

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Г.В.Куча  
И.И.Мосалева

# **ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИ- ЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом  
государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

ББК 22.21я7  
К 95  
УДК 531.6(7)

Рецензент:  
профессор, к.т.н. Р.В.Ромашов

**Куча Г.В., Мосалева И.И.**

**Теорема об изменении кинетической энергии механической системы:  
Методические указания. – Оренбург, 2005.-15 с.**

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов заочной формы обучения специальностей 150200 и 230100.

ББК 22.21я7

©Куча Г.В., 2005  
©Мосалева И.И., 2005  
©ГОУ ОГУ, 2005

## Введение

Настоящие методические указания предназначены для выполнения контрольного задания Д10 по теоретической механике «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы». Они включают общие рекомендации к решению типовых задач по указанной теме, а также вопросы для самоконтроля, на которые необходимо ответить прежде, чем приступить к выполнению контрольного задания.

Методические указания содержат условия контрольного задания, варианты расчетных схем и необходимые числовые данные. Кроме того, рассмотрен пример выполнения задания.

Методические указания разработаны для студентов заочного факультета, но могут быть полезны и для студентов дневной и вечерней формы обучения.

# 1. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

## 1.1 Вопросы для самоконтроля

1 Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?

2 Чему равна работа силы трения скольжения, если эта сила постоянна по модулю и направлению?

3 Каково векторное выражение элементарной работы?

4 Каково выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси координат?

5 Напишите различные виды криволинейного интеграла, определяющего работу переменной силы на конечном криволинейном перемещении.

6 Как вычисляется работа силы тяжести?

7 На каких перемещениях работа силы тяжести: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю?

8 Как вычисляется работа силы упругости?

9 В каком случае работа силы упругости положительна и в каком – отрицательна?

10 Какова сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела?

11 Как вычисляется работа силы, приложенной к твердому телу, совершающему вращательное движение вокруг неподвижной оси?

12 Как вычисляется мощность сил, приложенных к твердому телу, совершающему вращательное движение вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$ ?

13 Что представляет собой сопротивление качению? Что называется коэффициентом трения качения и какова его размерность?

14 Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?

15 Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

## 1.2 Рекомендации к решению задач.

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется проводить в следующем порядке:

1 изобразить систему в начальном и конечном положениях;

2 приложить к системе все внешние силы, действующие на неё (в случае неизменяемой системы или системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными связями);

3 записать теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i;$$

- 4 вычислить кинетическую энергию системы в начальном и конечном положениях, выразив ее через искомую скорость;
- 5 вычислить сумму работ внешних сил на перемещениях точек системы, выразив их через заданное перемещение;
- 6 подставить полученные значения кинетической энергии и работ в формулу теоремы (пункт 3) и найти искомую величину.

Теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек следует применять в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: инерционные характеристики системы (массы и моменты инерции), скорости (линейные и угловые), силы и моменты пар сил, перемещения (линейные и угловые).

### 1.3 Контрольное задание Д10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

#### 1.3.1 Содержание задания

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. 1. Учитывая трение скольжения тела 1 (сх. 0 – 2, 4 – 7, 9) и сопротивление качению тела 3 (коэффициент трения качения  $\delta = 0,002m$ ), катящегося без скольжения (сх. 1, 3, 4, 6, 7, 9), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным  $S$ .

Необходимые для решения данные приведены в таблице 1. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Таблица 1 – Исходные данные

№ условия	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$f$	$\alpha$	$\beta$	$S$
	кг					град		
0	$m$	$4m$	$m/5$	$4m/3$	0,1	60	45	2
1	$m$	$m/2$	$m/3$	$m/4$	0,22	30	45	2
2	$m$	$m$	$m/10$	$m$	0,1	45	30	2
3	$m$	$2m$	$2m$	$m/2$	0,2	30	60	2
4	$m$	$m/2$	$m/3$	$m/2$	0,15	30	45	1,75
5	$m$	$m/3$	$m/10$	$m$	0,15	60	45	1,5
6	$m$	$m/2$	$m/4$	$m/3$	0,17	30	45	2,5
7	$m$	$m$	$2m$	$m/2$	0,20	30	45	1,2
8	$m$	$m$	$m/10$	$4m/5$	0,1	30	60	1,0
9	$m$	$m/4$	$m/8$	$2m/3$	0,2	15	30	2,4

В таблице 1 приняты следующие обозначения:  $m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы тел 1, 2, 3, 4 соответственно;  $f$  - коэффициент трения скольжения груза 1;  $\alpha, \beta$  – углы наклона поверхностей;  $S$  – путь, пройденный телом 1.

Указания: при решении задачи кинетическую энергию системы нужно выразить через ту скорость, которую в задаче надо определить. Для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс, воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение  $S$ , учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

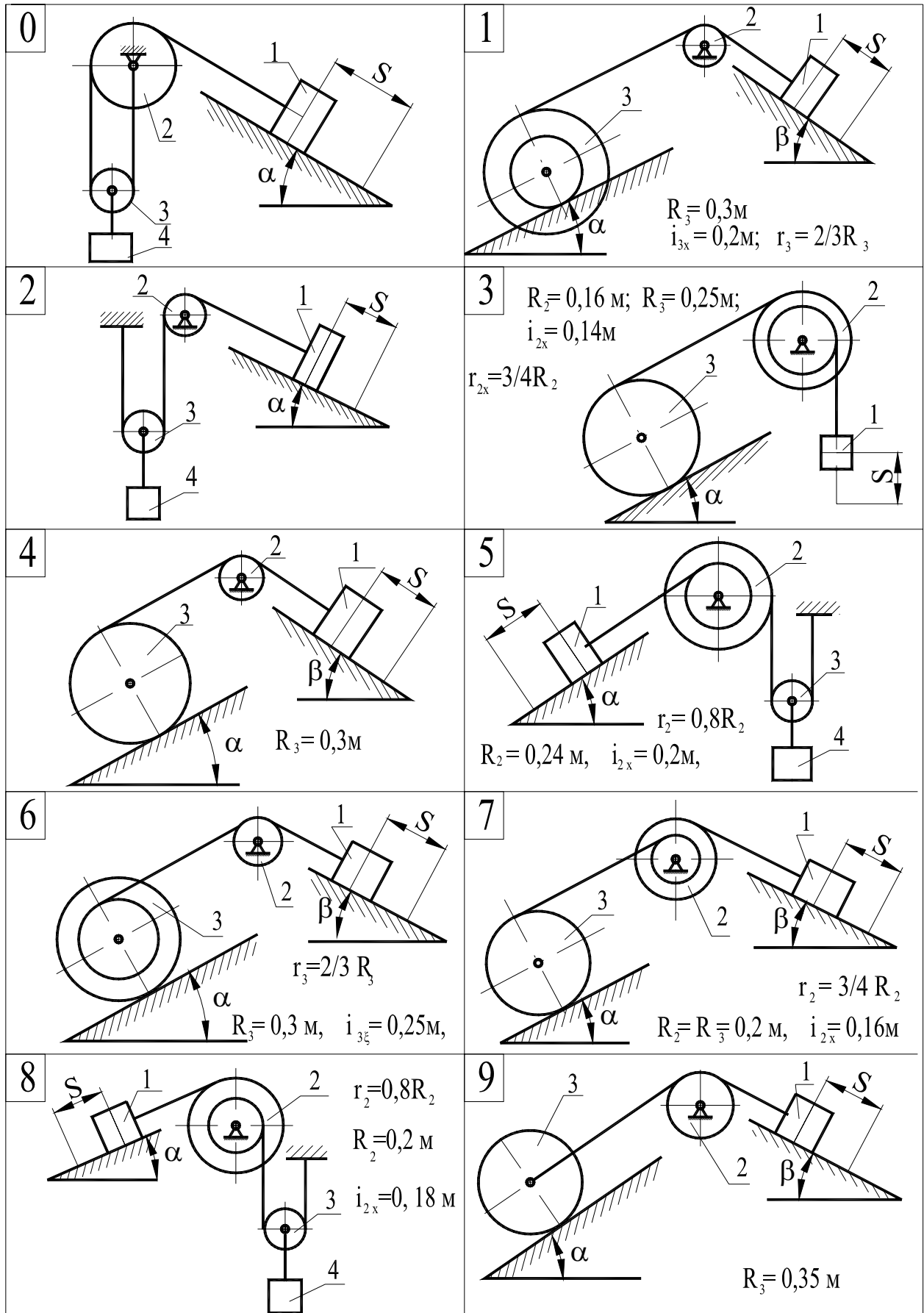


Рисунок 1 – Схемы механизмов

## 1.4 Пример выполнения задания

### Условие задачи

Механическая система, состоящая из груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями (рис. 2) приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Радиусы блока 3 и катка 2 равны:  $R_2=R_3=12\text{см}$ ,  $r_2=0,5\cdot R_2$ ; радиус инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс,  $i_{2\xi}=8\text{см}$ ; тело 3 – сплошной однородный цилиндр. Коэффициент трения скольжения груза 1 о плоскость  $f=0,1$ ; коэффициент трения качения катка 2  $\delta=0,2\text{см}$ .

Найти скорость груза 1, когда его перемещение станет равным  $S = 0,2\text{ м}$ .

**Дано:**  $m_1$  – масса груза 1,  $m_2 = 2m_1$ ,  $m_3 = m_1$ ,  $R_2=R_3=0,12\text{м}$ ,  $r_2=0,5\cdot R_2$ ,  $i_{2\xi}=0,08\text{м}$ ,  $f = 0,1$ ,  $S = 0,2\text{м}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\delta=0,002\text{м}$ ,  $r_3=\frac{3}{4}R_3$ .

Найти:  $V_1$  – скорость груза 1 в конечном положении.

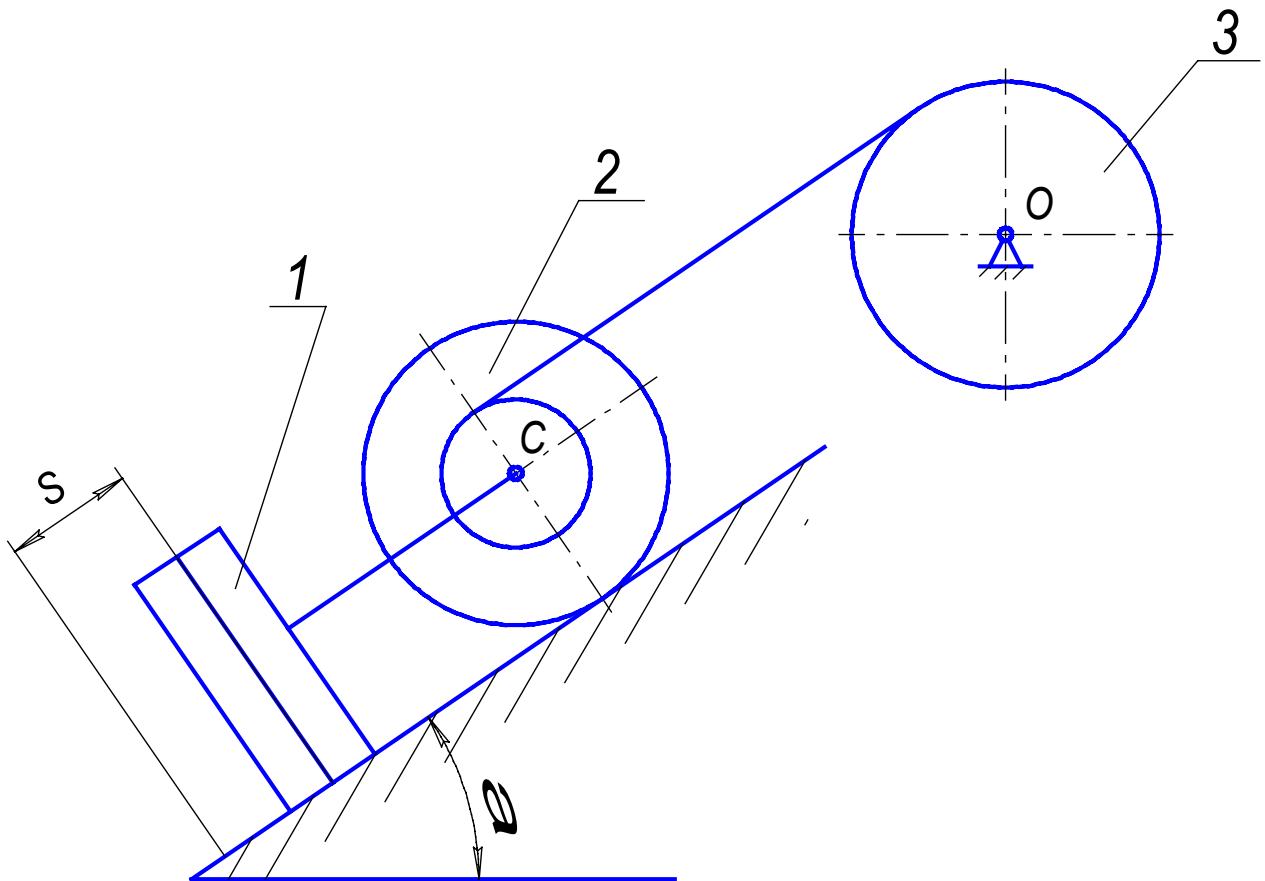


Рисунок 2 – Схема механизма



### Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \Sigma A_{\kappa}^e + \Sigma A_{\kappa}^i \quad (1),$$

где  $T_0$  и  $T$  – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\Sigma A_{\kappa}^e$  – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное;

$\Sigma A_{\kappa}^i$  – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Так как рассматриваемая система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, то

$$\Sigma A_{\kappa}^i = 0.$$

Так как в начальном положении система находилась в покое, то

$$T_0 = 0.$$

Уравнение (1) принимает вид

$$T = \Sigma A_{\kappa}^e \quad (2)$$

Изобразим систему в конечном положении (рис.3).

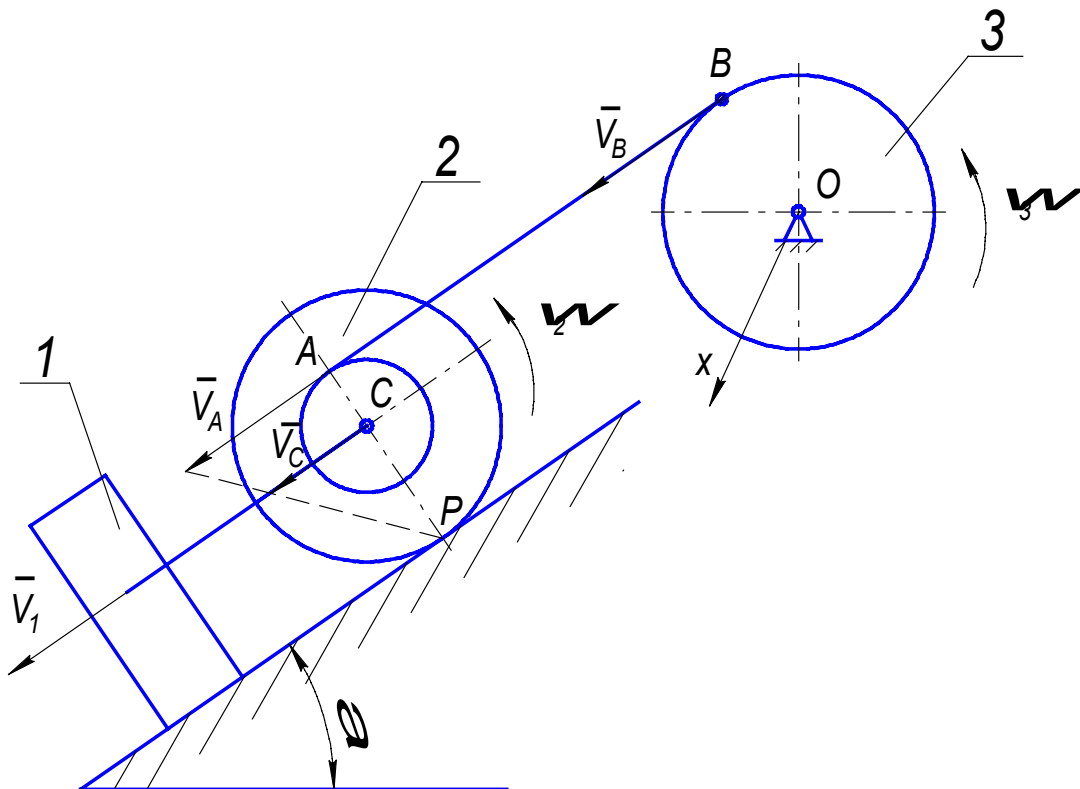


Рисунок 3 – Расчетная схема механизма

Рассмотрим скорости и перемещения точек и тел системы.

Найдем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы и выразим их соответственно через искомую скорость  $V_1$  и заданное перемещение  $S$  груза 1.

Так как нить нерастяжима, то

$$V_C = V_1 \quad (3)$$

$$V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega_2 \cdot R_2,$$

где  $P$  - мгновенный центр скоростей катка 2;

Следовательно,

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} \quad (4)$$

$$V_A = \omega_2 \cdot AP = \frac{V_1}{R_2} \cdot (R_2 + r_2) = \frac{V_1}{R_2} \cdot (R_2 + 0,5 \cdot R_2) = \frac{V_1}{R_2} \cdot \frac{3R_2}{2} = \frac{3V_1}{2}$$

$$V_B = V_A = \frac{3V_1}{2}$$

$$V_B = \omega_3 \cdot R_3;$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{V_B}{R_3} = \frac{3V_1}{2R_3} \quad (5)$$

Таким образом, все скорости выразили через  $V_1$ .

Учитывая, что зависимости между перемещениями точек или углами поворота тел будут такими же, как между соответствующими скоростями, из соотношений (3) – (5) получим:

углы поворота тел 2 и 3

$$\varphi_2 = \frac{S}{R_2}; \quad \varphi_3 = \frac{3S}{2R_3} \quad (6)$$

перемещение центра масс тела 2

$$S_C = S \quad (7)$$

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1,2,3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (8)$$

Кинетическую энергию всех тел будем записывать с учетом выражений (3)–(5).

Кинетическая энергия груза 1, совершающего поступательное движение:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} \quad (9)$$

Кинетическая энергия тела 2, совершающего плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_2^2}{2},$$

где  $I_C$  – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс.

Для тела 2 задан радиус инерции  $i_{2\xi}$ , поэтому

$$I_C = m_2 \cdot i_{2\xi}^2 = 2m_1 \cdot i_{2\xi}^2$$

Таким образом,

$$T_2 = \frac{2m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{2m_1 \cdot i_{2\xi}^2}{2} \cdot \frac{V_1^2}{R_2^2} = m_1 \cdot V_1^2 \cdot \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) \quad (10)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Ox$

$$T_3 = \frac{I_{3x} \cdot \omega_3^2}{2},$$

где  $I_{3x}$  – осевой момент инерции тела 3.

Для сплошного однородного цилиндра

$$I_{3x} = \frac{m_3 \cdot R_3^2}{2} = \frac{m_1 \cdot R_3^2}{2}$$

Таким образом,

$$T_3 = \frac{m_1 \cdot R_3^2}{4} \cdot \frac{9V_1^2}{4R_3^2} = \frac{9m_1 \cdot V_1^2}{16} \quad (11)$$

Кинетическая энергия системы определится по формуле (8) с учетом выражений (9) – (11):

$$T = m_1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} + \frac{9}{16} \right) \cdot V_1^2$$

Подставляя сюда заданные величины, получим

$$T = m_1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{0,08^2}{0,12^2} + \frac{9}{16} \right) \cdot V_1^2 = 2,51m_1 \cdot V_1^2$$

$$T = 2,51m_1 \cdot V_1^2 \quad (12)$$

Определим сумму работ внешних сил.

Покажем внешние силы, действующие на систему (рис.4). Силы тяжести –  $\overline{m_1 g}$ ,  $\overline{m_2 g}$ ,  $\overline{m_3 g}$ ; нормальные реакции поверхности –  $\overline{N_1}$ ,  $\overline{N_2}$ , ; силы трения скольжения –  $\overline{F_{mp1}}$ ,  $\overline{F_{mp2}}$ ; составляющие реакции подшипника в точке  $O$  –  $\overline{Z_{O3}}$ ,  $\overline{Y_{O3}}$ ; момент  $M_C$  пары сил сопротивления качению катка 2.

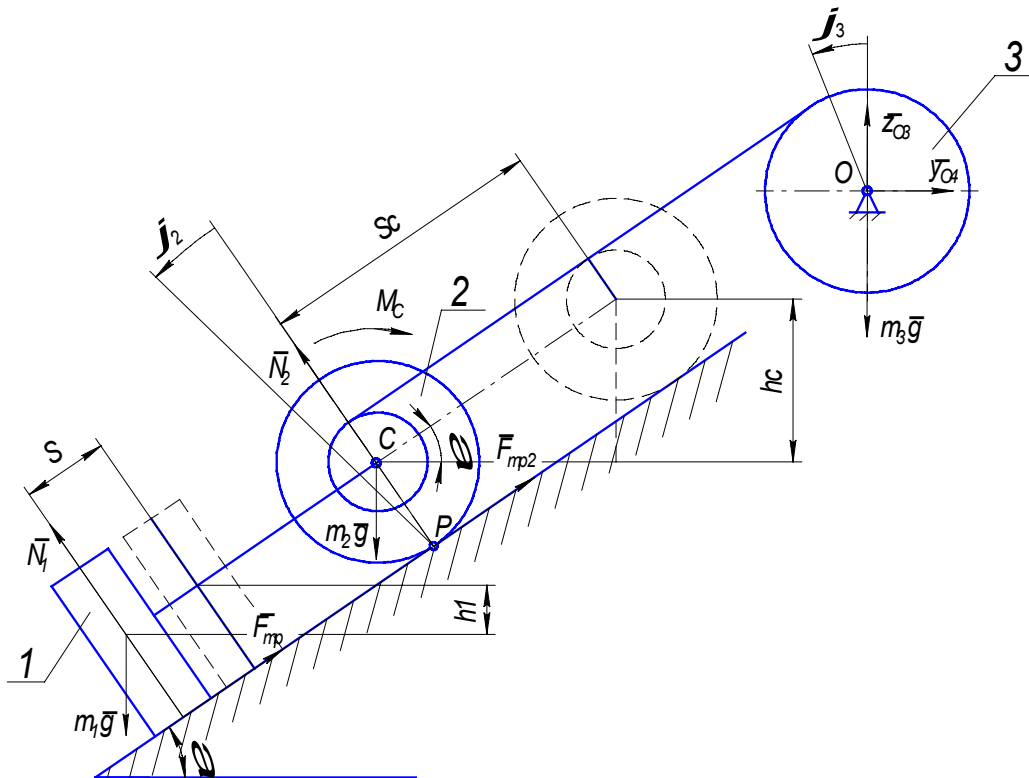


Рисунок 4 – Внешние силы, действующие на систему

Работа сил тяжести:

$$A(\overline{m_1g}) = m_1gh_1; \quad A(\overline{m_2g}) = m_2gh_c;$$

где  $h_1, h_c$  – высота, на которую опустилась или поднялась точка приложения сил тяжести  $\overline{m_1g}, \overline{m_2g}$  соответственно.

Из рисунка видно, что

$$h_1 = S \cdot \sin\alpha, \quad h_c = S_c \cdot \sin\alpha$$

или, с учетом выражения (7),

$$h_c = S \cdot \sin\alpha$$

Таким образом,

$$A(\overline{m_1g}) = m_1g S \cdot \sin\alpha \quad (13)$$

$$A(\overline{m_2g}) = 2m_1g S \cdot \sin\alpha \quad (14)$$

$$A(\overline{m_3g}) = 0,$$

так как сила  $\overline{m_3g}$  приложена в неподвижной точке O.

Работа силы трения скольжения тела 1:

$$A(\overline{F_{mp1}}) = -F_{тр1} \cdot S$$

Так как

$$F_{\text{тр1}} = f \cdot N_1 = f \cdot m_1 g S \cdot \cos \alpha,$$

то

$$A(\overline{F}_{\text{мп1}}) = - f \cdot m_1 g S \cdot \cos \alpha \quad (15)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 2:

$$A(M_C) = - M_C \cdot \varphi_2,$$

где  $M_C = \delta \cdot N_2 = \delta \cdot m_2 g \cdot \cos \alpha = \delta \cdot 2m_1 g \cdot \cos \alpha$  – момент пары сил сопротивления качению.

С учетом выражения (6), получим

$$A(M_C) = - 2\delta \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{S}{R_2} \quad (16)$$

Работа остальных сил будет равна нулю, так как силы  $\overline{Z}_{O3}$ ,  $\overline{Y}_{O3}$  приложены в неподвижной точке O; силы  $\overline{F}_{\text{мп2}}$ ,  $\overline{N}_2$  приложены в МЦС P; сила  $\overline{N}_1$  перпендикулярна перемещению S, т.е.

$$A(\overline{N}_1) = N_1 \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Сложим выражения (13) – (16) и найдем сумму работ всех внешних сил:

$$\Sigma A_k^e = m_1 g S \cdot \sin \alpha + 2m_1 g S \cdot \sin \alpha - f \cdot m_1 g S \cdot \cos \alpha - 2\delta \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{S}{R_2}$$

Подставляя заданные величины, получим

$$\Sigma A_k^e = m_1 g S \cdot \left( \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 0,002 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{0,2}{0,12} \right) = 1,41 \cdot m_1 g S$$
$$\Sigma A_k^e = 1,41 \cdot m_1 g S \quad (17)$$

Согласно теореме (2) приравняем значения T и  $\Sigma A_k^e$ , определяемые формулами (12) и (17), получим

$$2,51 m_1 \cdot V_1^2 = 1,41 \cdot m_1 g S$$

Откуда

$$V_1 = \sqrt{\frac{1,41 g S}{2,51}} = \sqrt{\frac{1,41 \cdot 9,8 \cdot 0,2}{2,51}} = 1,05 \text{ м/с}$$

Ответ:  $V_1 = 1,05 \text{ м/с}$

## 2 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

- Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов /Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; под ред. А.А. Яблонского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 2000. - 367 с.

- Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 10-е изд., исправл. –М.: Наука, 2002. - 416 с.

- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. Т.1. Статика. -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. Т.2. Динамика. -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

- Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов в 3-х томах. Т.1. Статика и кинематика. - 9-е изд., перераб., - М.: Наука, 1990. - 672 с.

- Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640 с.