала без изменения вида энергии и его физической природы; например, низкочастотный сигнал преобразуется в высокочастотный, (преобразователь называется модулятором) и наоборот (демодулятор). Во-вторых – при преобразовании непрерывного сигнала в квантованный по амплитуде происходит и его усиление (усилители – преобразователи, реле). В третьих - преобразующее устройство служит для согласования начальных измерительных устройств с непрерывными устройствами управления (преобразователи код-аналог). В четвертых – преобразующие устройства превращают непрерывный сигнал в дискретный (преобразователь аналог-код).

Характеризуются преобразующие устройства – точностью и быстродействием.

Исполнительные элементы являются одним из последних звеньев в системах автоматического регулирования и обычно используются для управления органами регулирования. В исполнительный элемент входят серводвигатель (механическая передача) и источник питания. В зависимости от серводвигателя исполнительные элементы делят на электрические, механические, гидравлические и пневматические.

Корректирующие устройства применяют в системах автоматического регулирования для получения требуемых показателей устойчивости, также показателей качества и точности процессов регулирования. Самое широкое распространение получили электрические корректирующие устройства. Их принято разделять на пассивные и активные. К пассивным относят такие, которые не содержат внутри себя источников энергии. Соответственно к активным относят устройства с внутренними источниками энергии.

### **3.2 Математические основы расчета систем автоматического регулирования**

Исследование переходных процессов систем автоматического управления основывается на использовании дифференциальных или интегральных уравнений, называемых уравнениями динамики. При изучении динамических процессов систем автоматического управления отвлекаются от конкретной физической природы регулируемых величин и устройств, а интересуются лишь математической моделью процессов управления. В основе построения математической модели системы лежит ее структурная схема, состоящая из динамических звеньев. Динамические звенья характеризуются дифференциальными или операторными уравнениями, описывающими физические законы происходя-

щих в них динамических процессов. Совокупность полученных дифференциальных уравнений динамических звеньев представляет математическую модель системы и служит для получения дифференциального уравнения системы в целом.

Расчет переходных процессов линейных систем может быть произведен аналитически: путем решения дифференциальных уравнений или, с некоторым приближением, методом вещественных частотных характеристик. В случае наличия значительных нелинейностей применяются графические методы.

Аналитические методы расчета основываются на решении дифференциальных уравнений системы, полностью определяющих переходный процесс в виде зависимости искомых координат от времени.

Решение дифференциальных уравнений может быть произведено классическим или операторным методами. При решении классическим методом, возникает необходимость определения постоянных интегрирования, связанная с учетом начальных условий, что при дифференцировании третьего и более высоких порядков представляет затруднения. С целью упрощения методов расчета и проектирования систем автоматического регулирования уравнения динамики объектов или устройств записывают не через оригиналы функций, а в виде изображений функции, полученных с помощью прямого преобразования Лапласа.

Если оригинал  $x(t)$  представляет собой функцию времени  $t$ , то изображение этой функции  $X(s)$  есть функция комплексной переменной  $s$ , задаваемая в виде следующего интеграла:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = L[x(t)] \quad (3.1)$$

где:  $L$  - символ прямого преобразования Лапласа. Для определения оригинала функции по ее изображению используют обратное преобразование Лапласа.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds = L^{-1}[X(s)],$$

где  $c$  - абсцисса абсолютной сходимости

$L^{-1}$  - символ обратного преобразования Лапласа.

Формула для нахождения обратного преобразования Лапласа используется редко. Вместо этого с помощью (3.1) преобразования Лапласа для наиболее распространенных функций времени сведены в таблицу, по которой в случае необходимости устанавливается соответствие между оригиналом – функцией  $x(t)$  и ее изображением по Лапласу – функцией  $X(s)$ . Изображения по Лапласу часто применяемых функций приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Преобразования Лапласа

Тип функции	Функция времени, $x(t)$	Преобразование Лапласа, $X(s)$
Линейное преобразование	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Дифференцирование при нулевых начальных условиях	$\frac{dx}{dt}$	$sX(s)$
Интегрирование	$\int_0^t x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Операция сдвига	$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1
Единичная ступенчатая функция	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Единичная линейная функция	$t$	$\frac{1}{s^2}$
Степенная функция	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
Экспонента $n$ -го порядка	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
Синусоида	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
Косинусоида	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
Расходящаяся синусоида	$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
Расходящаяся косинусоида	$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$

Из определения преобразования Лапласа (3.1) следует, что если  $k = const$ , то  $L[kf(t)] = kL[f(t)] = kF(s)$ , (3.2)

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \quad (3.3)$$



Использование этих двух свойств преобразования Лапласа значительно расширяет применение таблицы 3.1.

Необходимо отметить, что вычисление обратного преобразования  $L^{-1}[X(s)]$  дает функцию времени, удовлетворяющую условию  $f(t) = 0, t < 0$ . Следовательно, чтобы соблюсти математическую строгость, мы всегда должны считать, что  $f(t) = 0$  при отрицательных значениях  $t$ .

### Пример 3.1

Найдем преобразование Лапласа для функции  $f(t) = 5u(t) + 3e^{-2t}$ . Используя таблицу 3.1 и свойство 3.2, имеем:

$$L[5u(t)] = 5L[u(t)] = \frac{5}{s}$$
$$L[3e^{-2t}] = 3L[e^{-2t}] = \frac{3}{s+2}$$

Далее, согласно свойству (3.3):

$$F(s) = L[5u(t) + 3e^{-2t}] = \frac{5}{s} + \frac{3}{s+2}$$

Этому выражению можно придать иную форму:

$$F(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s+2} = \frac{8s+10}{s(s+2)}$$

Этот пример иллюстрирует одно важное обстоятельство. Как сказано выше, мы обычно работаем с преобразованием Лапласа, представляющим собой отношение двух полиномов от переменной  $s$  (называемым дробно-рациональной функцией). Однако таблица, по которой находится обратное преобразование Лапласа, содержит только функции невысокого порядка. Следовательно, для того чтобы воспользоваться таблицей, необходимо дробно-рациональную функцию представить в виде отдельных членов, которые содержатся в этой таблице. Данная процедура называется разложением на простые дроби, простым примером которого является соотношение

$$\frac{c}{(s+a)(s+b)} = \frac{k_1}{s+a} + \frac{k_2}{s+b}$$

При известных константах  $a$ ,  $b$  и  $c$  задача заключается в определении коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ , присутствующих в разложении на простые дроби. Рассмотрим общий метод решения данной задачи.

Пусть задана дробно-рациональная функция общего вида

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad m < n,$$

где через  $N(s)$  обозначен полином в числителе, а через  $D(s)$  - полином в знаменателе этой функции. Чтобы выполнить разложение на простые дроби, прежде всего надо найти корни знаменателя. Тогда  $F(s)$  можно представить в виде:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}$$

Предположим, что нам необходимо найти коэффициент  $k_j$ . Сначала умножим все члены  $F(s)$  на  $(s - p_j)$

$$(s - p_j)F(s) = \frac{k_1(s - p_j)}{s - p_1} + \dots + k_j + \dots + \frac{k_n(s - p_j)}{s - p_n}$$

Если теперь положить  $s = p_j$ , то все члены в правой части равенства обратятся в нуль, кроме  $j$ -го члена, поэтому

$$k_j = (s - p_j)F(s)|_{s=p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

В математике  $k_j$  называется вычетом функции  $F(s)$  в полюсе  $s = p_j$ .

Пример 3.2

Найдем обратное преобразование Лапласа для функции

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{(s + 1)(s + 2)}$$

Сначала разложим  $F(s)$  на простые дроби

$$F(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 2}$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  вычислим в соответствии с формулой (3.4).

$$k_1 = (s + 1)F(s)|_{s=-1} = \frac{5}{s + 2} \Big|_{s=-1} = 5$$

$$k_2 = (s + 2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{5}{s + 1}\Big|_{s=-2} = -5$$

Тогда разложение на простые дроби принимает вид

$$\frac{5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{5}{s + 1} - \frac{5}{s + 2}$$

Это разложение легко проверить путем приведения к общему знаменателю двух слагаемых в правой части. В результате обратное преобразование Лапласа для  $F(s)$  имеет вид:

$$L^{-1}[F(s)] = (5e^{-t} - 5e^{-2t})u(t).$$

Функцию  $u(t)$  часто опускают, но мы должны помнить, что обратное преобразование Лапласа отлично от нуля только при положительных значениях  $t$ , а при отрицательных  $t$  оно должно равняться нулю.

## 4 Модели физических систем и их характеристики

Под математической моделью мы понимаем соотношения, связывающие вход и выход системы. Одной из простейших моделей физической системы является закон Ома, характеризующий явление электрического сопротивления. Эта модель имеет вид уравнения

$$u(t) = i(t)R$$

В данном уравнении  $u(t)$  - это напряжение в вольтах,  $i(t)$  - ток в амперах, а  $R$  - сопротивление в Омах. Если сопротивление подключено к источнику напряжения известной величины, то это напряжение считается входом системы, а ток – ее выходом (реакцией).

Система называется линейной, если к ней применим принцип суперпозиции. Предположим, что реакция системы на вход  $r_1(t)$  есть  $c_1(t)$ , а реакция на вход  $r_2(t)$  есть  $c_2(t)$ . Если система является линейной, то ее реакция на вход  $k_1r_1(t) + k_2r_2(t)$  будет равна  $k_1c_1(t) + k_2c_2(t)$ , где  $k_1$  и  $k_2$  - произвольные константы.

### 4.1 Моделирование систем

Математическая модель определяется как набор уравнений, описывающих поведение физической системы. Но следует помнить, что никакая математическая модель физической системы не является точной. Разработка моделей



- 4) решенную относительно ошибки –  $x(t)$ ;
- 5) в виде передаточных функций –  $W(s), \Phi(s), \Phi_x(s)$ .

#### 4.2.1 Форма Коши

Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений решенных относительно первой производной координат системы автоматического регулирования

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_1f_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_2f_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_3f_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – собственные координаты системы;

$a_{11}, \dots, a_{33}$  – постоянные коэффициенты – суммы и произведения постоянных времени  $T_j$ , коэффициентов усиления  $k_n$ ;

$f_1, f_2, f_3$  – воздействия на систему.

Форма Коши применяется в теории управления не часто, удобна, если для расчета использовать классические математические пакеты: MathCAD, MATLAB, Mathematica, Maple, Derive. Форма Коши используется при построении аналоговых вычислительных моделей матричного типа (например, моделей на операционных усилителях).

#### 4.2.2 Модели в переменных состояния

Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений системы автоматического регулирования, адаптированная для теории управления путем выделения из формы Коши алгебраических уравнений, связывающих внутренние координаты системы автоматического регулирования с выходными. Эта модель также имеет вид дифференциальных уравнений, но записанных в специальной форме – как система уравнений первого порядка в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} u' &= Au + Bx \\ y &= Cu + Dx, \end{aligned}$$

где  $x$  - вектор входных переменных;

$y$  - вектор выходных переменных;

$u$  - вектор переменных состояния;

$A$  - матрица коэффициентов системы;

$B$  - матрица входных коэффициентов (матрица управления);

$C$  - матрица выходных коэффициентов;

$D$  - матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа.

Эта форма используется для построения моделей больших систем, имеющих несколько входов и выходов, описание которых оптимально в матричной форме. Матричное описание строго формализовано, и не требует понимания физической природы системы.

#### 4.2.3 Дифференциальное уравнение, решенное относительно регулируемой величины $y(t)$ - уравнение движения

Система дифференциальных уравнений (4.1) может быть преобразована к одному уравнению путем исключения промежуточных координат (обычно выходную координату выражают через координату задания)

$$g(t), \left[ \begin{array}{c} x(t), u(t), \dots \\ \text{исключаются} \end{array} \right] y(t)$$

Результатом подобного преобразования является уравнение движения системы

$$D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t), \quad (4.2)$$

где  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  - характеристический полином;

$R(p) = D(p) - Q(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$  - коэффициенты этого полинома определяют влияние задающего воздействия  $g(t)$  на регулируемую координату  $y(t)$ , причем его степень меньше степени характеристического полинома, то есть  $m < n$ ;

$N(p) = d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + \dots + d_{k-1} p + d_k$  - коэффициенты полинома определяют влияние помехи  $f(t)$  на систему.

#### 4.2.4 Дифференциальное уравнение, решенное относительно ошибки $x(t)$ - уравнение ошибки

Если система дифференциальных уравнений (4.1) решается относительно ошибки системы, то получается уравнение ошибки замкнутой системы

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t), \quad (4.3)$$

где  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  - характеристический полином;

$Q(p) = D(p) - R(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n$  - коэффициенты полинома определяют влияние задающего воздействия  $g(t)$  на ошибку  $x(t)$ ;

$N(p) = d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + \dots + d_{k-1} p + d_k$  - коэффициенты полинома определяют влияние  $f(t)$  помехи на систему.

### 4.3 Передаточные функции системы автоматического регулирования

Функция, связывающая один входной и один выходной сигналы системы автоматического регулирования, является формой записи дифференциальных уравнений системы автоматического регулирования, решенной относительно требуемой выходной координаты. Передаточные функции (ПФ) получают из дифференциального уравнения, решенного относительно требуемой координаты системы. Для чего правую часть уравнения делят на характеристический полином  $D(p)$ . Отношение полиномов в правой части при возмущающих воздействиях и есть передаточная функция. Для типовой структурной схемы замкнутой системы автоматического регулирования, изображенной на рисунке 4.1, различают три основные передаточные функции, применяемые для исследований

1)  $W(p) = \frac{y(t)}{x(t)} W_{oc}(p) = W_{pez}(p) W_0(p) W_{oc}(p)$  - передаточная функция разомкнутой системы;

разомкнутой системы;

2)  $\Phi(p) = \frac{y(t)}{g(t)}$  - передаточная функция замкнутой системы;

3)  $\Phi_x(p) = \frac{x(t)}{g(t)}$  - передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

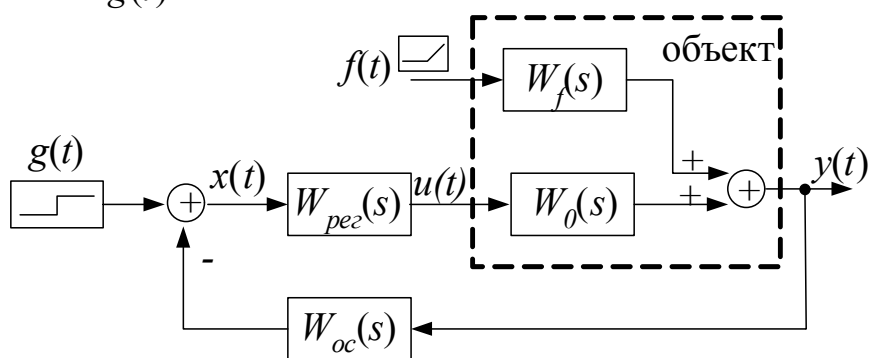


Рисунок 4.1 – Типовая структурная схема замкнутой системы автоматического регулирования

Запишем по структурной схеме уравнение движения для разомкнутой системы

$$y(t) = W_{pez}(p) W_0(p) x(t) + W_f(p) f(t)$$

Для замкнутой системы

$$y(t) = W_{npk}(p)(g(t) \pm W_{oc}(p)y(t)) + W_f(p)f(t),$$

где  $W_{npk}(p) = W_{pez}(p)W_0(p)$  - передаточная функция прямого канала.

Разделим уравнение движения (4.2) на уравнение ошибки (4.3), считая, что  $f(t) = 0$  и  $W_{oc}(p) = 1$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{R(p)}{Q(p)} \Rightarrow W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

так как характеристический полином  $D(p) = R(p) + Q(p)$ , если добавить единицу к  $W(p)$ , то получим

$$1 + W(p) = \frac{Q(p)}{Q(p)} + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}$$

При исследованиях характеристический полином приравнивают к нулю, то есть вместо него можно использовать  $W(p)$

$1 + W(p) = 0$  - характеристическое уравнение.

#### 4.4 Частотные характеристики

Если на вход любой системы подать сигнал синусоидальной формы

$$x(t) = X_m \cos(\omega t) = X_m e^{j\omega t}$$

Очевидно, что выходной сигнал будет иметь ту же форму

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Зависимость же между амплитудами и фазами выходного и входного сигналов определяет дифференциальное уравнение движения системы. Возьмем произвольное дифференциальное уравнение, считая помеху  $f(t)$  равной нулю

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y(t) = (k_1 + k_2 p)x(t)$$

Подставим сигналы  $y(t)$  и  $x(t)$  в уравнение движения

$$T_2^2 (j\omega)^2 Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} + T_1 (j\omega) Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} + Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = k_1 X_m e^{j\omega t} + k_2 (j\omega) X_m e^{j\omega t}$$



Найдем отношение выходного сигнала к входному

$$W(j\omega) = \frac{Y_m e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_m e^{j\omega t}} = \frac{k_1 + k_2(j\omega)}{1 + T_1(j\omega) + T_2^2(j\omega)^2}$$

Заметим, что если вместо подстановки сигналов записать дифференциальное уравнение движения системы в изображениях Лапласа и вновь найти отношение выходного сигнала к входному, то полученная в ходе этого преобразования передаточная функция совпадет с точностью до свободной переменной с частотной передаточной функцией.

Вывод 1: Частотная передаточная функция получается из обычной заменой оператора Лапласа  $s$  на комплексную частоту  $j\omega$ , то есть в результате перехода от изображения Лапласа к изображению Фурье.

Вывод 2: дифференциальное уравнение движения системы связывает входной и выходной сигналы (то есть функции времени), передаточная функция связывает изображения Лапласа тех же сигналов, а частотная передаточная функция связывает их спектры.

Частотная передаточная функция может быть представлена в следующих видах

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ или } W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где  $A(\omega)$  - модуль частотной передаточной функции находится как отношение модулей числителя и знаменателя

$$A(\omega) = \frac{(k_1^2 + k_2^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\varphi(\omega)$  - фаза частотной передаточной функции находится как разность аргументов числителя и знаменателя

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{k_2 \omega}{k_1}\right) - \arctg\left(\frac{T_1 \omega}{1 - T_2 \omega^2}\right)$$

$U(\omega)$  и  $V(\omega)$  - вещественная и мнимая части частотной передаточной функции.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) – это графическое отображение для всех частот спектра отношений выходного сигнала системы автоматического регулирования к входному, представленных в комплексной форме. Величина отрезка от начала координат до каждой точки амплитудно-фазовой частотной характеристики показывает во сколько раз на данной

частоте выходной сигнал больше входного, а сдвиг фазы между сигналами определяется углом до этого отрезка (рисунок 4.2).

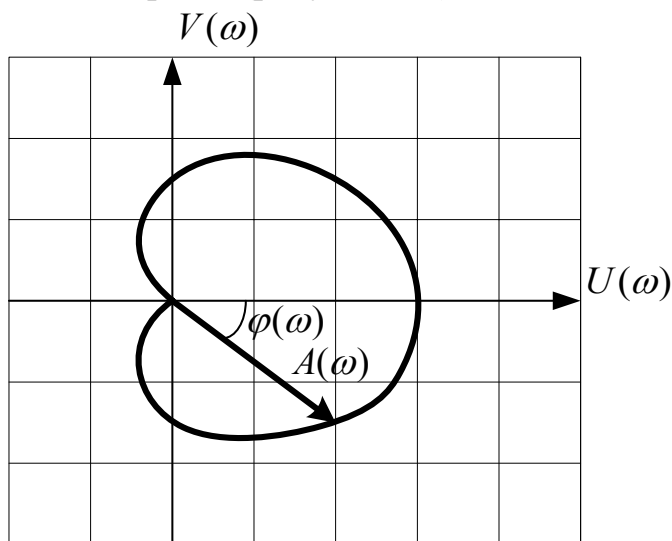


Рисунок 4.2 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика системы автоматического регулирования

Амплитудно-фазовые характеристики типовых динамических звеньев приведены в приложении А

Построение логарифмических частотных характеристик производится по выражениям

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega), \quad [\text{дБ}]$$

$$\varphi(\omega) = \arg(W(j\omega)), \quad [\text{рад}]$$

где  $L(\omega)$  - логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАЧХ);

$\varphi(\omega)$  - логарифмическая фазная характеристика (ЛФЧХ).

Логарифмические частотные характеристики строятся как зависимость модуля и аргумента частотной функции от частоты, но масштаб по оси частот является логарифмическим. Модуль частотной функции изменяется и строится в децибелах

$$\text{дБ} = 20 \lg a,$$

где  $a$  – коэффициент усиления.

Пусть дана передаточная функция второго порядка, запишем модуль этой функции

$$|W(j\omega)| = \frac{|k| \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_3} \right|}{\left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_1} \right| \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_2} \right|}$$

выражение для логарифмической амплитудно-частотной характеристики

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg |k| + 20 \lg \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_3} \right| - 20 \lg \left| 1 + \frac{\omega}{\omega_1} \right| - 20 \lg \left| 1 + \frac{\omega}{\omega_2} \right|$$

теперь рассмотрим отдельные члены из этого выражения

$$20 \lg \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_i} \right| = 20 \lg \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \quad (4.4)$$

На рисунке 4.3 представлен график этой функции в зависимости от  $\lg \omega$ .

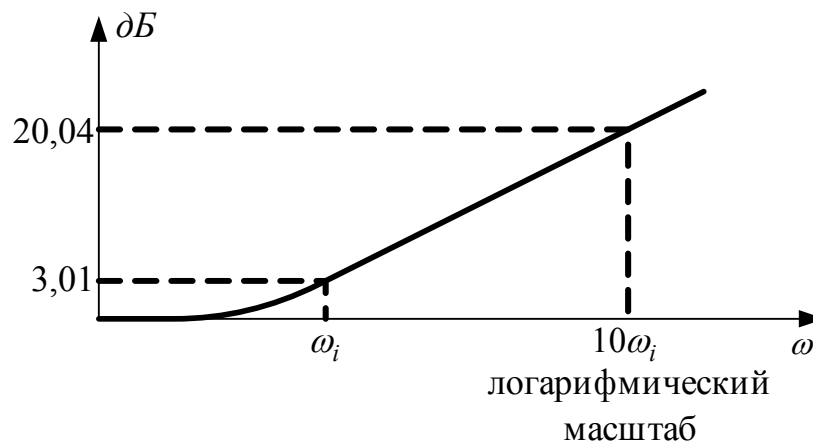


Рисунок 4.3 – Частотная характеристика элемента первого порядка

Заметим, что на частоте  $\omega_i$  выражение (4.4) имеет значение  $20 \lg \sqrt{2} = 3.0103$ . Обычно это значение округляют до 3 дБ и говорят, что для множителя первого порядка в числителе передаточной функции модуль его частотной функции на частоте излома равен 3 дБ. Если такой множитель находится в знаменателе, то модуль его частотной функции равен минус 3 дБ. Кроме того, на частоте  $10\omega_i$  модуль частотной функции множителя первого порядка в числителе равен  $20 \lg \sqrt{101} = 20,04 \approx 20$  дБ. И говорят, что наклон

характеристики равен  $20 \text{ дБ}$  на декаду. Десятикратное увеличение частоты называется декадой, а двукратное увеличение частоты – октавой.

Рассмотрим теперь аппроксимацию частотной характеристики, соответствующей члену первого порядка

$$\partial B_i = 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}$$

Для частот, много меньших частоты излома  $\omega_i$

$$\partial B_i \approx 20 \lg(1) = 0, \quad \omega \ll \omega_i$$

а для частот, очень больших в сравнении с  $\omega_i$

$$\partial B_i \approx 20 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_i, \quad \omega \gg \omega_i$$

При низких частотах характеристика аппроксимируется прямой линией, совпадающей с осью  $\omega$ . При высоких частотах, характеристика аппроксимируется также прямой линией, имеющей наклон  $20 \text{ дБ}$  на декаду частоты. Прямые линии пересекаются при  $\omega = \omega_i$ . Значит кривая асимптотически стремится к прямым линиям (рисунок 4.4) и максимальная ошибка составляет  $3 \text{ дБ}$ . частота  $\omega_i$  - также называется частотой сопряжения.

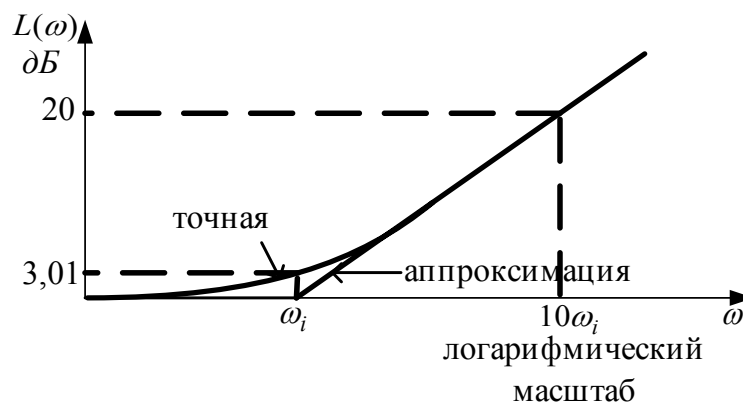


Рисунок 4.4 – Аппроксимация частотной характеристики элемента первого порядка

Логарифмические частотные характеристики типовых динамических звеньев приведены в приложении Б.

#### 4.5 Построение амплитудно-фазовой частотной характеристики последовательно соединенных звеньев

Общая форма передаточной функции последовательно соединенных групп типовых звеньев может быть представлена

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M_p(s)}{D_p(s)}$$

Подставим в это выражение  $s = j\omega$  и найдем, что

$$M_p(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$D_p(j\omega) = C(\omega) + jK(\omega)$$

оттуда получим

$$\text{вещественная часть} - U(\omega) = \frac{A(\omega)C(\omega) + B(\omega)K(\omega)}{C^2(\omega) + K^2(\omega)}$$

$$\text{мнимая часть} - V(\omega) = \frac{B(\omega)C(\omega) - A(\omega)K(\omega)}{C^2(\omega) + K^2(\omega)}$$

Задаваясь различными значениями  $\omega$  и пользуясь формулами для  $U(\omega), V(\omega)$  можно построить амплитудно-фазовую частотную характеристику.

Рассмотрим пример.

Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику, если

$$W(s) = \frac{250s + 1000}{0,05s^3 + 10,055s^2 + 11,005s + 1}$$

Подставим в это выражение  $s = j\omega$ , тогда

$$A(\omega) = 1000; \quad C(\omega) = 1 - 10,055\omega^2;$$

$$B(\omega) = 250\omega; \quad K(\omega) = 11,005\omega - 0,05\omega^3$$

откуда

$$U(\omega) = \frac{1000(1 - 10,055\omega^2) + 250\omega(11,005\omega - 0,05\omega^3)}{(1 - 10,055\omega^2)^2 + (11,005\omega - 0,05\omega^3)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{250\omega(1 - 10,055\omega^2) - 1000(11,005\omega - 0,05\omega^3)}{(1 - 10,055\omega^2)^2 + (11,005\omega - 0,05\omega^3)^2}$$

Задаваясь различными значениями  $\omega$ , получим амплитудно-фазовую характеристику (рисунок 4.5)

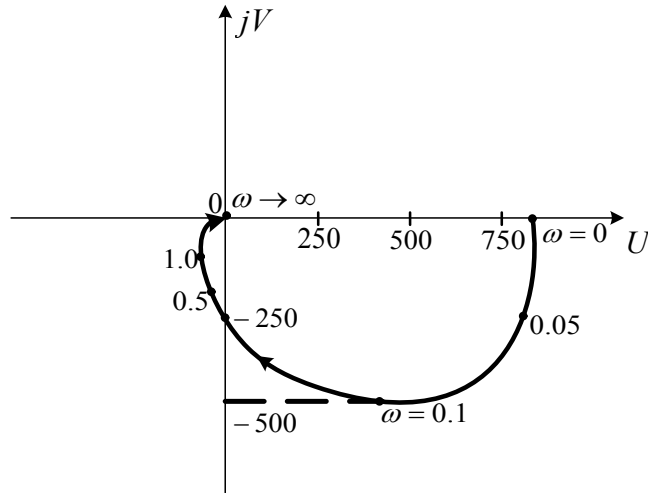


Рисунок 4.5 – Амплитудная фазово-частотная характеристика последовательных соединенных звеньев

## 5 Динамические звенья автоматических систем

Для определения динамических свойств автоматической системы необходимо её элементы различать по их уравнениям динамики. В теории автоматического управления элементы автоматических систем, с точки зрения их динамических свойств, представляют с помощью небольшого числа динамических звеньев.

Под элементарным динамическим звеном понимается искусственно выделяемая часть автоматической системы, соответствующая какому-либо элементарному алгоритму (математическому или графическому описанию динамического процесса).

По направлению прохождения воздействия различают вход и выход, и, соответственно, входную  $x_{ex}(t)$  и выходную  $x_{вых}(t)$  величины звена. Поскольку в систему автоматического управления входят различные усилители, обладающие направленным действием, система способна передавать воздействия только в одном направлении. Поэтому уравнение динамики всей системы можно получить из уравнений динамики звеньев, исключая промежуточные переменные.

Статической характеристикой звена называется зависимость между его выходной и входной величинами в установившемся состоянии. Динамические звенья бывают линейные и нелинейные. Статистические характеристики линейных звеньев могут быть представлены в виде линейных функций  $x_{вых} = f(x_{ex})$

аналитически либо графически, а нелинейных звеньев – преимущественно графически. Уравнение статической характеристики линейного звена представляют собой линейную функцию

$$x_{вых} = x_0 + kx_{вх},$$

где  $x_0$  – начальное значение выходной величины при  $x_{вх} = 0$ ,  
 $k$  – тангенс угла наклона характеристики к оси абсцисс

$$k = \frac{\Delta x_{вых}}{\Delta x_{вх}}$$

Величина  $k$ , определяемая отношением приращения выходной величины к приращению входной, называется статическим коэффициентом усиления (коэффициентом передачи) звена.

Динамические свойства звена могут быть определены на основании дифференциального уравнения, описывающего поведение звена в переходном режиме. Решение дифференциального уравнения дает возможность получить переходную характеристику динамического звена, представляющую зависимость выходной величины от времени при определенном изменении во времени входного воздействия. При исследовании характера переходных процессов обычно пользуются скачкообразным или ступенчатым входным воздействием. Решение дифференциального уравнения производится при нулевых начальных условиях выходной величины. Кроме выходной характеристики, динамические свойства могут быть выражены и другими закономерностями, например частотными и импульсными характеристиками, представляющими реакцию звена на входные воздействия, имеющие характер гармонической синусоидальной или импульсной функции.

Тип звена определяется уравнением, в соответствии с которым происходит преобразование входного воздействия. Различают следующие типы звеньев:

- пропорциональное (усилительное, безынерционное),
- апериодическое,
- колебательное,
- интегрирующее,
- дифференцирующее,
- звено с запаздыванием,

Каждое динамическое звено имеет следующие динамические характеристики:

- уравнение динамики,
- передаточную функцию,
- переходную и импульсную переходную функции,
- частотные характеристики.

Неустойчивыми звеньями называют звенья, при подаче на вход которых ступенчатого воздействия, они не имеют установившегося режима.

Устойчивые звенья те, при подаче на вход которых ступенчатого воздействия, они имеют установившийся режим.

### 5.1 Безынерционное звено

Безынерционным называется такое звено, в котором в каждый момент времени существует пропорциональная зависимость между выходной  $x_{вых}$  и входной  $x_{вх}$  величинами:

$$x_{вых} = kx_{вх},$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, называемый также коэффициентом усиления звена.

В литературе встречаются и другие названия безынерционного звена: пропорциональное, идеальное, безъемкостное. Примерами безынерционного звена могут служить потенциометр, используемый в качестве делителя напряжения, трансформатор, усилитель и т. д.

При подаче на вход такого звена ступенчатого воздействия соответствующее значение выходной величины устанавливается мгновенно.

Динамическое уравнение звена

$$x_{вых}(t) = kx_{вх}(t)$$

в операторной форме  $X_{вых}(s) = kX_{вх}(s)$ ,

где  $X_{вых}(s), X_{вх}(s)$  – изображения выходной и входной функций по Лапласу.

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)} = k$$

Передаточная функция звена численно равна коэффициенту усиления.

Переходная функция  $h(t)$  пропорционального звена показана на рисунке 5.1. При подаче на вход звена ступенчатой функции, выходная величина, согласно уравнению звена, также будет ступенчатой, т. е. выходная величина копирует изменение входной величины без запаздывания или искажения. Поэтому пропорциональное (усилительное) звено называют безынерционным.



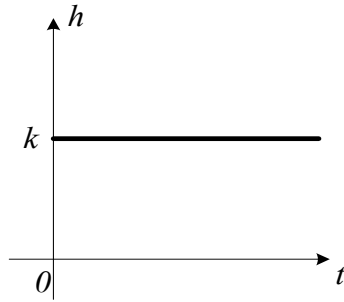


Рисунок 5.1 – Переходная функция пропорционального звена

Импульсная переходная функция пропорционального звена определяется как производная переходной функции

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dk1(t)}{dt} = k\delta(t)$$

где  $\delta(t)$  – единичная импульсная функция и представляет собой мгновенный импульс бесконечно большой амплитуды, площадь, которого равна  $k$  (рисунок 5.2).

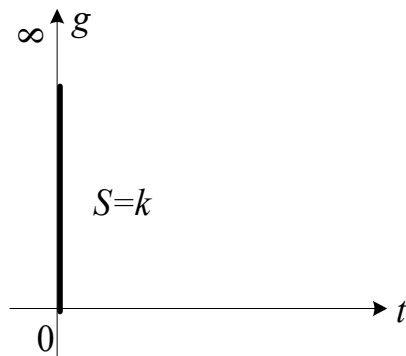


Рисунок 5.2 – Импульсная переходная функция пропорционального звена

Амплитудно-фазовая частотная характеристика пропорционального звена

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика безынерционного звена представляет собой точку на вещественной оси, удаленную от нуля на величину  $k$  (рисунок 5.3).

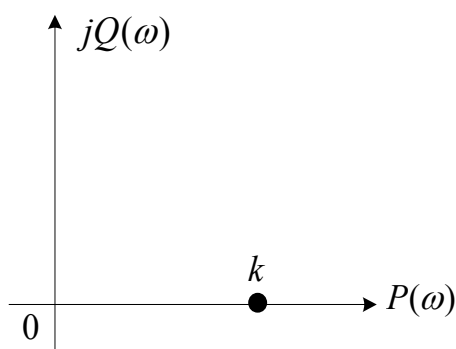


Рисунок 5.3 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика пропорционального звена

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика пропорционального звена определяется следующим образом

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k ,$$

Из этого выражения видно, что логарифмическая амплитудная частотная характеристика пропорционального звена не зависит от  $\omega$  и представляет собой прямую параллельную оси абсцисс.

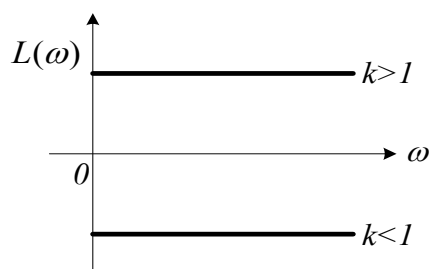


Рисунок 5.4 – Логарифмическая амплитудная частотная характеристика пропорционального звена

Логарифмическая фазная частотная характеристика пропорционального безынерционного звена не зависит от частоты и представляет собой прямую, совпадающую с положительной вещественной осью.

$$\varphi(\omega) = 0$$

## 5.2 Аperiodическое звено (инерционное звено первого порядка)

Инерционным звеном первого порядка называется такое звено, выходная величина которого в функции времени изменяется по экспоненциальному закону. Данное звено описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$$

В результате преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях уравнение динамики может быть представлено в операторной форме

$$(Ts + 1)X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}},$$

где  $T$  – постоянная времени звена.

К инерционным звеньям можно отнести  $R$ - $L$  и  $R$ - $C$  контуры, магнитные усилители, генераторы постоянного тока. Рассмотрим электрические схемы  $R$ - $L$  и  $R$ - $C$  контуров и составим для них уравнения динамики (рисунок 5.5 а, б)

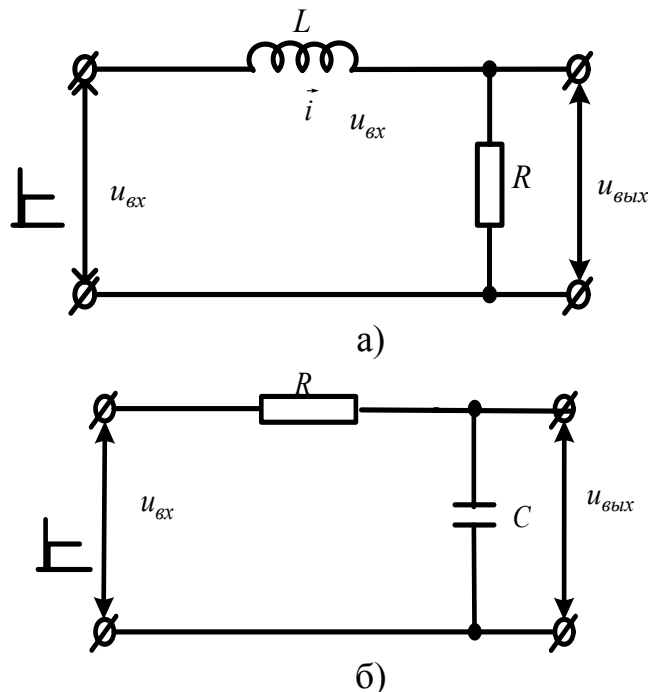


Рисунок 5.5 – Электрические колебательные контуры а)  $RL$  – контур б)  $RC$  - контур

При подаче на вход контура  $R$ - $L$  ступенчатого напряжения возникает периодический процесс. Если пренебречь активным сопротивлением индуктивной катушки, для входной и выходной цепей можно записать уравнения:

$$u_{\text{вх}} = iR + L \frac{di}{dt}$$

$$u_{\text{вых}} = iR$$

Из этих выражений находим  $i$  и подставляем в уравнение для  $u_{\text{вх}}$

$$i = \frac{u_{\text{вх}}}{R}$$

$$u_{\text{вх}} = u_{\text{вх}} + \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = T \frac{du_{\text{вх}}}{dt} + u_{\text{вх}},$$

где  $T = \frac{L}{R}$  - постоянная времени контура

Передаточная функция аperiodического звена

$$W(s) = \frac{X_{\text{вх}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

Переходная характеристика аperiodического звена (рисунок 5.6), представляющая реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие, находится путем решения операторного уравнения динамики звена

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

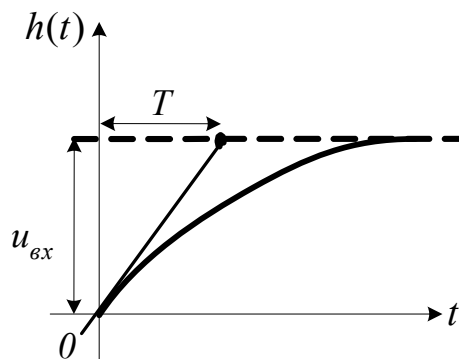


Рисунок 5.6 – Переходная характеристика аperiodического звена

Время достижения выходной величиной своего установившегося значения принимается равным 3-4T

Импульсная переходная функция – это реакция звена на входное единичное импульсное воздействие  $\delta(t)$ . Для аperiodического звена

$$g(t) = h'(t)$$

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Импульсная переходная функция аperiodического звена изображена на рисунке 5.7.

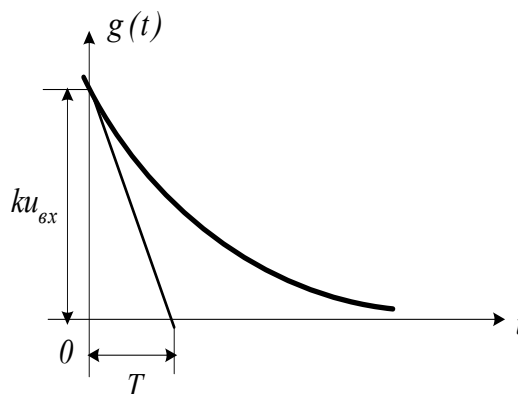


Рисунок 5.7 – Импульсная переходная функция аperiodического звена

Амплитудно-фазовая частотная характеристика аperiodического звена.

Комплексная передаточная функция аperiodического звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + T^2 \omega^2},$$

$$Q(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

Уравнения представляют собой параметрические уравнения амплитудно-фазной частотной характеристики аperiodического звена с параметром  $\omega$ . Исключение этого параметра дает уравнение амплитудно-фазной частотной характеристики в декартовых координатах  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  в виде:

$$\left[P(\omega) - \frac{k}{2}\right]^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Это уравнение окружности с центром на вещественной оси в точке  $(\frac{k}{2}; 0)$  и диаметром  $k$  (рисунок 5.8)

Нижняя полуокружность амплитудно-фазовой частотной характеристики аperiodического звена соответствует частотам  $\omega$  от  $0$  до  $-\infty$

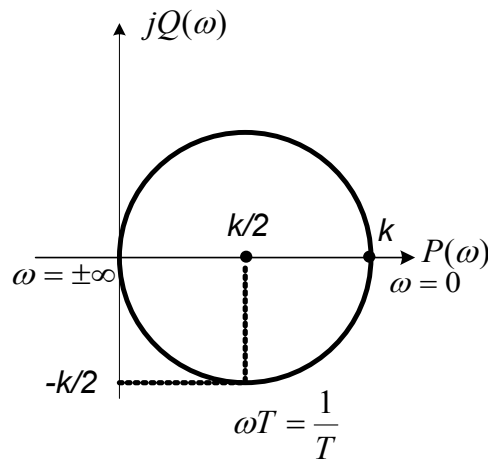


Рисунок 5.8 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика аperiodического звена

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика аperiodического звена может быть получена из выражения для комплексной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} e^{-\text{arctg}\omega T}$$

Введем обозначения: модуль комплексной передаточной функции аperiodического звена

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}},$$

аргумент комплексной передаточной функции аperiodического звена

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}\omega T$$

С учетом введенных обозначений комплексная передаточная функция может быть записана в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика записывается в виде

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

для аperiodического звена получим

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

В области низких частот при  $\omega \ll \frac{1}{T}$ , выражение под знаком корня стремится к единице

$$\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx 1$$

В этой области логарифмическая амплитудная частотная характеристика представляет собой прямую параллельную оси частот (отрезок AC на рисунке 5.9), в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k$$

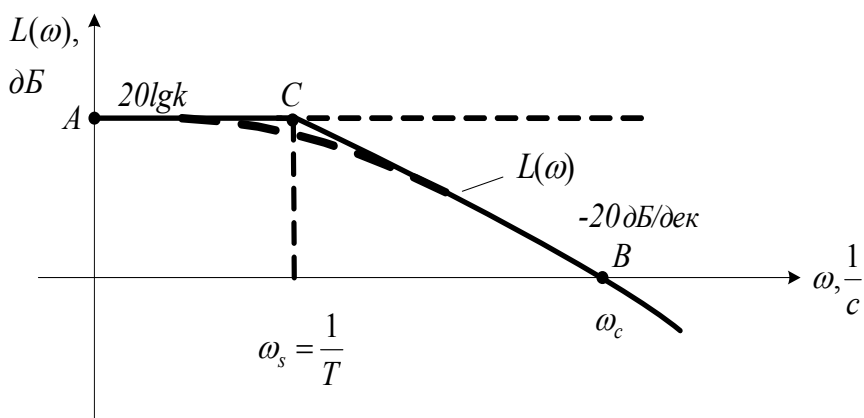


Рисунок 5.9 – Логарифмическая амплитудная характеристика аperiodического звена

В области высоких частот, при  $\omega \gg \frac{1}{T}$  значение корня стремится к  $\omega T$

$$\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx \omega T$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика в этой области соответствует выражению

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T$$

Это отрезок CB на рисунке 5.9. Частота среза  $\omega_c$  – это частота, при которой логарифмическая амплитудная частотная характеристика пересекает ось абсцисс. При десятикратном изменении частоты наклон прямой будет  $-20$  дБ на декаду. Знак – минус показывает, что при возрастании частоты ордината логарифмической амплитудной частотной характеристики убывает. Частота сопряжения  $\omega_s$  – это частота сопряжения двух асимптот, соответствующих характеристикам в области низких и высоких частот (точка C на рисунке 5.9). В окрестности  $\omega = \omega_s$  сопряжение может быть произведено плавной кривой, проходящей через точку, лежащую ниже пересечения асимптот на 3 дБ. На рисунке

5.9 эта линия показана пунктиром и соответствует реальной характеристике апериодического звена.

Логарифмическая фазная частотная характеристика апериодического звена (ЛФЧХ) записывается выражением

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

В соответствии с этим выражением, подставляя различные значения  $\omega$  строят логарифмические фазные частотные характеристики апериодического звена (рисунок 5.10). Характерные точки характеристики

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\omega_s) = 45^\circ, \quad \varphi(\infty) = 90^\circ$$

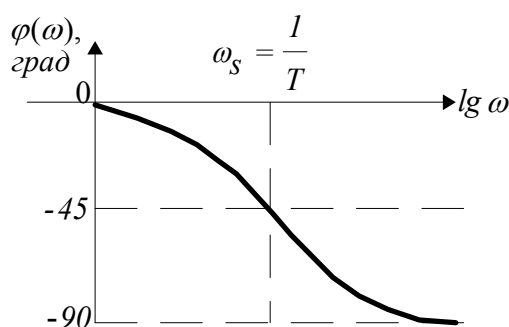


Рисунок 5.10 – Логарифмическая фазная частотная характеристика апериодического звена

### 5.3 Колебательное звено (Инерционное звено второго порядка, или апериодическое звено второго порядка)

Уравнение динамики звена

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t)$$

в операторной форме уравнение динамики колебательного звена

$$(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1) \cdot X_{\text{вых}}(s) = kX_{\text{вх}}(s)$$

Примером колебательного звена являются электрические колебательные контуры, состоящие из индуктивности, емкости и активного сопротивления (рисунок 5.11).



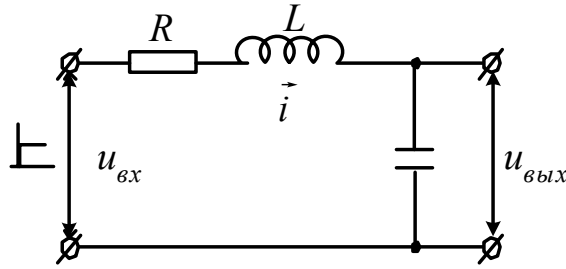


Рисунок 5.11 – Колебательный контур

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{X_{\text{вых}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Переходная функция звена – это реакция на единичное ступенчатое входное воздействие

$$x_{\text{вх}}(t) = I(t)$$

$$x_{\text{вых}}(t) = h(t) = kx_{\text{вх}}(t) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t + \varphi) \right],$$

где  $\Omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$  - угловая частота собственных колебаний,

$\varphi = \text{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$  - начальная фаза колебаний,

$\alpha = \frac{\xi}{T}$  - декремент затухания,

$\xi$  – относительный коэффициент затухания.

Характер переходной функции зависит от  $\xi$  следующим образом

1) Если  $0 < \xi < 1$ , то переходная функция звена имеет вид затухающих колебаний (рисунок 5.12,а).

2) Если  $\xi = 0$ , то переходная функция колебательного звена представляет собой незатухающие гармонические колебания (рисунок 5.12,б).

3) При  $-1 < \xi < 0$  на выходе звена возникают возрастающие по амплитуде колебания (рисунок 5.12,в).

4) Если  $\xi > 1$  колебательное звено превращается в апериодическое звено второго порядка.

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

$$\text{где } T_1 = \frac{T}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad T_2 = \frac{T}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

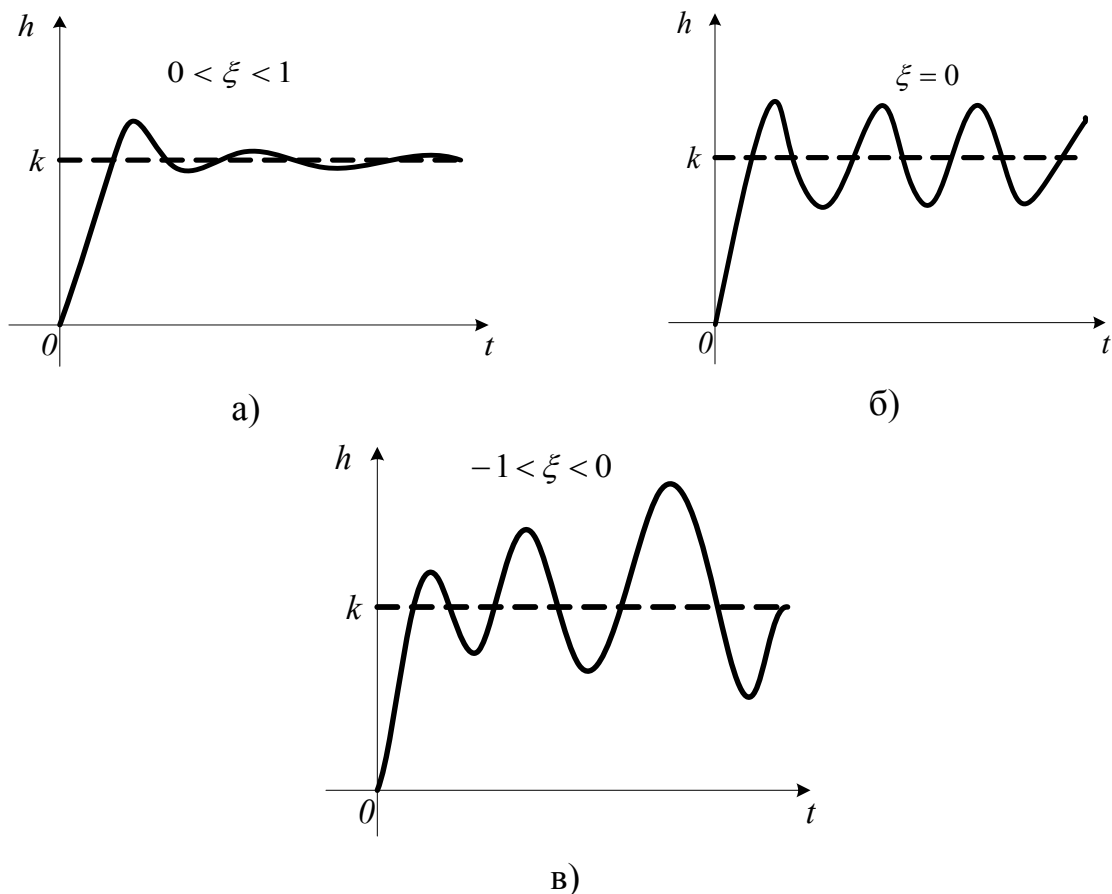


Рисунок 5.12 – Переходная функция колебательного звена при различных значениях коэффициента затухания

Импульсная переходная функция колебательного звена изображена на рисунке 5.13.

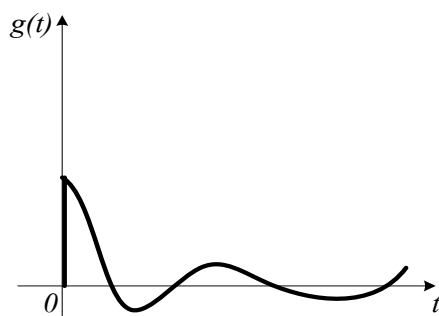


Рисунок 5.13 – Импульсная переходная характеристика колебательного звена

Колебательным звеном может быть элемент системы, содержащий минимум две ёмкости энергии: в одной ёмкости накапливается потенциальная, а в

другой – кинетическая энергия. Канал, через который ёмкости обмениваются энергией, обладает сопротивлением, и в нем происходят потери энергии.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена (рисунок 5.14) соответствует выражению

$$W(j\omega) \frac{k}{1 - T^2 \omega^2 + j2\xi T \omega} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где 
$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}$$

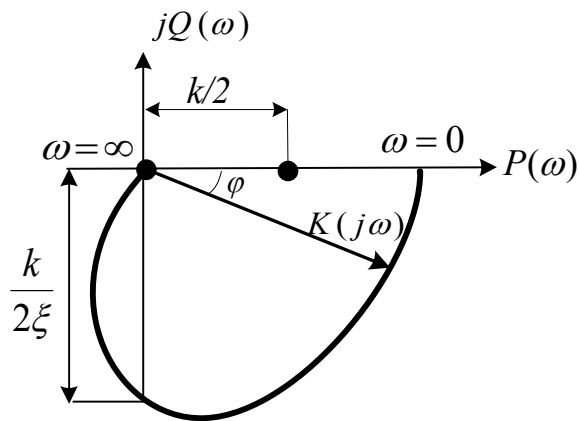


Рисунок 5.14 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика колебательного звена строится в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

Допустим, что  $k=1$  и будем рассматривать две области частот. В области низких частот  $\omega \ll \frac{1}{T}$  логарифмическая амплитудная частотная характеристика будет иметь вид

$$L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{1} \approx 0,$$

то есть логарифмическая амплитудная частотная характеристика совпадает с осью частоты. В области высоких частот  $\omega \gg \frac{1}{T}$  выражение для логарифмической амплитудной частотной характеристики колебательного звена

$$\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} \approx T^2 \omega^2$$

$$L(\omega) = -20 \lg(T\omega)^2 = -2 \cdot 20 \lg T\omega = -40 \lg T\omega$$

Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики колебательного звена изображены на рисунке 5.15

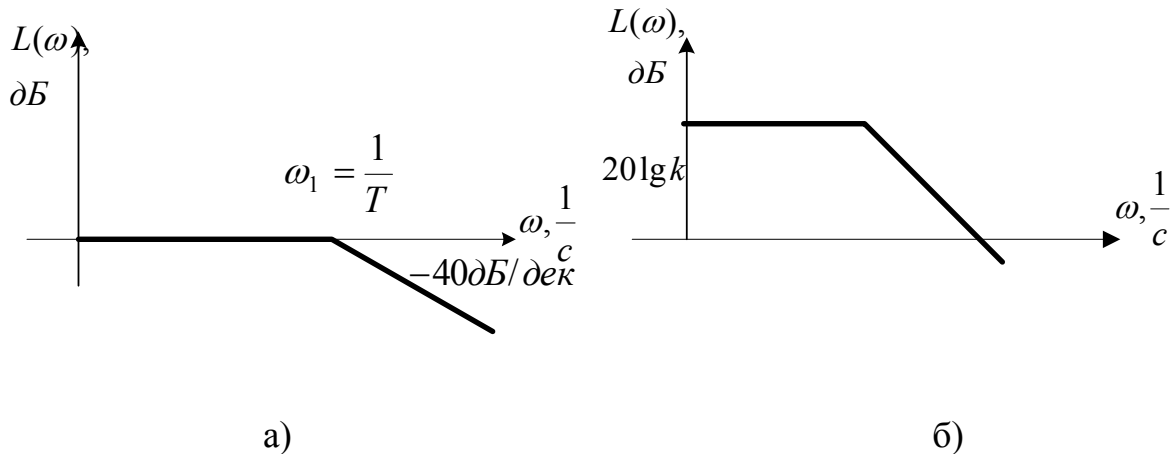


Рисунок 5.15 – Логарифмическая амплитудная частотная характеристика колебательного звена а) при  $k=1$  б) при  $k>1$

На рисунке 5.16 показаны реальные логарифмические амплитудные частотные характеристики колебательного звена для  $k=1$  при различных значениях коэффициента затухания  $\xi$ .

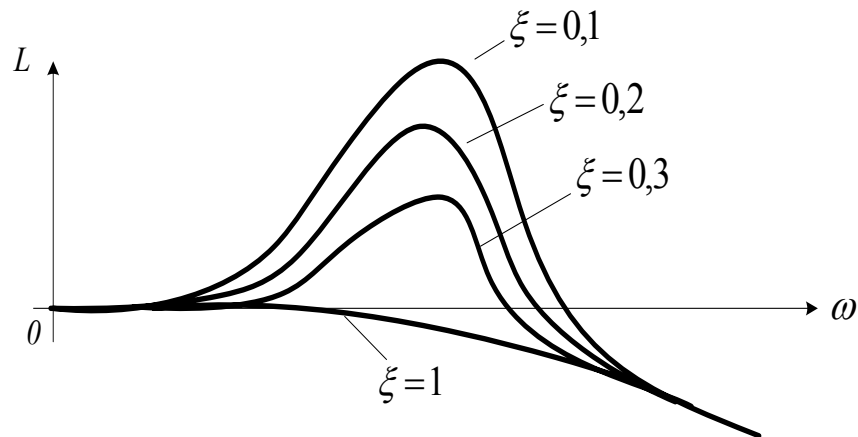


Рисунок 5.16 – Логарифмические амплитудные частотные характеристики колебательного звена при различных значениях  $\xi$

Логарифмические фазные частотные характеристики колебательного звена показаны на рисунке 5.17 и вычисляются согласно выражению

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}$$

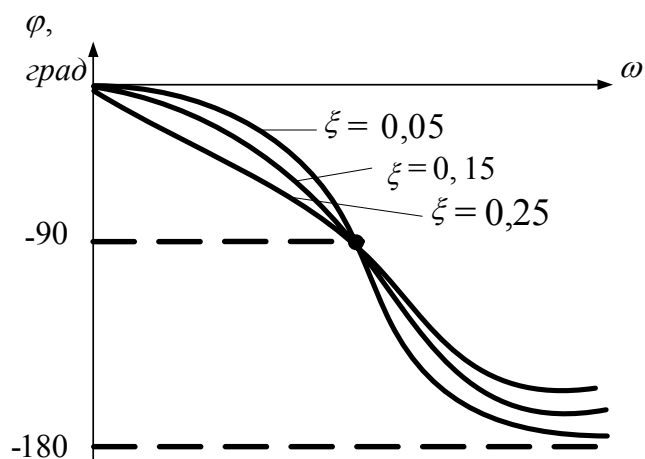


Рисунок 5.17 – Логарифмические фазные частотные характеристики колебательного звена

## 5.4 Интегрирующее звено

Уравнение динамики интегрирующего звена

$$x_{\text{вых}}(t) = k \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt$$

в операторной форме

$$X_{\text{вых}}(s) = k \frac{X_{\text{вх}}(s)}{s}$$

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{X_{\text{вых}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{k}{s}$$

В отличие от других звеньев под коэффициентом усиления  $k$  интегрирующего звена следует понимать отношение приращения выходной величины за единицу времени ко входной величине при условии, что последняя за это время не изменится.

Часто интегрирующее звено не соответствует конкретному элементу, а отражает математическую зависимость, например, между углом поворота  $\beta(t)$  и угловой скоростью  $\Omega(t)$  вала исполнительного двигателя следящей системы.

Переходная функция интегрирующего звена показана на рисунке 5.18а.

$$h(t) = kt$$

Импульсная переходная функция интегрирующего звена показана на рисунке 5.18 б

$$g(t) = h'(t) = k$$

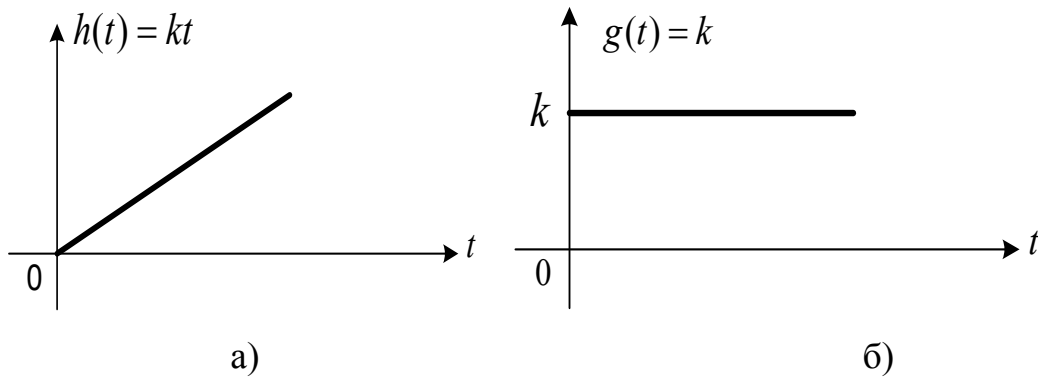


Рисунок 5.18 – Переходная и импульсная переходная функции интегрирующего звена

Примером интегрирующего звена может служить двигатель постоянного тока с постоянным током возбуждения, у которого можно пренебречь электромагнитной и электромеханической постоянными времени. Входной величиной является напряжение входа, а выходной - угол поворота вала.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика интегрирующего звена находится из выражения для комплексной передаточной функции звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

Учитывая, что 
$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

Получим выражение комплексной передаточной функции интегрирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где 
$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Из полученных выражений можем построить амплитудно-фазовую частотную характеристику интегрирующего звена (рисунок 5.19). Эта характеристика представляет собой прямую, совпадающую с осью отрицательных мнимых чисел.

Аргумент  $\varphi$  не зависит от частоты, т. е. интегрирующее звено вносит запаздывание колебаний по фазе равное  $90^\circ$  на всех частотах.

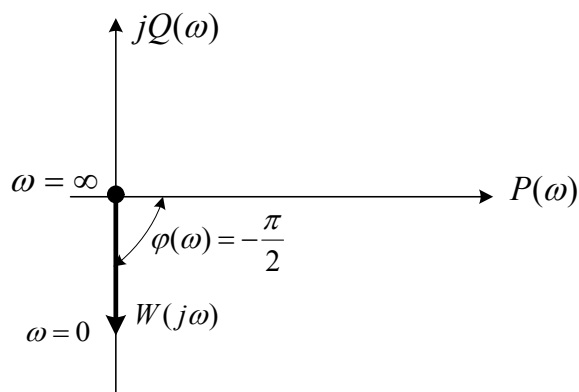


Рисунок 5.19 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика интегрирующего звена

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика интегрирующего звена (ЛАХ), полученная в результате логарифмирования комплексной передаточной функции звена, соответствует выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega,$$

то есть логарифмическая амплитудная характеристика – это сумма двух слагаемых, первое из которых не зависит от частоты. ЛАХ интегрирующего звена представляет собой прямую, проходящую через точку  $\omega = 1$  на расстоянии  $20 \lg k$  от оси абсцисс и имеющую наклон  $-20$  дБ/дек. Логарифмическая амплитудная характеристика показана на рисунке 5.20 а. Логарифмическая фазовая частотная характеристика интегрирующего звена строится по формуле

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

и представляет собой линию, параллельную оси частот на рисунке 5.20 б.

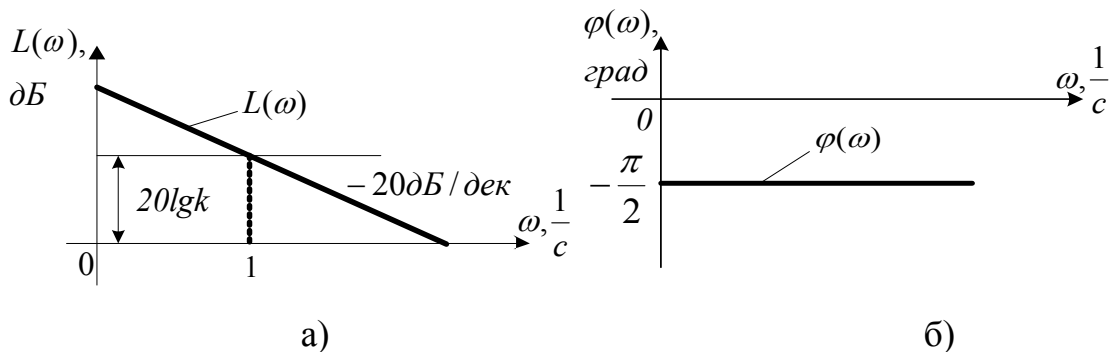


Рисунок 5.20 Логарифмическая амплитудная характеристика и логарифмические фазовые частотные характеристики интегрирующего звена

## 5.5 Дифференцирующее звено

Идеальным дифференцирующим звеном называется звено, выходная величина которого пропорциональна скорости изменения входного воздействия. Уравнение динамики дифференцирующего звена

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}$$

Идеальных дифференцирующих звеньев не существует. Практически приходится иметь дело со звеньями, обладающими некоторой инерционностью. Дифференциальное уравнение такого звена имеет вид

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вх}} = kT \frac{dx_{\text{вх}}}{dt},$$

где  $T$ ,  $k$  – постоянная времени и коэффициент усиления звена соответственно.

В операторной форме уравнение дифференцирующего звена

$$(Ts + 1)X_{\text{вых}} = kTsX_{\text{вх}}$$

Дифференцирующие звенья применяются как средства, корректирующие (улучшающие) переходный процесс. Примерами их являются стабилизирующие трансформаторы, емкостные дифференцирующие контуры, дифференцирующие мостовые схемы и другие. Передаточная функция идеального дифференцирующего звена

$$W(s) = ks,$$

переходная функция

$$h(t) = k\delta(t)$$

Уравнение амплитудно-фазовой частотной характеристики для реального дифференцирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{k\omega T}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} e^{j\arctg \frac{1}{\omega T}}$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика дифференцирующего звена представляет собой уравнение окружности с центром на вещественной оси на расстоянии  $k/2$  от начала координат. Амплитудная фазовая частотная характеристика дифференцирующего звена показана на рисунке 5.21.



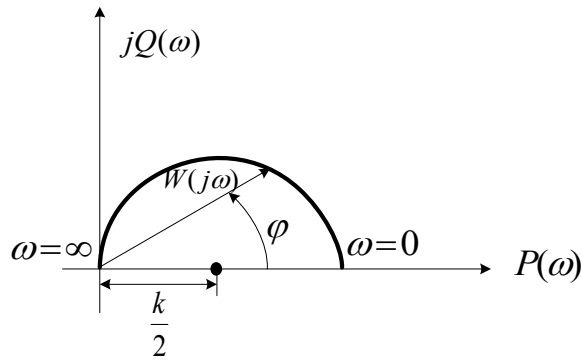


Рисунок 5.21 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика дифференцирующего звена

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  вектор  $W(j\omega)$  повернется на угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика дифференциального звена может быть получена, если прологарифмировать комплексную передаточную функцию звена  $W(j\omega)$ .

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega T - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика дифференцирующего звена

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega T}$$

Логарифмическая амплитудная характеристика  $L(\omega)$  строится по трем составляющим:

- $L_1(\omega) = 20 \lg k$  – прямая параллельная оси абсцисс;
- $L_2(\omega) = 20 \lg \omega T$  – прямая, имеющая положительный наклон  $20 \text{дБ/дек}$ ;

–  $L_3(\omega) = -20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$  – две прямые, сопрягающиеся в точке  $\omega_s = 1/T$ , одна из которых совпадает с осью абсцисс, а вторая имеет отрицательный наклон  $-20 \text{дБ/дек}$ . Суммируя составляющие, получим результирующую логарифмическую амплитудную характеристику дифференцирующего звена  $L(\omega)$  (рисунок 5.22).

Логарифмическая фазовая характеристика  $\varphi(\omega)$  строится по точкам: характерные точки  $\varphi(0) = 90^\circ$ ,  $\varphi(\omega_s) = 45^\circ$ ,  $\varphi(\infty) = 0$  (рисунок 5.22).

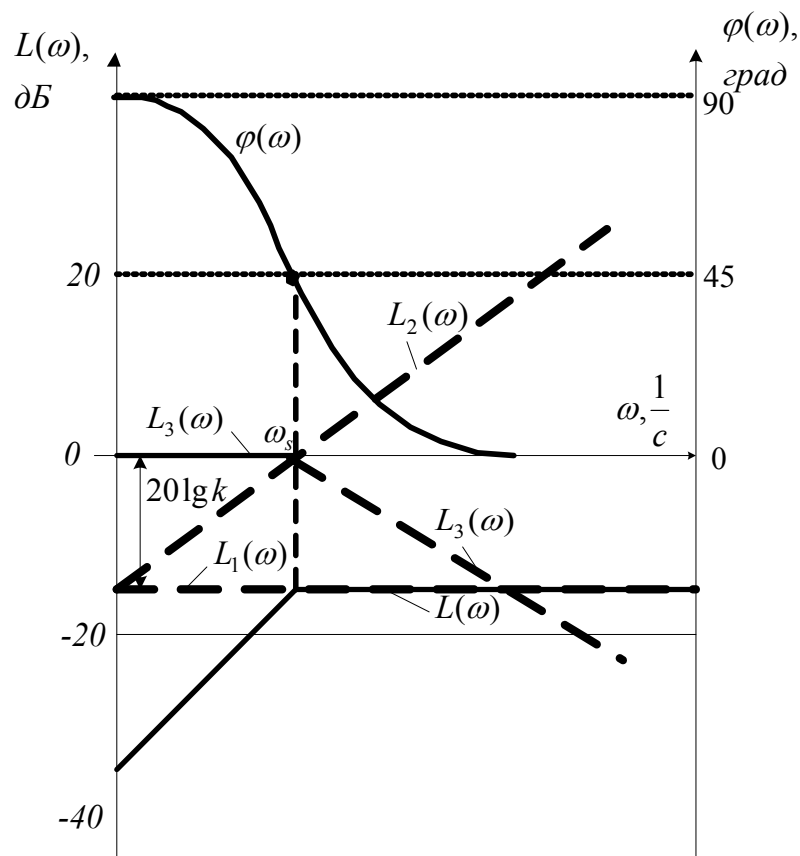


Рисунок 5.22 – Логарифмическая амплитудная характеристика и логарифмическая фазовая частотные характеристики дифференцирующего звена

### 5.6 Запаздывающее звено

Это звено передает сигнал без искажений, но при этом выходной сигнал запаздывает на постоянную величину  $\tau$  по отношению к входному. Переходная функция запаздывающего звена по своей форме совпадает с переходной функцией пропорционального звена, но сдвинута по времени на  $\tau$ . Примерами запаздывающих звеньев являются релейный усилитель, в котором время запаздывания определяется временем срабатывания реле. Уравнение динамики запаздывающего звена

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$$

Передаточная функция запаздывающего звена

$$W(s) = ke^{-s\tau}$$

Комплексная передаточная функция запаздывающего звена

$$W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau} = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$$

График амплитудно-фазовой частотной характеристики представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом  $k$  (рисунок 5.23).

Логарифмические характеристики запаздывающего звена

$$L(\omega) = 20 \lg k$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

Таким образом, логарифмическая амплитудная частотная характеристика запаздывающего звена аналогична логарифмической амплитудной частотной характеристике усилительного звена, а логарифмическая фазная частотная характеристика представляет кривую с неограниченным возрастанием угла  $\varphi(\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$ .

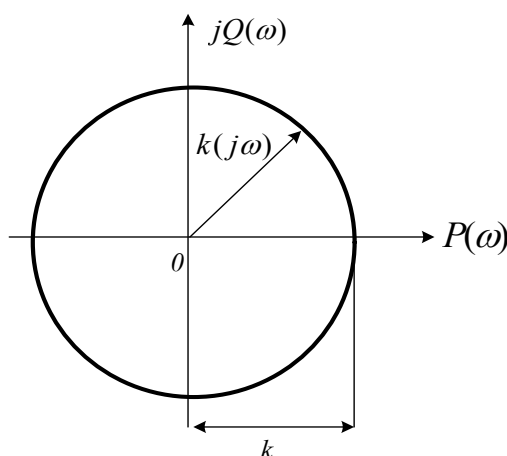


Рисунок 5.23 – Амплитудная фазовая частотная характеристика запаздывающего звена

## 6 Структурные схемы и их преобразования

Система автоматического регулирования может быть изображена в виде схемы, состоящей из отдельных, связанных между собой звеньев. Такая схема является математической структурой реальной физической системы и называется структурной схемой. Динамические звенья, входящие в ее состав, образуют основную цепь воздействий и цепи обратной связи. Звенья соединяются между собой линиями связей, стрелки показывают направление действия сигнала. Структурные схемы содержат узлы сравнения или суммирования, и точки разветвления сигнала. Линии связи, отходящие от точки разветвления, несут одни и те же сигналы. Структурные схемы дают возможность более простым способом составить операторную и передаточную функцию системы, необходимые для исследования её динамических свойств. Структурные схемы, содержащие несколько динамических звеньев можно преобразовать к более простому виду,

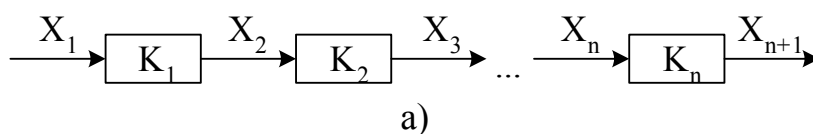
применяя формулы преобразования. Наиболее часто встречающиеся структурные преобразования приведены в приложении В.

### 6.1 Преобразование схем из последовательно соединенных звеньев

Последовательно соединенные звенья (рисунок 6.1) с передаточными функциями  $K_1, K_2, \dots, K_n$  могут быть заменены одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n$$

Исходная схема



Эквивалентная схема

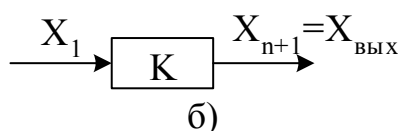
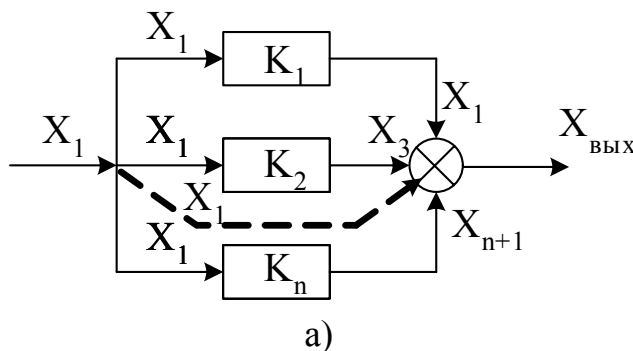


Рисунок 6.1 – Последовательное соединение звеньев

### 6.2 Преобразование схем из параллельно соединенных звеньев

Исходная схема



Эквивалентная схема

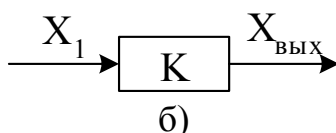


Рисунок 6.2 – Преобразование параллельно соединенных звеньев

Параллельно соединенные звенья (рисунок 6.2) с передаточными функциями  $K_1, K_2, \dots, K_n$  можно заменить эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$$

### 6.3 Преобразование схем, состоящих из звеньев, охваченных обратной связью

В этом случае последовательно (рисунок 6.3 а) или параллельно (рисунок 6.3 б) соединенные звенья заменяются одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией, в результате чего структурная схема принимает вид, изображенный на рисунке 6.3 в.

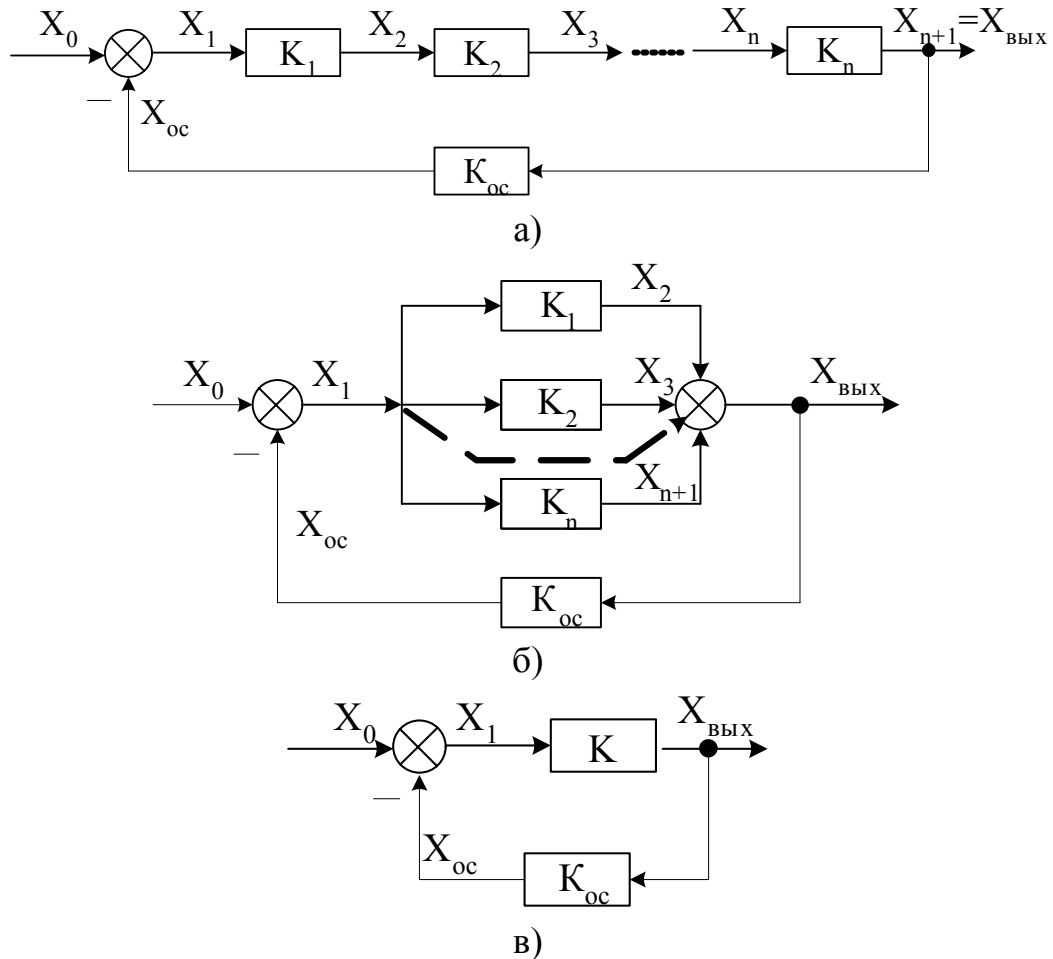


Рисунок 6.3 – Преобразование схем, состоящих из звеньев, охваченных обратной связью

Для этой системы, имеющей отрицательную обратную связь, передаточная функция определяется по формуле:

$$W = \frac{K}{1 + K_{oc} K}$$

Если система содержит не отрицательную, а положительную обратную связь, то в знаменателе выражения должен стоять знак минус:

$$W = \frac{K}{1 - K_{oc} K}$$

## 6.4 Инверсная перестановка звеньев

На рисунке 6.4 показаны исходная – а) и преобразованная – б) схемы.

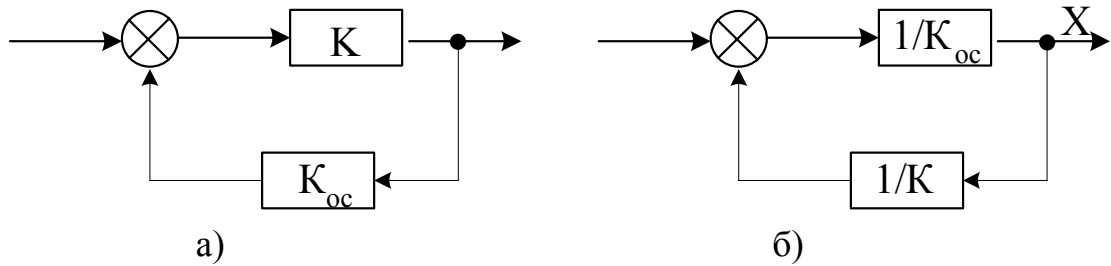


Рисунок 6.4 – Инверсная перестановка звеньев

Эквивалентность обеих схем доказывается равенством их передаточных функций:

$$\frac{K}{1 + KK_{oc}} = \frac{\frac{1}{K_{oc}}}{1 + \frac{1}{KK_{oc}}}$$

## 6.5 Перенос точки разветвления сигнала

Передаточная функция исходной схемы (рисунок 6.5)

$$K = \frac{K_1 K_2}{1 + K_{oc} K_1 K_2} K_3 \quad (6.1)$$

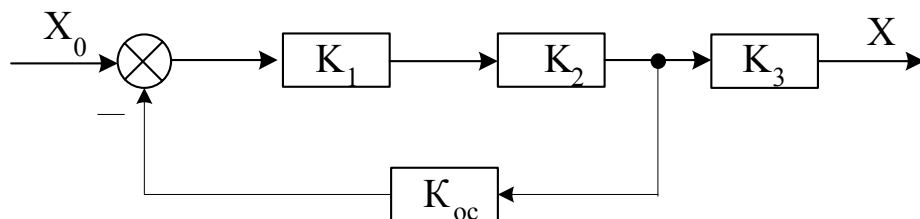


Рисунок 6.5 – Перенос точки разветвленного сигнала

При переносе точки разветвления сигнала в цепи основных звеньев по направлению действия основного сигнала получим эквивалентную схему в цепь обратной связи, которой добавляются звенья с передаточными функциями, обратными передаточным функциям дополнительно охватываемых звеньев (рисунок 6.6 а). Передаточная функция преобразованной схемы равна передаточной функции исходной схемы

$$K = \frac{K_1 K_2 K_3}{1 + K_{oc} K_1 K_2 K_3 \cdot \frac{1}{K_3}}$$

При переносе точки разветвления сигнала против направления действия основного сигнала получим эквивалентную схему (рисунок 6.6 б) В цепь обратной связи схемы добавляются звенья с передаточными функциями звеньев, вынесенных из контура, охватываемого обратной связью. Передаточная функция в этом случае также равна передаточной функции исходной схемы.

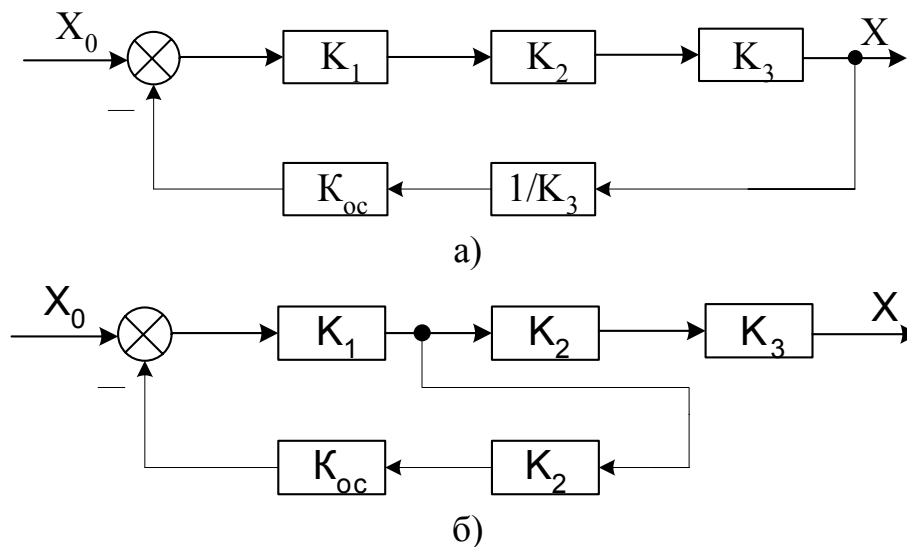


Рисунок 6.6 – Эквивалентные схемы а) при переносе точки разветвления по направлению б) при переносе точки разветвления против направления.

$$K = \frac{K_1}{1 + K_{oc} K_1 K_2} \cdot K_2 K_3$$

## 6.6 Перенос суммирующего узла в другую точку схемы

Передаточная функция исходной схемы (рисунок 6.7 а)

$$K = K_1 \frac{K_2 K_3}{1 + K_{oc} K_2 K_3} \quad (6.2)$$

При переносе суммирующего узла по направлению основного сигнала получим эквивалентную схему (рисунок 6.7 б)

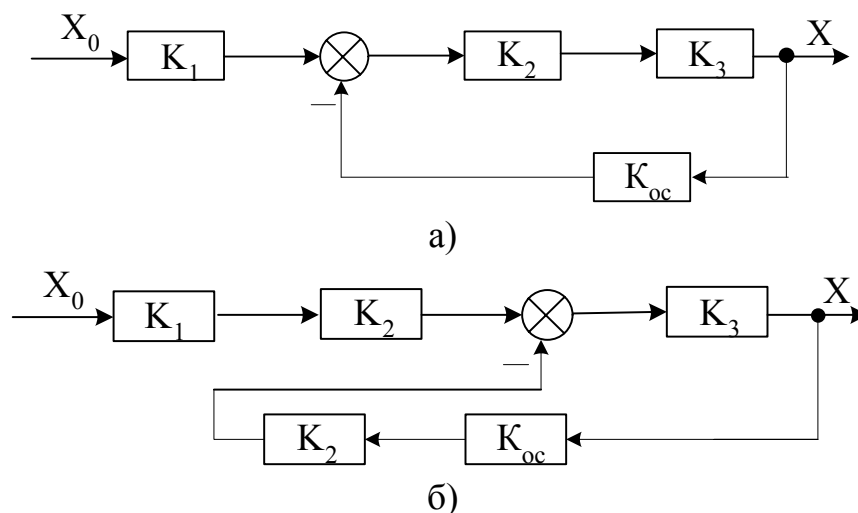


Рисунок 6.7 – Перенос суммарного узла в другую точку схемы по направлению действия сигнала

В цепь обратной связи этой схемы добавляются звенья, вынесенные из контура, охватываемого обратной связью. Передаточная функция эквивалентной схемы

$$K = K_1 K_2 \frac{K_3}{1 + K_{oc} K_2 K_3}$$

соответствует передаточной функции исходной схемы.

При переносе суммирующего узла против направления действия основного сигнала, получим эквивалентную схему (рисунок 6.8)

В цепь обратной связи этой схемы добавляются звенья с передаточными функциями, обратными передаточным функциям дополнительно охватываемых обратной связью основных звеньев. Передаточная функция эквивалентной схемы равна исходной передаточной функции

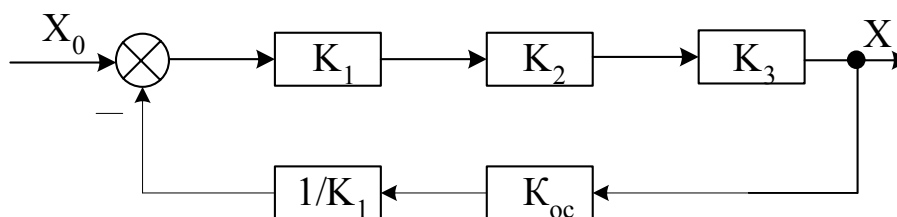


Рисунок 6.8 – Перенос суммирующего узла в другую точку схемы против направления действия сигнала

$$K = \frac{K_1 K_2 K_3}{1 + K_{oc} \frac{1}{K_1} K_1 K_2 K_3}$$



## 6.7 Разделение цепи, несущей $n$ сигналов, на $n$ параллельных цепей

В каждую цепь эквивалентной схемы вводятся звенья с передаточными функциями тех звеньев, которые входили в общую цепь исходной схемы (рисунок 6.9)

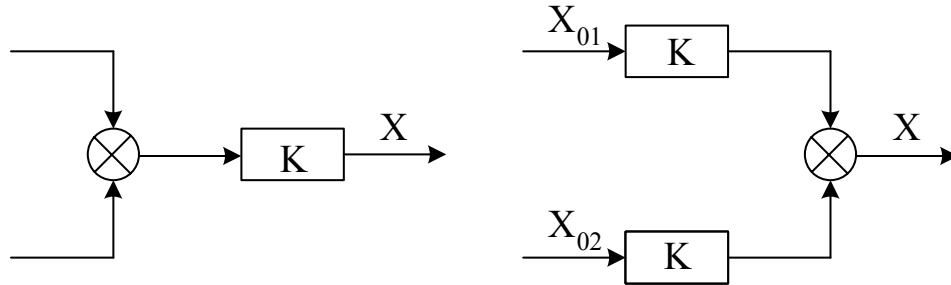


Рисунок 6.9 – Разделение цепи, несущей  $n$ -сигналов, на  $n$ -параллельных цепей

## 6.8 Объединение нескольких параллельных цепей, содержащих одни и те же элементы

В общую цепь эквивалентной схемы вводится один и тот же элемент на (рисунке 6.10 а и б) приведено преобразование структурной схемы с мостовой связью в более простую.

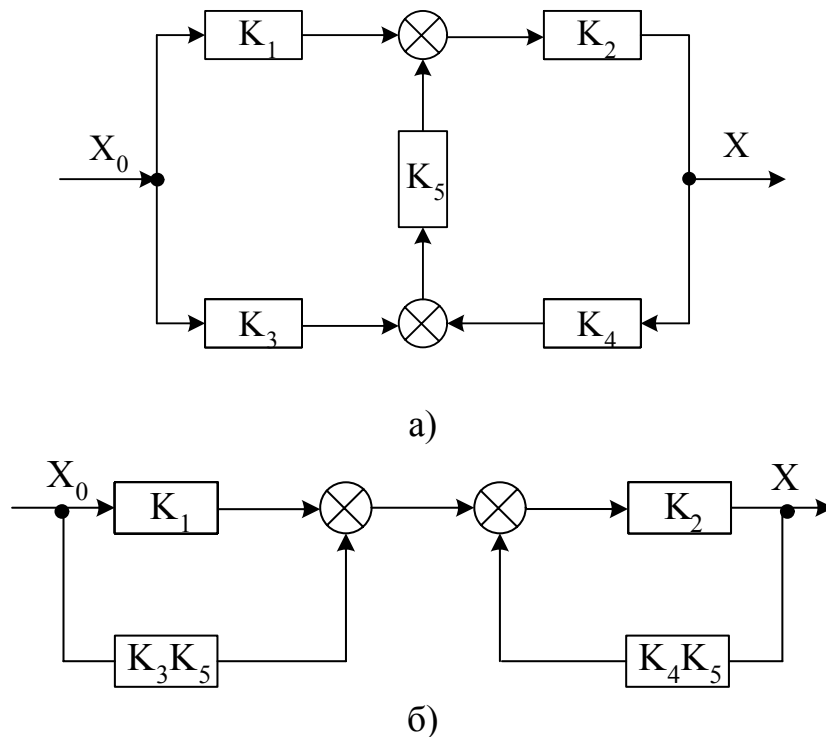


Рисунок 6.10 – Объединение нескольких параллельных цепей, содержащих одни и те же элементы

## 7 Устойчивость системы автоматического управления

Под устойчивостью понимают способность системы самостоятельно приходить к последующему установившемуся состоянию после приложения воздействия, которое вывело ее из состояния равновесия. Замкнутая система в силу свойств, обусловленных наличием обратной связи, склонна к неустойчивой работе. Приложение внешнего воздействия может привести к возмущенному состоянию системы, сопровождающемуся колебаниями регулируемой величины. Наличие главной обратной связи будет способствовать поддержанию колебательного процесса и если параметры системы не обеспечивают затухания, может привести к неустойчивой работе с неограниченным возрастанием амплитуды колебаний. В устойчивых системах энергия колебаний с течением времени уменьшается, стремясь рассеяться в виде тепла, а колебания затухают.

### 7.1 Устойчивость по Ляпунову

Понятие «устойчивость» в смысле его математической трактовки в науку ввел русский ученый А.М. Ляпунов.

При исследовании устойчивости системы автоматического управления в общем случае приходится иметь дело с нелинейными задачами. Нелинейное дифференциальное уравнение, характеризующее возмущенное состояние системы, может быть разложено в ряд Тейлора и представлено в виде уравнения первого, второго или  $n$ -ого приближения, содержащего величины первого, второго или  $n$ -ого порядка малости.

А.М. Ляпунов показал, что все случаи исследования устойчивости следует разделять на две категории: не критических и критических случаев. Для не критических случаев справедливы две теоремы.

Теорема 1. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то система будет устойчивой независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то система будет неустойчивой независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Все критические случаи имеют место лишь тогда, когда среди корней характеристического уравнения первого приближения есть некоторая группа корней, вещественная часть которых равна нулю, а остальная группа корней имеет отрицательную вещественную часть. В этом случае вопрос об устойчивости не может быть решен на основании исследования уравнений первого приближения.

Пусть, например, система описывается линейным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = \frac{b}{a_n} + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}$$

где  $p$  - корни характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Если система устойчива, то функция  $x(t)$  при  $t$ , стремящемся к бесконечности, будет стремиться к  $\frac{b}{a_n}$ , что возможно лишь в том случае, если каж-

дый из членов  $c_i e^{p_i t}$  будет стремиться к нулю. Для этого все корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  должны иметь отрицательную вещественную часть.

Линейные системы, характеристические уравнения которых имеют один нулевой корень, при всех остальных корнях расположенных левее мнимой оси, называют нейтрально-устойчивыми.

При исследовании устойчивости системы автоматического управления возможно решение следующих задач:

- 1) выяснение, является ли устойчивой система при заданных параметрах;
- 2) определение допустимых изменений параметров без нарушения устойчивости системы;
- 3) анализ структуры системы и определение параметров, при которых она может стать устойчивой.

Первая задача может быть решена разными методами. Можно определить корни характеристического уравнения, и по ним определить знаки их вещественных частей, но это для уравнения ниже третьего порядка. Другие методы основываются на использовании критериев устойчивости - алгебраических критериев Рауса – Гурвица, частотных критериев Михайлова, Найквиста, а также условий устойчивости, определяемых логарифмическими частотными характеристиками.

## 7.2 Алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица

Алгебраические критерии устойчивости позволяют установить, устойчива ли система или нет, по результатам алгебраических действий над коэффициентами характеристического уравнения. Условия, устанавливающие факт отрицательных вещественных частей корней и будут являться критериями устойчивости. Впервые подобный критерий был предложен Раусом, а затем Гурвицем. Эти критерии одинаковы по содержанию и отличаются только формой их выражения. Критерий Гурвица нашел более широкое применение.

Пусть дано характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Вещественные части корней будут отрицательны в том случае, если все коэффициенты уравнения и диагональные миноры главного определителя будут положительными. Главный определитель составляется так, что по главной диагонали выписываются коэффициенты уравнения, начиная с  $a_1$  в возрастающем порядке до  $a_n$ . От каждого коэффициента главной диагонали по вертикали вверх выписываются коэффициенты с возрастающими и вниз – с убывающими индексами. Места в матрице коэффициентов с индексами больше  $n$  и меньше нуля заполняются нулями.

Рассмотрим выражение критерия Гурвица для некоторых уравнений. Уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + \dots + a_2 p + a_3 = 0$$

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Условие Гурвица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Следовательно, система будет устойчивой, если все коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3$  положительны и

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Для уравнения четвертого порядка

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$$

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

Условие Гурвица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 > 0$$

или

$$\Delta_2 = a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_1^2 a_4 > 0$$

Определитель  $\Delta_2$  может быть положительным лишь при условии  $\Delta_1 > 0$ . Поэтому условие устойчивости для уравнения четвертого порядка

$$a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_1^2 a_4 > 0$$

### 7.3 Критерий Найквиста

Критерий Найквиста, основанный на использовании частотных характеристик, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы автоматического управления по её амплитудно-фазовой частотной характеристике в разомкнутом состоянии.

Замкнутая система будет устойчивой в том случае, если устойчива разомкнутая система и её амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку  $(-1; j0)$ .

Кривая, представляющая частотную характеристику устойчивой системы, пересекается с осью абсцисс справа от точки  $(-1; j0)$  и называется амплитудно-фазовой характеристикой первого рода (рисунок 7.1).

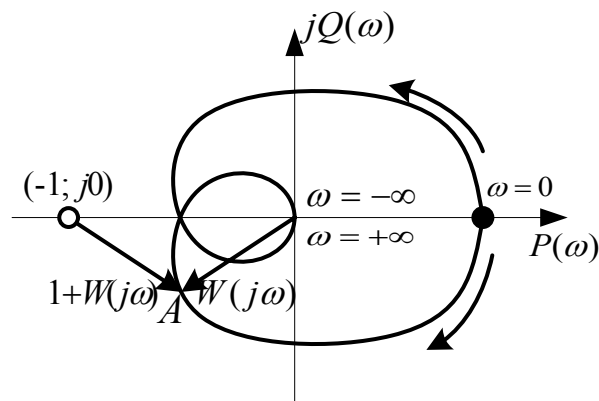


Рисунок 7.1 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы автоматического регулирования первого рода

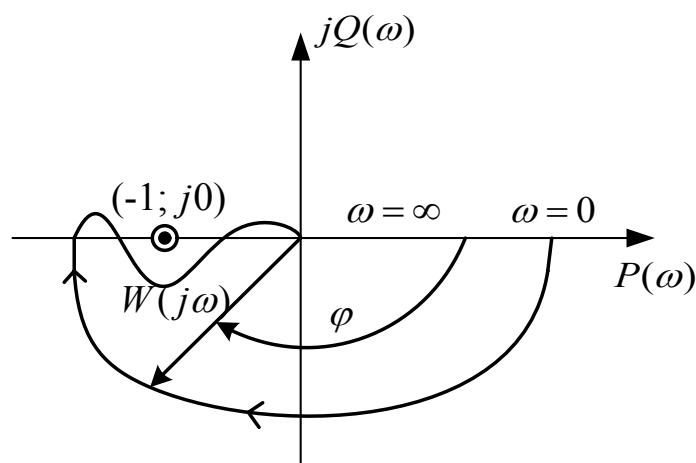


Рисунок 7.2 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы автоматического регулирования второго рода

Кривая, пересекающаяся с осью абсцисс и справа и слева от точки  $(-1; j0)$ , называется амплитудно-фазовой характеристикой второго рода (рисунок 7.2).

В этом случае система в замкнутом состоянии будет устойчивой при условии, если разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов амплитудно-фазовой характеристики через ось абсцисс слева от точки  $(-1; j0)$  равна нулю.

При анализе устойчивости системы по амплитудно-фазовой характеристике целесообразно ввести понятие запаса устойчивости по модулю и фазе.

Если через точку  $(-1; j0)$  провести окружность единичного радиуса, получим точку пересечения её с амплитудно-фазовой характеристикой (точка  $A$ ). Запас устойчивости по модулю характеризуется отрезком  $h$ , а запас устойчивости по фазе – углом  $\gamma$  (рисунок 7.3).

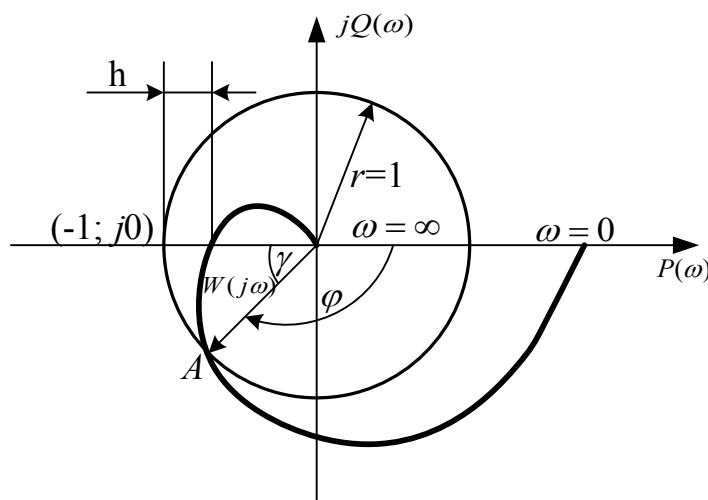


Рисунок 7.3 – Оценка запасов устойчивости по амплитудно-фазовой частотной характеристике

В практике целесообразно пользоваться другой формулировкой критерия Найквиста. Система автоматического управления, неустойчивая в разомкнутом состоянии, является устойчивой в замкнутом состоянии, если разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики через ось абсцисс слева от точки  $(-1; j0)$  равна  $\frac{r}{2}$ . Где  $r$  - число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью. Сформулированный ранее критерий устойчивости Найквиста следует рассматривать как частный случай общей задачи при  $r = 0$ .

#### 7.4 Критерий устойчивости Михайлова

Передаточная функция системы автоматического регулирования

$$W(s) = \frac{D(s)}{Q(s)},$$

где  $D(s)$  - характеристический полином.

Чтобы все корни характеристического уравнения:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

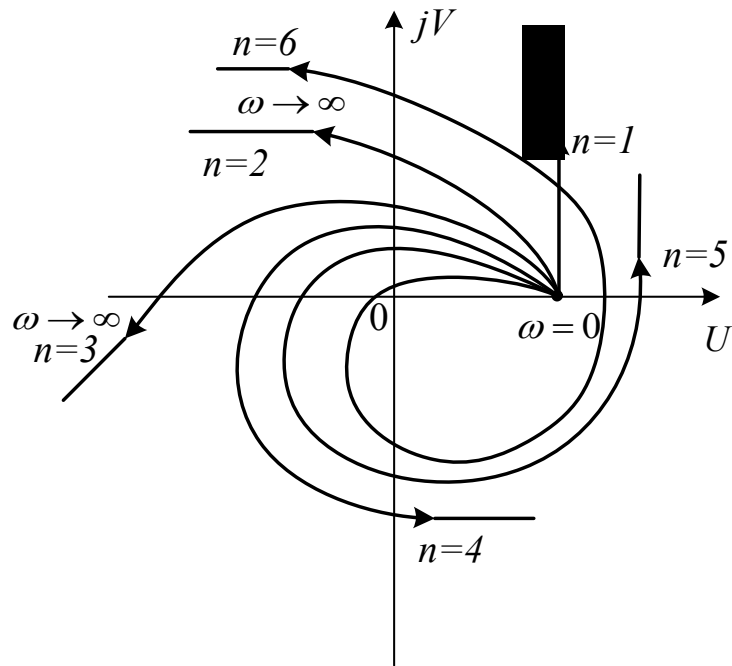
имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы после подстановки частоты в соответствующий полином  $D(s)$  полное приращение его фазы при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  составляло  $\frac{n\pi}{2}$ , где  $n$  – степень полинома  $D(s)$ . При этом характеристический полином опишет в комплексной плоскости кривую – «годограф Михайлова».

Примеры годографов Михайлова для устойчивых систем приведены на рисунке 7.4 а для неустойчивых систем – на рисунке 7.4 б.

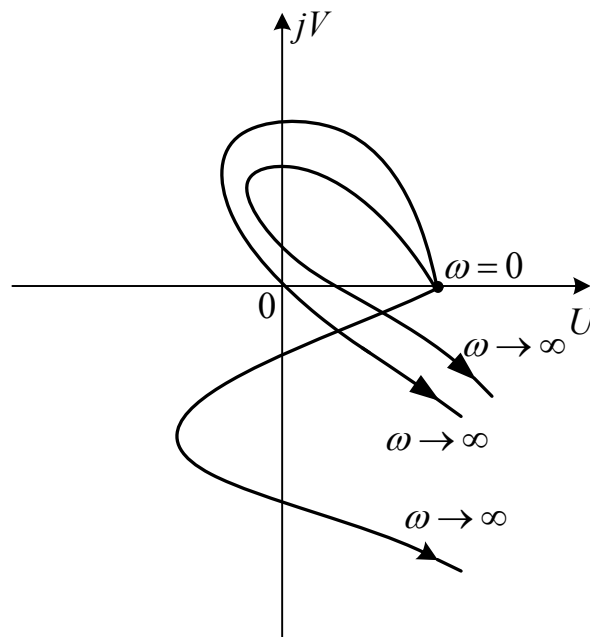
Свойства годографа Михайлова:

- 1) годограф всегда спиралевиден
- 2) при  $\omega = 0$ , угол поворота годографа равен нулю, следовательно годограф начинается на положительной вещественной полуоси;
- 3) так как при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $K(j\omega) \rightarrow 0$ , годограф уходит в бесконечность.
- 4) При четном  $n$ , годограф стремится к  $\infty$  параллельно вещественной оси «+1», при нечетном  $n$  годограф стремится к  $\infty$  параллельно оси «+j».

Полная формулировка критерия Михайлова: для того, чтобы замкнутая система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического многочлена замкнутой системы начинался на положительной части действительной оси и проходил последовательно в положительном направлении, не попадая в начало координат,  $n$  квадрантов комплексной плоскости, при изменении частоты от 0 до  $\infty$  (здесь  $n$  - порядок характеристического уравнения системы).



а)



б)

Рисунок 7.4 – Пример годографа Михайлова

а) для устойчивых систем автоматического регулирования;

б) для неустойчивых систем автоматического регулирования;

Для построения годографа в прямоугольной системе координат необходимо записать  $W(j\omega)$  в виде суммы  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$

Пример 7.1

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы:



$$s^3 + 55s^2 + 700s + 11250 = 0$$

Проверить устойчивость системы путем построения годографа Михайлова. Для этого положим  $s = j\omega$ , тогда уравнение разделяется на действуюшую и мнимую части

$$U(\omega) = 11250 - 55\omega^2$$

$$V(\omega) = \omega(700 - \omega^2)$$

Зададимся различными значениями  $\omega$  и вычислим  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$ . По полученным данным построим годограф Михайлова (рисунок 7.5). Годограф при  $n = 3$  обходит в положительном направлении три квадранта, следовательно, система устойчива.

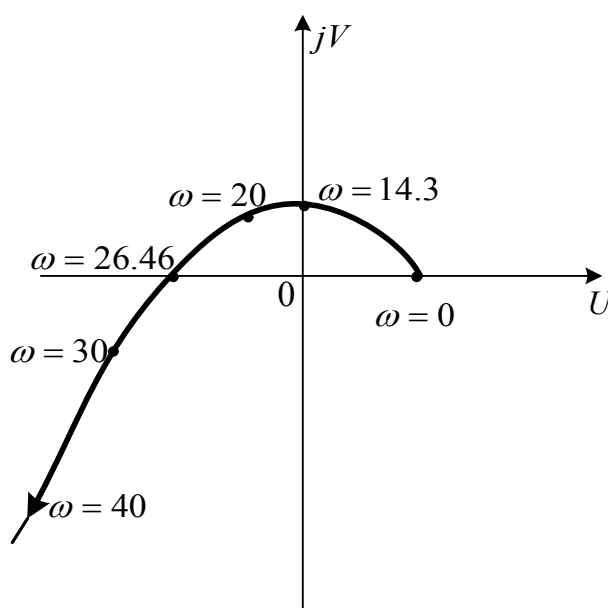


Рисунок 7.5 – Годограф Михайлова для примера 7.1

### 7.5 Условия устойчивости замкнутой системы, основанные на использовании логарифмических частотных характеристик

Метод основывается на возможности суждения об устойчивости замкнутой системы по взаимному расположению логарифмических амплитудной и фазовой характеристик системы в разомкнутом состоянии. Согласно критерию Найквиста, в случае, если система устойчива, точка  $(-1; j0)$  лежит слева от амплитудно-фазовой характеристики первого рода. Если система устойчива, то при  $\varphi = -\pi$  величина  $|W(j\omega)| < 1$  и  $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| < 0$ , то есть ордината логарифмической амплитудной характеристики будет иметь отрицательный знак (рисунок 7.6)

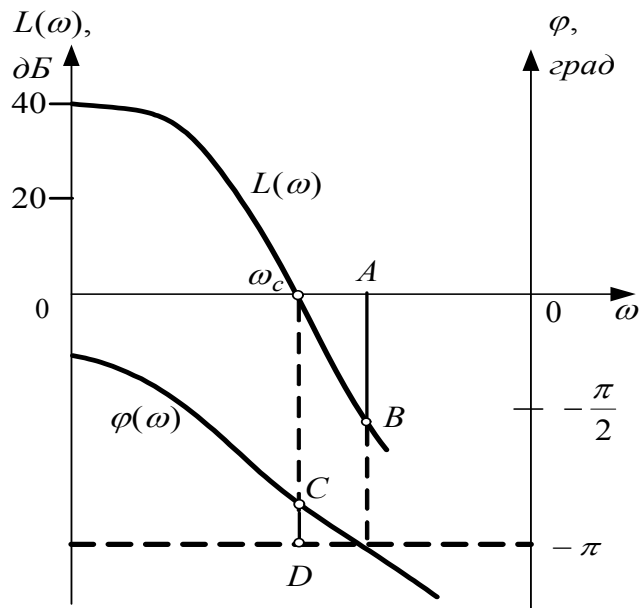


Рисунок 7.6 – Логарифмические характеристики устойчивой системы

При значениях аргумента характеристического вектора  $W(j\omega)$  разомкнутой системы  $\varphi = -\pi$  и модуля  $|W(j\omega)| = 1$  система будет находиться на границе устойчивости. При этом  $L(\omega) = 20 \lg|W(j\omega)| = 0$ , то есть логарифмическая амплитудная характеристика пересекает ось абсцисс, точка пересечения характеризуется частотой среза  $\omega_c$  (рисунок 7.7).

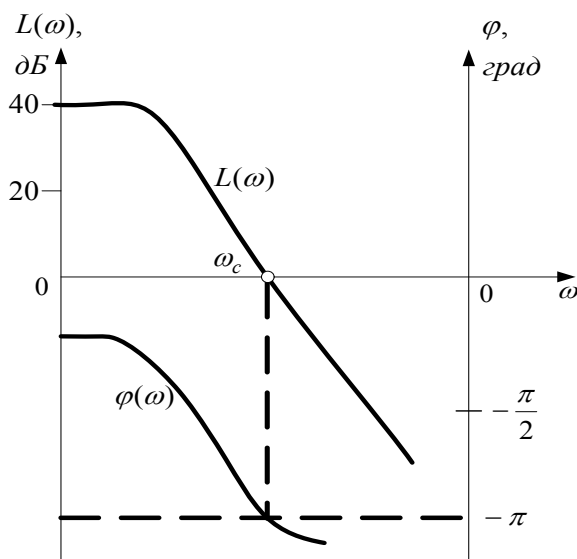


Рисунок 7.7 – Логарифмические характеристики системы, находящиеся на границе четности

При неустойчивой системе углу  $\varphi = -\pi$  соответствуют величины  $|W(j\omega)| > 1$  и  $L(\omega) = 20 \lg|W(j\omega)| > 0$ . В этом случае ордината логарифмической амплитудной характеристики будет иметь положительное значение (рисунок 7.8)

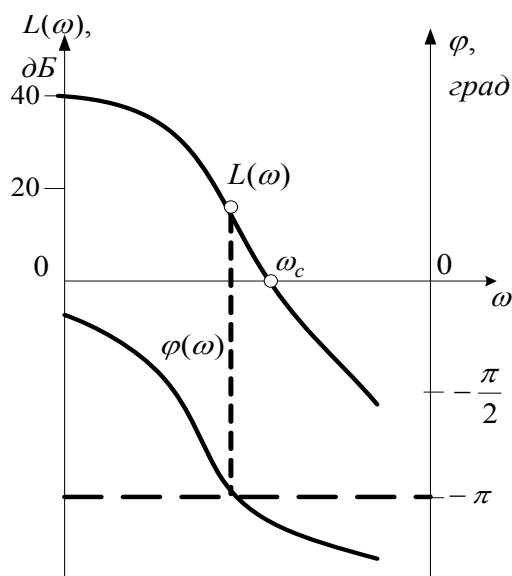


Рисунок 7.8 – Логарифмические характеристики неустойчивой системы

Таким образом, при амплитудно-фазовой характеристике первого рода система будет устойчивой в том случае, если ордината логарифмической частотной характеристики при фазовом угле  $\varphi = -\pi$  имеет отрицательный знак. Отрезок  $AB$  - запас устойчивости по модулю,  $CD$  – запас устойчивости по фазе (рисунок 7.6).

Условия устойчивости при амплитудно-фазовой характеристике второго рода применительно к логарифмической частотной характеристике можно сформулировать следующим образом:

Для того, чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива также и в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики  $\varphi(\omega)$  через прямую  $(-\pi)$  при тех же значениях  $\omega$ , при которых логарифмическая амплитудная характеристика  $L(\omega)$  неотрицательна, равнялась нулю (рисунок 7.9).

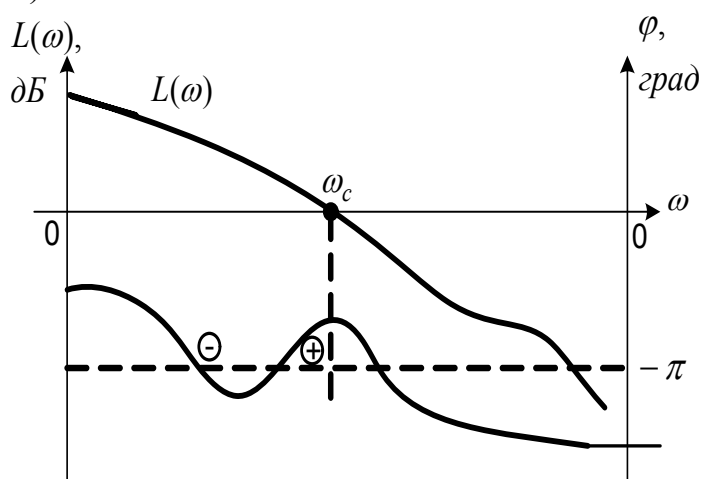


Рисунок 7.9 – Логарифмические характеристики системы второго рода

## 7.6 Критерии устойчивости по взаимному расположению логарифмических характеристик для систем, имеющих неустойчивые звенья

Для того, чтобы система автоматического регулирования, разомкнутая передаточная функция которой имеет  $m$  неустойчивых звеньев, была устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно иметь разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики линии  $(-\pi)$ , равную  $\frac{m}{2}$ , при значениях частот, для которых логарифмическая амплитудная характеристика положительна. (рисунок 7.10)

$m$  - число неустойчивых звеньев

$h$  - запас устойчивости по модулю

$\gamma$  - запас устойчивости по фазе

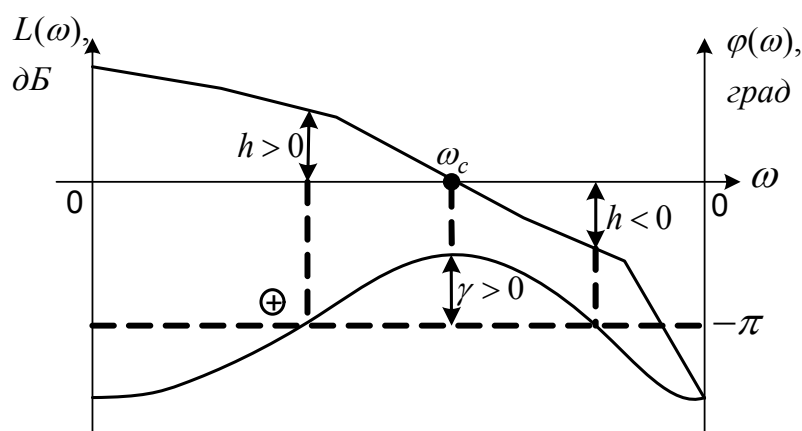


Рисунок 7.10 – Логарифмическая частотная характеристика системы с неустойчивыми звеньями

На рисунке 7.10 изображены логарифмические частотные характеристики для системы, имеющей два неустойчивых звена,  $m = 2$ . Фазовая характеристика пересекает линию  $(-\pi)$  в положительном направлении один раз  $\frac{m}{2} = \frac{2}{2} = 1$ , значит система устойчива и обладает достаточными запасами устойчивости по модулю и по фазе.

## 7.7 Структурная устойчивость систем автоматического управления

Структурная схема системы автоматического управления состоит из звеньев, число, свойства и способы соединения которых выбираются в зависимости от требований к характеристикам системы. Кроме элементарных динамических звеньев в систему могут входить консервативные звенья с положительным и отрицательным статизмом, звенья первого и второго порядка и так далее.

Передаточная функция консервативного звена с положительным статизмом

$$W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 + 1}$$

с отрицательным статизмом

$$W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 - 1}$$

Передаточная функция идеального форсирующего звена

$$W(S) = TS + 1$$

Форсирующее звено можно представить как параллельное соединение двух звеньев – усилительного с  $k = 1$  и идеального дифференцирующего.

Структурно-устойчивой называется такая система, которая может быть сделана устойчивой путем выбора соответствующих параметров без изменения ее структуры. Структурно-неустойчивая система будет неустойчивой при любых значениях параметров, и ее можно сделать устойчивой, только изменив структурную схему.

Рассмотрим примеры структурных схем устойчивых и неустойчивых.

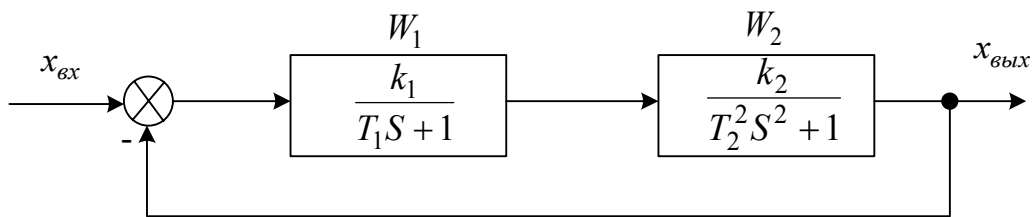


Рисунок 7.11 – Структурная схема системы автоматического регулирования

Схема, изображенная на рисунке 7.11 состоит из инерционного и консервативного звеньев, которые охвачены отрицательной обратной связью с коэффициентом, равным единице.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$1 + W_1(s) \cdot W_2(s) = 0$$

$$(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 1) + k_1 k_2 = 0$$

$$\underbrace{T_1 T_2^2}_{a_0} s^3 + \underbrace{T_2^2}_{a_1} s^2 + \underbrace{T_1}_{a_2} s + \underbrace{(1 + k_1 k_2)}_{a_3} = 0$$

Запишем условие устойчивости системы по критерию Гурвица:

$$\begin{vmatrix} T_2^2 & (1+k_1k_2) & 0 \\ T_1T_2^2 & T_1 & 0 \\ 0 & T_2^2 & (1+k_1k_2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} T_2 & 1+k_1k_2 \\ T_1T_2^2 & T_1 \end{vmatrix} = T_1T_2 - T_1T_2^2(1+k_1k_2) < 0$$

и условие устойчивости не выполняется.

При положительных значениях  $T_1, T_2, k_1, k_2$ , это условие приводится к виду  $-k_1k_2 < 0$ , таким образом, система оказывается структурно неустойчивой при любых параметрах и для того чтобы сделать её устойчивой, нужно изменить структурную схему.

Рассмотрим другую систему автоматического регулирования, имеющую структурную схему рисунок 7.12

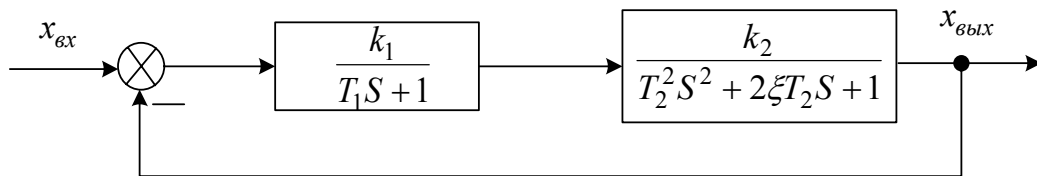


Рисунок 7.12 – Структурная схема системы автоматического регулирования

Характеристическое уравнение схемы, состоящей из колебательного и инерционного звеньев

$$(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1) + k_1 k_2 = 0$$

$$T_1 T_2^2 s^3 + (T_2^2 + 2\xi T_1 T_2) s^2 + (T_1 + 2\xi T_2) s + (1 + k_1 k_2) = 0$$

Условие устойчивости Гурвица

$$(T_1 + 2\xi T_2) + (T_2^2 + 2\xi T_1 T_2) - T_1 T_2^2 (1 + k_1 k_2) > 0$$

При подборе соответствующих параметров, можно добиться выполнения условия устойчивости Гурвица, значит система устойчива.

Астатическое звено – это такое звено, при воздействии стремящемся с течением времени к установленному значению, у которого отклонение регулируемой величины стремится к нулю.

Для того, чтобы одноконтурная система, не содержащая неустойчивых звеньев или содержащая одно такое звено была структурно устойчивой необходимо и достаточно чтобы:

а) система, не имеющая неустойчивых звеньев, содержала не более одного астатического звена, а система, включающая одно неустойчивое звено, вообще не содержала астатических звеньев.

б) система, содержащая  $q$  консервативных звеньев, имела степень характеристического уравнения больше  $4q$ .

## 8 Исследование качества систем автоматического регулирования

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности систем автоматического регулирования. Устойчивость системы регулирования означает лишь то, что в системе происходит затухание переходного процесса под влиянием управляющего или возмущающего внешнего воздействия.

Качество регулирования принято оценивать следующими основными показателями: максимум перерегулирования, время регулирования (время протекания переходного процесса), число колебаний регулируемой величины за время переходного процесса и другие.

Показатели качества процессов регулирования можно определить различными методами:

- построение переходного процесса по заданным передаточным функциям замкнутых систем;
- определение показателей качества по расположению нулей и полюсов;
- интегральные оценки качества;
- частотные оценки качества и частотные методы построения переходного процесса.

Рассмотрим основные показатели качества систем автоматического регулирования, пользуясь характеристикой отработки единичного воздействия (рисунок 8.1)

$$g(t) = [1]$$

В точке  $A$  переходного процесса, соответствующей времени  $t_m$ , имеет место максимальное отклонение регулируемой величины  $x_m$ . Первый показатель качества – максимум перерегулирования:

$$\sigma_{\max} = \frac{y_m - y_{\infty}}{y_{\infty}} 100\%$$

где  $y_{\infty}$  - соответствует установившемуся значения регулируемой величины, то есть

$$y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

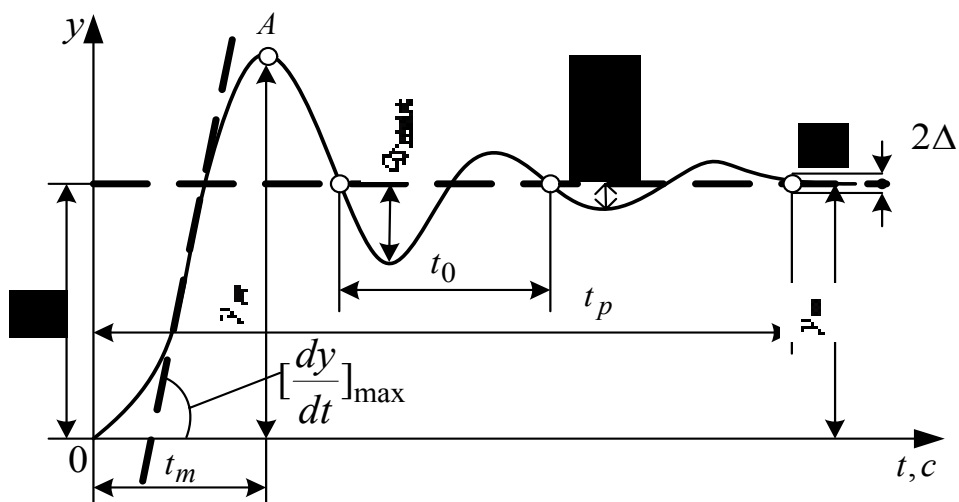


Рисунок 8.1 – Переходная функция системы автоматического регулирования

Максимумом перерегулирования называется отношение разности между максимальным и установившимся значениями регулируемой величины к ее установившемуся значению.

Второй показатель качества позволяет оценить быстродействие систем автоматического регулирования и называется временем регулирования (протекания переходного процесса)  $t_p$ . Учитывая, что полное затухание в системе происходит лишь при  $t \rightarrow \infty$ , условно принимают за момент окончания переходного процесса точку пересечения графика этого процесса с линиями, соответствующими отклонению от установившегося значения, равному  $\Delta$ . Значения  $\Delta$  могут быть выбраны из множества 5; 2,5; 1,5; 1; 0,5 ... [%] от  $y_\infty$ . Третий показатель качества характеризует число колебаний  $N_p$  регулируемой величины  $y(t)$  в течении времени переходного процесса  $t_p$ . Для устойчивых систем  $N_p = 3$ .

Наряду с этими основными показателями качества при проектировании системы автоматического регулирования часто используют следующие характеристики. Собственная частота колебаний системы

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0},$$

где  $t_0$  - период собственных колебаний.

Логарифмический декремент затухания системы  $d_c$ , характеризующий быстроту затухания колебательного процесса



$$d_c = \ln \frac{q_{i \max}}{q_{i+1 \max}},$$

где  $q_{i \max}$  и  $q_{i+1 \max}$  - две амплитуды для рядом расположенных экстремумов кривой переходного процесса.

Максимальная скорость отработки регулируемой величины  $[\frac{dy}{dt}]_{\max}$ . Для каждой системы регулирования, имеющих колебательный переходный процесс, на основе указанных критериев качества можно установить область допустимых отклонений регулируемой величины.

В системах автоматического регулирования возможны переходные процессы, характер которых отличен от рассматриваемого нами. Все многообразие переходных процессов можно разделить на четыре группы:

– колебательный процесс, характеризующийся несколькими значениями перерегулирования, превышающими 5% зоны установившегося значения (кривая 1 рисунок 8.2)

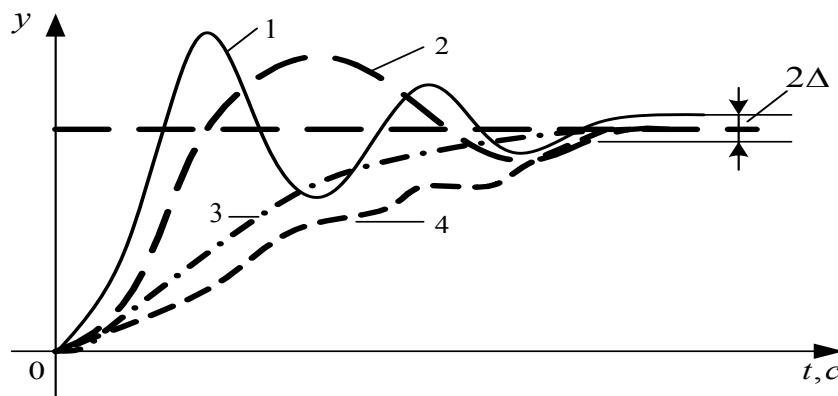


Рисунок 8.2 – Четыре вида переходных процессов

– переходные процессы с одним перерегулированием (кривая 2 рисунок 8.2);

– монотонный процесс (кривая 3 рисунок 8.2), когда скорость изменения регулируемой величины не меняет знака в течении всего времени  $t_p$ , то

есть  $\frac{dy}{dt} \geq 0$  при  $0 \leq t \leq t_p$ ;

– процесс без перерегулирования, когда  $y(t) < y(\infty)$  с точностью до  $\Delta$  при всех  $t$  (кривая 4 рисунок 8.2).

Работа системы автоматического управления характеризуется точностью, под которой понимается степень приближения действительного выходного сигнала  $y$  к его заданному значению  $y_0$ .

Величина  $\Delta y = y_0 - y$  называется ошибкой системы автоматического управления. Установившаяся ошибка обработки постоянного сигнала называется статической ошибкой. Текущая ошибка обработки переменного сигнала называется динамической ошибкой системы автоматического управления. Динамическая ошибка системы изменяется с течением времени. Она зависит от структуры, параметров и характера изменения воздействий системы автоматического управления. Статическая ошибка определяется структурой, параметрами и величиной постоянного воздействия системы автоматического управления.

Статическая ошибка замкнутой системы может быть определена непосредственно по передаточной функции системы при  $s = 0$ .

Астатическая система на входе содержит интегрирующее звено. И при постоянном задающем воздействии ошибка системы  $\Delta y = 0$ .

При оценке качества переходных процессов системы автоматического управления могут быть применены прямые и косвенные методы. Наиболее достоверные данные о показателях качества регулирования можно получить прямым методом — по кривой переходного процесса, найденной расчетным или экспериментальным путем при соответствующем виде воздействия. Расчет переходного процесса производится на основании дифференциального или операторного уравнения системы, составленного по ее структурной схеме. В случае высокого порядка уравнения расчет представляет трудоемкую задачу. На практике используют более простые косвенные методы оценки: интегральные и частотные методы.

Интегральные методы позволяют по некоторым определенным интегралам вида

$$\int_0^{\infty} y dt; \int_0^{\infty} y^2 dt; \int_0^{\infty} (y^2 + \tau^2 \dot{y}^2) dt$$

судить о быстродействии (первый и второй интегралы), а также о быстродействии и колебательности (третий интеграл) процесса. Метод интегральных оценок заключается в определении параметров системы, соответствующих минимуму интегральной ошибки. При использовании первого интеграла стремятся получить минимум линейной интегральной ошибки, представляющей площадь, ограниченную кривой переходного процесса и осями координат. В идеальном случае процесс перехода из одного состояния  $y = y_0$  в другое  $y = 0$  происходил бы мгновенно, и площадь, характеризующая линейную интегральную ошибку, равнялась бы нулю. В действительности при апериодическом процессе интегральная ошибка зависит от интенсивности спада значения величины  $y(t)$ . Время регулирования тем меньше, чем меньше интегральная ошибка. В случае перерегулирования и колебательного процесса данный интеграл неприменим, так как разные знаки ординат кривой могут дать суммарную интегральную ошибку, близкую к нулю при относительно большом времени регулирования. На практике больше распространена оценка быстродействия по квадра-

точной интегральной ошибке. Метод основывается на том, что действительная кривая  $y(t)$  тем ближе к идеальной, чем меньше  $\int_0^{\infty} y^2 dt$ . Способ вычисления квадратичных оценок заключается в том, что дифференциальное уравнение системы  $n$ -го порядка умножают последовательно на координату и ее производные до  $(n-1)$ -й включительно. Полученные  $n$  уравнений интегрируют почленно, и система линейных алгебраических уравнений разрешается относительно соответствующей интегральной оценки.

## 9 Коррекция системы автоматического регулирования

Задача коррекции состоит в повышении точности системы автоматического регулирования в переходных режимах. Она возникает поскольку стремление снизить ошибки регулирования в типовых режимах, приводит к необходимости использования таких значений общего коэффициента усиления, при которых без принятия специальных мер (внедрение пассивных звеньев) система оказывается неустойчивой.

### 9.1 Назначение и типы корректирующих устройств

Если система автоматического управления не обладает требуемыми динамическими свойствами, необходимо изменить ее структуру, либо ввести в схему специальные корректирующие звенья с легко изменяемыми параметрами. В зависимости от схемы включения корректирующие устройства делят на последовательные и параллельные. (рисунки 9.1; 9.2).

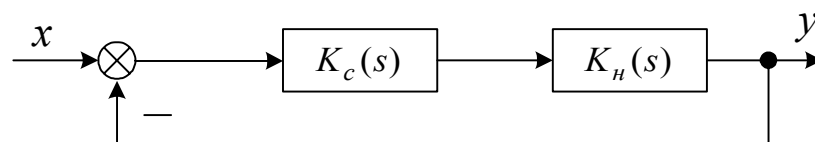


Рисунок 9.1 – Последовательное включение корректирующих устройств

В первом случае корректирующее устройство  $K_c(s)$  включается последовательно в цепь основного воздействия ( $K_n(s)$  - неизменяемая часть схемы).

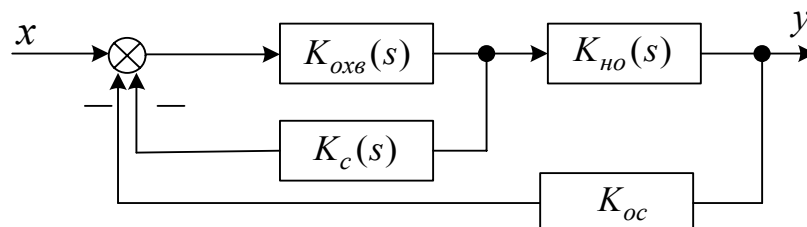


Рисунок 9.2 – Параллельное включение корректирующих устройств

Во втором случае – в цепь обратной связи, охватывающей одно или несколько звеньев системы. Возможно комбинированное включение последовательных и параллельных корректирующих устройств.

Основными видами корректирующих устройств являются дифференцирующие, интегрирующие и интегро-дифференцирующие контуры. Иногда в качестве корректирующих средств могут быть использованы безынерционные и инерционные звенья.

Рассмотрим некоторые корректирующие звенья:

Реальный дифференцирующий контур (рисунок 9.3) имеет передаточную функцию

$$W(s) = k_g \frac{T_1 s + 1}{\tau_1 s + 1}$$

$$T_1 = R_1 C$$

$$\tau_1 = k_g T_1$$

$$k_g = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

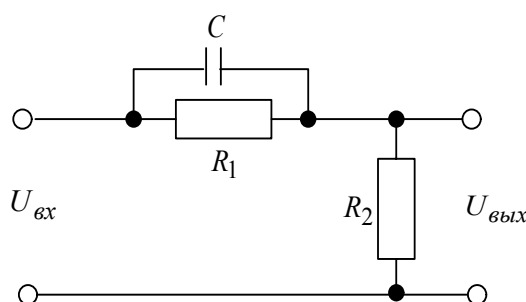


Рисунок 9.3 – Схема реального дифференциального контура

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики дифференцирующего устройства

$$W(j\omega) = k_g \frac{j\omega T_1 + 1}{jk_g \omega T_1 + 1}$$

чем меньше  $k_g$ , тем в более широком диапазоне частот можно пренебречь в знаменателе слагаемым  $jk_g \omega T_1$  и значит с большей точностью будет дифференцирован сигнал. Но чем меньше  $k_g$ , тем слабее сигнал и следует увеличить коэффициент усиления в системе за счет введения специального усилителя. Переходная характеристика реального дифференцирующего звена показана на рисунке 9.4

Она показывает, что переходный процесс в начальный момент времени форсируется, а затем имеет вид убывающей по экспоненте функции, стремящейся к своему установившемуся значению. Поэтому данное звено часто назы-

вают реальным форсирующим звеном или пропорционально-дифференцирующим регулятором (ПД-регулятором).

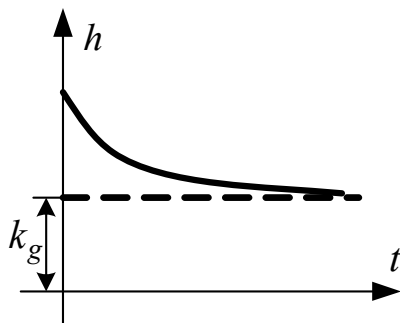


Рисунок 9.4 – Переходная характеристика реального дифференциального контура

Реальное интегрирующее звено называется пропорционально-интегрирующим регулятором (ПИ-регулятор), его передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{T_2 s + 1}{\tau_2 s + 1},$$

где  $T_2 = R_2 C$

$$\tau_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2 = k_u T_2$$

$$k_u = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Пропорционально-интегрирующий регулятор может быть представлен схемой, показанной на рисунке 9.5. Переходная функция ПИ-регулятора изображена на рисунке 9.6.

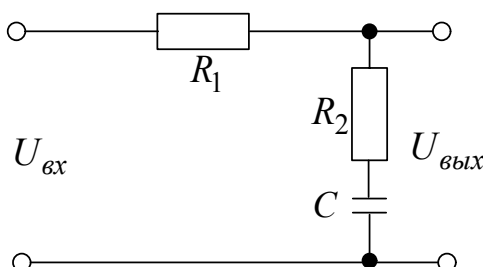


Рисунок 9.5 – Схема ПИ-регулятора

В настоящее время промышленностью выпускаются унифицированные регуляторы, позволяющие осуществить коррекцию систем автоматического управления.

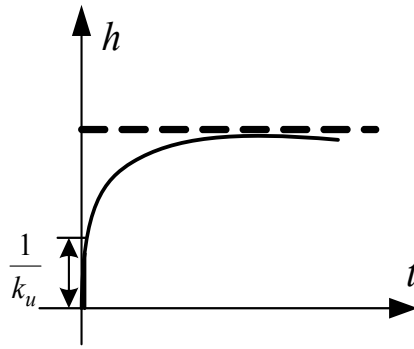


Рисунок 9.6 – Переходная функция ПИ-регулятора

Законы регулирования – пропорциональные, интегральные, дифференциальные, пропорционально-интегральные и так далее, могут быть реализованы применением однопольных усилителей постоянного тока с различными обратными связями и цепями на входе системы.

## 9.2 Способы включения корректирующих устройств и их влияние на устойчивость

Последовательные корректирующие устройства включаются обычно после элемента сравнения в цепь основных воздействий и служат для преобразования отклонения (сигнала ошибки). В этом случае корректирующий элемент формирует выходной сигнал, представляющий производную (если это дифференцирующий элемент) или интеграл (интегрирующий элемент) от входного сигнала по времени. Преимуществом последовательных корректирующих устройств является простота их исполнения. Недостаток - высокая чувствительность к помехам.

Передаточная функция системы с последовательным корректирующим устройством в разомкнутом состоянии (по схеме рисунка 9.1).

$$W_{pc}(s) = K_{pn}(s)K_c(s),$$

где  $K_{pn}$  - передаточная функция неохваченной части в разомкнутом состоянии;

$K_c$  - передаточная функция корректирующего устройства.

Соответствующим подбором передаточной функции  $K_c(s)$  можно изменить в желаемом направлении передаточную функцию системы  $W_{pc}(s)$ .

Рассмотрим влияние последовательного дифференцирующего элемента на амплитудно-фазовые характеристики системы.

При включении реального дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$K_c(s) = k_g \frac{T_c s + 1}{\tau_c s + 1}$$

Передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W_{pc}(s) = K_{pn}(s)k_g \frac{T_c s + 1}{\tau_c s + 1}$$

Заменив  $s$  на  $j\omega$  и подставив вместо  $\tau_c$  его значение  $T_c k_g$ , получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы

$$W_{pc}(j\omega) = K_{pn}(j\omega) \frac{k_g(j\omega T_c + 1)}{j\omega k_g T_c + 1}$$

модуль результирующего вектора

$$A_{pc}(\omega) = A_{pn}(\omega) \frac{k_g \sqrt{(\omega^2 T_c^2 + 1)}}{\sqrt{\omega^2 k_g^2 T_c^2 + 1}}$$

аргумент функции  $W_{pc}(j\omega)$

$$\varphi_{pc}(\omega) = -\varphi_{pn}(\omega) + \arctg T_c \omega - \arctg k_g T_c \omega = -\varphi_{pn}(\omega) - \varphi_c(\omega)$$

Из уравнения амплитудно-фазовой характеристики системы видно, что результирующий вектор  $W_{pc}(j\omega)$ , ввиду действия последовательного дифференцирующего контура, изменяется по величине и смещается в положительном направлении на угол  $\varphi_c(\omega) = \arctg T_c \omega - \arctg k_g T_c \omega$ . При этом амплитудно-фазовая характеристика из положения, соответствующего неустойчивому состоянию системы (кривая 1), перемещается в положение, обеспечивающее определенный запас устойчивости по модулю и фазе (кривая 2) (рисунок 9.7).

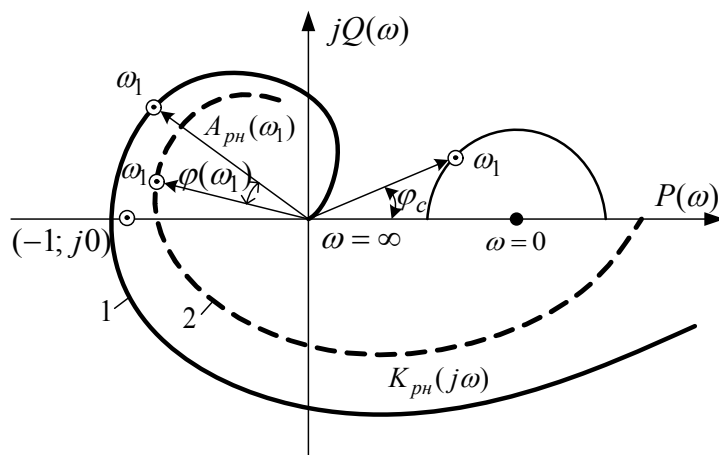


Рисунок 9.7 – АФЧХ исходной САР (кривая 1), АФЧХ скорректированной САР (кривая 2)

Таким образом, за счет введения последовательного корректирующего устройства переходный процесс может быть значительно улучшен. Но вследствие уменьшения коэффициента усиления снижается статическая точность системы автоматического регулирования.

Параллельные корректирующие устройства образуют гибкую обратную связь по отношению к охваченной части структурной схемы. Они могут выполняться в виде простых однозвенных или многозвенных  $RC$  контуров. К преимуществам параллельных корректирующих устройств относятся большая независимость динамических свойств скорректированной системы от изменения ее параметров, меньшая подверженность влиянию помех. Передаточная функция системы с параллельным корректирующим устройством в разомкнутом состоянии

$$W_{pc}(s) = \frac{K_{охв}(s)K_{но}(s)K_{ос}(s)}{1 + K_{охв}(s)K_c(s)},$$

где  $K_{охв}$  - передаточная функция охваченной части

$K_{но}$  - передаточная функция неохваченной части

$K_{ос}$  - передаточная функция жесткой отрицательной обратной связи

$K_c$  - передаточная функция корректирующего звена

Если считать, что в зоне высоких частот благодаря большому коэффициенту усиления охваченной части схемы  $|K_{охв}(j\omega)K_c(j\omega)| \gg 1$ , то

$$W_{pc}(j\omega) = \frac{K_{но}(j\omega)K_{ос}(j\omega)}{K_c(j\omega)}$$

Значит при выборе соответствующих параметров корректирующего устройства можно изменять амплитудно-фазовую характеристику системы в необходимом направлении.

В зависимости от характера и режима работы системы автоматического регулирования влияние на нее различных корректирующих устройств разнообразно. Необходимо стремиться к тому, чтобы улучшение динамических свойств было достигнуто с помощью наиболее простых корректирующих звеньев.

## 10 Методы синтеза систем автоматического регулирования

Синтез системы автоматического регулирования является основной стадией проектирования, получившей широкое практическое применение. Сущность задачи синтеза заключается в таком выборе структурной схемы системы и ее параметров и таком конструктивном решении, при которых обеспечиваются требуемые показатели качества и точности процессов регулирования, а сама система состоит из наиболее простых устройств управления.



Задачу синтеза систематического регулирования часто сводят к выбору легко изменяемых устройств управления, а именно: усилительных и корректирующих устройств.

### **10.1 Синтез корректирующих устройств**

При проектировании системы автоматического регулирования многие элементы определяются техническим заданием и составляют неизменяемую часть системы. Обычно в неизменяемую часть системы входят объект регулирования, исполнительные устройства, усилители, элементы сравнения. Динамические свойства неизменяемой части системы обычно бывают хуже требуемых по техническому заданию. Для обеспечения требуемых динамических характеристик необходимо выбрать корректирующие устройства и выбрать способ их включения в систему автоматического регулирования. Эта задача представляет собой задачу синтеза корректирующих устройств или той изменяемой части системы, структура и параметры которой должны быть найдены в соответствии с заданными показателями качества процесса регулирования при некотором типовом воздействии.

При синтезе последовательных и параллельных корректирующих устройств обычно задают порядок астатизма, максимум перерегулирования, время переходного процесса и максимальное ускорение, которое можно обеспечить исполнительным устройством в системе регулирования. В качестве типового воздействия в этом случае рассматривают ступенчатый сигнал.

### **10.2 Понятие об оптимальном переходном процессе**

Качество переходного процесса оценивается различными показателями: временем регулирования, перерегулированием, числом колебаний за время переходного процесса, ошибками в установившемся режиме. Систему можно считать так, что один из показателей качества будет иметь максимальное или минимальное значение. Например, в одном случае система обладает максимальной статической точностью, в то время, как остальные показатели не являются лучшими; в другом случае система имеет минимальную колебательность, не являясь лучшей по другим качественным оценкам.

Показатель, по которому системе приданы наилучшие свойства называется критерием оптимальности. Система, рассчитанная по тому или иному критерию оптимальности называется оптимальной системой автоматического регулирования.

Рассмотрим понятие системы автоматического регулирования, оптимальной по времени протекания процесса.

В некоторой системе исполнительный двигатель обеспечивает максимально возможное ускорение, которое не превышает величину  $\omega_m$

$$\left| \frac{d^2 y}{dt^2} \right| \leq \omega_m \quad (10.1)$$

Переходный процесс в этой системе, вызванный ступенчатым воздействием  $g_0$ , протекает в течении времени  $T_{рег}$  и показан кривой  $OAB$  на рисунке 10.1:

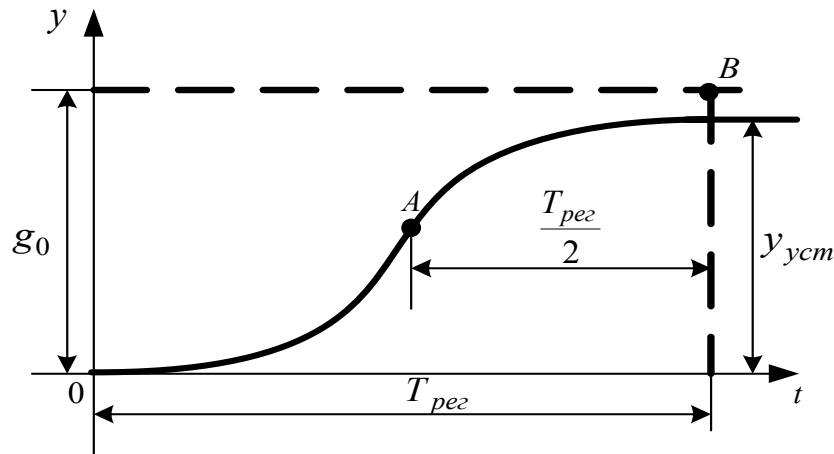


Рисунок 10.1 – Переходная характеристика САР при ступенчатом воздействии

Пусть скорость изменения выходной величины равна  $\frac{dy}{dt}$ . Значение выходной величины  $y_{уст}$  после окончания переходного процесса определяется площадью под кривой

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y_{уст} = \int_0^{T_{рег}} dy(t)$$

Требуется выбрать такой закон регулирования, чтобы при заданном ограничении (10.1) обеспечить минимум времени регулирования  $T_{рег}$ . То есть,

необходимо выбрать такой закон изменения скорости  $\frac{dy}{dt}$  чтобы при заданной

площади под кривой  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  и при ограничении (10.1) время регулирования

$T_{рег}$  было минимальным. На основе принципа максимума, сформулированного Понтрягиным можно сказать, что закон изменения скорости должен соответствовать равнобедренному треугольнику, у которого наклон сторон определяется максимально возможным ускорением (10.1)(рисунок 10.2).

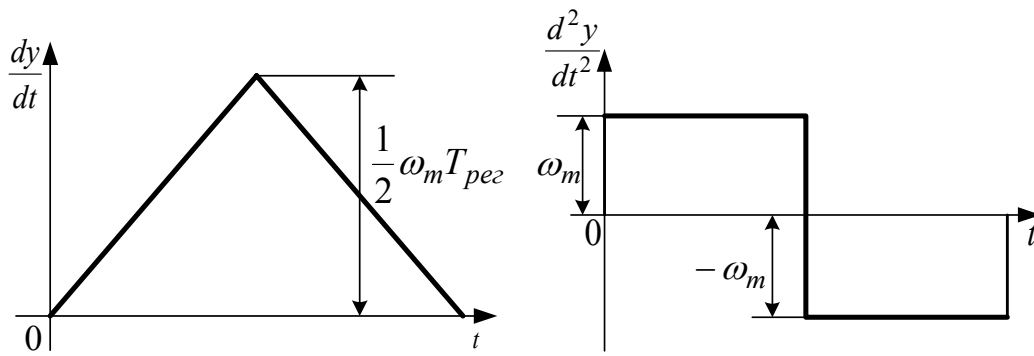


Рисунок 10.2 – Законы изменения скорости и ускорения

Это значит, что в течении первой половины времени переходного процесса (участок  $OA$ , рисунок 10.1) система разгоняется с постоянным максимальным ускорением  $\omega_m$ . Во второй половине переходного процесса (участок  $AB$ ) система тормозится с тем же предельным значением отрицательного ускорения. Подобный режим работы требует осуществления релейного закона управления.

Если минимальное время переходного процесса обозначить через  $T_{перз \min}$ , то для периода разгона можно написать

$$0.5y_{уст} = \frac{0.5\omega_m T_{перз \min}^2}{4}$$

Следовательно, минимальное время переходного процесса

$$T_{перз \min} = 2\sqrt{\frac{y_{уст}}{\omega_m}}$$

### 10.3 Построение желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики в соответствии с требованиями качества

Желаемую логарифмическую частотную характеристику можно построить различными способами: по заданным коэффициентам ошибок и запасу устойчивости по фазе; по заданным показателю колебательности и порядку астатизма; по заданным значениям перерегулирования, времени переходного процесса и ускорения.

Рассмотрим вариант построения желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики, когда в переходном процессе, вызванном ступенчатым управляющим сигналом, требуется обеспечить перерегулирование и время регулирования, не превосходящие  $\sigma_{\max}$  и  $T_{перз \max}$ . Максимально возможное ускорение координаты задано  $\omega_m$ , задан коэффициент усиления  $K$  и порядок астатизма  $\nu$ .

Процесс построения желаемой логарифмической амплитудной характеристики разбивается на четыре этапа: построение области низких частот, сред-

них частот, высоких частот и осуществление сопряжения построенных участков характеристики.

В области низких частот форма логарифмической амплитудной характеристики определяется порядком астатизма  $\nu$  и коэффициентом  $K$ . Эта прямая, соответствует уравнению

$$L_{жс}(\omega) = 20 \lg K - \nu 20 \lg \omega$$

Низкочастотная асимптота имеет наклон  $-\nu 20 \text{ дБ} / \text{дек}$  и пересекается с осью нулевого усиления при  $\omega = K^{1/\nu}$ . Ордината прямой при  $\omega = 1$  равна  $20 \lg K$ . Следовательно, для построения низкочастотной асимптоты желаемой логарифмической амплитудной характеристики надо через точку  $A[\omega = 1; L_{жс}(1) = 20 \lg K]$  и  $B[\omega = K^{1/\nu}; 0]$  провести прямую с наклоном минус  $\nu 20 \text{ дБ} / \text{дек}$ . Ордината  $AC$  определяет коэффициент усиления в синтезируемой системе регулирования (рисунок 10.3).

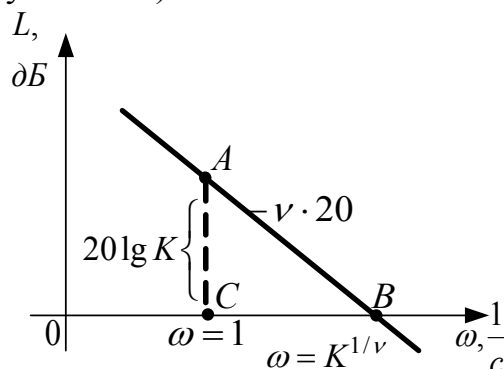


Рисунок 10.3 – Построение низкочастотной асимптоты

В интервале средних частот желаемая логарифмическая амплитудная характеристика определяется заданными значениями перерегулирования  $\sigma_{\max}$  и времени переходного процесса  $T_{рег \max}$ . Из соображений приближения реального процесса к оптимальному наклон среднечастотной асимптоты желаемой логарифмической амплитудной характеристики берут равным минус  $20 \text{ дБ} / \text{дек}$ . Выбор частоты среза  $\omega_c$  осуществляют на основе неравенства

$$\omega_{c \min} \leq \omega_c \leq \omega_{c \text{ опт}}$$

$$\omega_{c \text{ опт}} = \sqrt{\frac{\omega_m}{g_0}}$$

$$\omega_{c \min} = \frac{k\pi}{T_{рег \max}},$$

где  $g_0$  - управляющий сигнал.

Среднечастотная асимптота показана на рисунке 10.4

В области высоких частот форма желаемой логарифмической амплитудной характеристики принимается такой же, как и форма неизменяемой логарифмической амплитудной характеристики. Область высоких частот оказывает малое влияние на качество передаточной функции и определяет начальную часть процесса регулирования.

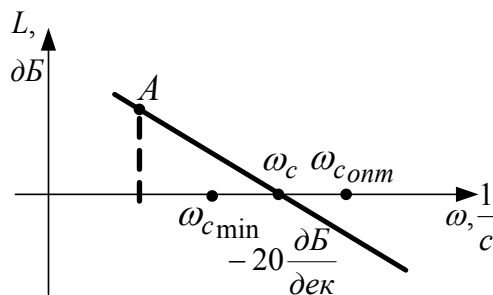


Рисунок 10.4 – Построение среднечастотной асимптоты

Сопряжение участков асимптот желаемой логарифмической амплитудной характеристики производится с помощью прямых, наклон которых не должен отличаться от наклона соседних асимптот более чем на минус  $20$  , минус  $40 \frac{дБ}{дек}$  (рисунок 10.5).

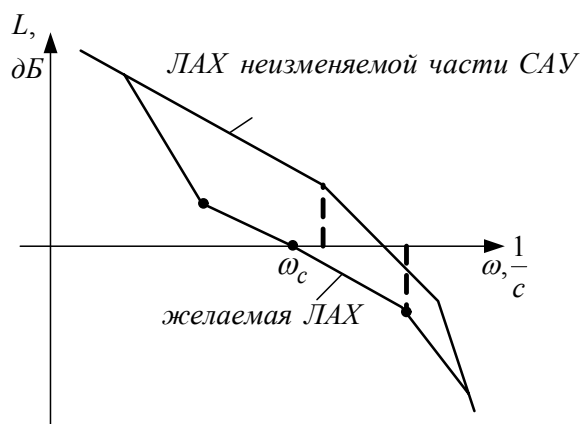


Рисунок 10.5 – Сопряжение всех асимптот желаемой логарифмической характеристики САУ

## 11 Нелинейные системы автоматического регулирования

### 11.1 Основные понятия и определения

К нелинейным системам относятся все системы, которые не могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Нелинейные системы автоматического управления характеризуются следующими особенностями:

1) систему можно представить в виде соединения из двух частей – линейной части *ЛЧ*, описываемой линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента *НЭ* (рисунок 11.1);

2) нелинейный элемент является безынерционным и его входная  $x_{вх}(t)$  и выходная  $y(t)$  величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями.

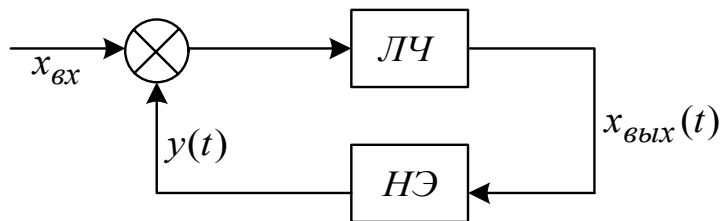


Рисунок 11.1 – Структурная схема нелинейной САР

Таким образом, нелинейность рассматриваемых систем обусловлена нелинейностью статической характеристики одного из ее элементов.

Если система содержит несколько нелинейных элементов (параллельно или последовательно соединенных), то ее в некоторых случаях можно свести к нелинейной системе с одним нелинейным элементом с результирующей статической характеристикой.

Например, схема двух параллельно включенных нелинейных звеньев представлена на рисунке 11.2

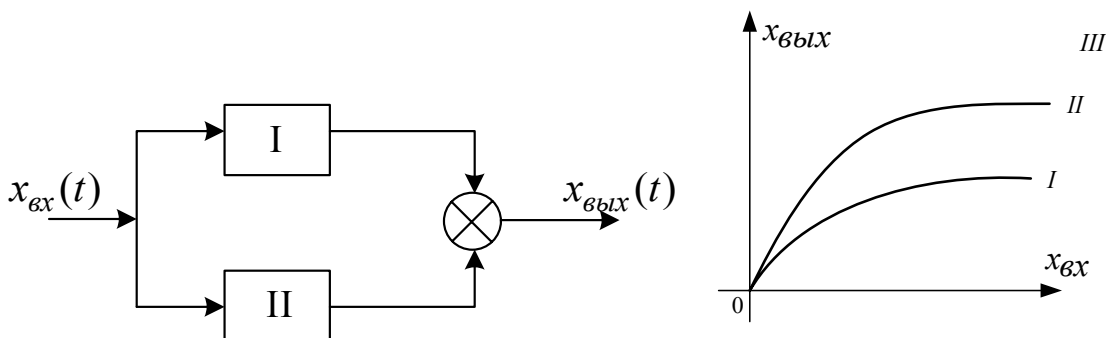


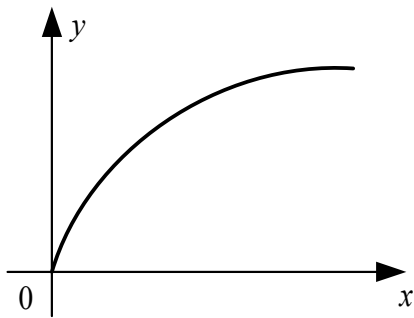
Рисунок 11.2 – Определение результирующей статической характеристики параллельно соединенных нелинейных элементов

Построив характеристики I и II обоих звеньев, просуммируем их ординаты и получим характеристику III эквивалентного звена (рисунок 11.2).

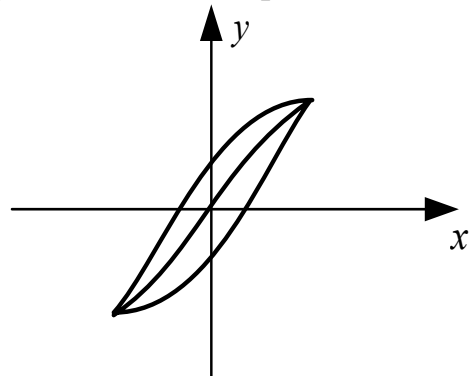
Все нелинейные характеристики могут быть разделены на однозначные и неоднозначные. Однозначная характеристика – это однозначная зависимость между входным сигналом и выходной координатой нелинейного элемента как при увеличении, так и при уменьшении входного сигнала. Неоднозначная характеристика представляет характеристику такого нелинейного элемента, у которого при увеличении входного сигнала выходная координата изменяется по одной зависимости, а при уменьшении входного сигнала – по другой.

Наиболее распространенные типы нелинейностей показаны на рисунке 11.3.

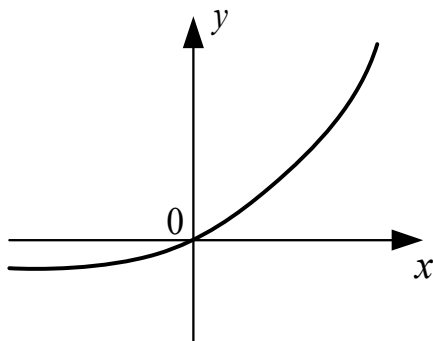
1) система с насыщением



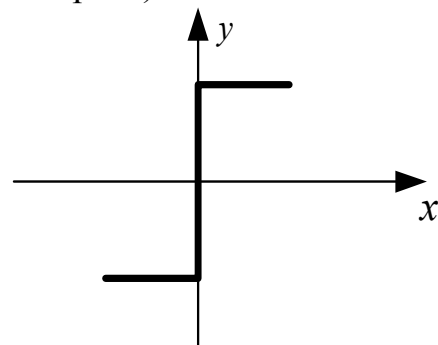
2) система с электромагнитным устройством с гистерезисом



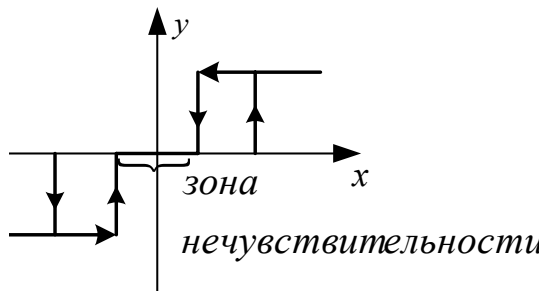
3) выпрямителем



4) системы с кусочно-линейными характеристиками (идеальное поляризованное реле)



5) трехпозиционное поляризованное реле с зоной нечувствительности и гистерезисом



6) двухпозиционное реле с гистерезисом, которое не имеет устойчивого отключенного состояния и контакт, которого всегда замкнут в ту или иную сторону

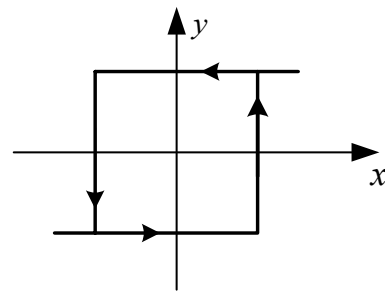


Рисунок 11.3 – Типичные нелинейности

## 11.2 Статические характеристики нелинейных систем

Последовательное соединение звеньев. Метод построения характеристики системы основан на том, что при последовательном соединении выходная величина каждого предыдущего звена равна входной величине последующего.

Рассмотрим, систему из трех звеньев (рисунок 11.4)

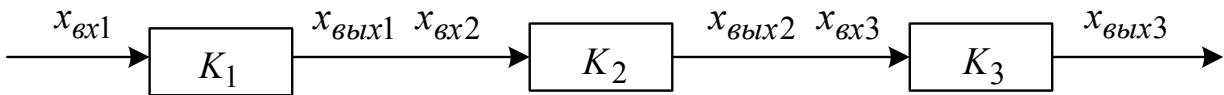


Рисунок 11.4 – Последовательное соединение нелинейных элементов

Для построения статической характеристики системы характеристики звеньев располагаются в квадрантах I, II и III в одном и том же масштабе. В квадранте IV строится результирующая характеристика (рисунок 11.5).

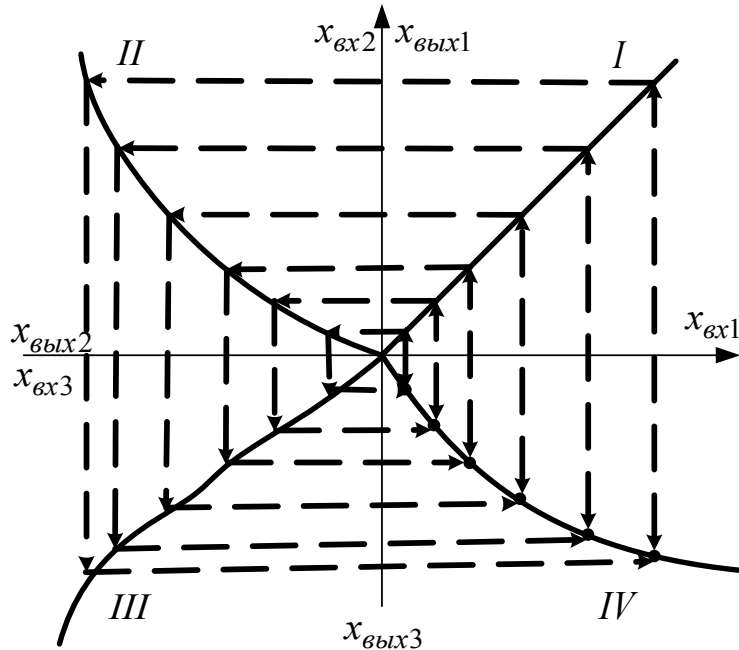


Рисунок 11.5 – Построение результирующей характеристики при последовательном соединении нелинейных элементов

Если число последовательно соединенных звеньев больше трех, то для получения результирующей характеристики находят характеристики групп по три звена в каждой и аналогичным способом получают характеристику соединения.

Рассмотрим параллельное соединение звеньев. Выходная величина системы равна алгебраической сумме выходных величин звеньев. Входная величина - общая для всех звеньев. При построении статической характеристики системы характеристики звеньев строятся в одном масштабе и затем их ординаты суммируются.

Звенья, охваченные обратной связью, показаны на рисунок 11.6.

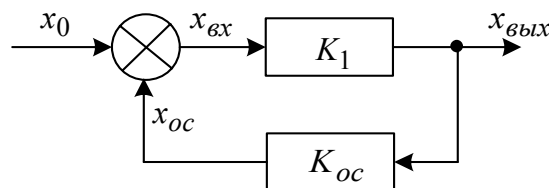


Рисунок 11.6 – Схема со звеном, охваченным обратной связью



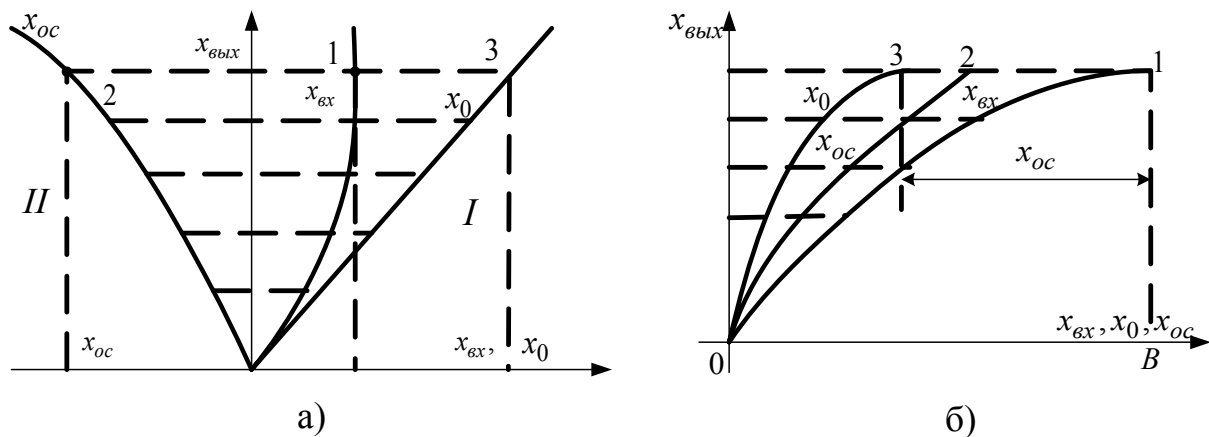


Рисунок 11.7 – Построение результирующей характеристики при отрицательной обратной связи а), положительной обратной связи б)

Результирующая статическая характеристика системы может быть построена графически (рисунок 11.7). В квадранте I располагается характеристика звена  $K_1$  без обратной связи, представляющая зависимость

$$x_{вых} = f(x_{вх})$$

В случае отрицательной обратной связи.

$$x_{вых} = f(x_0 - x_{oc})$$

Характеристика  $x_{вых} = f(x_{oc})$  построена в квадранте II. Чтобы получить искомую величину  $x_0$ , надо к абсциссам кривой I прибавлять по соответствующим горизонталям абсциссы кривой 2, получим искомую кривую 3.

$$x_{вых} = f(x_0)$$

На рисунке. 11.7 б, показано построение статической характеристики системы, в которой звено  $K_1$  охвачено положительной обратной связью. Отличие этого случая от отрицательной обратной связи в том, что от абсцисс кривой I по соответствующим горизонталям отнимаются абсциссы кривой 2, так как

$$x_{вых} = f(x_0 + x_{oc})$$

Введение отрицательной обратной связи оказывает существенное влияние на спрямление статической характеристики системы если в ней есть нелинейные элементы. Последовательно с нелинейным звеном включается усилитель с большим  $k$ , и эта цепь охватывается жесткой отрицательной обратной связью с высоким коэффициентом передачи. Такой метод спрямления стати-

ческих характеристик широко применяется в практике автоматизированного электропривода.

Нелинейные системы делятся на две группы: несущественно нелинейные – в которых нелинейную зависимость можно аппроксимировать линейной с какой-то точностью расчета; существенно нелинейные – в которых нелинейность элемента придает новое качество системе управления (не поддается линеаризации). Динамические процессы в нелинейных системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Решение этих уравнений представляет определенную трудность. В нелинейных моделях движения оказываются значительно разнообразнее чем в линейных. Например, в них наблюдаются незатухающие колебания, обладающие устойчивостью, то есть после возмущения эти колебания восстанавливаются с той же амплитудой и частотой. Другой особенностью является то, что характер движения в них зависит от начальных отклонений. При некотором значении начального отклонения, не превосходящем определенного порога, возникает движение, сходящееся к положению равновесия, а при отклонениях, превосходящих этот порог, устанавливаются устойчивые незатухающие колебания.

Возникающие в нелинейной системе незатухающие колебания - называются автоколебаниями. Они возникают при отсутствии внешних периодических воздействий, за счет внутренних свойств нелинейной системы.

Одной из основных задач при исследовании динамики нелинейных систем является анализ устойчивости, но не устойчивости вообще, а устойчивости ее состояния или движения при определенных отклонениях, выводящих систему из этих режимов.

Устойчивость в малом представляет устойчивость системы при малых отклонениях от исходного режима. Система устойчива в большом, если она устойчива при конечных отклонениях, возможных в данной системе по условиям ее работы. Система устойчива в целом, если она устойчива при неограниченных отклонениях.

Известны следующие методы анализа устойчивости нелинейных систем: методы фазовой плоскости, точечных преобразований, гармонической линеаризации, прямой метод Ляпунова и так далее.

### **11.3 Метод фазовой плоскости**

Состояние любой системы автоматического регулирования может быть определено значениями регулируемой координаты  $x$  и  $n-1$  ее производных в  $n$ -мерном пространстве, называемом фазовым пространством системы. Это состояние характеризуется координатами изображающей точки в фазовом пространстве. В установившемся режиме системы, изображающая точка занимает фиксированное положение и называется особой точкой. В переходном режиме координаты точки будут меняться, образуя фазовую траекторию. Полная совокупность фазовых траекторий, соответствующая всем возможным начальным условиям, называется фазовым портретом системы. Метод фазовой плоскости применяется для систем не выше третьего порядка.

При изображении фазового портрета на плоскости уравнение второго порядка заменяется системой двух уравнений

$$y = f(x, y), \quad y = \dot{x}$$

Исключив из уравнения время, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения  $y = f(x)$  определяет фазовую траекторию.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

корни этого уравнения

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

1) При  $a=0$  (демпфирование=0).

Решение уравнения имеет вид  $x = x_0 \cos \omega t$ , показывает, что в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания (рисунок 11.8). В случае чисто мнимых корней получим уравнение семейства фазовых траекторий, имеющих вид эллипсов. Изображающая точка движется по часовой стрелке, при незатухающих синусоидальных колебаниях описывает замкнутый контур (рисунок 11.8).

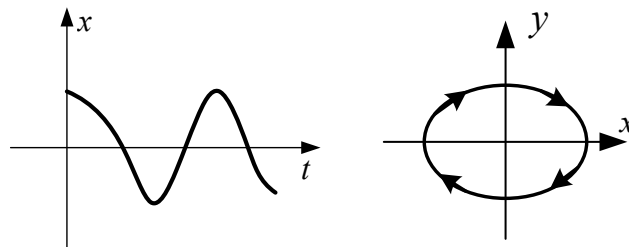


Рисунок 11.8 – Фазовая траектория для случая  $a=0$

2) При положительном демпфировании  $a>0$  и условии  $a^2<4b$  получим комплексно-сопряженные корни. Переходный процесс в этом случае описывается уравнением  $x = x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$  и имеет затухающий характер. Фазовые траектории представляют собой логарифмические спирали, которые сходятся к одной особой точке, называемой устойчивым фокусом (0) (рисунок 11.9).

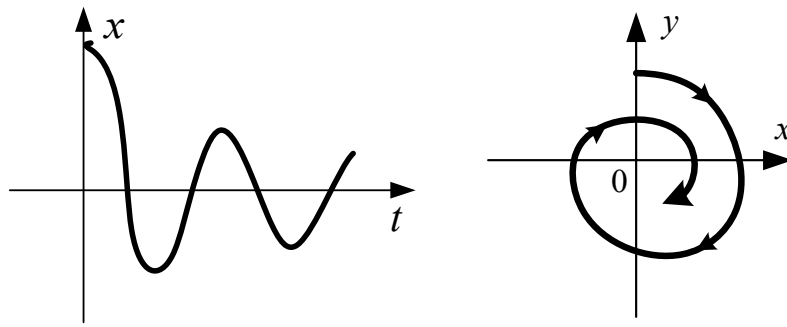


Рисунок 11.9 – Фазовая траектория при  $a > 0$

3) При отрицательном демпфировании  $a < 0$  возникают колебания с возрастающей амплитудой, характеризующие неустойчивый процесс. Переходный процесс описывается уравнением  $x = x_0 e^{\alpha t} \cos \omega t$  фазовые траектории в этом случае имеют вид логарифмических спиралей, но раскручивающихся из начала координат, которые представляет особую точку называемую неустойчивым фокусом (рисунок 11.10).

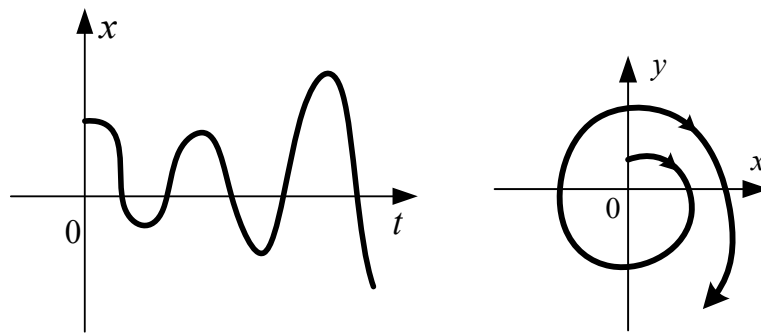


Рисунок 11.10 – Фазовая траектория при  $a < 0$

4) Если корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны, то переходный процесс описывается уравнением  $x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$  и имеет устойчивый аperiodический характер. Начало координат - устойчивый узел. Отсутствуют колебания относительно точки равновесия (рисунок 11.11).

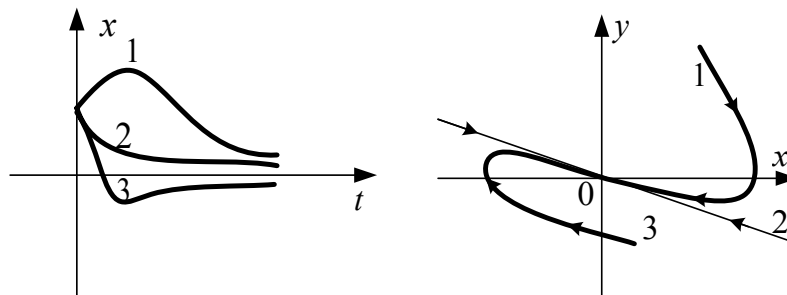


Рисунок 11.11 – Фазовая траектория при вещественных отрицательных корнях

5) При вещественных положительных корнях получим неустойчивый апериодический процесс. Начало координат - неустойчивый узел (рисунок 11.12).

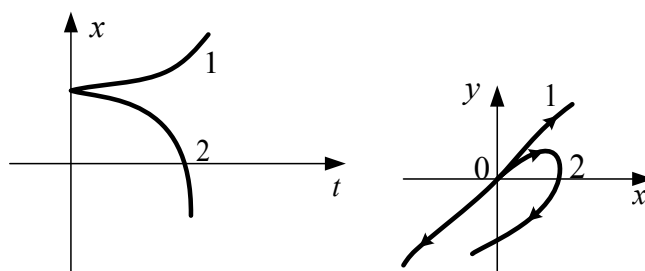


Рисунок 11.12 – Фазовая траектория при вещественных положительных корнях

6) При вещественных корнях разных знаков получаем семейство фазовых траекторий, изображенных на рисунке 11.13. Начало координат – седло - особая точка.

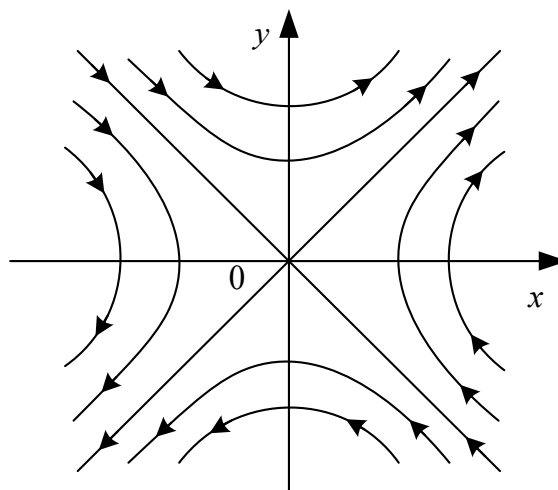


Рисунок 11.13 – Фазовые траектории при вещественных корнях разных знаков

Рассмотренные фазовые портреты нелинейной системы второго порядка показывают, что по характеру фазовых траекторий можно судить об устойчивости движения системы.

С помощью метода фазовой плоскости могут быть решены следующие задачи:

- 1) определение числа предельных циклов;
- 2) выявление критического соотношения параметров системы, соответствующего области устойчивости и автоколебаний;
- 3) анализ устойчивости в большом и состояний равновесия;
- 4) определение условий возникновения автоколебаний;
- 5) определение параметров автоколебаний - амплитуды и частоты;

б) выявление качественной и количественной картины переходных процессов.

Решение этих задач может быть выполнено путем многократного построения фазовых портретов при разных значениях параметров.

### 11.4 Метод точечных преобразований

Основан на замене истинного переходного процесса приближенным. Замена производится по участкам, для каждого из которых нелинейная часть характеристики представляется линейным отрезком. Это дает возможность получить интегрируемое линейное дифференциальное уравнение, приближенно отражающее процесс в пределах данного участка.

Прямой метод исследования устойчивости Ляпунова

Метод сводится к построению функции Ляпунова, которая связана с дифференциальным уравнением системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11.1)$$

где  $X_i$ , функции произвольны, удовлетворяют условию

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0 \quad \text{при } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Функцией Ляпунова называется любая функция  $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тождественно обращающаяся в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , если в ней взяты те же переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что и в уравнении системы.

Теорема устойчивости нелинейных систем:

Если при заданных в форме (11.1) уравнениях системы,  $n$ -го порядка подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова, чтобы ее производная по времени  $W(x)$  тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку  $V$ , то данная система устойчива асимптотически.

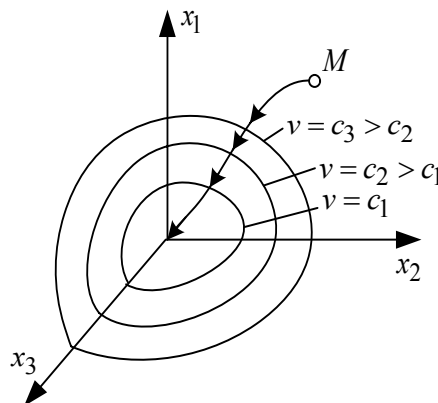


Рисунок 11.14 – Определение устойчивости методом Ляпунова

Например, пусть функция  $V(x_1, x_2, x_3)$  знакоопределенная положительная, если функция  $W(x_1, x_2, x_3)$  окажется отрицательной, то есть  $\frac{dV}{dt} < 0$ , то изображающая точка  $M$  будет двигаться в сторону уменьшения  $V$  обуславливая затухание координат  $x_1, x_2, x_3$ , следовательно система устойчива (рисунок 11.4).

### 11.5 Метод гармонической линейаризации

Это приближенный метод исследования автоколебаний, а также вынужденных колебательных режимов и приближенной оценки качества переходных процессов. Этот метод основан на исследовании поведения системы при гармоническом воздействии на входе нелинейного элемента и замене периодической кривой на выходе нелинейного элемента первой гармоникой. Например, если в системе автоматического управления есть нелинейный элемент - трехпозиционное реле. При подаче на него синусоидального напряжения графическим путем можно получить выходную характеристику (рисунок 11.15).

Сущность метода гармонической линейаризации заключается в отыскании периодического решения на выходе нелинейного элемента, разложении сигнала на выходе нелинейного элемента в ряд Фурье и его замене первой гармоникой. Такая замена справедлива, если система автоматического регулирования является фильтром низких частот, хорошо гасящим колебания высших гармоник.

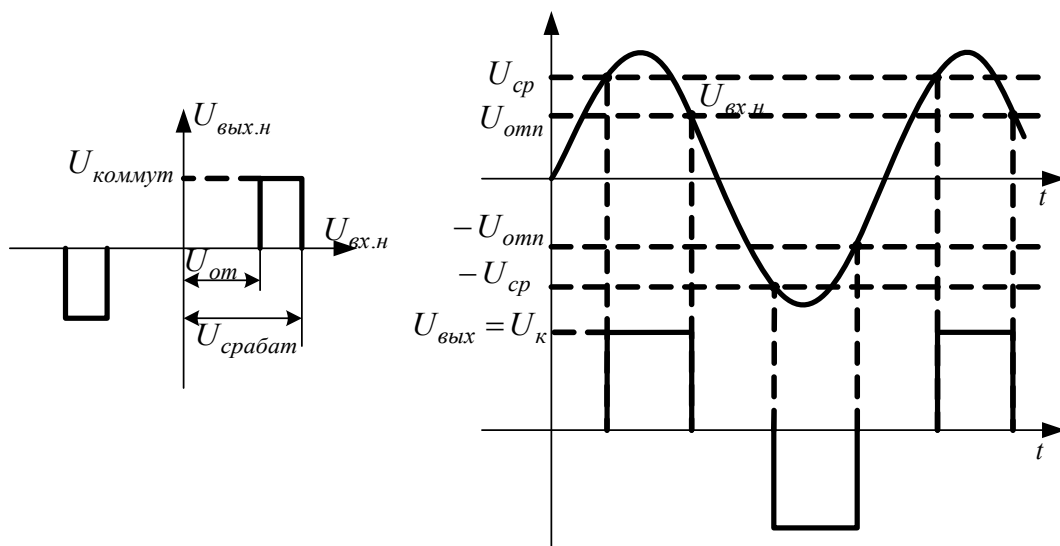


Рисунок 11.15 – Применение метода гармонической линейаризации

## 12 Дискретные системы

### 12.1 Основные определения

Если выходной  $y(t)$  и входной  $u(t)$  сигналы элемента



связаны непрерывной функциональной зависимостью, то такой элемент называется непрерывным. Выходные сигналы некоторых элементов, даже при поступлении на их вход непрерывного сигнала, могут иметь разрывы непрерывности первого рода, то есть изменяться скачком – дискретно. Такие элементы называются дискретными. Дискретными считаются и такие элементы, у которых выходные сигналы непрерывны, а входные имеют скачки непрерывности. Если в соответствии с принципом действия дискретными являются и входные и выходные сигналы, то такой элемент называется чисто дискретным.

Системы, в состав которой входит хотя бы один импульсный элемент, называется импульсной. Вид дискретного сигнала определяется характером работы дискретного элемента. Широко распространены такие дискретные элементы, сигналы которых имеют вид импульсов, модулированных по амплитуде (амплитудно-импульсная модуляция), ширине (широотно-импульсная модуляция), частоте (частотно-импульсная модуляция) и так далее (рисунок 12.1).

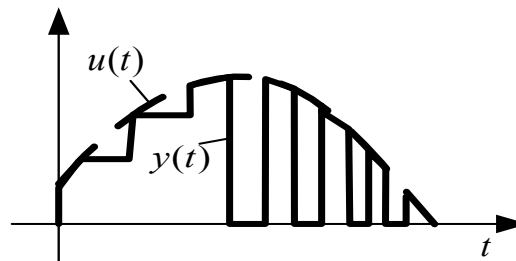
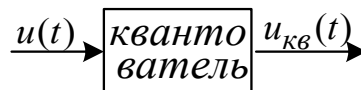


Рисунок 12.1 – Амплитудно-импульсная модуляция

Дискретный сигнал образуется из непрерывного в результате квантования по времени, по уровню или по времени и по уровню. Пусть на вход импульсного устройства, осуществляющего квантование (квантователя), поступает непрерывный сигнал  $u(t)$



При квантовании по времени это устройство в моменты, кратные шагу квантования по времени  $\tau_r$ , формирует на своем выходе импульсы  $u_{кв}(t)$ , амплитуда которых численно равна величине входного сигнала в эти моменты времени. Выходной сигнал импульсного квантователя показан на рисунке 12.2.



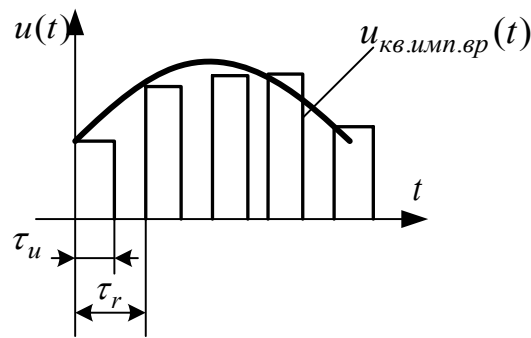


Рисунок 12.2 – Квантование по времени

При квантовании по уровню импульсы на выходе  $u_{кв.имп.ур}(t)$  появляются в те моменты времени, в которые входной сигнал принимает значения, кратные шагу квантования по уровню  $h$ . Амплитуда импульсов равна величине входного сигнала в эти моменты времени. На рисунке 12.3 представлен выходной сигнал импульсного устройства, осуществляющего квантование по уровню. Шаг квантования как по времени так и по уровню может быть и постоянным и переменным. Рассмотрим простой случай, когда шаг квантования постоянный.

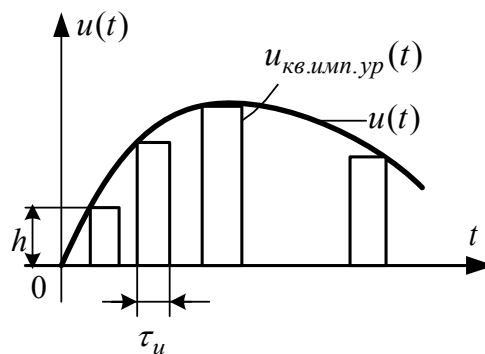


Рисунок 12.3 – Квантование по уровню

При квантовании и по времени и по уровню (рисунок 12.4) импульсы  $u_{кв.имп.вр.ур}(t)$  появляется в моменты времени, кратные  $\tau_r$ . Амплитуда импульса кратна  $h$  и имеет значение, ближайшее к значению входного сигнала в эти моменты времени. Системы, осуществляющие квантование и по времени и по уровню называются кодово-импульсными.

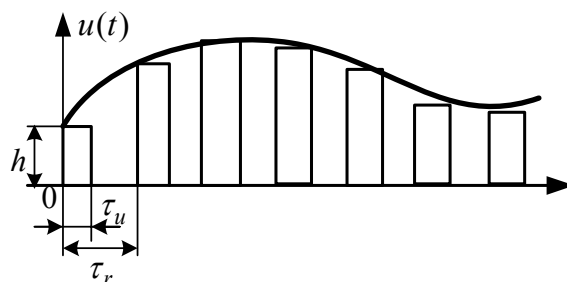


Рисунок 12.4 – Квантование по уровню и по времени

Операции, выполняемые квантователем по времени с постоянным шагом квантования можно представить как работу ключа, замыкающегося с периодом  $\tau_r$  на время  $\tau_u$  (рисунок 12.5)

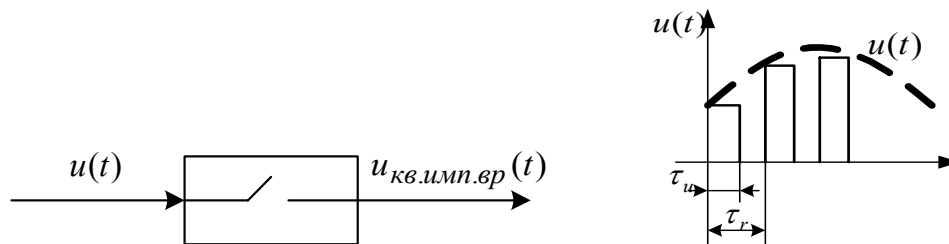


Рисунок 12.5 – Представление квантователя

Момент замыкания ключа должен определяться дополнительным устройством, функционирование которого зависит от значения входного сигнала. Таким образом, алгоритм работы этого квантователя нелинейный, его можно реализовать с помощью нелинейного устройства со статической характеристикой ступенчатого типа (рисунок 12.6).

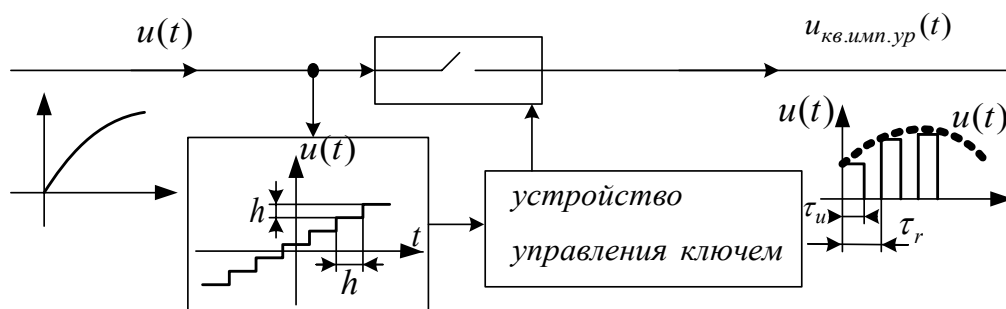


Рисунок 12.6 – Квантователь ступенчатого типа

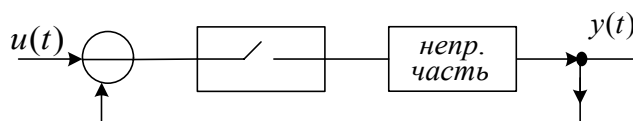
## 12.2 Модель импульсного элемента

Форма импульсов на выходе импульсного элемента оказывает влияние на характер работы импульсной системы. Но, если импульсы достаточно узкие

$$\begin{aligned} \tau_u &\ll \tau_r \\ \tau_u &\ll T_{\min} \end{aligned} \quad (12.1)$$

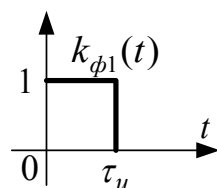
где  $T_{\min}$  - наименьшая постоянная времени передаточной функции непрерывной части,

$\tau_u$  - длительность импульса

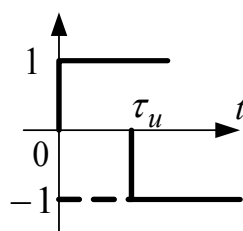


то результат работы непрерывной части определяется не формой импульса, а его площадью. Значит, для описания устройства можно выбрать любую форму импульсов лишь бы они имели ту же площадь.

Если условия (12.1) нарушены, то представление импульсного сигнала может быть скорректировано. Для этого на выходе ключа надо включить динамическое устройство - формирователь импульсов, импульсная переходная функция, которого имеет форму, совпадающую с истинной формой импульса. Например, реальный импульсный элемент генерирует импульсы прямоугольной формы длительностью  $\tau_u$ . Тогда формирующее устройство должно обладать импульсной переходной функцией  $k_{\phi 1}(t)$ , имеющей форму:



Представив  $k_{\phi 1}(t)$  как сумму двух ступенчатых функций получим



$$k_{\phi 1}(t) = 1[t] - 1[t - \tau_u]$$

Передаточная функция формирующего устройства

$$W_{\phi 1}(s) = L[k_{\phi 1}(t)] = \frac{1 - e^{-\tau_u s}}{s}$$

Схема такой системы представлена на рисунке 12.7

Пусть требуется построить систему автоматического регулирования с высокими динамическими и точностными характеристиками.

Для удобства реализации таких систем в их состав часто встраивается микро ЭВМ. Для сопряжения микро-ЭВМ и непрерывной части системы автоматического регулирования в системе должны быть преобразователи из непрерывной величины в дискретную (Н-Д) и наоборот (Д-Н) (рисунок 12.8).

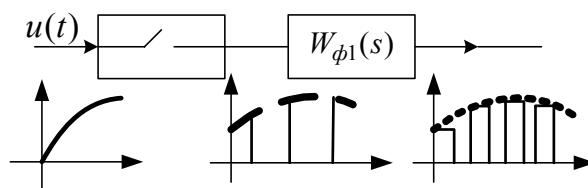


Рисунок 12.7 – Система с формирующим устройством

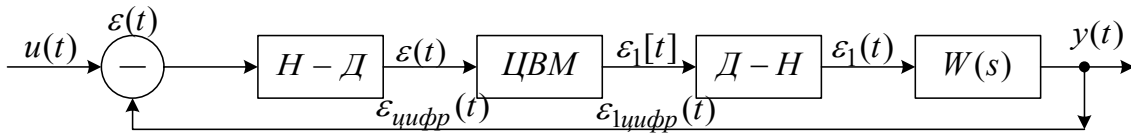


Рисунок 12.8 –Пример импульсной САР

В системе с ЦВМ имеет место дискретные сигналы другого типа – цифровые сигналы

$$\begin{aligned} \varepsilon_{цифр}(t) \\ \varepsilon_{1цифр}(t), \end{aligned}$$

сигнал  $\varepsilon_{1цифр}(t)$  несет информацию о функции  $\varepsilon_1(t)$  в дискретные моменты времени кратные  $\tau_r$ , но представлена эта информация для каждого из моментов  $n\tau_r$  совокупностью импульсов, выражающей двоичное число, равное величине сигнала  $\varepsilon_1(n\tau_r)$ . Таким образом, информация в цифровом сигнале (в отличие от импульсного) заключена в физическом носителе с помощью кода. Функции  $\varepsilon_1[t]$  - представляют в виде решетчатой функции (рисунок 12.9)

$$\varepsilon_1[t] = [\varepsilon_1(t)] = \varepsilon_1(n\tau_r); \quad t = n\tau_r, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varepsilon_1[t] = 0, \quad t \neq n\tau_r$$

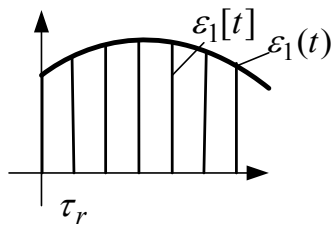


Рисунок 12.9 – Решетчатая функция

Сигнал в виде решетчатой функции  $\varepsilon_1[t]$  обладает нулевой площадью (а значит и нулевой энергией) и непосредственно воздействовать на последующий непрерывный элемент не может, в связи с чем после цифровой части всегда надо ставить преобразователь Д-Н.

В импульсных системах передача информации осуществляется импульсной функцией. Таким образом импульсные и цифровые системы являются информационно эквивалентными. И математическое описание обеих систем идентично.

### 12.3 Математические основы анализа динамики импульсных систем

Дискретное преобразование Лапласа, является функциональным преобразованием решетчатых функций  $f[n]$ . Преобразование Лапласа для непрерывной функции времени

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Если в эту формулу подставить конечный интервал времени  $\Delta t = T$  и представить текущее время в виде  $t = nT$ , где  $n=1,2,3,\dots$ , то интеграл можно заменить суммой

$$F^*(s) = T \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-snT}$$

Функция  $F(z)$ , которая получается из функции дискретного преобразования Лапласа  $F^*(s)$  с помощью замены переменной  $e^{st}$  на  $z$ , называется  $z$ -преобразованием функции  $f(t)$

$$F^*(z) = T \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n}$$

$$F(z) = Z\{f(nT)\}$$

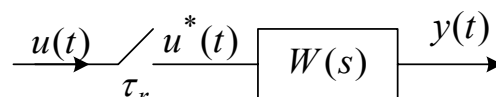
В таблице 12.1 приведены  $z$ -преобразования часто применяемых функций

Таблица 12.1 – Таблица  $z$ -преобразований

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-at}}$

### 12.4 Передаточная функция простейшей импульсной системы

Рассмотрим простейшую импульсную систему, состоящую из ключа с периодом замыкания  $\tau_r$  и непрерывной части с передаточной функцией  $W(s)$



Согласно определению передаточной функции при нулевых начальных условиях, имеем:

$$Y(s) = U^*(s)W(s) \quad (12.2)$$

так как на входе непрерывной части действует импульсный сигнал ( $U^*(s)$ )

$$Y(s) = \frac{1}{\tau_r} \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} U(s + jv\omega_r)W(s), \quad v = 1, 2, \dots$$

где  $\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau_r} \left[ W(s) \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{U(s + jv\omega_r)W(s)}{U(s)} \right]$$

Выражение в правой части, которое должно играть роль искомой передаточной функции, оказывается зависящим не только от параметров описываемой системы, но и от входного сигнала. Поэтому от исходной системы перейдем к чисто импульсной системе, которая получается путем добавления на выход фиктивного ключа, работающего синфазно с основным ключом (рисунок 12.10).

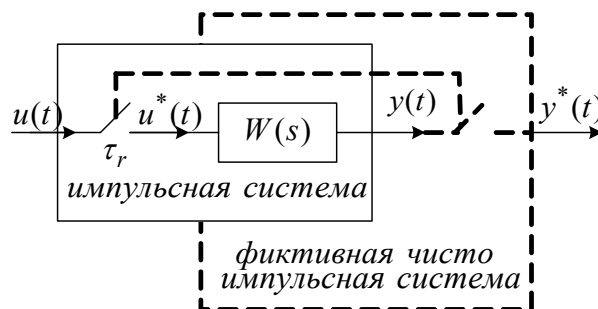


Рисунок 12.10 – Импульсная система

Выходной сигнал этой фиктивной системы совпадает с выходным сигналом исходной системы в дискретные моменты времени, кратные  $\tau_r$ . И исследование фиктивной чисто импульсной системы дает верную информацию о поведении исходной системы.

Так как выходной сигнал фиктивной системы чисто импульсный, то

$$Y^*(s) = \frac{1}{\tau_r} \sum_{v=-\infty}^{\infty} Y(s + jv\omega_r)$$

из (12.2) следует

$$Y^*(s) = \frac{1}{\tau_r} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} U^*(s + jv\omega_r)W(s + jv\omega_r)$$

Из-за периодичности дискретного преобразования Лапласа

$$U^*(s + j\nu\omega_r) = U^*(s),$$

получим

$$Y^*(s) = U^*(s) \frac{1}{\tau_r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} W(s + j\nu\omega_r)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} W(s + j\nu\omega_r) = W^*(s)$$

$W^*(s)$  - дискретное преобразование Лапласа функции  $W(t)$  - импульсной переходной функции непрерывной части системы

$$W^*(s) = L[W^*(t)]$$

$$W^*(s) = \frac{Y^*(s)}{U^*(s)}$$

Передаточная функция импульсной системы это отношение дискретного преобразования Лапласа выхода чисто импульсной системы к дискретному преобразованию Лапласа ее входа при нулевых начальных условиях (аналогично непрерывной системе).

Если сделать замену переменной  $e^{\tau_r s}$  на  $z$ , то получим  $z$ -передаточную функцию

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

## 12.5 Передаточная функция произвольной импульсной системы

Пусть произвольная импульсная система задана структурной схемой, представляющей собой совокупность стандартных соединений из простейших импульсных систем. Тогда, чтобы получить передаточную функцию этой системы, достаточно уметь находить передаточную функцию стандартных соединений по передаточным функциям соединяемых импульсных систем.

Формулы  $z$ -передаточной функции стандартных соединений совпадают с аналогичными формулами из теории непрерывных систем. (последовательные, параллельные, с обратной связью).

## Список использованных источников

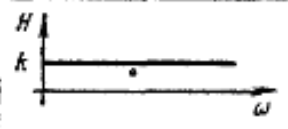
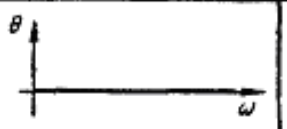
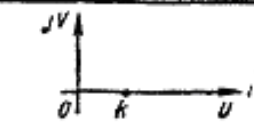
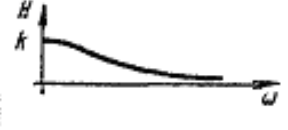

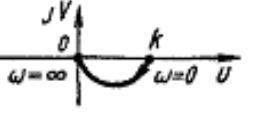
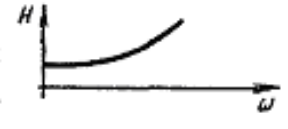
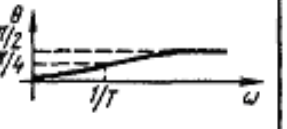
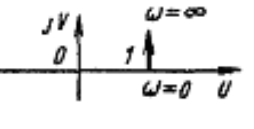
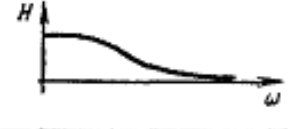
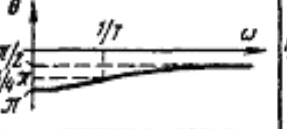
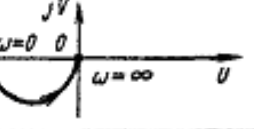
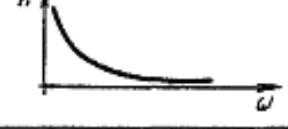
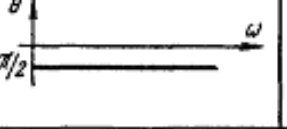
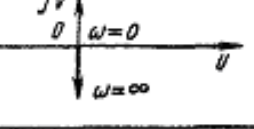
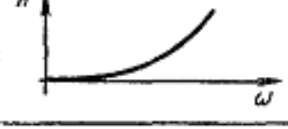

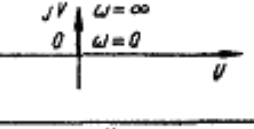
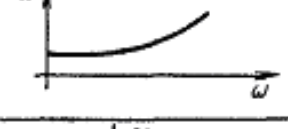
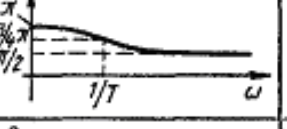
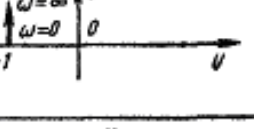
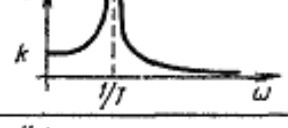
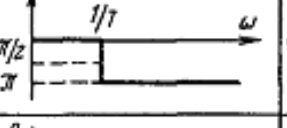
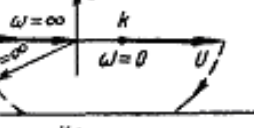
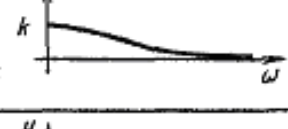
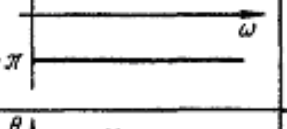
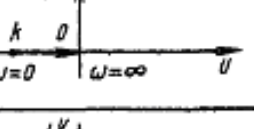
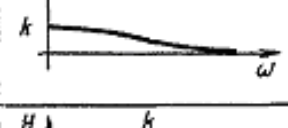
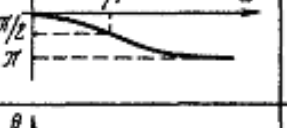
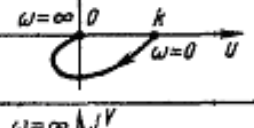
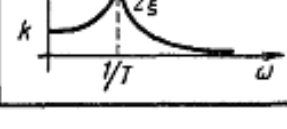
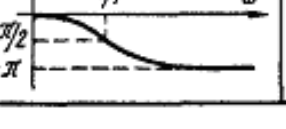
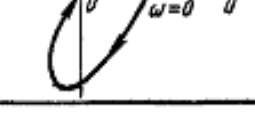
- 1 Филипс Ч, Харбор Р. Системы управления с обратной связью. [ Текст ]/ Ч. Филипс, Р. Харбор – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 615с.
- 2 Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. [ Текст ]/ Н.Н. Иващенко – М: Машиностроение, 1978. – 736с.
- 3 Андриющенко В.А. Теория систем автоматического управления. [ Текст ]: учебное пособие / В.А. Андриющенко. -СПб : СПб ун-та, 1990. - 256с.
- 4 Теория автоматического управления. [ Текст ]: учебник для вузов / Под ред. Ю.М. Соломенцева. -М. : Высшая школа, 2003. - 268 с.
- 5 Анхимюк В.Л. Теория автоматического управления. [ Текст ]: учеб. пособие для вузов / В.Л. Анхимюк, О.Ф. Опейко, Н.Н. Михеев.- 2-е изд., испр. - Минск : Дизайн ПРО, 2002. - 352 с.
- 6 Теория автоматического управления [ Текст ]: учеб. для вузов / под ред. В.Б. Яковлева. -М. : Высш. шк., 2003. - 567 с.
- 7 Ерофеев А.А Теория автоматического управления [ Текст ]: Учебник для вузов / А.А. Ерофеев.- 2-е изд., доп. и перераб. -СПб. : Политехника, 2002. - 302с.
- 8 Методы классической и современной теории автоматического управления [ Текст ]: учебник / под ред. Н.Д. Егупова. -М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.- 312 с.
- 9 Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления [ Текст ]/ В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. -2004. - 752 с.



# ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Амплитудно-фазовые частотные характеристики типовых динамических звеньев

№ по порядку	Передающая функция	Х а р а к т е р и с т и к а		
		амплитудная	фазовая	амплитудно-фазовая
1	$k$			
2	$\frac{k}{Ts+1}$			
3	$Ts+1$			
4	$\frac{k}{Ts-1}$			
5	$\frac{k}{s}$			
6	$s$			
7	$Ts-1$			
8	$\frac{k}{T^2s^2+1}$			
9	$\frac{k}{T^2s^2-1}$			
10	$\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ ( $\xi=1$ )			
11	$\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ ( $0 < \xi < 1$ )			

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
(справочное)

№ по пар.	Передающая функция	Характеристика		
		амплитудная	фазовая	амплитудно-фазовая
12	$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$ ( $\xi > 1$ )			
13	$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$ ( $0 < \xi < 1$ )			
14	$\frac{k}{T^2s^2 - 2\xi Ts - 1}$			
15	$T^2s^2 + 2\xi Ts - 1$			
16	$\frac{k}{T^2s^2 - 2\xi Ts + 1}$ ( $0 < \xi < 1$ )			
17	$\frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts - 1}$			
18	$T^2s^2 + 1$			
19	$T^2s^2 - 1$			
20	$e^{-Ts}$			
21	$e^{Ts}$			

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики типовых динамических звень-

№ по пор.	Передающая функция	Характеристика	
		амплитудная	фазовая
1	$k$		
2	$\frac{k}{Ts+1}$		
3	$Ts+1$		
4	$\frac{k}{Ts-1}$		
5	$\frac{k}{s}$		
6	$s$		
7	$Ts-1$		
8	$\frac{k}{T^2s^2+1}$		
9	$\frac{k}{T^2s^2-1}$		
10	$\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ ( $\xi=1$ )		
11	$\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ ( $0 < \xi < 1$ )		

ев

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**  
(справочное)

№ по пор	Передаточная функция	Характеристика	
		амплитудная	фазовая
12	$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$ ( $\xi=1$ )		
13	$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$ ( $0 < \xi < 1$ )		
14	$\frac{k}{T^2s^2 - 2\xi Ts - 1}$ , где $T = \sqrt{T_1 T_2}$ ( $\xi=1$ )		
15	$T^2s^2 + 2\xi Ts - 1$ , где $T = \sqrt{T_1 T_2}$ ( $\xi=1$ )		
16	$\frac{k}{T^2s^2 - 2\xi Ts + 1}$ ( $0 < \xi < 1$ )		
17	$\frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts - 1}$ , где $T = \sqrt{T_1 T_2}$ ( $\xi=1$ )		
18	$T^2s^2 + 1$		
19	$T^2s^2 - 1$		
20	$e^{-Ts}$		
21	$e^{+Ts}$		

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

Структурные преобразования линейных систем автоматического регулирования

№ по пор.	Наименование структурного преобразования	Исходная структурная схема	Преобразованная структурная схема	Формула для преобразованной передаточной функции или выходного сигнала
1	Перестановка звеньев			$\frac{Y(s)}{X(s)} = W_1(s) \cdot W_2(s)$
2	Объединение последовательно соединенных звеньев в одно звено			$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$
3	Перенос линии связи до звена			$Y(s) = W(s) \cdot X(s)$
4	Перенос линии связи за звено			$Y(s) = W(s) X(s)$ $X(s) = \frac{1}{W(s)} Y(s)$
5	Перемена мест линий связи			$Y(s) = W_1(s) X(s)$ $Z(s) = Y(s) W_2(s)$
6	Перестановка сравнивающих устройств			$U(s) = X(s) - Y(s) + Z(s)$
7	Перестройка схемы сравнивающих устройств			$U(s) = X(s) - Y(s) - Z(s)$
8	Перенос линии связи до сравнивающего устройства			$Z(s) = X(s) - Y(s)$
9	Перенос линии связи за сравнивающее устройство			$Z(s) = X(s) - Y(s)$ $X(s) = Z(s) + Y(s)$
10	Перенос сравнивающего устройства до звена			$U(s) = W(s) X(s) - Z(s)$
11	Перенос сравнивающего устройства за звено			$Z(s) = W(s) [X(s) - Y(s)]$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное)

№ по п/р	Наименование структурного преобразования	Исходная структурная схема	Преобразованная структурная схема	Формула для преобразованной передаточной функции или выходного сигнала
12	Объединение параллельно соединенных звеньев в одно звено			$\frac{U(s)}{X(s)} = W_1(s) - W_2(s)$
13	Перестройка схемы двух параллельно соединенных звеньев			$U(s) = [W_1(s) - W_2(s)]X(s)$
14	Перестройка схемы параллельно соединенных звена и линии связи			$U(s) = [W_1(s) - 1]X(s)$
15	Объединение контура с жесткой обратной связью			$\frac{U(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)}$
16	Перестройка схемы контура с жесткой обратной связью			$U(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)}$
17	Объединение контура с гибкой обратной связью в одно звено			$\frac{U(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$
18	Перестройка схемы контура с гибкой обратной связью			$U(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}X(s)$
19	Объединение контура с передаточной функцией в цепи обратной связи в одно звено			$\frac{U(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + W_1(s)}$
20	Перестройка контура с передаточной функцией в цепи обратной связи			$U(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)}X(s)$
21	Замена одного звена контуром с передаточной функцией в прямой связи			$U(s) = W(s)X(s)$
22	Замена одного звена контуром с передаточной функцией в цепи обратной связи			$U(s) = W(s)X(s)$