

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

А.Г.РЕННЕР, О.И.СТЕБУНОВА, Ю.А.ЖЕМЧУЖНИКОВА

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ  
И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом  
государственного образовательного учреждения высшего профессионального  
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

УДК 33:517/519(07)

ББК 65в6я7

Р 39

Рецензент

кандидат экономических наук, доцент С.В. Дьяконова

Р39

**Реннер А.Г., Стебунова О.И., Жемчужникова Ю.А.**

**Нелинейные модели регрессии [Текст]: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов/ А.Г. Реннер, О.И. Стебунова, Ю.А. Жемчужникова, – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – 25с.**

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной и самостоятельной работы студентов специальностей 061800, 061700 и других экономических специальностей по дисциплине «Эконометрика» на тему «Нелинейные модели регрессии».

ББК 65в6я7

© Реннер А.Г., 2005

© Стебунова О.И., 2005

© Жемчужникова Ю.А., 2005

© ГОУ ОГУ, 2005

## Содержание

Введение.....	4
1 Описание лабораторной работы.....	4
2 Постановка задачи.....	4
3 Порядок работы.....	5
3.1 Подбор и построение модели множественной регрессии.....	5
3.1.1 Линейная модель множественной регрессии.....	5
3.1.2 Нелинейная модель множественной регрессии.....	8
3.1.2.1 Подбор нелинейной модели.....	8
3.1.2.2 Построение модели с помощью преобразования Бокса-Кокса.....	11
3.1.3 Сравнение моделей.....	16
4 Содержание письменного отчета.....	17
5 Вопросы к защите лабораторной работы.....	18
Список использованных источников.....	18
Приложение А.....	19
Приложение Б.....	20

## Введение

Одним из самых сложных этапов спецификации модели регрессии – параметризация, заключающаяся в выборе параметрического семейства функций  $\{f(x, \beta)\}$ , в рамках которого ищется неизвестная функция регрессии. Иногда подбор параметрического класса удается провести из соображений содержательного (экономического) характера, других соображений. Естественны попытки свести выбранную модель к линейной в целях упрощения оценки и исследование параметров модели.

В случае невозможности линеаризации модели оценка параметров модели может быть осуществлена методом наименьших квадратов, приводящего к решению нелинейной оптимизационной задачи МНК. В вычислительном плане, в настоящее время, это не представляет трудностей, но остаются проблемы с изучением статистических свойств оценок.

Большой интерес представляет построение линеаризуемой нелинейной зависимости в случаях, когда последняя неизвестна, методом Бокса-Кокса. При этом построенную нелинейную степенную зависимость можно рассматривать и как хорошую аппроксимацию достаточно широкого класса функций более общего вида. Освоение приемов подбора нелинейной регрессионной зависимости является целью предлагаемой работы.

## 1 Описание лабораторной работы

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- ознакомление с порядком выполнения работы в пакете Statistica 6.0;
- выполнение расчетов для индивидуальных задач;
- подготовку письменного отчета;
- защиту лабораторной работы.

## 2 Постановка задачи

По данным Приложения Б провести регрессионный анализ:

1 Из экономических или других соображений подобрать параметрический класс нелинейных зависимостей для модели регрессии.

2 Линеаризовать модель, оценить параметры и провести содержательный анализ.

3 Подобрать нелинейную модель, используя подход Бокса-Кокса и провести анализ модели.

### 3 Порядок работы

#### 3.1 Подбор и построение модели множественной регрессии

##### 3.1.1 Линейная модель множественной регрессии

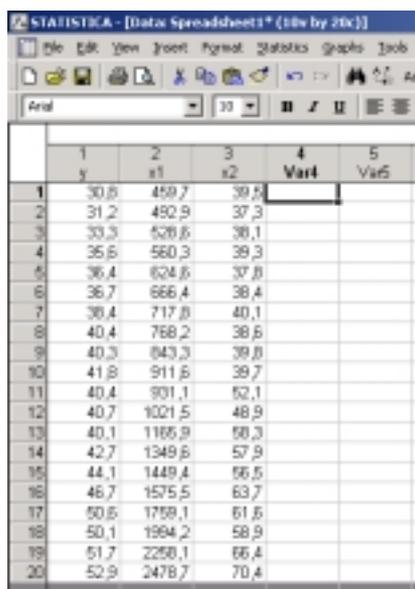
По имеющимся данным о потреблении цыплят ( $y$ ), величинам – среднедушевой доход ( $x_1$ ) и стоимость 1 фунта цыплят ( $x_2$ ) за  $n=20$  лет (см. Приложение А), выявим зависимость между результативным признаком и объясняющими переменными.

Вначале построим линейную функцию регрессии:

$$\tilde{Y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

Запускаем систему Statistica 6.0

Окно с частью данных для анализа представлено на рисунке 1.



	1	2	3	4	5
	y	x1	x2	Var4	Var5
1	30,6	459,7	39,5		
2	31,2	482,9	37,3		
3	33,3	528,6	38,1		
4	35,6	560,3	39,3		
5	36,4	624,6	37,8		
6	36,7	666,4	38,4		
7	38,4	717,8	40,1		
8	40,4	768,2	38,6		
9	40,3	843,3	39,8		
10	41,8	911,6	39,7		
11	40,4	931,1	52,1		
12	40,7	1021,5	48,9		
13	40,1	1166,9	58,3		
14	42,7	1349,6	57,9		
15	44,1	1449,4	66,5		
16	46,7	1575,5	63,7		
17	50,6	1759,1	61,6		
18	50,1	1994,2	58,9		
19	51,7	2258,1	66,4		
20	52,9	2478,7	70,4		

Рисунок 1- Таблица данных

Для построения уравнения множественной регрессии в меню системы необходимо открыть **Statistics** - Критерии и выбрать в появившемся меню строку **Multiple Regression – Множественная регрессия**. Выбрав, зависимую переменную  $Y$  и независимые переменные  $x_1$ ,  $x_2$ , получили методом пошаговой регрессии следующие результаты (рисунок 2).

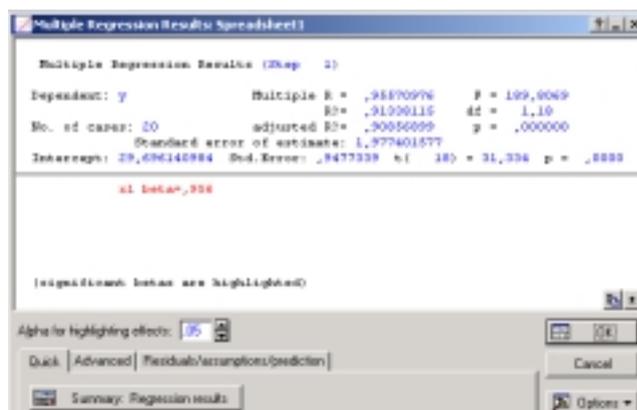


Рисунок 2 – Окно расчетов

Более подробную информацию можно увидеть на рисунке 3.

Regression Summary for Dependent Variable: y (11)						
R = .95570976 R <sup>2</sup> = .91338115 Adjusted R <sup>2</sup> = .90856899						
F(1,18)=189,81 p<.00000 Std. Error of estimate: 1,9774						
N=20	Beta	Std. Err. of Beta	B	Std. Err. of B	t(18)	p-level
Intercept			29,69614	0,947734	31,33384	0,000000
x1	0,955710	0,089370	0,01024	0,000743	13,77704	0,000000

Рисунок 3 – Результаты множественной регрессии

Поскольку можно допустить, нормальный характер распределения регрессионных остатков (см.рисунок 4)

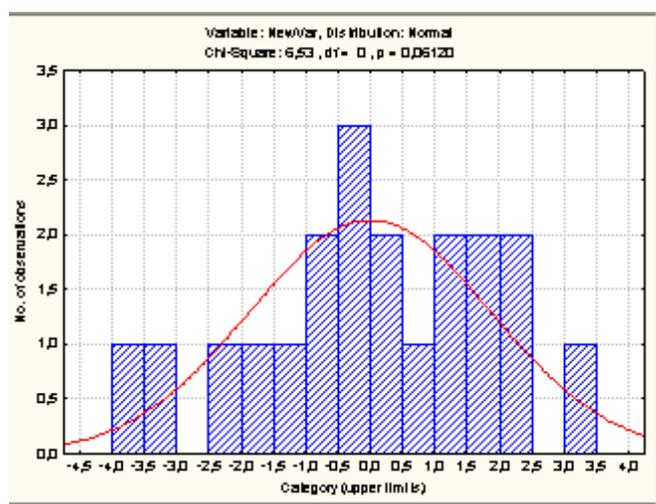


Рисунок 4 – Гистограмма регрессионных остатков

то на основании отчета о результатах регрессионного анализа (см. рисунок 3), делаем вывод:

- модель регрессии значима;
- существенное влияние на результативный признак – потребление цыплят, оказывает объясняющая переменная – среднедушевой доход;
- достаточно высоко качество модели, так как  $\hat{R}^2 = 0,913$ .

Оценка уравнения регрессии выглядит следующим образом:

$$\hat{y}=29,696+0,01X_1$$

(0,9477) (0,0007)

Выбрав в меню системы **Graphs/Scatterplots**, получим график оценки функции регрессии и регрессионных остатков (см. Рисунок 5). На основании графического анализа проверим гипотезу о наличии положительной автокорреляции (Но: автокорреляция отсутствует) и проверим ее с помощью критерия Дарбина – Уотсона.

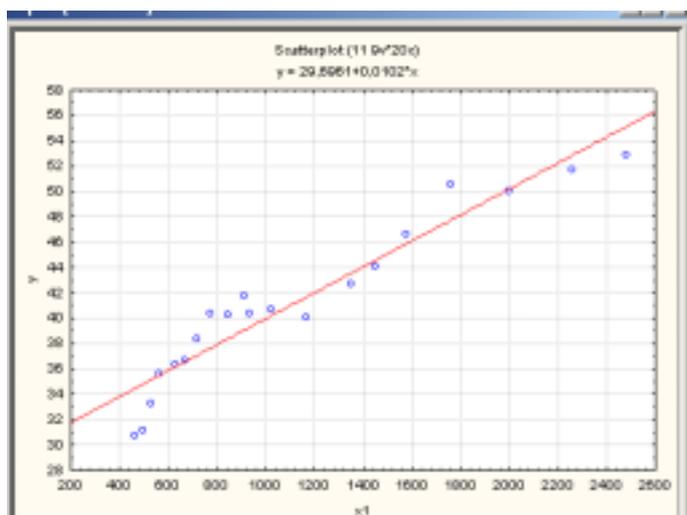


Рисунок 5

Для вычисления значения данного критерия в окне **Residuals analysis – Анализ остатков** нажмем кнопку **Durbin-Watson statistic – Критерий Дарбина-Уотсона**. На экране появится окно, содержащее значение данного критерия.

	Durbin-Watson d (11) and serial correlation of	
	Durbin-Watson d	Serial Corr.
Estimate	0,517740	0,659644

Рисунок 6– Значение статистики Дарбина - Уотсона

Значение статистики  $DW=0.5177$  подтверждает необходимость проверки гипотезы о наличии (или отсутствии) положительной автокорреляции. Для расчета критического значения критерия воспользуемся таблицей значений статистики Дарбина-Уотсона. В нашем случае для  $n=20$ ,  $k=1$  получаем  $d_n=1,20$ ,  $d_b=1,41$ . Так как  $DW \leq d_n$ , то нулевую гипотезу об отсутствии автокорреляции

первого порядка ( $H_0: \rho = 0$ ) отвергаем, т.е. делаем вывод о наличии положительной автокорреляции.

Одной из причин наличия автокорреляции в моделях с пространственными переменными, является неправильная спецификация (параметризация) модели. Будем строить ее в классе нелинейных моделей.

### 3.1.2 Нелинейная модель множественной регрессии

#### 3.1.2.1 Подбор нелинейной модели

Анализируя данные, можно предположить, что функцию спроса можно искать в форме Кобба-Дугласа:

$$\tilde{y} = \beta_0 \cdot (x_1)^{\beta_1} \cdot (x_2)^{\beta_2}$$

Модель нелинейной регрессии:

$$y_i = \beta_0 \cdot x_{i1}^{\beta_1} \cdot x_{i2}^{\beta_2} \cdot \delta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\delta_i$  - регрессионные остатки.

Линеаризуем модель логарифмированием:

$$\ln y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln x_{i1} + \beta_2 \cdot \ln x_{i2} + \ln \delta_i$$

или

$$z_i = c_0 + \beta_1 \cdot s_{i1} + \beta_2 \cdot s_{i2} + \varepsilon_i,$$

где  $z_i = \ln y_i$ ,  $c_0 = \ln \beta_0$ ,  $s_{i1} = \ln x_{i1}$ ,  $s_{i2} = \ln x_{i2}$ ,  $\varepsilon_i = \ln \delta_i$

Преобразуем наши данные, задав в строке формул необходимое преобразование (рисунок 7-8):

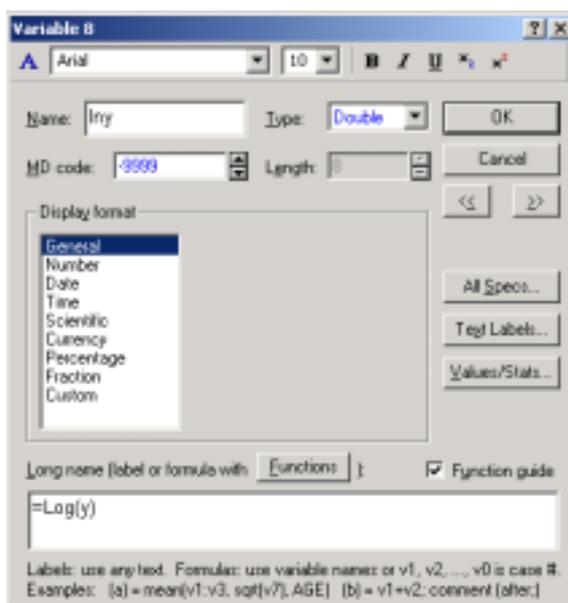


Рисунок 7

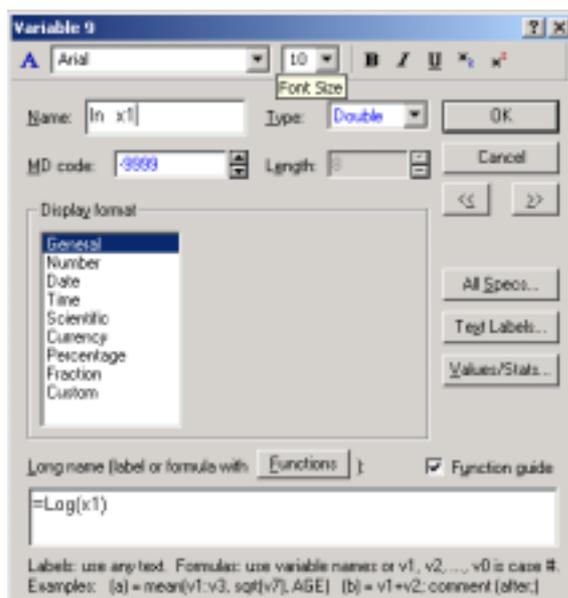


Рисунок 8

Отчет о построении регрессии  $\ln y(z)$  на  $\ln x_1(s_1)$ ,  $\ln x_2(s_2)$  представлен на рисунке 9-10.

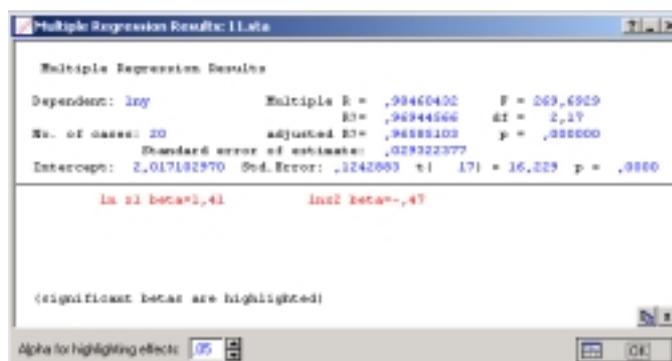


Рисунок 9- Отчет оценивания параметров регрессионной модели

Regression Summary for Dependent Variable: lny (11.sta)						
Regression Summary for Dependent Variable: lny (11.sta)						
R = .98460432 R^2 = .96944566 Adjusted R^2 = .96585103						
F(2,17) = 269.69 p < .000000 Std. Error of estimate: .02932						
	Beta	Std. Err. of Beta	B	Std. Err. of B	t(17)	p-level
N=20						
Intercept			2,017103	0,124288	16,22923	0,000000
ln x1	1,409469	0,119609	0,427775	0,036301	11,78399	0,000000
ln x2	-0,469513	0,119609	-0,325470	0,082914	-3,92540	0,001090

Рисунок 10 - Отчет оценивания параметров регрессионной модели

Поскольку проведенный анализ регрессионных остатков подтвердил нормальный характер их распределения (Рисунок 11),

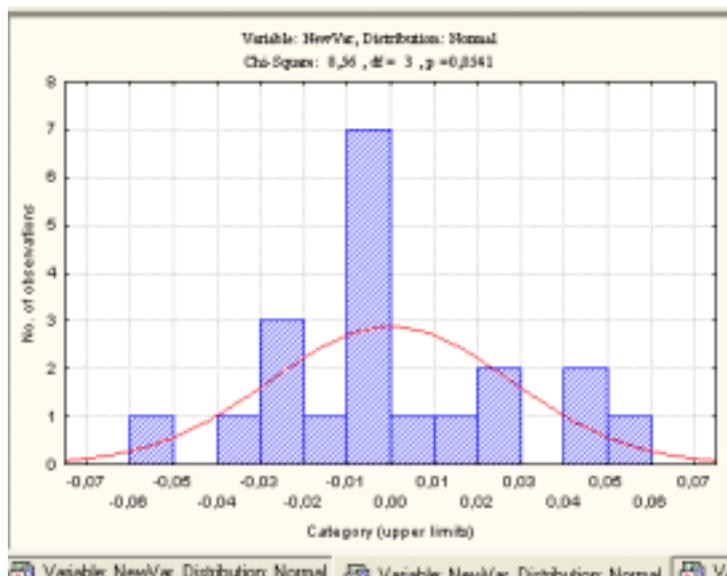


Рисунок 11– Гистограмма регрессионных остатков

то на основании отчета (см. Рисунок 10) делаем выводы:

- модель регрессии значима;
- значимое влияние на результативный признак оказывают обе объясняющие переменные;
- коэффициент детерминации составил 0,969.

В результате получили следующее уравнение регрессии:

$$\hat{z} = 2.017 + 0.428 \cdot s_1 - 0.325 \cdot s_2$$

Нетрудно убедиться в отсутствии автокорреляции.

Durbin-Watson d (11)	
Durbin-Watson d (11) and serial correlation of residuals	
<b>Durbin-Watson d</b>	<b>Serial Corr.</b>
<b>Estimate</b>	1,703132
	0,138799

Рисунок 12– Значение статистики Дарбина – Уотсона

Так как  $d_e \leq DW \leq 2$ , то нулевую гипотезу об отсутствии автокорреляции первого порядка ( $H_0 : \rho = 0$ ) не отвергаем, т.е. делаем вывод, что автокорреляция устранена.

Таким образом, полученная нами модель адекватна выборочным данным. В уравнение все коэффициенты значимы. Коэффициент детерминации составил 0,969.

Перейдем к уравнению регрессии с исходными показателями:

$$\hat{y} = 7.525 \cdot (x_1)^{0.428} \cdot (x_2)^{-0.325}$$

Из модели следует, что с ростом среднедушевого дохода на 1% при неизменной стоимости цыплят их потребление в среднем увеличится на 0,428%. Увеличение же стоимости цыплят на 1% при неизменном среднедушевом доходе приводит к уменьшению потребления в среднем на 0,325%.

### 3.1.2.2 Построение модели с помощью преобразования Бокса-Кокса

Будем искать нелинейную зависимость на регулярной основе, используя преобразования Бокса-Кокса.

Линеаризующее преобразование будем искать в виде:

$$\tilde{y}_i(\lambda^*) = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_{i1}(\lambda) + \dots + \beta_k \tilde{x}_{ik}(\lambda) + \varepsilon_i, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, n}, \\ j = \overline{1, k} \end{matrix}$$

$$\text{где } \tilde{y}_i(\lambda) = \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \tilde{x}_{ij}(\lambda) = \frac{x_{ij}^\lambda - 1}{\lambda}.$$

Указанное преобразование применяется обычно к переменным, принимающим только положительные значения. Поэтому, если это не так, то вначале подбирают <<сдвиговые>> константы, которые обеспечивают положительность значений, а затем к сдвинутым значениям переменных применяют данное преобразование.

Промежуток изменения параметра  $\lambda$ , который на практике задают от -1 до 2, разбивают на N частей, т.е. полагают  $\lambda_0 = -1$  и  $\lambda_N = 2$ . На этом диапазоне выбирается сетка значений:

$$\lambda_i = \lambda_0 + \frac{i(\lambda_N - \lambda_0)}{N},$$

Принимая  $\lambda_0 = -1$  преобразуем переменные  $y$  и  $x_1, x_2$ . Для этого поставим курсор на свободный столбец и кликнем мышкой на название, в результате появится таблица, где в нижней строчке (Long name) зададим формулу:

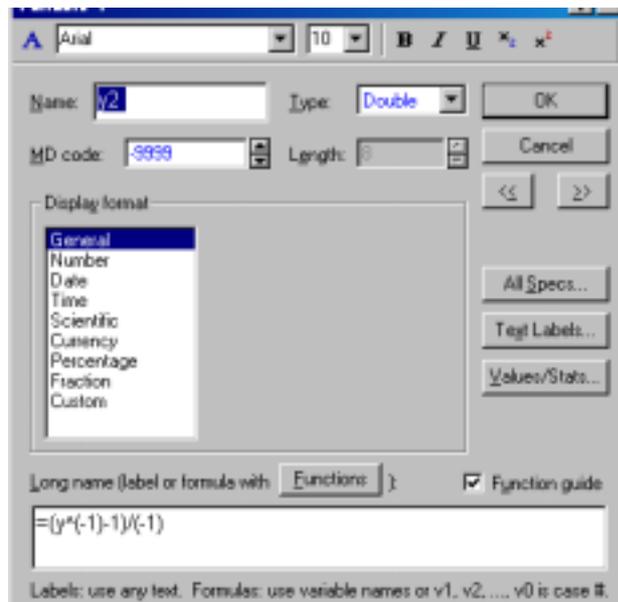


Рисунок 13

Аналогично преобразуем X1 и X2

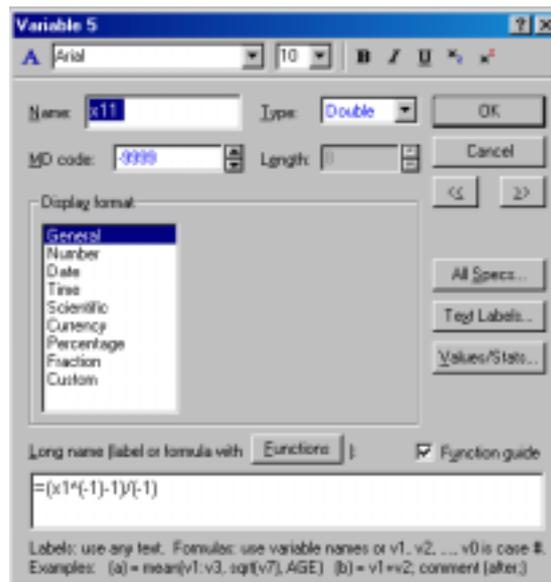


Рисунок 14

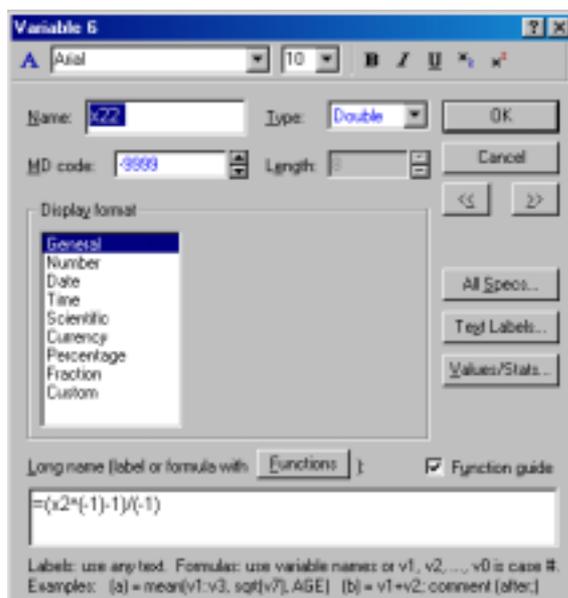


Рисунок 15

В результате получим следующие преобразованные данные:

	1	2	3	4	5	6	7	8
	x	x1	x2	x2	x11	x22	Var9	Var10
1	30.8	459.7	39.5	0.967532	0.997825	0.974684		
2	31.2	492.9	37.3	0.967949	0.997971	0.97319		
3	33.3	528.6	38.1	0.96897	0.998108	0.973753		
4	35.6	560.3	39.3	0.97191	0.998215	0.974555		
5	36.4	624.6	37.8	0.972527	0.998399	0.973545		
6	36.7	666.4	38.4	0.972752	0.998499	0.973958		
7	38.4	717.8	40.1	0.973959	0.998607	0.975062		
8	40.4	768.2	39.6	0.975248	0.998698	0.974093		
9	40.3	843.3	39.8	0.975186	0.998814	0.974874		
10	41.8	911.6	39.7	0.976077	0.998903	0.974811		
11	40.4	931.1	52.1	0.975248	0.998926	0.980806		
12	40.7	1021.5	48.9	0.97543	0.999021	0.97955		
13	40.1	1165.9	58.3	0.975062	0.999142	0.982847		
14	42.7	1349.6	57.9	0.976581	0.999259	0.982729		
15	44.1	1449.4	56.5	0.977324	0.99931	0.982301		
16	46.7	1575.5	63.7	0.978587	0.999365	0.984301		
17	50.6	1759.1	61.6	0.980237	0.999432	0.983766		
18	50.1	1994.2	58.9	0.98004	0.999499	0.983022		
19	51.7	2258.1	66.4	0.980689	0.999557	0.98494		
20	52.9	2478.7	70.4	0.981096	0.999597	0.985795		

Рисунок 16 - Преобразованные данные

Далее построим уравнение регрессии преобразованного результативного признака на преобразованные объясняющие переменные, методом пошаговой регрессии.

Результаты приведены в отчете (на рисунке 17):

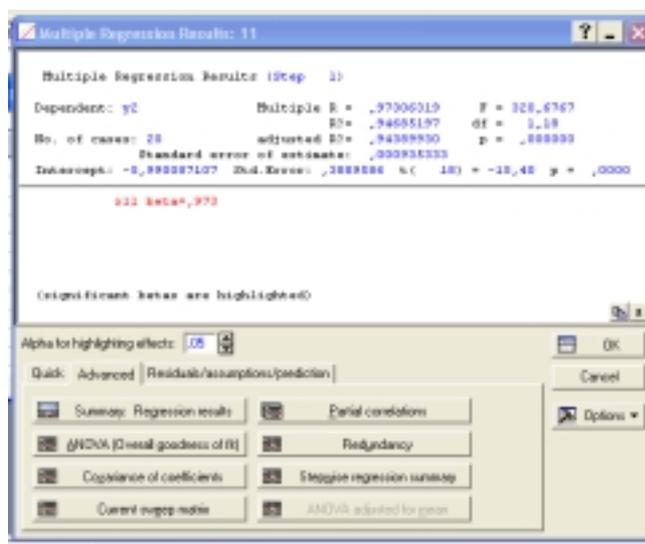


Рисунок 17

Далее рассчитаем величину:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} * \left[ \bar{y}(\lambda, \bar{y}) - \tilde{x}^T * \bar{\beta} \right]^T * \left( \bar{y}(\lambda, \bar{y}) - \tilde{x}^T * \bar{\beta} \right)$$

В нижней части окна результатов регрессионного анализа нажмем кнопку **ANOVA**, в результате появится окно:

Effect	Sums of Squares	df	Mean Squares	F	p-value
<b>Regress.</b>	<b>0,000281</b>	<b>1</b>	<b>0,000281</b>	<b>320,6767</b>	<b>0,00</b>
Residual	0,000016	18	0,000001		
Total	0,000296				

Рисунок 18– Результаты дисперсионного анализа

Значение суммы квадратов остатков находится на пересечении строки **Residual** (остаточная) и столбца **Sums of Squares** (сумма квадратов).

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{20} * 0.000016 = 0,0000008$$

Рассчитаем функцию максимального правдоподобия:

$$l(y_1, \dots, y_n, / F; \lambda, b, \sigma^2) = const + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \frac{n}{2} \ln \sigma^2$$

$$L = (-1-1) * 74.152 - \frac{20}{2} * (-14.03865) = -7,917$$

Варьируя переменную  $\lambda$ , получим следующие значения функции максимального правдоподобия.

Таблица 1 - Значения функции максимального правдоподобия

$\lambda$	L
$\lambda_0 = -1$	L=-7,917
$\lambda_1 = -0,7$	L=-3,5894
$\lambda_2 = -0,4$	L=-1,7938
$\lambda_3 = -0,1$	<b>L=-1,4905</b>
$\lambda_4 = 0,2$	L=-3,5922
$\lambda_5 = 0,5$	L=-7,0099

По результатам, приведенным в таблицы 1, укажем параметр  $\lambda^* = -0,1$ , при котором значение функции правдоподобия принимает максимальное значение. По преобразованным данным построим уравнение регрессии:



Рисунок 19 - Окно расчетов

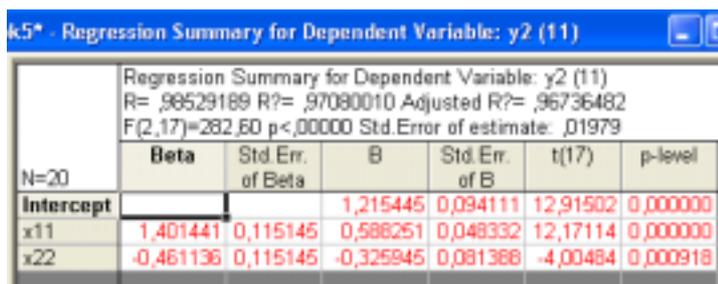


Рисунок 20- Результаты множественной регрессии

Так как регрессионные остатки распределены нормально (рисунок 21)

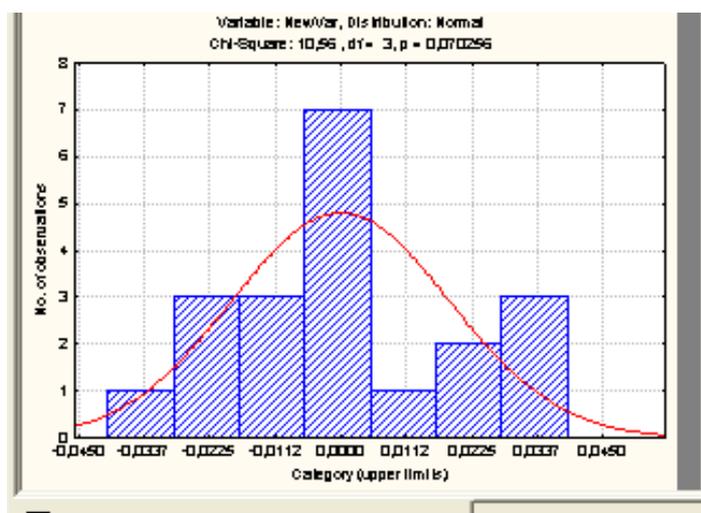


Рисунок 21 – Гистограмма регрессионных остатков

то на основании отчета (рисунок 20) делаем вывод, что получили значимую модель со значимыми коэффициентами.

Стандартный регрессионный анализ регрессии  $\tilde{y}(-0.1)$  по  $\tilde{x}_1(-0.1)$   $\tilde{x}_2(-0.1)$  дает:

$$\tilde{y}_i(-0,1) = 1,2154 + 0,5883\tilde{x}_{i1}(-0,1) - 0,3259\tilde{x}_{i2}(-0,1) + \varepsilon_i$$

(0,0941) (0,0483) (0,0814)

Коэффициент детерминации  $R^2 = 0.97$

Уравнение регрессии, полученное с помощью преобразования Бокса-Кокса, имеет вид:

$$\frac{y^{-0.1} - 1}{-0.1} = 1,2154 + 0,5883 \cdot \frac{x_1^{-0.1} - 1}{-0.1} - 0,3259 \frac{x_2^{-0.1} - 1}{-0.1}$$

Следовательно, окончательное уравнение регрессии в исходных переменных будет иметь вид:

$$\hat{y} = (0,6161 + 0,5883 \cdot \frac{1}{x^{0,1}} - 0,3259 \cdot \frac{1}{x^{0,1}})^{-10}$$

Преобразование Бокса-Кокса улучшило нашу модель, коэффициент детерминации значительно повысился.

### 3.1.3 Сравнение моделей

Таким образом, в данной работе по имеющимся данным были построены две модели: одна из экономических соображений, другая с помощью преобразования Бокса-Кокса. Для сравнения полученных оценок уравнений регрессии найдем модельные значения.

При построении модели, исходя из экономических соображений получили:

$$\hat{y}_1 = 7.525 \cdot (x_1)^{0.428} \cdot (x_2)^{-0.325}$$

С помощью преобразования Бокса-Кокса, получили следующую оценку уравнения:

$$\hat{y}_2 = (0,6161 + 0,5883 \cdot \frac{1}{x^{0,1}} - 0,3259 \cdot \frac{1}{x^{0,1}})^{-10}$$

Найдем модельные значения:

Таблица 2

№	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
1	2	3
1	31,41605	31,097304
2	32,9763	32,679876
3	33,7446	33,489201
4	34,2494	34,028574
5	36,33618	36,159751
6	37,16699	37,019213
7	37,83154	37,71418
8	39,43198	39,33562
9	40,63169	40,559566
10	42,04321	41,986399
11	38,8387	38,819222
12	41,25106	41,211066
13	41,22828	41,220023
14	43,99099	43,924247
15	45,71717	45,604124
16	45,56761	45,447081
17	48,29221	48,063555
18	51,70351	51,325354
19	52,44498	51,950289
20	53,5517	52,941534

Как видно из таблицы 2, модельные значения для первой и второй моделей практически совпадают.

#### 4 Содержание письменного отчета

- 1 Постановка задачи.
- 2 Краткое изложение теоретического материала по теме.
- 3 Результаты компьютерной обработки данных.
- 4 Анализ полученных результатов.
- 5 Выводы о построенных нелинейных моделях.

## **5 Вопросы к защите лабораторной работы**

- 1 Приведите примеры линеаризуемых моделей и приемы их линеаризации;
- 2 МНК для нелинеаризуемых моделей – проблемы оценки и исследования;
- 3 Параметрический класс нелинейных функций, используемых в преобразовании Бокса-Кокса;
- 4 Предварительное преобразование данных;
- 5 Гипотеза Бокса-Кокса о однопараметрических классах линеаризующих преобразований;
- 6 Алгоритм оценки неизвестного параметра.

### **Список использованных источников**

- 1 Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст]: учебник для вузов/ С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян.- М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
- 2 Боровиков В.П., Боровикова И.П. STATISTICA – статистический анализ и обработка данных в среде Windows[Текст]: учебник/ В.П. Боровиков, И.П. Боровикова. - М.: Инф.изд. Дом <<Филин>>,1998.-608с.
- 3 Чураков Е.П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике [Текст]: учеб.пособие/ Е.П. Чураков. - М.: Финансы и статистика, 2004.-240с.:ил.
- 4 Эконометрика [Текст]: учебник/ Н.П.Тихомиров, Е.Ю Дорохина. - М.: Издательство <<Экзамен>>; 2003. – 512с.

## Приложение А (обязательное)

Таблица А.1 – Исходные данные

у	х1	х2
1	2	3
30,8	459,7	39,5
31,2	492,9	37,3
33,3	528,6	38,1
35,6	560,3	39,3
36,4	624,6	37,8
36,7	666,4	38,4
38,4	717,8	40,1
40,4	768,2	38,6
40,3	843,3	39,8
41,8	911,6	39,7
40,4	931,1	52,1
40,7	1021,5	48,9
40,1	1165,9	58,3
42,7	1349,6	57,9
44,1	1449,4	56,5
46,7	1575,5	63,7
50,6	1759,1	61,6
50,1	1994,2	58,9
51,7	2258,1	66,4
52,9	2478,7	70,4

## Приложение Б (обязательное)

Таблица Б.1 – Варианты для самостоятельной работы

№ варианта	Название районов РФ
1	2
1	Северный, Северо-Западный, Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Уральский районы
2	Северный, Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Уральский, Западно-Сибирский районы
3	Северный, Северо-Западный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы
4	Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский районы
5	Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Западно-Сибирский районы
6	Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы
7	Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы
8	Северный, Центральный, Волго-Вятский, Северо-Кавказский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
9	Северный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
10	Северный, Центральный, Волго-Вятский, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
11	Северо-Западный, Центральный, Волго-Вятский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы
12	Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
13	Северо-Западный, Центральный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы,

Продолжение таблицы Б.1

1	2
14	Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы
15	Центральный, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
16	Центральный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
17	Центральный, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
18	Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы
19	Волго-Вятский, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы
20	Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный район

Таблица Б.2 -Исходные данные

	Y	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Российская Федерация</b>	<b>58,3</b>	<b>9,3</b>	<b>15</b>	<b>7,3</b>	<b>4,5</b>	<b>18,1</b>	<b>202</b>	<b>179</b>	<b>24,7</b>	<b>1860</b>
<b>Северный район</b>	<b>56,8</b>	<b>8,7</b>	<b>14,2</b>	<b>6,8</b>	<b>5</b>	<b>18,5</b>	<b>75</b>			
Республика Карелия	54,7	8,5	16,3	6,8	5,6	17,4	163	151	23,6	2344
Республика Коми	5,7	9,3	12,6	7,2	5,5	25,3	194	239	9,2	1809
Архангельская область	7,1	8,7	4,6	6,5	4,2	16,2	152	192	26,9	2406
Вологодская область	57,6	8,6	6,2	6,1	4	17,4	190	205	20,1	2023
Мурманская область	57,7	8,1	11,4	7,7	6,4	5,9	183	198	22	1419
<b>Северо-Западный район</b>	<b>58</b>	<b>7,2</b>	<b>17,3</b>	<b>7,7</b>	<b>5,3</b>	<b>14,9</b>				
г. Санкт-Петербург	59,9	7	15,9	8,2	5,1	13,8	229	172	20	2104
Ленинградская область	55,5	7,2	18,2	7,4	6,1	14,3	146	167	29,1	2489
Новгородская область	55,3	7,9	19,7	6,4	4,7	19,8	174	144	22,8	2428
Псковская область	55,8	7,7	20,8	6,9	5,2	17,1	128	111	42,7	2494
<b>Центральный район</b>	<b>57,8</b>	<b>7,7</b>	<b>17,3</b>	<b>7,6</b>	<b>4,8</b>	<b>16,6</b>				
Брянская область	60,1	9,2	15,9	7,8	5,3	16,7	169	148	22,7	2094
Владимирская область	58,5	7,6	16,4	6,7	4,7	15,5	144	150	27,9	1768
Ивановская область	57,4	7,3	18,3	6,3	4,9	19,6	138	133	33,7	1982
Калужская область	58,5	7,9	16,4	6,8	5	17,6	197	155	26,6	1621
Костромская область	58,3	7,9	17	6,3	4,4	20,1	182	159	30,5	1631
г.Москва	58,2	8	16,9	8,2	4,6	15,5	520	197	19,1	1066
Московская область	56,5	7,2	17,6	8,1	5,2	16,1	143	165	31,2	1183
Орловская область	59,2	8,7	16	7,6	4,4	18,9	214	161	22,7	1308
Рязанская область	58,1	7,8	17,9	7,2	4,3	15,7	158	163	24,4	1475
Смоленская область	58,8	8	16,9	6,9	4,7	16,8	185	146	19,8	2081
Тверская область	56,5	7,5	19,4	6,7	4,6	19,3	153	165	28,6	2109
Тульская область	57,1	7,3	19,4	7,4	5	20,1	200	175	16,2	1757
Ярославская область	58,3	7,6	17,3	7,1	5,3	12	180	154	21,3	2111
<b>Волго-Вятский район</b>	<b>58,7</b>	<b>8,6</b>	<b>15,8</b>	<b>6,6</b>	<b>3,7</b>	<b>16,4</b>				
Республика Марий Эл	59,4	9,6	13	6,4	3,5	16,8	120	117	43,2	2112
Республика Мордовия	61,2	9	14,1	7	3,3	15,2	132	126	34,7	1794
Чувашская Республика	60,4	10,2	13	7,1	3,2	16,1	145	121	27,3	1688
Кировская область	58,6	8,1	16,3	6,2	3,9	17,1	137	121	32	1774
Нижегородская область	57,5	8	17,5	6,7	4	16,4	181	182	22	1773
<b>Центрально-Черноземный район</b>	<b>60,5</b>	<b>8,5</b>	<b>16,3</b>	<b>7,8</b>	<b>4,4</b>	<b>16,4</b>				
Белгородская область	61,9	9,4	14,8	8,1	5	14,7	200	195	19,9	1128
Воронежская область	61	8,3	16,6	7,7	4,4	15,4	182	157	23,1	1295
Курская область	60,2	8,5	16,7	8	4,1	17,1	179	177	20,2	1803
Липецкая область	59,5	8,4	16,1	7,6	4,6	16,7	181	191	18,6	1358
Тамбовская область	59,3	8,4	17,3	7,3	4,1	19,4	183	170	22	1549
<b>Поволжский район</b>	<b>60,2</b>	<b>9,3</b>	<b>14,1</b>	<b>7,1</b>	<b>4,4</b>	<b>18,5</b>				
Республика Калмыкия	59,8	13,5	10,5	7,1	3,4	15,8	100	120	60,3	1417
Республика Татарстан	60,2	10,4	12,9	7	3,9	18,5	194	225	22,1	1581
Астраханская область	60	10,1	13,5	7,1	4,6	18,6	143	137	32,1	1938
Волгоградская область	60,7	9,1	14,6	7,5	5,1	19,1	141	160	33,2	1443
Пензенская область	60,9	8,2	15	7,1	4	14,7	148	121	30,2	1121

Продолжение таблицы Б.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Самарская область	59,1	8,6	14,8	7,3	4,8	14	188	207	21,2	1511
Саратовская область	60,3	8,9	14,5	6,9	4,2	23,6	138	117	35,3	1601
Ульяновская область	60,7	8,9	13,4	6,7	3,9	21,8	198	206	16,3	1193
<b>Северо-Кавказский район</b>	<b>60,5</b>	<b>12</b>	<b>13,6</b>	<b>7,9</b>	<b>4,1</b>	<b>19</b>				
Республика Адыгея	60,6	10,7	14,4	8	4	18,7	129	130	46,3	1344
Республика Дагестан	65,9	21,8	7,5	6,9	1,3	17,6	86	79	41,5	673
Кабардино-балкарская Республика	62,6	13,7	10,4	7,1	3,4	14,5	128	102	42,5	859
Карачаево-Черкесская	63,9	12,9	10,3	7	3,3	16,3	123	107	45,7	925
Северная Осетия	59,5	13,3	13	6,6	2,6	17,8	128	101	42,8	968
Красноярский край	59,4	10	15,3	8,8	5	19,2	175	160	32,4	1565
Ставропольский край	61	10,7	13,5	8,1	4,5	21,7	151	154	39,6	1325
Ростовская область	59,4	9,2	15,8	8	4,8	18,7	146	140	33,4	1497
<b>Уральский район</b>	<b>58,2</b>	<b>9,5</b>	<b>14,5</b>	<b>6,9</b>	<b>4,2</b>	<b>18,3</b>				
Республика Башкортостан	60,2	11,2	12,7	7,3	3,7	18,3	158	191	32,4	1059
Удмуртская республика	57,5	9,4	13,7	6,7	3,4	18,4	158	144	26,1	1915
Курганская область	68,9	9	14,6	7,3	4,3	22,6	113	132	50,4	2660
Оренбургская область	59	10,3	13,5	7,5	4	19,7	115	145	49,3	1534
Пермская область	56,9	9,2	15,8	5,9	3,8	18,9	184	175	25,7	2654
Свердловская область	57,7	8,5	15,6	6,7	4,7	17,5	163	169	29,5	2508
Челябинская область	58	9	14,8	7	4,7	16,6	171	182	27,9	1987
<b>Западно-Сибирский район</b>	<b>58</b>	<b>9,4</b>	<b>13,5</b>	<b>7,3</b>	<b>4,9</b>	<b>19,3</b>				
Республика Алтай	55,1	14,2	13,1	7,1	3,8	27,9	188	148	26,2	2176
Алтайский край	58,3	8,7	14,7	7,3	4,4	20,8	158	146	33,7	1871
Кемеровская область	55,4	8,9	16,6	7	4,9	19,6	254	260	16,1	1563
Новосибирская область	59,1	8,5	14,1	7	4,5	15,9	136	156	39,8	2665
Омская область	60,6	10,2	12,3	7,3	4,6	16,3	157	170	29,7	2273
Томская область	58,2	9,1	13	7	5,3	21,2	173	190	30,6	2635
Тюменская область	57,8	10,6	9,8	7,9	5,7	21,3	290	293	19,2	2478
<b>Восточно-Сибирский район</b>	<b>55,5</b>	<b>11</b>	<b>13,7</b>	<b>6,8</b>	<b>4</b>	<b>19,6</b>				
Республика Бурятия	57,2	11,7	12	6,5	3,5	15,2	122	155	55,2	2580
Республика Тыва	49,7	20	13	5,9	1,9	28	84	101	73,2	2713
Республика Хакасия	56	9,9	14	7,1	4,4	24,6	161	201	25,3	2222
Красноярский край	56	9,8	14	7,2	4,8	19,8	246	296	24,2	2417
Иркутская область	54,7	10,6	14,6	6,3	3,3	18,1	170	215	32,3	2317
Читинская область	56,2	12,2	12,8	6,9	4	20,8	99	112	66,5	2784
<b>Дальневосточный район</b>	<b>56,7</b>	<b>10,2</b>	<b>12,6</b>	<b>7,1</b>	<b>5,3</b>	<b>20,5</b>				
Республика Саха	57	15,3	9,8	8	4,7	19,5	170	201	29,2	1483
Еврейская автономная область	55	10,9	13,6	7,3	5,2	26,4	130	125	28,5	3276
Чукотский автономный округ	57,8	9,8	8,6	7,3	8,9	34	85	73	26,4	1148
Приморский край	57,8	9,4	13,1	6,6	4,7	21,5	144	170	31,8	3095

Продолжение таблица Б.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Хабаровский край	57,2	9,3	13,1	6,6	5,7	17,8	153	171	29,4	2881
Амурская область	58	10,1	12	7,2	4,9	23,6	175	187	37,9	2017
Камчатская область	56,3	9,1	11,2	7,9	6,7	15,4	211	228	22,7	2064
Магаданская область	55,7	8,3	10,9	7,2	7,1	14,2	202	187	24,6	3068
Сахалинская область	50,7	8,9	17	7,2	5,7	22,7	145	169	24,6	3588
Калининградская область	58,9	8,6	13,6	7,8	6	15,4	155	145	26,6	2471

Таблица Б.3 – Наименование показателей

Наименование показателей	Обозначение
1 Ожидаемая продолжительность жизни мужчин при рождении (число лет)	У
2 Рождаемость населения (на 1000 человек)	$x_1$
3 Смертность населения (на 1000 человек);	$x_2$
4 Браки на 1000 населения	$x_3$
5 Разводы на 1000 населения	$x_4$
6 Коэффициент младенческой смертности (число детей, умерших в возрасте до 1 года, на 1000 родившихся)	$x_5$
7 Соотношение денежного дохода и прожиточного минимума (%)	$x_6$
8 Соотношение средней оплаты труда с учетом выплат социального характера и прожиточного минимума трудоспособного населения (%);	$x_7$
9 Численность населения с денежными доходами ниже прожиточного минимума в % от численности населения региона	$x_8$
10 Число зарегистрированных преступлений по регионам РФ (на 100000 населения)	$x_9$

