

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

А.Г. РЕННЕР, О.И. СТЕБУНОВА, Ю.А. ЖЕМЧУЖНИКОВА

**ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ
МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВЕННОЙ
РЕГРЕССИИ С
АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫМИ
ОСТАТКАМИ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ И
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

УДК 33:517/519

ББК 65 в6

Р 39

Рецензент

кандидат экономических наук, доцент К.И. Майстренко

Р 39 Реннер А.Г., Стебунова О.И., Жемчужникова Ю.А.
Обобщенная линейная модель множественной регрессии с автокоррелированными остатками [Текст]: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов/ А.Г. Реннер, О.И. Стебунова, Ю.А. Жемчужникова. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – 19 с.

Методические указания содержат описание работы по исследованию обобщенной линейной модели множественной регрессии с автокоррелированными остатками, варианты индивидуальных заданий для проведения лабораторной работы.

Методические указания предназначены студентам специальностей 061800, 061700, и других экономических специальностей, изучающих дисциплину «Эконометрика».

ББК 65 в6

© Реннер А.Г., 2005
© Стебунова О.И., 2005
© Жемчужникова Ю.А., 2005
© ГОУ ОГУ, 2005

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение | 4 |
| 1 Описание лабораторной работы №3 | 5 |
| 2 Постановка задачи. | 5 |
| 3 Порядок выполнения работы. | 5 |
| 4 Содержание письменного отчета. | 13 |
| 5 Вопросы к защите. | 13 |
| Список использованных источников | 13 |
| Приложение А – Таблица А.1 – Выборочные данные. | 14 |
| Приложение А – Таблица А.2 – Варианты заданий. | 17 |
| Приложение А – Таблица А.3 – Наименование показателей. | 19 |

Введение

Предположение классической линейной модели множественной регрессии, касающееся некоррелированности регрессионных остатков может нарушаться в случаях неверной спецификации (параметризации) модели и, как правило, нарушается при анализе данных, имеющих характер временных рядов.

Линейные модели множественной регрессии с коррелированными остатками классифицируются, как обобщенные линейные модели множественной регрессии (ОЛММР). МНК-оценки такой модели несмещены, состоятельны, но неэффективны.

ОМНК-оценки параметров ОЛММР эффективны, но для их построения требуется оценка ковариационной матрицы вектора регрессионных остатков. В лабораторной работе рассмотрены примеры построения параметров ОЛММР в случае автокорреляционной зависимости первого порядка между регрессионными остатками.

Цель работы заключается в формировании навыков исследования регрессионных моделей с коррелированными остатками.

1 Описание лабораторной работы №3

Лабораторная работа №3 включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- ознакомление с порядком выполнения работы;
- выполнение расчетов индивидуальных задач на компьютере и анализ результатов;
- подготовку письменного отчета с выводами по работе;
- защиту лабораторной работы.

2 Постановка задачи

По данным Приложения А:

- 1) построить МНК-оценки коэффициентов линейной модели множественной регрессии;
- 2) исследовать регрессионные остатки на наличие автокорреляции;
- 3) используя процедуру Кохрейна-Оркатта, построить ОМНК-оценки параметров ОЛММР с автокоррелированными остатками.

3 Порядок выполнения работы

Рассмотрим процедуру исследования линейной модели множественной регрессии на наличие или отсутствие автокорреляции на основе информации о деятельности 30 крупных компаний США:

- y – чистый доход, млрд. долл.;
- x_1 – оборот капитала, млрд. долл.;
- x_2 – использованный капитал, млрд. долл.;
- x_3 – численность служащих, тыс. чел.;
- x_4 – расходы на конечное потребление, млрд. долл.;
- x_5 – расходы домашних хозяйств, млрд. долл.;

Окно с частью данных для анализа представлено на рисунке 1.

| | 1 Y | 2 x1 | 3 x2 | 4 x3 | 5 x4 | 6 x5 | 7 Var7 | 8 e | 9 Var9 | 10 Var10 |
|----|--------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|--------|-----------|-------------|
| 1 | 3,5578 | 3,389 | 5 | 11,6 | 3,1 | 11,5 | | | | |
| 2 | 2,6417 | 1,637 | 8,7 | 9,2 | 6,1 | 10,1 | | | | |
| 3 | 3,1282 | 2,572 | 2,7 | 7 | 2,6 | 4,9 | | | | |
| 4 | 2,8173 | 3,935 | 4 | 7,4 | 5,8 | 5,5 | | | | |
| 5 | 2,6315 | 0,818 | 6,5 | 8,7 | 6 | 12,4 | | | | |
| 6 | 3,5034 | 2,129 | 4,1 | 10,1 | 8,2 | 2,3 | | | | |
| 7 | 3,1641 | 1,731 | 13,4 | 8,8 | 27,7 | 12,3 | | | | |
| 8 | 2,719 | 2,97 | 3,7 | 10,8 | 11,2 | 8,5 | | | | |
| 9 | 3,4752 | 4,186 | 3,7 | 6,4 | 4,1 | 7,2 | | | | |
| 10 | 4,7417 | 20,527 | 10,4 | 10,8 | 7,3 | 14,3 | | | | |
| 11 | 3,0796 | 1,95 | 15,7 | 7,8 | 6 | 15,2 | | | | |
| 12 | 3,4253 | 2,281 | 21,3 | 6 | 7,3 | 19,5 | | | | |
| 13 | 3,3056 | 2,315 | 7,6 | 9 | 11 | 6,1 | | | | |
| 14 | 2,5938 | 1,397 | 5,8 | 6,1 | 6,4 | 11,4 | | | | |
| 15 | 3,4139 | 5,268 | 7,4 | 7,7 | 7,6 | 12,1 | | | | |
| 16 | 3,3681 | 2,731 | 11,9 | 7,2 | 5,9 | 10,4 | | | | |
| 17 | 3,9084 | 4,855 | 4,7 | 8,6 | 4,4 | 9,5 | | | | |
| 18 | 6,8452 | 79,881 | 4,9 | 11,3 | 6,1 | 9,2 | | | | |
| 19 | 3,78 | 13,884 | 7,1 | 8,1 | 14,9 | 12,1 | | | | |
| 20 | 2,3586 | 0,871 | 5,4 | 9 | 0,7 | 4,1 | | | | |
| 21 | 2,3466 | 1,45 | 3,6 | 10,1 | 6,1 | 12,8 | | | | |

Рисунок 1- Исходные данные для анализа

Для оценки параметров регрессионной модели воспользуемся методом пошаговой регрессии (методом исключения переменных) /1-3/. Процедура построения уравнения множественной регрессии более подробно рассмотрена в лабораторной работе №1.

Результаты оценивания представлены на рисунке 2.

| Regression Summary for Dependent Variable: Y (danna1) | | | | | | |
|---|----------|------------------|----------|---------------|----------|----------|
| R= ,88229307 R_ = ,77844106 Adjusted R_ = ,77052824 | | | | | | |
| F(1,28)=98,377 p<,00000 Std.Error of estimate: ,42341 | | | | | | |
| N=30 | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(28) | p-level |
| Intercept | | | 2,944958 | 0,086370 | 34,09713 | 0,000000 |
| x1 | 0,882293 | 0,088954 | 0,053217 | 0,005365 | 9,91853 | 0,000000 |

Рисунок 2 - Результаты оценивания параметр регрессионной модели

Для проведения теста на нормальный характер распределения регрессионных остатков в меню системы Statistica выберем пункт **Distribution Fitting**. Результаты исследования регрессионных остатков представлены на рисунке 3.

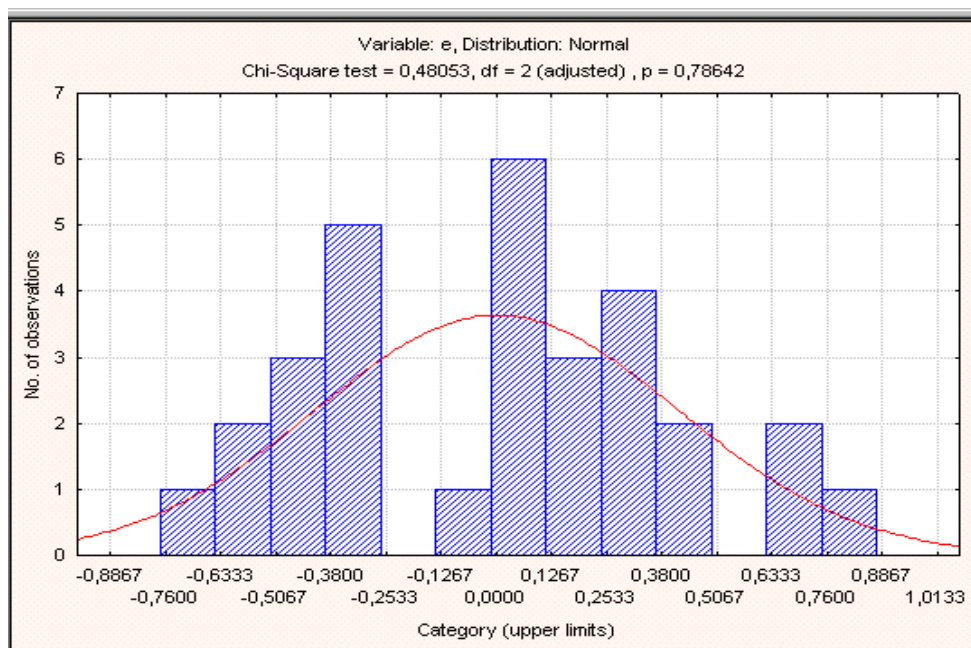


Рисунок 3 – Гистограмма распределения регрессионных остатков

Результаты формальной проверки гипотезы о нормальном характере распределения регрессионных остатков позволяют ее не отвергнуть, и есть смысл проводить дальнейший анализ построенного уравнения множественной регрессии.

Оценка уравнения регрессии выглядит следующим образом:

$$\hat{y} = 2,945 + 0,053X_1 \quad (1)$$

(0,09) (0,005)

Как видно из отчета (рисунок 2), регрессионная модель адекватна экспериментальным данным, значимыми оказались все коэффициенты модели.

Исследуем регрессионные остатки на наличие/отсутствие автокорреляции.

Для визуального анализа регрессионных остатков построим график с использованием MS Excel (рисунок 4).

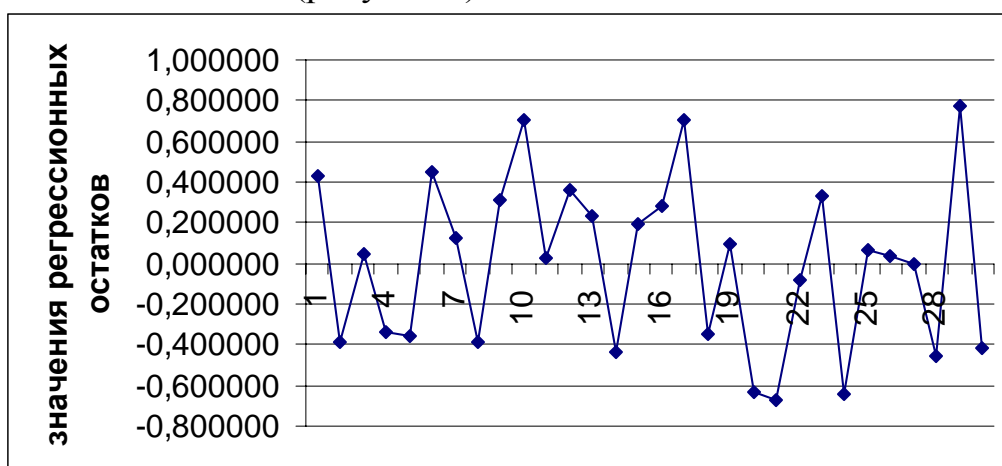
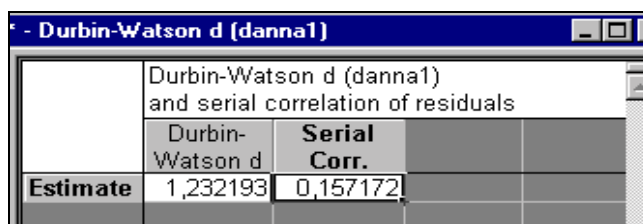


Рисунок 4 – График регрессионных остатков

По графику регрессионных остатков можно предположить наличие в регрессионных остатках положительной автокорреляции.

Кроме визуального анализа, существует критерий Дарбина-Уотсона, с помощью которого выявляется автокорреляции первого порядка.

Для вычисления значения данного критерия используется соответствующая процедура ППП Statistica. В окне **Residuals analysis – Анализ остатков** нажмем кнопку **Durbin-Watson statistic – Критерий Дарбина-Уотсона** /1/. На экране появится окно, содержащее значение данного критерия.



| | Durbin-Watson d | Serial Corr. |
|----------|-----------------|--------------|
| Estimate | 1,232193 | 0,157172 |

Рисунок 5 – Значение критерия Дарбина-Уотсона и оценка коэффициента корреляции регрессионных остатков

Так как $DW < 2$, то наше предположение о возможном наличии положительной автокорреляции допустимо. Для расчета критического значения воспользуемся таблицей значений статистики Дарбина-Уотсона. В нашем случае для $n=30$, $k=1$ получаем $d_H=1,35$ $d_B=1,49$. Так как $DW \leq d_H$, то нулевую гипотезу об отсутствии автокорреляции первого порядка ($H_0 : \rho = 0$) отвергаем, т.е. делаем вывод о наличии положительной автокорреляция.

3.1 Построение обобщенной линейной модели множественной регрессии

Как известно, ОМНК-оценки параметров уравнения регрессии: $b = (X^T \hat{\Sigma}_0^{-1} X)^{-1} X^T \hat{\Sigma}_0^{-1} \bar{Y}$. При наличии автокорреляции первого порядка матрица Σ_0^{-1}

будет иметь вид: $\Sigma_0^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Таким образом, задача сводится

к оцениванию параметра ρ . Для решения этой задачи воспользуемся процедурой Кохрейна–Оркатта /1-2/.

На первом этапе МНК находим оценки коэффициентов уравнения регрессии, вычисляем регрессионные остатки $e_i^{(1)}$. На рисунке 2 представлены оценки коэффициентов уравнения регрессии. Информация о значениях остатков может быть получена нажатием на кнопку **Summary: Residuals & predicted**. Вектор регрессионных остатков представлен на рисунке 6.

| e |
|-----------|
| 0,432488 |
| -0,390375 |
| 0,046367 |
| -0,337069 |
| -0,356990 |
| 0,445142 |
| 0,127023 |
| -0,384014 |
| 0,307473 |
| 0,704347 |
| 0,030868 |
| 0,358953 |
| 0,237443 |
| -0,435503 |
| 0,188592 |
| 0,277805 |
| 0,705071 |
| -0,350825 |
| 0,096170 |
| -0,632711 |
| -0,675523 |

Рисунок 6 – Значения регрессионных остатков

Оценивая параметр ρ модели регрессии $e_i^{(1)} = \rho e_{i-1}^{(1)} + \delta_i^{(1)}$, получили $\hat{\rho}^{(1)} = 0,157$. В качестве оценки матрицы Σ_0^{-1} берем матрицу

$\hat{\Sigma}_0^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\rho}^{(1)2}} \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}^{(1)} & \dots & 0 \\ -\hat{\rho}^{(1)} & 1+\hat{\rho}^{(1)2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Имея эту матрицу, построим ОМНК-оценки

параметров уравнения регрессии.

Для определения вектора-оценок коэффициентов уравнения регрессии воспользуемся функциональными возможностями Mathcad. Сначала матрицы X , Y , $\hat{\Sigma}^{-1}_0$ формируем в Excel, сохраняем в текстовом формате, затем открываем Mathcad, в меню **Insert** выбираем пункт **Components** (рисунок 7).

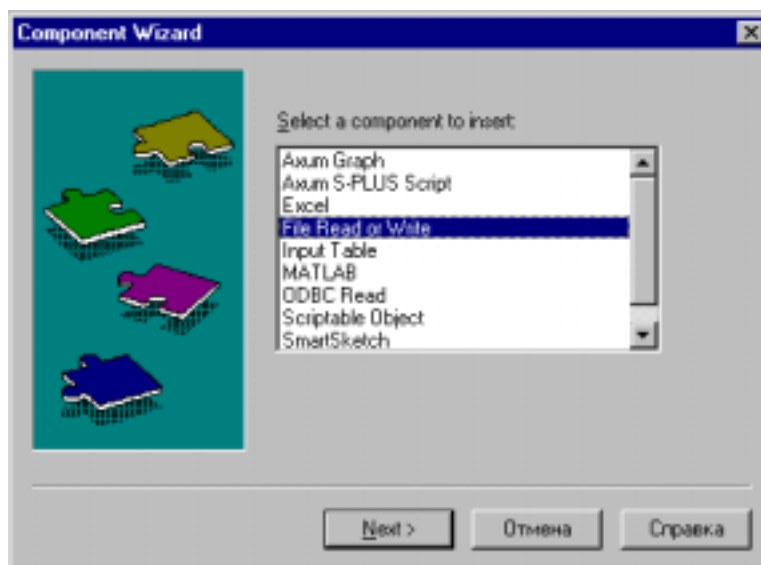


Рисунок 7 – Выбор пунктов меню для импортирования данных из MS Excel

В появившемся окне находим пункт **File Read or Word**. В окне **File Read or Word** нажимаем на кнопку **Browse - Обзор** и открываем текстовый файл, в котором сохранили матрицы X , Y , $\hat{\Sigma}^{-1}_0$. Выбрав нужный файл, нажимаем на кнопку Готово. В появившемся окне полученной матрице присваиваем имя, например X , и соответственно, получаем матрицы X , Y и $\hat{\Sigma}^{-1}_0$ (рисунок 8).

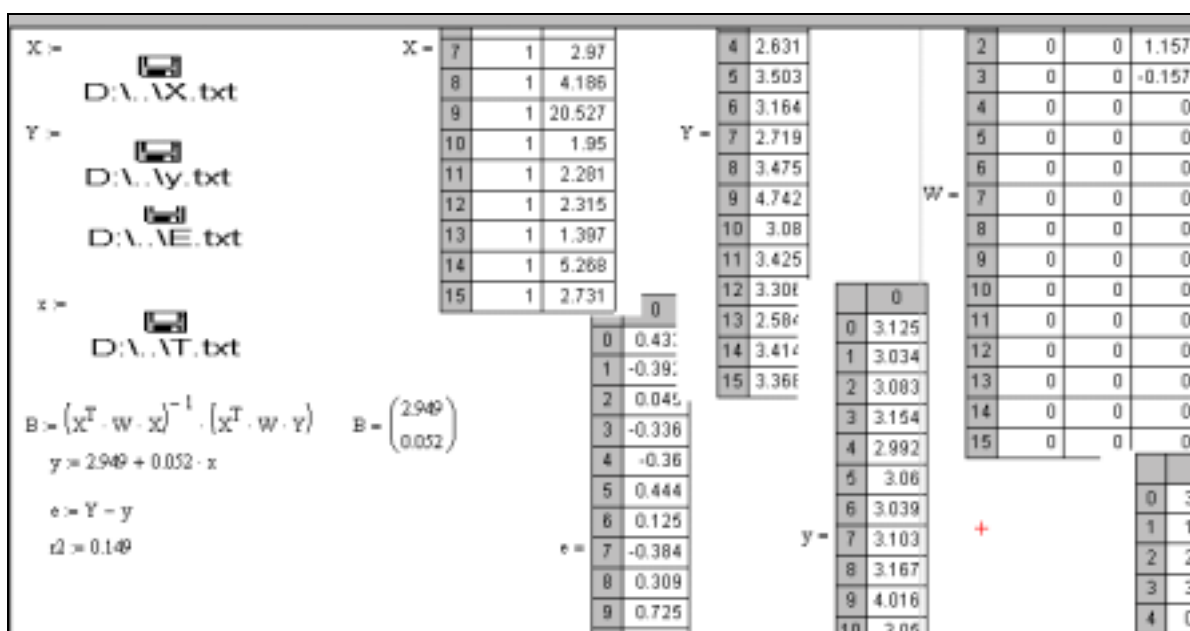


Рисунок 8 – Результаты расчетов в Mathcad

Повторим процедуру до тех пор пока соседние $\hat{\rho}^{(k)}$ и $\hat{\rho}^{(k-1)}$ не окажутся между собой приблизительно равны.

На 5 шаге итерации $\hat{\rho}^{(4)} \approx \hat{\rho}^{(5)} = 0.120$. На рисунке 9 представлены результаты вычислений на последней итерации.

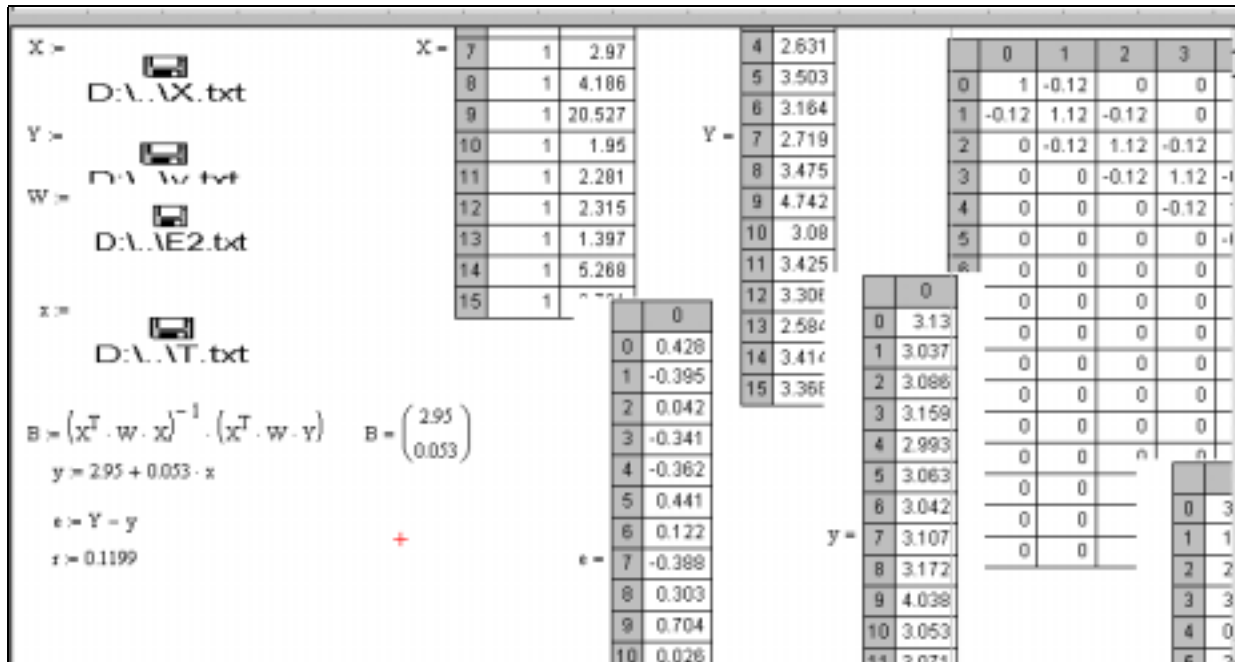


Рисунок 9 – Результаты расчетов на последнем шаге

На рисунках 8 и 9 под матрицей W подразумевается $\hat{\Sigma}_0^{-1}$.

Оценка уравнения регрессии выглядит следующим образом:

$$\hat{y} = 2,95 + 0,053X_1 \quad (2)$$

На рисунке 10 представлены результаты вычислений оценки ковариационной матрицы вектора оценок коэффициентов ($\hat{\Sigma}(B)$), оценки остаточной дисперсии.

$$\frac{(e^T \cdot e)}{30 - 1 - 1} = (0.179) \quad (Y - 3.33)^T (Y - 3.33) = (22.657)$$

$$\Sigma(B) := 0.179 \cdot (X^T \cdot \Sigma \cdot X)^{-1}$$

$$\Sigma(B) = \begin{pmatrix} 8.12 \times 10^{-3} & -1.868 \times 10^{-4} \\ -1.868 \times 10^{-4} & 2.602 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Рисунок 10 – Результаты оценивания остаточной дисперсии, матрицы $\hat{\Sigma}(B)$.

Используя полученные результаты, определим оценку коэффициента детерминации $\hat{R}^2 = 1 - \frac{5.024}{22,657} = 0.78$, $F_H = \frac{\hat{R}^2 / k}{1 - \hat{R}^2 / n - k - 1} = 99.27$.

Результаты проверки гипотезы о нормальном характере распределения регрессионных остатков позволяют ее не отвергнуть.

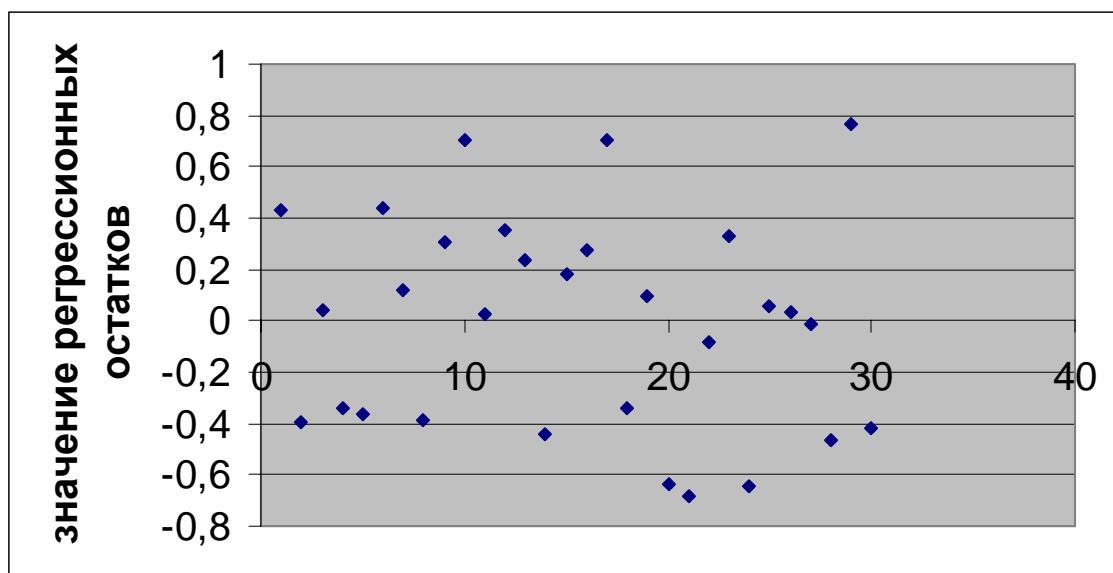


Рисунок 11 – График регрессионных остатков

Итак, получили следующую оценку уравнения регрессии: $\hat{y} = 2,95 + 0,053X_1$. Так как $F_H > F_{кр}$, нулевую гипотезу о незначимости модели отвергаем. Значение критерия Дарбина-Уотсона составило 1,76, что свидетельствует об отсутствии автокорреляции, график регрессионных остатков приведен на рисунке 11. Согласно полученной модели, при изменении оборота капитала на 1 млрд. долл. чистый доход возрастет в среднем на 0,053 млрд. долл. Оценка коэффициента детерминации $\hat{R}^2 = 0.78$ показывает, что вариация результирующей переменной лишь на 78% объясняется вариацией факторного признака X_1 .

4 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом, оформленным соответствующим образом и содержать следующее:

- 1) постановку задачи с вариантом выборок;
- 2) краткое изложение теории по исследованию ОЛММР с автокоррелированными остатками;
- 3) результаты компьютерной обработки данных;
- 4) анализ полученных результатов;
- 5) выводы по полученным результатам.

5 Вопросы к защите

- 1 Дайте определение ОЛММР с автокоррелированными остатками.
- 2 Укажите свойства МНК-оценок ОЛММР с автокоррелированными остатками.
- 3 Ковариационная матрица регрессионных остатков в ОЛММР с автокоррелированными остатками первого порядка.
- 4 Укажите причины и признаки автокорреляции.
- 5 Тест Дарбина-Уотсона для проверки наличия/отсутствия автокорреляции.
- 6 Процедура Кохрейна-Оркатта.
- 7 Исследование статистических свойств ОМНК-оценок параметров модели с автокоррелированными остатками.

Список использованных источников

- 1 **Айвазян С.А., Мхитарян В.С.** Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст]: учебник для вузов/ С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
- 2 **Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.** Эконометрика. Начальный курс [Текст]: учебник/ Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2004. – 57 с.
- 3 **Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю.** Эконометрика [Текст]: учебник/ Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 512 с.

Приложение А (обязательное)

Исходные данные для анализа

Таблица А.1 – Выборочные данные

| | Y | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
|-----------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|-------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Российская Федерация | 58,3 | 9,3 | 15 | 7,3 | 4,5 | 18,1 | 202 | 179 | 24,7 | 1860 |
| Северный район | 56,8 | 8,7 | 14,2 | 6,8 | 5 | 18,5 | 75 | | | |
| Республика Карелия | 54,7 | 8,5 | 16,3 | 6,8 | 5,6 | 17,4 | 163 | 151 | 23,6 | 2344 |
| Республика Коми | 5,7 | 9,3 | 12,6 | 7,2 | 5,5 | 25,3 | 194 | 239 | 9,2 | 1809 |
| Архангельская область | 7,1 | 8,7 | 4,6 | 6,5 | 4,2 | 16,2 | 152 | 192 | 26,9 | 2406 |
| Вологодская область | 57,6 | 8,6 | 6,2 | 6,1 | 4 | 17,4 | 190 | 205 | 20,1 | 2023 |
| Мурманская область | 57,7 | 8,1 | 11,4 | 7,7 | 6,4 | 5,9 | 183 | 198 | 22 | 1419 |
| Северо-Западный район | 58 | 7,2 | 17,3 | 7,7 | 5,3 | 14,9 | | | | |
| г. Санкт-Петербург | 59,9 | 7 | 15,9 | 8,2 | 5,1 | 13,8 | 229 | 172 | 20 | 2104 |
| Ленинградская область | 55,5 | 7,2 | 18,2 | 7,4 | 6,1 | 14,3 | 146 | 167 | 29,1 | 2489 |
| Новгородская область | 55,3 | 7,9 | 19,7 | 6,4 | 4,7 | 19,8 | 174 | 144 | 22,8 | 2428 |
| Псковская область | 55,8 | 7,7 | 20,8 | 6,9 | 5,2 | 17,1 | 128 | 111 | 42,7 | 2494 |
| Центральный район | 57,8 | 7,7 | 17,3 | 7,6 | 4,8 | 16,6 | | | | |
| Брянская облсть | 60,1 | 9,2 | 15,9 | 7,8 | 5,3 | 16,7 | 169 | 148 | 22,7 | 2094 |
| Владимирская область | 58,5 | 7,6 | 16,4 | 6,7 | 4,7 | 15,5 | 144 | 150 | 27,9 | 1768 |
| Ивановская область | 57,4 | 7,3 | 18,3 | 6,3 | 4,9 | 19,6 | 138 | 133 | 33,7 | 1982 |
| Калужская область | 58,5 | 7,9 | 16,4 | 6,8 | 5 | 17,6 | 197 | 155 | 26,6 | 1621 |
| Костромская область | 58,3 | 7,9 | 17 | 6,3 | 4,4 | 20,1 | 182 | 159 | 30,5 | 1631 |
| г.Москва | 58,2 | 8 | 16,9 | 8,2 | 4,6 | 15,5 | 520 | 197 | 19,1 | 1066 |
| Московская область | 56,5 | 7,2 | 17,6 | 8,1 | 5,2 | 16,1 | 143 | 165 | 31,2 | 1183 |
| Орловская область | 59,2 | 8,7 | 16 | 7,6 | 4,4 | 18,9 | 214 | 161 | 22,7 | 1308 |
| Рязанская область | 58,1 | 7,8 | 17,9 | 7,2 | 4,3 | 15,7 | 158 | 163 | 24,4 | 1475 |
| Смоленская область | 58,8 | 8 | 16,9 | 6,9 | 4,7 | 16,8 | 185 | 146 | 19,8 | 2081 |
| Тверская область | 56,5 | 7,5 | 19,4 | 6,7 | 4,6 | 19,3 | 153 | 165 | 28,6 | 2109 |
| Тульская область | 57,1 | 7,3 | 19,4 | 7,4 | 5 | 20,1 | 200 | 175 | 16,2 | 1757 |
| Ярославская область | 58,3 | 7,6 | 17,3 | 7,1 | 5,3 | 12 | 180 | 154 | 21,3 | 2111 |
| Волго-Вятский район | 58,7 | 8,6 | 15,8 | 6,6 | 3,7 | 16,4 | | | | |
| Республика Марий Эл | 59,4 | 9,6 | 13 | 6,4 | 3,5 | 16,8 | 120 | 117 | 43,2 | 2112 |
| Республика Мордовия | 61,2 | 9 | 14,1 | 7 | 3,3 | 15,2 | 132 | 126 | 34,7 | 1794 |
| Чувашская Республика | 60,4 | 10,2 | 13 | 7,1 | 3,2 | 16,1 | 145 | 121 | 27,3 | 1688 |
| Кировская область | 58,6 | 8,1 | 16,3 | 6,2 | 3,9 | 17,1 | 137 | 121 | 32 | 1774 |
| Нижегородская область | 57,5 | 8 | 17,5 | 6,7 | 4 | 16,4 | 181 | 182 | 22 | 1773 |
| Центрально-Чернозмый район | 60,5 | 8,5 | 16,3 | 7,8 | 4,4 | 16,4 | | | | |
| Белгородская область | 61,9 | 9,4 | 14,8 | 8,1 | 5 | 14,7 | 200 | 195 | 19,9 | 1128 |
| Воронежская область | 61 | 8,3 | 16,6 | 7,7 | 4,4 | 15,4 | 182 | 157 | 23,1 | 1295 |
| Курская область | 60,2 | 8,5 | 16,7 | 8 | 4,1 | 17,1 | 179 | 177 | 20,2 | 1803 |
| Липецкая область | 59,5 | 8,4 | 16,1 | 7,6 | 4,6 | 16,7 | 181 | 191 | 18,6 | 1358 |
| Тамбовская область | 59,3 | 8,4 | 17,3 | 7,3 | 4,1 | 19,4 | 183 | 170 | 22 | 1549 |
| Поволжсий район | 60,2 | 9,3 | 14,1 | 7,1 | 4,4 | 18,5 | | | | |
| Республика Калмыкия | 59,8 | 13,5 | 10,5 | 7,1 | 3,4 | 15,8 | 100 | 120 | 60,3 | 1417 |
| Республика Татарстан | 60,2 | 10,4 | 12,9 | 7 | 3,9 | 18,5 | 194 | 225 | 22,1 | 1581 |

Продолжение таблица А.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|-------------|-----|-----|------|------|
| Астраханская область | 60 | 10,1 | 13,5 | 7,1 | 4,6 | 18,6 | 143 | 137 | 32,1 | 1938 |
| Волгоградская область | 60,7 | 9,1 | 14,6 | 7,5 | 5,1 | 19,1 | 141 | 160 | 33,2 | 1443 |
| Пензенская область | 60,9 | 8,2 | 15 | 7,1 | 4 | 14,7 | 148 | 121 | 30,2 | 1121 |
| Самарская область | 59,1 | 8,6 | 14,8 | 7,3 | 4,8 | 14 | 188 | 207 | 21,2 | 1511 |
| Саратовская область | 60,3 | 8,9 | 14,5 | 6,9 | 4,2 | 23,6 | 138 | 117 | 35,3 | 1601 |
| Ульяновская область | 60,7 | 8,9 | 13,4 | 6,7 | 3,9 | 21,8 | 198 | 206 | 16,3 | 1193 |
| Северо-Кавказский район | 60,5 | 12 | 13,6 | 7,9 | 4,1 | 19 | | | | |
| Республика Адыгея | 60,6 | 10,7 | 14,4 | 8 | 4 | 18,7 | 129 | 130 | 46,3 | 1344 |
| Республика Дагестан | 65,9 | 21,8 | 7,5 | 6,9 | 1,3 | 17,6 | 86 | 79 | 41,5 | 673 |
| Кабардино-Балкарская Республика | 62,6 | 13,7 | 10,4 | 7,1 | 3,4 | 14,5 | 128 | 102 | 42,5 | 859 |
| Карачаево-Черкесская северная осетия | 63,9 | 12,9 | 10,3 | 7 | 3,3 | 16,3 | 123 | 107 | 45,7 | 925 |
| Красноярский край | 59,4 | 10 | 15,3 | 8,8 | 5 | 19,2 | 175 | 160 | 32,4 | 1565 |
| Ставропольский край | 61 | 10,7 | 13,5 | 8,1 | 4,5 | 21,7 | 151 | 154 | 39,6 | 1325 |
| Ростовская область | 59,4 | 9,2 | 15,8 | 8 | 4,8 | 18,7 | 146 | 140 | 33,4 | 1497 |
| Уральский район | 58,2 | 9,5 | 14,5 | 6,9 | 4,2 | 18,3 | | | | |
| Республика Башкортостан | 60,2 | 11,2 | 12,7 | 7,3 | 3,7 | 18,3 | 158 | 191 | 32,4 | 1059 |
| Удмуртская республика | 57,5 | 9,4 | 13,7 | 6,7 | 3,4 | 18,4 | 158 | 144 | 26,1 | 1915 |
| Курганская область | 68,9 | 9 | 14,6 | 7,3 | 4,3 | 22,6 | 113 | 132 | 50,4 | 2660 |
| Оренбургская область | 59 | 10,3 | 13,5 | 7,5 | 4 | 19,7 | 115 | 145 | 49,3 | 1534 |
| Пермская область | 56,9 | 9,2 | 15,8 | 5,9 | 3,8 | 18,9 | 184 | 175 | 25,7 | 2654 |
| Свердловская область | 57,7 | 8,5 | 15,6 | 6,7 | 4,7 | 17,5 | 163 | 169 | 29,5 | 2508 |
| Челябинская область | 58 | 9 | 14,8 | 7 | 4,7 | 16,6 | 171 | 182 | 27,9 | 1987 |
| Западно-Сибирский | 58 | 9,4 | 13,5 | 7,3 | 4,9 | 19,3 | | | | |
| Республика Алтай | 55,1 | 14,2 | 13,1 | 7,1 | 3,8 | 27,9 | 188 | 148 | 26,2 | 2176 |
| Алтайский край | 58,3 | 8,7 | 14,7 | 7,3 | 4,4 | 20,8 | 158 | 146 | 33,7 | 1871 |
| Кемеровская область | 55,4 | 8,9 | 16,6 | 7 | 4,9 | 19,6 | 254 | 260 | 16,1 | 1563 |
| Новосибирская область | 59,1 | 8,5 | 14,1 | 7 | 4,5 | 15,9 | 136 | 156 | 39,8 | 2665 |
| Омская область | 60,6 | 10,2 | 12,3 | 7,3 | 4,6 | 16,3 | 157 | 170 | 29,7 | 2273 |
| Томская область | 58,2 | 9,1 | 13 | 7 | 5,3 | 21,2 | 173 | 190 | 30,6 | 2635 |
| Тюменская область | 57,8 | 10,6 | 9,8 | 7,9 | 5,7 | 21,3 | 290 | 293 | 19,2 | 2478 |
| Восточно-Сибирский | 55,5 | 11 | 13,7 | 6,8 | 4 | 19,6 | | | | |
| Республика Бурятия | 57,2 | 11,7 | 12 | 6,5 | 3,5 | 15,2 | 122 | 155 | 55,2 | 2580 |
| Республика Тыва | 49,7 | 20 | 13 | 5,9 | 1,9 | 28 | 84 | 101 | 73,2 | 2713 |
| Республика Хакасия | 56 | 9,9 | 14 | 7,1 | 4,4 | 24,6 | 161 | 201 | 25,3 | 2222 |
| Красноярский край | 56 | 9,8 | 14 | 7,2 | 4,8 | 19,8 | 246 | 296 | 24,2 | 2417 |
| Иркутская область | 54,7 | 10,6 | 14,6 | 6,3 | 3,3 | 18,1 | 170 | 215 | 32,3 | 2317 |
| Читинская область | 56,2 | 12,2 | 12,8 | 6,9 | 4 | 20,8 | 99 | 112 | 66,5 | 2784 |
| Дальневосточный | 56,7 | 10,2 | 12,6 | 7,1 | 5,3 | 20,5 | | | | |
| Республика Саха | 57 | 15,3 | 9,8 | 8 | 4,7 | 19,5 | 170 | 201 | 29,2 | 1483 |
| Еврейская автономная область | 55 | 10,9 | 13,6 | 7,3 | 5,2 | 26,4 | 130 | 125 | 28,5 | 3276 |
| Чукотский автономный округ | 57,8 | 9,8 | 8,6 | 7,3 | 8,9 | 34 | 85 | 73 | 26,4 | 1148 |
| Приморский край | 57,8 | 9,4 | 13,1 | 6,6 | 4,7 | 21,5 | 144 | 170 | 31,8 | 3095 |

Продолжение таблица А.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------------------------|------|------|------|-----|-----|------|-----|-----|------|------|
| Хабаровский край | 57,2 | 9,3 | 13,1 | 6,6 | 5,7 | 17,8 | 153 | 171 | 29,4 | 2881 |
| Амурская область | 58 | 10,1 | 12 | 7,2 | 4,9 | 23,6 | 175 | 187 | 37,9 | 2017 |
| Камчатская область | 56,3 | 9,1 | 11,2 | 7,9 | 6,7 | 15,4 | 211 | 228 | 22,7 | 2064 |
| Магаданская область | 55,7 | 8,3 | 10,9 | 7,2 | 7,1 | 14,2 | 202 | 187 | 24,6 | 3068 |
| Сахалинская область | 50,7 | 8,9 | 17 | 7,2 | 5,7 | 22,7 | 145 | 169 | 24,6 | 3588 |
| Калининградская область | 58,9 | 8,6 | 13,6 | 7,8 | 6 | 15,4 | 155 | 145 | 26,6 | 2471 |

Таблица А.2 – Варианты заданий

| № варианта | Название районов РФ |
|------------|--|
| 1 | 2 |
| 1 | Северный, Северо-Западный, Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Уральский районы |
| 2 | Северный, Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Уральский, Западно-Сибирский районы |
| 3 | Северный, Северо-Западный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы |
| 4 | Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский районы |
| 5 | Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Западно-Сибирский районы |
| 6 | Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы |
| 7 | Северный, Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы |
| 8 | Северный, Центральный, Волго-Вятский, Северо-Кавказский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 9 | Северный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 10 | Северный, Центральный, Волго-Вятский, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 11 | Северо-Западный, Центральный, Волго-Вятский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы |
| 12 | Северо-Западный, Центральный, Центрально-Черноземный, Поволжский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 13 | Северо-Западный, Центральный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы, |

| Продолжение таблицы А.2 | |
|-------------------------|--|
| 1 | 2 |
| 14 | Центральный, Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский районы |
| 15 | Центральный, Центрально-Черноземный, Северо-Кавказский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 16 | Центральный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 17 | Центральный, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 18 | Волго-Вятский, Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский районы |
| 19 | Волго-Вятский, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный районы |
| 20 | Центрально-Черноземный, Поволжский, Северо-Кавказский, Уральский, Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Дальневосточный район |

Таблица А.3 – Наименование показателей

| Наименование показателей | Обозначение |
|--|-------------|
| 1 Ожидаемая продолжительность жизни мужчин при рождении (число лет) | y |
| 2 Рождаемость населения (на 1000 человек) | x_1 |
| 3 Смертность населения (на 1000 человек); | x_2 |
| 4 Браки на 1000 населения | x_3 |
| 5 Разводы на 1000 населения | x_4 |
| 6 Коэффициент младенческой смертности (число детей, умерших в возрасте до 1 года, на 1000 родившихся) | x_5 |
| 7 Соотношение денежного дохода и прожиточного минимума (%) | x_6 |
| 8 Соотношение средней оплаты труда с учетом выплат социального характера и прожиточного минимума трудоспособного населения (%) | x_7 |
| 9 Численность населения с денежными доходами ниже прожиточного минимума в % от численности населения региона | x_8 |
| 10 Число зарегистрированных преступлений по регионам РФ (на 100000 населения) | x_9 |