

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Г.В.Куча
И.И.Мосалева

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧ- КИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

ББК 22.213я7
К 95
УДК 531.3(07)

Рецензент:
профессор, к.т.н. Р.В.Ромашов

Куча Г.В., Мосалева И.И.

Динамика относительного движения материальной точки: Методические указания. – Оренбург, 2005.-14 с.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов заочной формы обучения специальностей 150200 и 230100.

ББК 22.213я7

©Куча Г.В., 2005
©Мосалева И.И., 2005
©ГОУ ОГУ, 2005

Введение

Настоящие методические указания предназначены для выполнения контрольного задания Д4 «Динамика относительного движения материальной точки». Они включают общие рекомендации к решению задач по указанной теме, а также вопросы для самоконтроля, на которые необходимо ответить прежде, чем приступить к выполнению контрольного задания.

Методические указания содержат условия контрольного задания, варианты расчетных схем и необходимые числовые данные. Кроме того рассмотрен пример выполнения задания.

Методические указания разработаны для студентов заочного факультета, но могут быть полезны и для студентов дневной и вечерней формы обучения.

1 Динамика относительного движения точки

1.1 Вопросы для самоконтроля

1 Напишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат.

2 Напишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на естественные оси.

3 Запишите основной закон динамики для относительного движения материальной точки.

4 Какой модуль и какое направления имеют переносная и кориолисова силы инерции?

5 В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений материальной точки?

6 Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?

7 В чем заключается принцип относительности классической механики?

8 В каком случае переносная и кориолисова силы инерции равны нулю?

9 Какие системы отсчета называются инерциальными?

10 Каково условие относительного покоя материальной точки?

11 Как определяются произвольные постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения точки?

12 Где выбирается начало координат при составлении дифференциальных уравнений движения точки?

1.2 Контрольное задание Д4. Исследование относительного движения материальной точки

1.2.1 Содержание задания

Шарик M , рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A (рис.1). Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z_1 .

Найти уравнение относительного движения этого шарика $x=f(t)$, приняв за начало отсчета точку O , а также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t=t_1$.

Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

№ усло- вия	α , град	m, кг	ω , рад/с	Начальные дан- ные		t_1 , с	C Н/м	l_0 , м	r, h м	f
				x_0 , М	\dot{x}_0 , М/с					
0	30	0,02	π	0	0,2	0,4	20	0,15	0,15	0
1	45	0,03	2π	0,5	0	0,2	40	0,10	0,10	0
2	75	0,09	4π	0,2	0,8	0,1	36	0,15	0,30	0
3	40	0,03	2π	0,3	0	0,2	46	0,10	0,20	0
4	60	0,05	6π	0,4	0	0,1	20	0,15	0,20	0
5	30	0,05	π	0	0	0,4	40	0,10	0,15	0
6	45	0,05	4π	0,5	0	0,1	36	0,15	0,20	0,2
7	60	0,01	10π	0,1	0	0,2	20	0,10	0,40	0
8	75	0,01	2π	0,5	0,1	0,2	36	0,15	0,30	0
9	50	0,02	$\pi/2$	0	0,5	0,2	20	0,10	0,50	0

В таблице обозначено: m – масса шарика M; ω – постоянная угловая скорость тела A; c – коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M; l_0 - длина недеформированной пружины; f - коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0 , \dot{x}_0 - начальная координата и проекция начальной скорости на ось x.

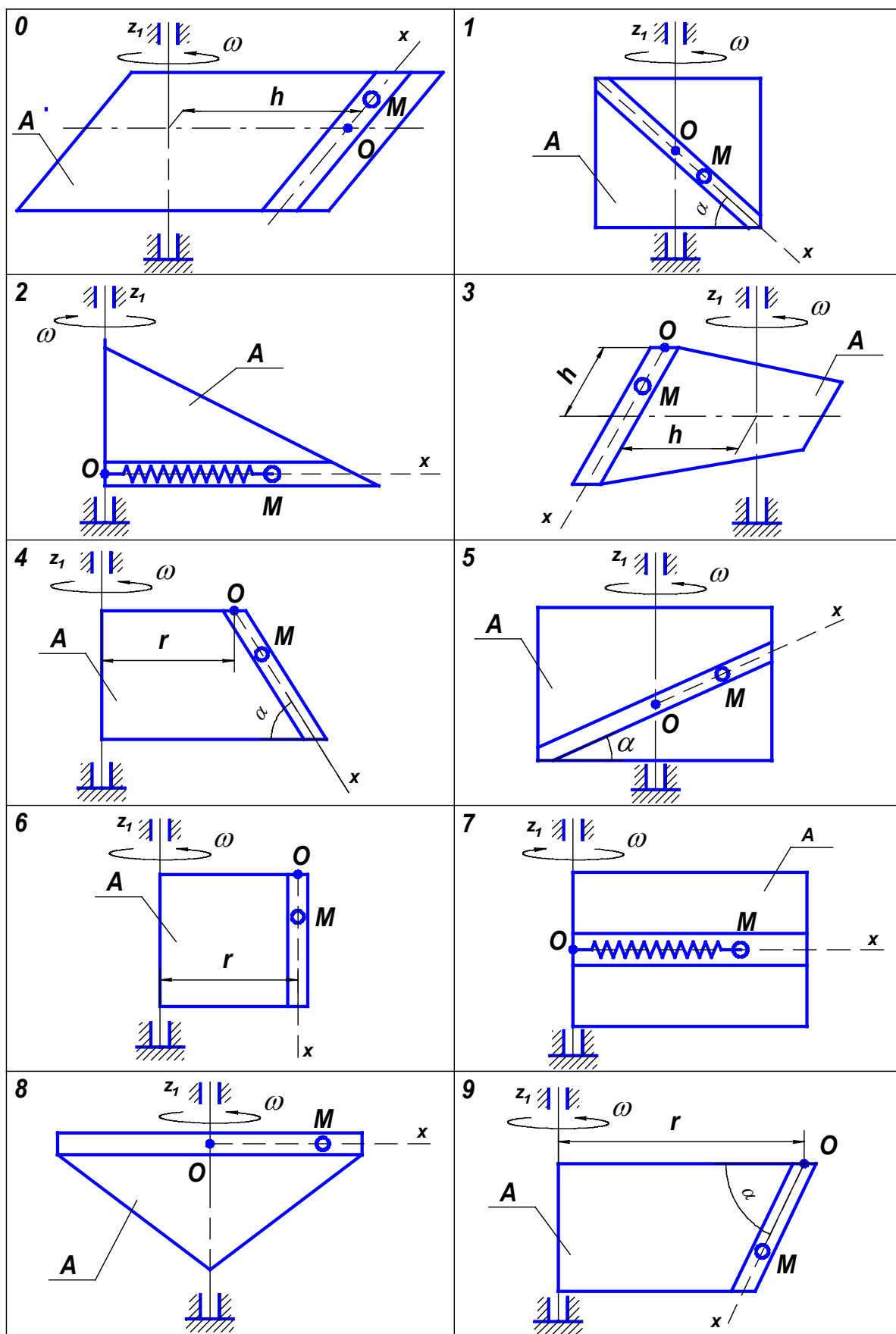


Рисунок 1 – Схемы механизмов

1.3 Рекомендации к решению задач.

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

- определить абсолютное движение материальной точки и разложить его на относительное и переносное движения;
- выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с движущимся телом, совершающим переносное движение;
- изобразить силы, приложенные к материальной точке;
- определить ускорение материальной точки в переносном движении и найти силу инерции в переносном движении;
- определить ускорение Кориолиса и найти силу инерции Кориолиса;
- добавить переносную силу инерции и силу инерции Кориолиса к силам, приложенным к материальной точке;
- составить дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат;
- проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определить постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;
- определить искомые величины.

Материальную точку следует изображать в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

1.4 Пример выполнения задания

Условие задачи

Треугольник А равномерно вращается вокруг вертикальной оси z_1 (рис.2). По цилиндрическому каналу ОВ движется шарик М, рассматриваемый как материальная точка. Шарик закреплен на пружине жесткостью c . Найти уравнение относительного движения шарика $x=f(t)$, приняв за начало отсчета точку О. Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t=t_1$.

Дано: $m = 0,09\text{кг}$, $\omega = \pi \text{ рад/с}$, $x_0 = 0,2\text{м}$, $\dot{x}_0 = 0,3\text{м/с}$, $t_1 = 0,1\text{с}$, $c = 20 \text{ Н/м}$, $l_0 = 0,1\text{м}$, $f = 0$, $\alpha = 60^\circ$.

Найти: уравнение $x=f(t)$ относительного движения шарика М, а также координату x_1 и давление шарика на стенку канала при $t = t_1$.

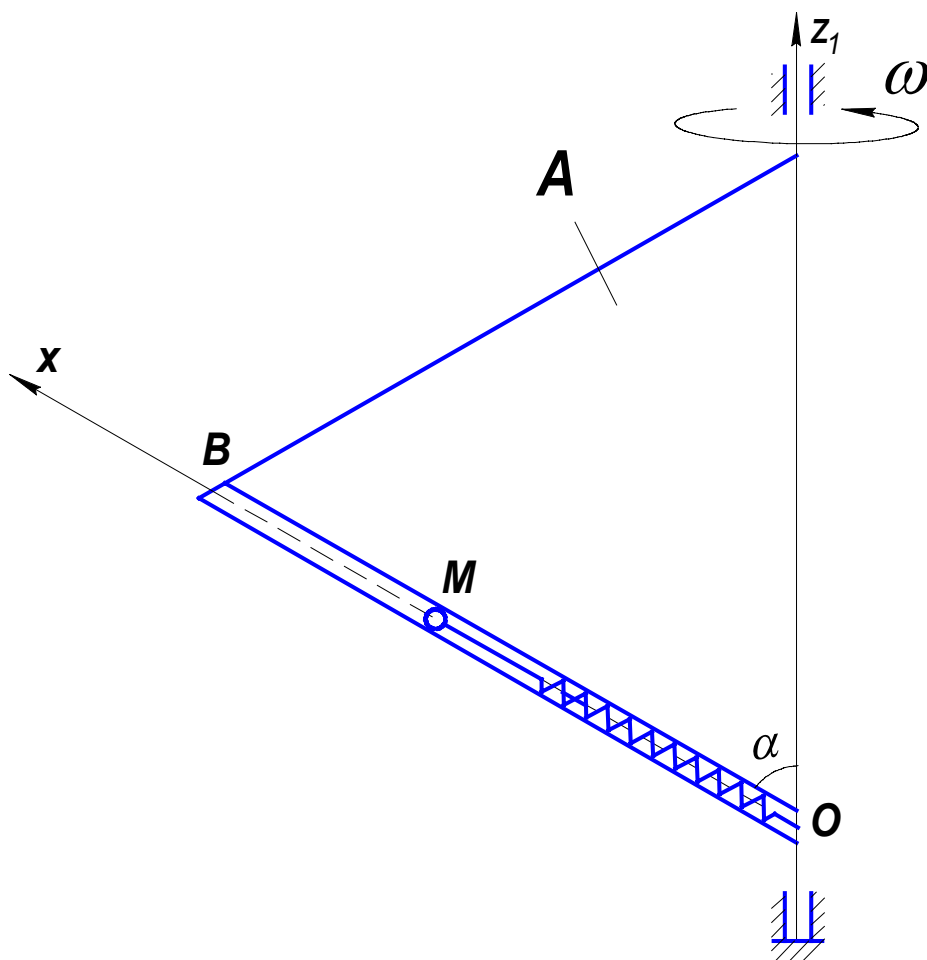


Рисунок 2 – Схема механизма

Решение

Свяжем подвижную систему отсчета $Oxuz$ с вращающимся каналом OB (рис.3). Совместим ось x с траекторией относительного движения шарика M , ось u направим перпендикулярно оси x в плоскости треугольника A (в плоскости чертежа), ось z - перпендикулярно плоскости треугольника A . Вращение системы $Oxuz$ вокруг оси z_1 является переносным движением для шарика M . Относительным движением шарика M является движение вдоль канала OB .

Относительное движение точки определяется уравнением:

$$m \cdot \overline{a_r} = \Sigma \overline{F_k} + \overline{F_e^u} + \overline{F_k^u} \quad (1),$$

где $\Sigma \overline{F_k}$ – силы, действующие на шарик M ;

$\overline{F_k^e}$ - переносная сила инерции;

$\overline{F_k^u}$ - сила инерции Кориолиса.

К шару М приложены силы: вес \bar{G} ; реакция пружины \bar{P} и нормальная реакция стенки трубки. Эту реакцию разложим на две взаимно перпендикулярные составляющие \bar{N}_1 и \bar{N}_2 .

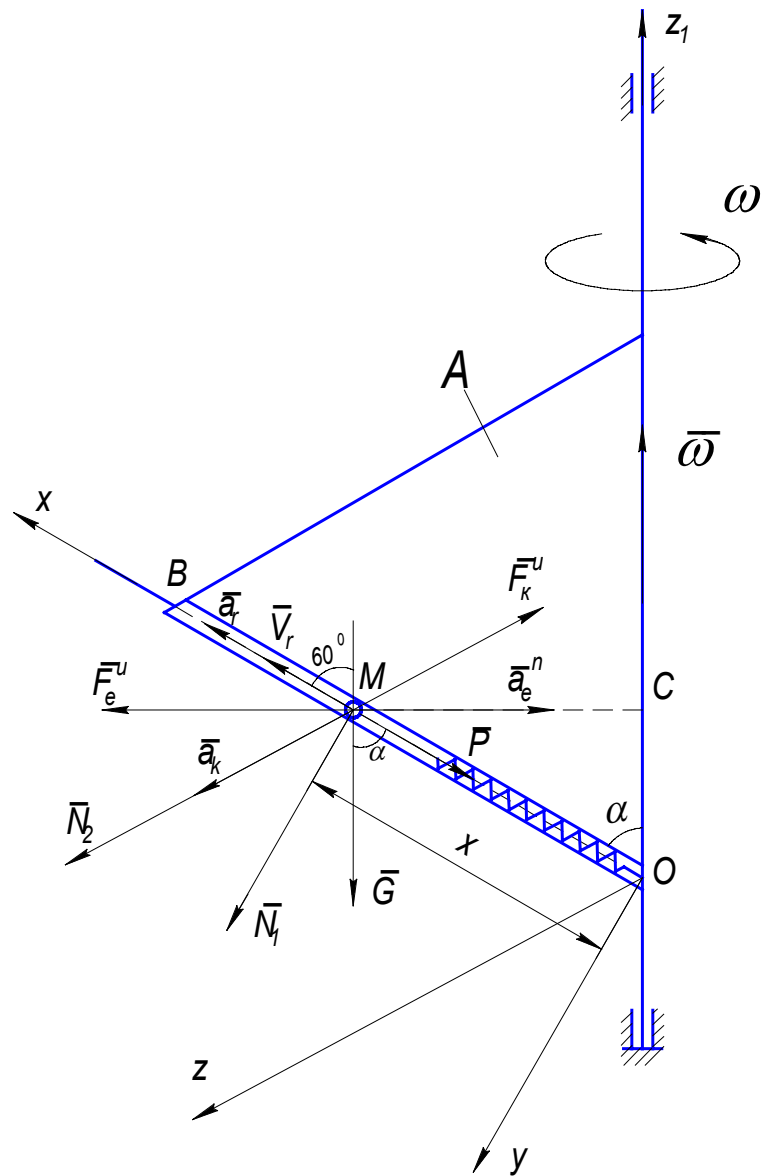


Рисунок 3 – Расчетная схема механизма

Условно прикладываем к шару М переносную силу инерции \bar{F}_e^u и силу инерции Кориолиса \bar{F}_k^u , которые направлены противоположно соответствующим ускорениям a_e и a_k .

Так как вращение треугольника А равномерное, то $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n$ и численно

$$a_e = a_e^n = \omega^2 \cdot MC = \omega^2 \cdot x \cdot \sin \alpha$$

Направление кориолисова ускорения $\overline{a_k}$ найдем по правилу векторного произведения $\overline{a_k} = 2 \cdot \overline{\omega} \times \overline{V_r}$. Вектор $\overline{\omega_e} = \overline{\omega}$ направлен по оси z_1 . Предположим, что направление относительной скорости $\overline{V_r}$ точки М совпадает с положительным направлением оси x . Тогда вектор $\overline{a_k}$ будет направлен параллельно оси z (рис. 3). В этом случае кориолисова сила инерции $\overline{F_k^u}$ перпендикулярна плоскости xOy и направлена как показано на рисунке 3.

Численно

$$a_k = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |V_r| \cdot \sin(\overline{\omega_e}, \overline{V_r}),$$

где

$$\omega_e = \omega; \quad V_r = |\dot{x}|; \quad \sin(\overline{\omega_e}, \overline{V_r}) = 60^\circ,$$

т.е.

$$a_k = 2 \cdot \omega \cdot |\dot{x}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega \cdot |\dot{x}| \cdot \sqrt{3}$$

Модули сил инерции

$$F_e^u = m \cdot a_e = m \cdot \omega^2 \cdot x \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$F_k^u = m \cdot a_k = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot |\dot{x}| \cdot \sqrt{3} \quad (3)$$

Основное уравнение относительного движения точки М в данном случае имеет вид

$$m \cdot \overline{a_r} = \overline{G} + \overline{P} + \overline{N_1} + \overline{N_2} + \overline{F_e^u} + \overline{F_k^u} \quad (4)$$

Составим дифференциальное уравнение относительного движения шарика М вдоль оси x

$$m\ddot{x} = F_e^u \cdot \sin \alpha - G \cdot \cos \alpha - P \quad (5),$$

где $G = mg$;

реакция пружины P равна произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины, т.е.

$$P = c \cdot (x - l_0).$$

Таким образом, учитывая выражение (2), уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m \cdot \omega^2 \cdot x \cdot \sin^2 \alpha - mg \cdot \cos \alpha - c \cdot (x - l_0) \\ \ddot{x} &= \omega^2 \cdot x \cdot \sin^2 \alpha - g \cdot \cos \alpha - \frac{c}{m} \cdot x + \frac{c \cdot l_0}{m} \\ \ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha \right) \cdot x &= \frac{c \cdot l_0}{m} - g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения;

x_2 – частное решение неоднородного уравнения (6).

Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения и найдем его корни:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} = \sqrt{\pi^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{20}{0,09}} = \pm 14,66i$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x_1 = C_1 \cos 14,66t + C_2 \sin 14,66t$$

Частное решение x_2 уравнения (6) находим в форме правой части этого уравнения

$$x_2 = B = \text{const} \\ \dot{x}_2 = 0; \quad \ddot{x}_2 = 0$$

Следовательно, из дифференциального уравнения (6) получим

$$\left(\frac{c}{m} - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha\right) \cdot B = \frac{c \cdot l_0}{m} - g \cdot \cos \alpha \\ B = \frac{cl_0/m - g \cdot \cos \alpha}{c/m - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{20 \cdot 0,1/0,09 - 9,8 \cdot 0,5}{20/0,09 - \pi^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0,081 \text{ м}$$

Решение дифференциального уравнения (6) относительно движения шарика М получает вид

$$x = C_1 \cdot \cos 14,66t + C_2 \cdot \sin 14,66t + 0,081 \quad (7)$$

Проекция скорости этого движения

$$\dot{x} = -14,66C_1 \cdot \sin 14,66t + 14,66C_2 \cdot \cos 14,66t \quad (8)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, используя начальные условия:

$$\text{при } t_0 = 0, \quad x_0 = 0,2 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 0,3 \text{ м/с}$$

Запишем уравнения (7) и (8) для $t_0 = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0,081 \\ \dot{x}_0 = 14,66 \cdot C_2$$

Откуда

$$C_1 = x_0 - 0,081 = 0,2 - 0,081 = 0,119 \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{14,66} = \frac{0,3}{14,66} = 0,02$$

Уравнение относительного движения шарика М принимает вид

$$x = 0,119 \cdot \cos 14,66t + 0,02 \cdot \sin 14,66t + 0,081 \quad (9)$$

Проекция скорости относительного движения шарика

$$\dot{x} = -14,66 \cdot 0,119 \cdot \sin 14,66t + 14,66 \cdot 0,02 \cdot \cos 14,66t$$

или

$$\dot{x} = -1,74 \cdot \sin 14,66t + 0,29 \cdot \cos 14,66t \quad (10)$$

Для определения составляющих реакции \overline{N}_1 , \overline{N}_2 стенки трубки при $t_1 = 0,1$ с выразим векторное уравнение (4) в проекции на оси y и z . Учитывая, что вектор \overline{a}_r перпендикулярен этим осям, получим

$$0 = N_1 + F_e'' \cdot \cos \alpha + G \cdot \sin \alpha \\ 0 = N_2 + F_k''$$

Из этих уравнений находим

$$N_1 = -F_e'' \cdot \cos \alpha - G \cdot \sin \alpha; \quad N_2 = F_k'' \quad (11)$$

Из уравнений (9) и (10) при $t_1 = 0,1$ с найдем значение координаты и проекции относительной скорости шарика М

$$x = 0,119 \cdot \cos 14,66 \cdot 0,1 + 0,02 \cdot \sin 14,66 \cdot 0,1 + 0,081 = 0,11 \text{ м}$$

$$\dot{x} = -1,74 \cdot \sin 14,66 \cdot 0,1 + 0,29 \cdot \cos 14,66 \cdot 0,1 = -1,7 \text{ м/с}$$

Из уравнений (2) и (3)

$$F_e^u = 0,09 \cdot \pi^2 \cdot 0,11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,085 \text{ Н}$$

$$F_k^u = 2 \cdot 0,09 \cdot \pi \cdot 1,7 \cdot \sqrt{3} = 1,67 \text{ Н}$$

Тогда

$$N_1 = -0,085 \cdot 0,5 - 0,09 \cdot 9,8 \cdot 0,866 = -0,81 \text{ Н}; \quad N_2 = 1,67 \text{ Н}$$

Реакция стенки трубки

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(-0,81)^2 + 1,67^2} = 1,86 \text{ Н}$$

Искомое давление шарика М на стенки трубки по числовому значению равно найденной реакции N и направлено в противоположную сторону.

2 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

- Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов /Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; под ред. А.А. Яблонского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 2000. - 367 с.

- Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 10-е изд., исправл. –М.: Наука, 2002. - 416 с.

- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. Т.1. Статика. -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. Т.2. Динамика. -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

- Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов в 3-х томах. Т.1. Статика и кинематика. - 9-е изд., перераб., - М.: Наука, 1990. - 672 с.

- Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640 с.