МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра математических методов и моделей в экономике

С.И. ПЛУЖНИКОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ОЧНО-ЗАОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования Оренбургского государственного университета

Оренбург 2005

УДК 519.21(07)
П40
ББК 22.17 я7

Рецензент
кандидат экономических наук, доцент Майстренко К.И.

Плужникова С.И.
П-40 Теория вероятностей [Текст]: методические указания к решению задач для студентов экономических специальностей очно-заочной и заочной форм обучения /С.И. Плужникова. - ГОУ ОГУ, 2005. - 38с

Методические указания охватывают основные разделы курса "Теория вероятностей". В справочном разделе приведена краткая сводка основных определений, формул и теорем, которые используются при решении задач, их применение иллюстрируется примерами решения задач. Для каждого раздела подобраны по 10 задач для контроля.

Методические указания предназначены для студентов очно-заочной и заочной форм обучения.

ББК 22.171. я7

Введение

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях.

Устойчивость массовых явлений служит базой для применения вероятностных методов исследования, которые позволяют не только осуществить научный прогноз, но и в ряде случаев помогают целенаправленно влиять на ход случайных явлений, контролировать их, ограничивать сферу действия.

1 Непосредственное вычисление вероятностей

1.1 Задачи по непосредственному вычислению вероятностей в случае схемы равновозможных событий

1.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет "дубль".

Решение. Каждый исход опыта можно представить как упорядоченную пару чисел (m,n), где m-число очков выпавших на первой кости, n-число очков на второй. Каждая из 6 граней одной игральной кости может выпасть с любой из 6 граней другой. Следовательно, всех элементарных исходов, равновозможных и взаимоисключающих друг друга, будет n=6·6=36.

Событие A- выпадение "дубля" - происходит тогда и только тогда, когда наступает один из исходов: (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6). Таким образом m_A=6.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Задача 2 Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества {0,1,…,9}. Это число способов равно A_{10}^2. Благоприятствует событию А (цифры набраны верно) только один исход. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{A_{30}^2} = \frac{1}{90}.$$

Задача 3 В подгруппе 13 студентов. Из них восемь учатся на хорошо и отлично. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 студентов учатся на хорошо и отлично.

Решение. Пусть A событие состоящее в том, что среди 9 отобранных учатся на хорошо и отлично 5 студентов; n=C_{13}^9- общее число случаев, по которым можно отобрать 9 из 13; $m_A = C_5^4 \cdot C_8^5$- число случаев благоприятствующих событию A, так как среди отобранных 9, 5 отличников и 4 студента не являются отличниками. Вероятность события А будет

$$P(A) = \frac{m_A}{n}; \quad P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_5^4}{C_{13}^9} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{1!\cdot 4!} : \frac{13!}{4!\cdot 9!} = \frac{56}{143}.$$

Здесь применялась в решении формула гипергеометрической вероятности.

1.1.2 Задачи к разделу

1 В ящике 80 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены три детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

2 В корзине 6 белых и 4 черных шара. Наудачу отобраны 7 шаров. Найти вероятность того, что среди отобранных шаров окажутся 3 черных.

3 На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди 5-и взятых наудачу кинескопов три кинескопа Минского завода.

4 В группе 20 студентов, среди которых 7 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пятеро отличников.

5 В ящике 100 яблок. Из них 10 поражена болезнью в скрытой форме. Последовательно без возвращения достают пять яблок. Какова вероятность того, что здоровыми будут не менее 4 яблок.

6 Всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет менее двух.

7 Волки убивают 10 % здоровых лосей. Какова вероятность того, что среди шести убитых лосей больных не менее пяти.

8 Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов в музей. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

9 В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара.

10 Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события "сумма выпавших очков не превосходит четырех".

2 Теоремы сложения и умножения вероятностей

2.1 Задачи с применением теорем сложения и умножения вероятностей

2.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 В библиотеку университета поступило 500 новых книг. Среди них 100 справочников по экономическим дисциплинам. Студент, получив доступ к новым поступлениям, взял наудачу 5 книг. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один справочник?

Решение. Первый способ. Требование – хотя бы одна из пяти взятых книг справочник (событие A) будет осуществлено, если произойдет любое из несовместных событий: B– один справочник взят, C– два справочника взято; D– три справочника взято, E– четыре справочника взято, F- пять справочников взято. Тогда $A=B+C+E+D+F$

$$P(B)=\frac{C_{100}^{1}\cdot C_{400}^{4}}{C_{500}^{5}};\qquad P(C)=\frac{C_{100}^{2}\cdot C_{400}^{3}}{C_{500}^{5}};\qquad P(D)=\frac{C_{100}^{3}\cdot C_{400}^{2}}{C_{500}^{5}};$$

$$P(E)=\frac{C_{100}^{4}\cdot C_{400}^{1}}{C_{500}^{5}};\qquad P(F)=\frac{C_{100}^{5}\cdot C_{400}^{0}}{C_{500}^{5}}.$$

$$P(A)=\frac{C_{100}^{1}\cdot C_{400}^{4}+C_{100}^{2}\cdot C_{400}^{3}+C_{100}^{3}\cdot C_{400}^{2}+C_{100}^{4}\cdot C_{400}^{1}+C_{100}^{5}\cdot C_{400}^{0}}{C_{500}^{5}}.$$

Второй способ. Рассмотрим событие $\bar{A}$ противоположное событию A, т.е. ни одна из взятых пяти книг не является справочником.

Известно, что $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Так как $P(\bar{A})=\frac{C_{100}^{0}\cdot C_{400}^{5}}{C_{500}^{5}}$, то $P(A)=1-\frac{C_{100}^{0}\cdot C_{400}^{5}}{C_{500}^{5}}$.

Задача 2 Два друга сдают экзамен по математике. Вероятность того, что сдает экзамен первый – 0,8, для второго эта вероятность – 0,7. Какова вероятность того, что только один из друзей сдаст экзамен?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что сдаст экзамен только один, это означает: первый сдал, второй не сдал или первый не сдал, а второй сдал экзамен. Введем события. A_1 – сдал экзамен первый из друзей, $\bar{A}_1$ – он не сдал экзамен; A_2 – сдал экзамен второй из друзей, $\bar{A}_2$ – он не сдал экзамен.

По условию задачи $P(A_1)=0{,}8$, тогда $P(\bar{A}_1)=0{,}2$; $P(A_2)=0{,}7$, тогда $P(\bar{A}_2)=0{,}3$.

Событие A через введенные события запишем так: $A=A_1\cdot\bar{A}_2+\bar{A}_1\,A_2$;

$P(A_1)=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)$.

$P(A)=0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}38$.

Задача 3 Прибор состоит из трех блоков. Блоки отказывают независимо друг от друга. Вероятность отказа за время t для первого блока 0,1; для второго 0,05; для третьего 0,2. Найти вероятность того, что за время t откажет не более двух блоков.

Решение. Пусть A событие состоящее в том, что за время t откажет не более двух блоков. Введем события. A_1 – отказал первый блок; $\bar{A}_1$ – работает первый блок; A_2 – отказал второй блок; $\bar{A}_2$ – работает второй блок; A_3 – отказал третий блок; $\bar{A}_3$ – работает третий блок.

Первый способ. Событие A можно записать так: $A=B_0+B_1+B_2$, где B_0 – ни один из блоков не отказал. $B_0=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3$;

$B_1=A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3$ – отказал только один из 3-х блоков;

$B_2=A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3+A_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3$ – отказали только два из 3-х блоков.

$P(A)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}95\cdot$ $\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}25\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2=0{,}684+0{,}076+0{,}036+0{,}171+0{,}004+$ $+0{,}019+0{,}009=0{,}999$.

Второй способ. Для события A введем противоположное $\bar{A}$ – за время t откажут более двух блоков, это означает откажут все три блока

$\bar{A}=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, $P(\bar{A})=0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2=0{,}001$

Известно, что $P(A)+P(\bar{A})=1$,

$P(A)=1-P(\bar{A})=0{,}9999$

Задача 4 В корзине 3 арбуза и 4 дыни. Извлекают наудачу два круглых объекта. Найти вероятность того, что извлечены оба арбуза, если:

а) после первого извлечения в корзину не возвращают объект;

б) извлечен первый объект, его вернули в корзину и извлекают второй.

Решение. Пусть A событие извлечения двух арбузов, A_1 – извлечение арбуза при первом изымании; A_2 – извлечение арбуза при втором изымании.

а) $P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$;

где A_2/A_1 – вероятность события A_2 при условии, что A_1 произошло.

б) $P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_2)\cdot P(A_2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$.

2.1.2 Задачи к разделу

1 В ящике находятся 5 изделий первого сорта и 3 изделия второго сорта. Из ящика последовательно вынимаются два изделия, не возвращая их. Найти вероятность того, что первое вынутое изделие первого сорта, а второе – второго сорта.

2 Прибор, работающий в течение смены, состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение смены выйти из строя. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За смену вероятность безотказной работы первого узла равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,7. Найти надежность (вероятность безотказной работы) прибора.

3 В читальном зале имеется 7 учебников по теории вероятностей, из которых 5 в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них в переплете.

4 Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что из 3-х наудачу взятых, хотя бы два выигрышных лотерейных билетов.

5 Производятся три выстрела по одной мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны: 0,4; 0,5; 0,7, соответственно. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов будет хотя бы одна пробоина.

6 Коэффициент использования рабочего времени у 3 тракторов соответственно равен 0,8, 0,7, 0,6. Учитывая, что остановки в работе каждого трактора случайны и независимы одна от другой, найдите вероятность:

а) совместной работы всех тракторов;

б) совместной работы двух тракторов;

в) простоя всех тракторов;

г) работы хотя бы одного трактора.

7 Агрегат имеет 3 двигателя, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя 1-го двигателя равна 0,1 для 2-го – 0,2, для 3-го – 0,25. Какова вероятность того, что:

а) ни один двигатель не выйдет из строя;

б) все три двигателя выйдут из строя;

в) какой-нибудь один двигатель не выйдет из строя;

г) хотя бы один двигатель не выйдет из строя.

8 В телевизионном ателье имеется 3 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп не выдержит гарантийный срок службы, соответственно равна 0,1; 0,2; 0,15. Какова вероятность того, что:

а) ни один кинескоп не выдержит гарантийный срок службы;

б) все три кинескопа выдержат гарантийный срок;

в) какой-нибудь один кинескоп выдержит гарантийный срок;

г) хотя бы один не выдержит гарантийный срок.

9 Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятности того, что в течении часа станок потребует внимания рабочего равны 0,1, 0,2, 0,15. Какова вероятность того, что в течение часа:

а) ни один станок не потребует внимания рабочего;

б) все три станка потребуют внимания рабочего;

в) какой-нибудь один станок потребует внимания рабочего;

г) хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

10 В студии телевидения 3 телевизионные камеры. Вероятность того, что камеры выключены, равна соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность того, что:

а) ни одна камера не включена;

б) все камеры включены;

в) какая-нибудь одна камера включена;

г) хотя бы одна камера включена.

3 Формулы полной вероятности и Байеса

3.1 Задачи с применением формул полной вероятности и Байеса

3.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Производится проверка остаточных знаний студентов по математике на потоке из четырех групп (по 25 человек в каждой). Вероятность того, что студент усвоил необходимый минимум знаний равна для первой - 0,7; для второй – 0,5; для третьей – 0,8; для четвертой – 0,6. Из стопки сданных на проверку работ наудачу взяли одну. Найти вероятность того, что эта работа заслуживает положительной оценки.

Решение. Событие A – работа заслуживает положительной оценки. H_1, H_2, H_3, H_4 – события принадлежности студента к соответствующей группе; по условию во всех четырех группах равное количество студентов, поэтому $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=\frac{1}{4}$. По условию задачи известны вероятности усвоения необходимого минимума знаний для студента каждой группы:

$$P(A/H_1)=0{,}7;\quad P(A/H_2)=0{,}5;\quad P(A/H_3)=0{,}8;\quad P(A/H_4)=0{,}6.$$

Вероятность событие A найдем по формуле полной вероятности.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+P(H_4)\cdot P(A/H_4);$$
$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot 0{,}7+\frac{1}{4}\cdot 0{,}5+\frac{1}{4}\cdot 0{,}8+\frac{1}{4}\cdot 0{,}6=\frac{1}{4}\cdot\left(0{,}7+0{,}5+0{,}8+0{,}6\right)=\frac{1}{4}\cdot 2{,}6=0{,}65$$

Задача 2 Во втором туре университетской олимпиады по математической статистике принимало участие 10 студентов ФЭФ; 9 – ЭУ; 15 – ГФ. Вероятность победы для студента ФЭФ – 0,9; ЭУ – 0,7; ГФ – 0,8. Один из участников занял первое место. Вероятнее всего студентом какого из трех факультетов он является?

Решение. Пусть A событие состоящее в том, что студент занял первое место в олимпиаде, H_1, H_2, H_3 – события принадлежности студентов к факультетам ФЭФ, ЭУ, ГФ, вероятности событий, называемых гипотезами (до опыта).

$$P(H_1)=\frac{10}{34},\quad P(H_2)=\frac{9}{34},\quad P(H_3)=\frac{15}{34}.$$

По условию также известны вероятности победы для студентов этих факультетов $P(A/H_1)=0{,}9$; $P(A/H_2)=0{,}7$; $P(A/H_3)=0{,}8$. По формуле полной вероятности найдем вероятность

$$\mathrm{P(A)}=\frac{10}{34}\cdot 0{,}9+\frac{9}{34}\cdot 0{,}7+\frac{15}{34}\cdot 0{,}8=\frac{10\cdot 0{,}9+9\cdot 0{,}7+15\cdot 0{,}8}{34}=0{,}8.$$

Вероятности гипотез изменятся, если в результате опыта появилось событие A, по формуле Байеса вычисляем эти вероятности.

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}; \qquad P(H_1/A)=\frac{\frac{10}{34}\cdot 0{,}9}{0{,}8}=\frac{90}{272};$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}; \qquad P(H_2/A)=\frac{\frac{9}{34}\cdot 0{,}7}{0{,}8}=\frac{63}{272};$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}; \qquad P(H_3/A)=\frac{\frac{15}{34}\cdot 0{,}8}{0{,}8}=\frac{120}{272}.$$

Из сравнения делаем вывод: вероятнее всего первое место занял студент ГФ.

3.1.2 Задачи к разделу

1 Частица пролетает мимо 3-х счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностью 0,3; 0,3; 0,4. В свою очередь, если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0,6, во второй с вероятностью 0,5 и в третий с вероятностью 0,55. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована.

2 Для приема зачета преподаватель подготовил 50 задач; 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 – по интегральному. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решать 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению.

3 Большая популяция людей разбита на 2 группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний в этих группах составило 31 % и 48 %. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе.

4 Изделие проверяется на стандартность одним из 2-х товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что его проверял второй товаровед.

5 Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: 1 класс – малый риск, 2 класс – средний, 3 класс – большой риск. Среди этих клиентов 60 % - первого класса риска, 30 % - второго и 10 % - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для

первого класса риска, равна 0,02; для второго – 0,04; для третьего – 0,09. Какова вероятность того, что получит вознаграждение за период страхования клиент, относящийся к классу малого риска.

6 Радист трижды вызывает журналиста. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй – 0,4, а третий – 0,5. Найти вероятность того, что журналист услышит вызов, если события, состоящие в том, что вызов будет услышан, независимы.

7 Вся продукция малого предприятия проверяется двумя контролерами, причем первый проверяет 55 % изделий, второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Вероятнее всего кем оно проверялось?

8 В цехе работают 3 рабочих, изготовляя изделия одного наименования. Известна вероятность брака наудачу взятого изделия, бракованным оно и оказалось. Переоценили вероятности брака для первого рабочего, она оказалась 0,6, а для второго – 0,3. Чему равна вероятность брака у третьего рабочего, при условии, что извлеченное наудачу изделие оказалось браковано?

9 В город сметану поставляют три ОАО в соотношении 5:8:7. Среди продукции Новосергеевского ОАО 20 % сметаны 90 %, среди продукции Сорочинского ОАО 20 % сметаны 85 %, среди продукции Шарлыкского ОАО 20 % сметаны 75 %. Найти вероятность того, что купленная сметана, имеющая жирность 20 % Сорочинского ОАО.

10 В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием К; 30 % с заболеванием L, 20 % с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7, для болезней L и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

4 Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

4.1 Задачи на применение формулы Бернулли

4.1.1 Примеры решения задачи

Задача 1 Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничья во внимание не принимается).

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p = \frac{1}{2}$, вероятность проигрыша $q = \frac{1}{2}$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша одинакова и безразлично в какой последовательности будут выиграны партии, то применяется формула Бернулли. Вероятность того, что будут выиграны две партии из четырех:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Вероятнее выиграть две партии из 4-х, чем три партии из 6-и.

4.1.2 Задачи к разделу

1 Оптовая база снабжает 10 магазинов. От каждого из них может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность получения не более одной заявки.

2 Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5-и партий из 8-и (ничьи во внимание не принимаются)?

3 Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки, равна 0,6. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешить делать две попытки.

4 Вероятность изготовления стандартного кинескопа равна 0,8. Какова вероятность того, что среди 12 кинескопов окажется не более одного стандартного?

5 Пусть вероятность того, что покупателю необходимы кроссовки 43 размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 7 первых покупателей кроссовки этого размера будут необходимы по крайней мере одному покупателю.

6 Пусть вероятность того, что пассажир опоздает к вылету самолета равна 0,05. Найти вероятнейшее число не опоздавших из 240 пассажиров.

7 Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Найти вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города 3 сбербанка.

8 В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано наивероятнейшее число пакетов акций.

9 В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы менее двух договоров.

10 Предполагается, что 10 % открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более 2-х прекратят свою деятельность в течение года?

5 Предельные теоремы в схеме Бернулли

5.1 Задачи с применением предельных теорем в схеме Бернулли

5.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Вероятность попадания в цель по движущейся мишени 0,7. Какова вероятность того, что из 20 выстрелов 15 окажутся удачными.

Решение. По локальной теореме Муавра-Лапласа.

$$P_{20}(15)=\frac{f(x)}{\sqrt{npq}}$$

n=20; m=15; p=0,7; q=0,3.

$$\sqrt{npq}=\sqrt{20\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}\approx 2{,}05$$

$$x=\frac{15-20\cdot 0{,}7}{\sqrt{20\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\approx 0{,}49.$$

По таблице f(0,49)=0,35381.

$$P_{20}(15)=\frac{0{,}35381}{2{,}05}\approx 0{,}173.$$

Задача 2 Известно, что при контроле бракуются 10 % шестерен. Для контроля отобрано 500 шестерен. Найти вероятность того, что число годных шестерен окажется в пределах от 460 до 475.

Решение. По интегральной теореме Муавра-Лапласа найдем эту вероятность.

По условию n=500; p=0,9; q=0,1.

a=460, b=475.

$$x_1=\frac{460-500\cdot 0{,}9}{\sqrt{500\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\approx 1{,}49; \qquad x_2=\frac{475-500\cdot 0{,}9}{\sqrt{500\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\approx 3{,}73.$$

P_{500}(460; 475)=1/2(Ф(3,73)–Ф(1,49))

P_{500}(460; 475)=0,066, где

Ф(3,73)=1/2·0,99981=0,4999

$\Phi(1,49) = 1/2 \cdot 0,86378 = 0,4344$.

5.1.2 Задачи к разделу

1 Вероятность изготовления нестандартного изделия равна 0,004. Какова вероятность того, что среди 1000 изделий окажется 5 нестандартных?

2 На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка. Найти вероятность того, что за смену (8 часов) число обрывов нити будет равно 2.

3 Вероятность попадания в одно из уязвимых мест самолета равна 0,0008. Какова вероятность сбить самолет, если для этого достаточно одного попадания в какое-либо уязвимое место, а всего предполагается произвести 7500 выстрелов?

4 Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция района обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

5 Вероятность своевременного выполнения заказа в фирме бытового обслуживания равна 0,75. Найти вероятность того, что из 160 заказов своевременно выполнят не менее 110.

6 Пусть вероятность того, что покупателю магазина необходим утюг данной фирмы, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 2000 покупателей таких, которым требуется утюг данной фирмы, будет от 570 до 630.

7 Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов находятся в границах от 45 до 55.

8 В банк отправлено 4000 пакетов с денежными знаками. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено не более трех пакетов.

9 Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что их 400 студентов работу успешно выполнят не менее 180 студентов.

10 При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. от 300 до 400 банков включительно.

6 Случайные величины, законы их распределений

6.1 Задачи на построение законов распределения и вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин

6.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Вероятность того, что саженец груши приживется, равна 0,8, яблони - 0,9. Куплено 2 саженца груши и 1 яблони.

Составить закон распределения числа прижившихся среди них. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Построить функцию распределения.

Решение. Число прижившихся саженцев может быть: 0, 1, 2, 3. Случайная величина – число прижившихся саженцев.

Пусть p_1=0,8 – вероятность того, что приживется груша, p_2=0,9 – вероятность того, что приживется яблоня, тогда вероятность того, что они не приживутся q_1=0,2; q_2=0,1.

Если X=0, то все три саженца не приживутся, т.е. $P(X=0)=0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}004$.

Если X=1, то один саженец приживется: прижилась яблоня или прижилась одна груша, или прижилась другая груша, т.е.

$$P(X=1)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}068.$$

Если X=2, то два саженца приживутся: приживутся обе груши или приживется яблоня и одна груша, или приживется яблоня и другая груша.

$$P(X=2)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}352.$$

Если X=3, то все три саженца приживутся $P(X=3)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}576$

X_i	0	1	2	3
P_i	0,004	0,068	0,352	0,576

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = 1$$

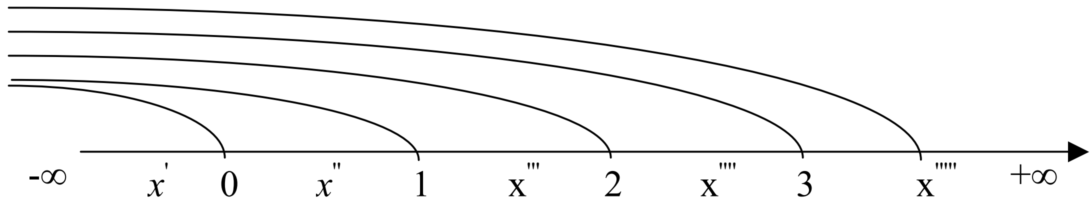
Математическое ожидание $M(X)=0\cdot 0{,}004+1\cdot 0{,}068+2\cdot 0{,}352+3\cdot 0{,}576=2{,}5$

Дисперсия $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$, поэтому найдем

$M(X^2)=0\cdot 0{,}004+1\cdot 0{,}068+4\cdot 0{,}352+9\cdot 0{,}576=6{,}66$

$D(X)=6{,}66-6{,}25=0{,}41$

Функция распределения $F(x)=P(X<x)$, где x – текущая точка числовой оси.



при $-\infty < x \le 0, \quad F(x)=0;$

при $0 < x \le 1, \quad F(x)=0{,}004;$

при $1 < x \le 2, \quad F(x)=0{,}004+0{,}068=0{,}072;$

при $2 < x \le 3, \quad F(x)=0{,}004+0{,}068+0{,}352=0{,}424;$

при $x > 3, \quad F(x)=0{,}004+0{,}068+0{,}352+0{,}576=1;$

Задача 2 Электронное устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Вероятность отказа одного элемента равна 0,1. Следовательно, вероятность безотказной работы одного элемента 0,9. Число отказов элементов в одном опыте, либо 0, либо 1, либо 2, либо 3. Имеет место биноминальный закон распределения, где вероятности рассчитывают по формуле Бернулли. Получаем:

$$P(x=0)=C_3^0 p^0 q^3 = 1\cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}729\,;$$

$$P(x=1)=C_3^1 p^1 q^2 = 3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P(x=2)=C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 3\cdot 0{,}01\cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P(x=3)=C_3^3 p^3 q^0 = 1\cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}001$$

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Закон распределения выражается таблицей:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = 1$$

Математическое ожидание можно рассчитать двумя способами:

$M(X)$=0·0,729+1·0,243+2·0,027+3·0,001=0,3

$M(X)=n\cdot p$=3·0,1=0,3.

Дисперсию можно вычислить так:

$M(X^2)$=0·0,729+1·0,243+4·0,027+9·0,001=0,36

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$=0,36–0,09=0,27

$D(X)=npq$=3·0,1·0,9=0,27.

6.1.2 Задачи к разделу

1 В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Построить функцию распределения.

2 Два баскетболиста осуществляют по 2 броска. Вероятность попадания мяча в корзину при любом броске для 1-го баскетболиста равна 0,8, для 2-го – 0,9. Составить закон распределения общего числа попаданий. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

3 Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит ровно две разбитые бутылки.

Указание. e^{-3}=0,04979.

4 Дискретная случайная величина имеет только два возможных значения x_1, x_2, причем $x_1<x_2$. Вероятность того, что случайная величина принимает значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X зная, что математическое ожидание $M(x)$=2,6 и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$=0,8.

5 Каждый из 2 стрелков делает по 1 выстрелу по мишени, вероятность попадания в которую для 1-го стрелка равна 0,8, для 2-го – 0,9. Составить закон распределения общего числа попаданий. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

6 В городе 3 оптовых базы стройматериалов. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0,2.

Составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент. Построить функцию распределения.

7 В среднем по 10 % договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

8 В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую двадцатую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. рублей. Составить закон распределения случайной величины – числа выигрышей при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

9 При контрольном тестировании студенту предлагают три теста, на каждый из них приведено четыре ответа, один из которых верный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию.

10 Среди 10 приборов у 2-х имеются отклонения, выходящие за пределы допуска. Составить закон распределения числа приборов, не имеющих отклонений от допуска, среди 4 наудачу взятых приборов.

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Построить функцию распределения.

6.2 Задачи на построение законов распределения и вычисление числовых характеристик непрерывных случайных величин

6.2.1 Примеры решения задач

Задача 1 Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Составить закон распределения ошибки округления.

Решение. Случайная величина X – ошибка округления отсчета, она распределена равномерно, поэтому $f(x)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$. Следовательно, закон распределения заданный функцией плотности будет:

$$f(x)=\begin{cases}10, & \textit{при}\quad 0{,}1\le x\le 0{,}2\\ 0, & \textit{при}\quad x<0{,}1,\quad x>0{,}2,\end{cases}$$

а функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx \quad при -\infty < x < 0{,}1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0,1}0dx \; + \int_{0,1}^{x}10dt \; = 10t\Big|_{0,1}^{x} = 10x-1 \quad при \; 0{,}1 \le x \le 0{,}2$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0,1}0dx \; + \int_{0,1}^{0,2}10dx \; + \int_{0,2}^{x}0dt \; = 10x\Big|_{0,1}^{0,2} = 10(0{,}2-0{,}1)=1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; при \; -\infty < x < 0{,}1 \\ (10x-1), \; при \; 0{,}1 \le x \le 0{,}2 \\ 1, \; при \; x > 0{,}2 \end{cases}$$

Задача 2 Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x/2, \; если \; x \in (0;2] \\ 0, \; если \; x \in (-\infty,0] \cup (2,+\infty) \end{cases}$$

Найти:
а) функцию распределения $F(x)$;
б) математическое ожидание и дисперсию X.
Решение:
а) для построения функции распределения воспользуемся равенством:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $x \le 0$, то $f(x)=0$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt = 0.$$

Если $0 < x \le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx + \int_0^x (1/2)\cdot tdt = (1/4)\cdot x^2.$$

Если x>2, то

$$\mathrm{F(x)} = F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 (1/2)\cdot xdx + \int_2^x 0dt = 1.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \le 0, \\ (1/4)\cdot x^2, & \textit{если} \quad 0 < x \le 2, \\ 1, & \textit{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

б) математическое ожидание и дисперсию *X* вычислим по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\cdot(1/2)\cdot xdx = \frac{4}{3},$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\cdot(1/2)\cdot xdx = 2,$$

$D(X)=M(X^2)-(\mathrm{M}(X))^2=2-(4/3)^2=2/9.$

Задача 3 Функция распределения непрерывной случайной величины *X* задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; \textit{при} \;\; x < 0 \\ 1 - e^{-3x} \;\; \textit{при} \;\; x \ge 0 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) вероятность попадания величины *X* в интервал $\left[\frac{1}{3};1\right]$

Решение:

а) так как $f(x)=F'(x)$, то получаем:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;\; \textit{при} \;\; x < 0 \\ 3e^{-3x} \;\; \textit{при} \;\; x \ge 0 \end{cases}$$

б) по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$ находим:

$$P\left(\frac{1}{3} \le X \le 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1-e^{-3}\right) - \left(1-e^{-1}\right) = 0{,}95021 - 0{,}63100 = 0{,}31921$$

Можно вычислить эту вероятность другим способом:

$$P\left(\frac{1}{3} \le X \le 1\right) = \int_{1/3}^{1} 3 \cdot e^{-3x} dx = 0{,}31921$$

Задача 4 Пусть диаметр вала является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a=10 см, σ=2 см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятого наудачу вала отличается от проектного размера не более, чем на 1 см.

Решение. Требуется вычислить вероятность того, что абсолютная величина отклонения размера диаметра от проектного размера (математического ожидания) меньше 1 см. Следовательно, надо найти

$P(|X-a|<1)$, то есть $P(10-1<X<10+1)=P(9<X<11)$.

Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

получим

$$P(9 < X < 11) = \Phi\left(\frac{11-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{2}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) = 2\Phi(0{,}5).$$

В таблице значений функций $\Phi(x)$ находим, что $2\Phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383$.

Следовательно, значение искомой вероятности равно 0,383.

6.2.2 Задачи к разделу

1 Плотность распределения случайной величины X задана формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le 1, \\ (x - 1/2) \text{ } при \text{ } 1 < x \le 2, \\ 0 \text{ } при \text{ } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что величина X попадает на участок (-1; 1,5).

2 Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & если \quad x < 0, \\ \sin 2x, & если \quad 0 \le x \le \pi/4, \\ 1, & если \quad x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятности $f(x)$.

3 Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x<0, \\ x^2, & если \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & если \quad x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

4 Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X заданной функцией плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x<0, \\ x, & если \quad 0\le x\le 1/2, \\ 0, & если \quad x>1/2. \end{cases}$$

5 Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & если \quad x\le -1, \\ x/4+1/4\ , & если \quad -1<x\le 3, \\ 1, & если \quad x>3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0,2).

6 Станок-автомат изготавливает валики, причем контролирует их диаметр X. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием a=10 мм и средним квадратическим отклонением σ=0,1 мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготавливаемых валиков.

7 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием равным 50 мм (проектная длина). Известно, что средняя квадратическая ошибка равна 3,6 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали находится в границах от 55 мм до 68 мм.

8 Автомат изготавливает шарики для шарикоподшипников. Шарик считается годным, если отклонение диаметра X шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Понимая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ=0,4 мм, найти вероятность того, что наудачу выбранный шарик будет годным.

9 Случайная величина X распределена равномерно.

$M(x)=8$; $D(x)=1/3$.

Найдите плотность вероятности.

10 Событие, состоящее из мгновенного сигнала должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина, распределенная равномерно. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 минут после 3-х часов?

7 Двумерные случайные величины

7.1 Задачи на построение безусловных и условных законов распределения и на вычисление характеристик связи двумерной случайной величины

7.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Следующая таблица представляет закон распределения двумерного случайного вектора (*X*, *Y*), где *X*, *Y* – отдачи (в %) за 1-ый год инвестиций в партнерских фирмах *A*, *B* соответственно.

y_j x_i	-10	0	10	15	Итого p_{xi}
0	0,00	0,15	0,10	0,20	0,45
10	0,02	0,05	0,05	0,08	0,20
20	0,25	0,10	0,00	0,00	0,35
Итого p_{yj}	0,27	0,30	0,15	0,28	1

Вычислить средние процентные отдачи от вложений в каждую фирму отдельно.

Решение. Составляем безусловные законы распределения составляющих:

x_i	0	10	20
y_j	0,45	0,20	0,35

y_j	-10	0	10	15
p_j	0.27	0.30	0.15	0.28

По ним найдем средние арифметические $\bar{x}=\sum_{i=1}^{3} x_i p_i \quad \bar{y}=\sum_{j=1}^{4} y_j p_j$.

$$\bar{x}=0\cdot 0{,}45+10\cdot 0{,}20+20\cdot 0{,}35=9$$

$$\bar{y}=10\cdot 0{,}27+0{,}03+10\cdot 0{,}15+15\cdot 0{,}28=3$$

Для инвестиций фирмы *A* отдача 9 %, для фирмы *B* – 3 %.

Задача 2 По условию предыдущей задачи найти условный закон распределения *X* при условии, что y_2=0 и *Y* при условии, что x_1=0.

$p_{12} = \frac{15}{30}, \;\; p_{22} = \frac{5}{30}, \;\; p_{32} = \frac{10}{30}$

x_i	0	10	20
y_j	15/30	5/30	10/30

$\sum_{i=1}^{3} p_{i2} = 1, \quad i = 1,2,3$

$p_{11} = 0, \;\; p_{12} = \frac{15}{45}, \;\; p_{13} = \frac{10}{45}, \;\; p_{14} = \frac{20}{45}$

y_j	-10	0	10	20
p_j	0	15/45	10/45	20/45

$\sum_{j=1}^{4} p_{1j} = 1, \quad j = 1,2,3,4$

Задача 3 По данной таблице вычислить ковариацию и коэффициент корреляции.

x_i / y_j	4	7	9
4	0,30	0,12	0,10
10	0,08	0,12	0,28

Решение. Составим безусловные законы распределения составляющих для X, X^2, Y, Y^2, чтобы вычислить средние арифметические величин и их средние квадратичные отклонения.

x_i	4	7	9
p_i	0,38	0,24	0,38

x_i^2	16	49	81
p_i	0,38	0,24	0,38

y_j	4	10
p_j	0,52	0,48

y_j^2	16	100
p_j	0,52	0,48

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=4\cdot 0{,}38+7\cdot 0{,}24+9\cdot 0{,}38=6{,}62$$

$$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_i=16\cdot 0{,}38+49\cdot 0{,}24+81\cdot 0{,}38=48{,}64$$

$$\sigma_x^2=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=48{,}64-43{,}82=4{,}82;\quad \sigma_x=2{,}20$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{2}y_j p_j=4\cdot 0{,}52+10\cdot 0{,}48=6{,}88$$

$$M\left(Y^2\right)=\sum_{j=1}^{2}y_j^2 p_j=16\cdot 0{,}52+100\cdot 0{,}48=56{,}32$$

$$\sigma_y^2=56{,}32-47{,}33=8{,}99;\quad \sigma_y=3{,}00$$

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}x_i y_j p_{ij}=4\cdot 4\cdot 0{,}3+7\cdot 4\cdot 0{,}12+9\cdot 4\cdot 0{,}1+4\cdot 10\cdot 0{,}08+$$

$$+7\cdot 10\cdot 0{,}12+9\cdot 10\cdot 0{,}28=48{,}56$$

$\mathrm{cov}(X,Y)=48{,}56-6{,}62\cdot 6{,}88=3{,}01$

$$\rho_{xy}=\frac{3{,}01}{2{,}2\cdot 3{,}0}=0{,}45$$

Результат вычисления коэффициента корреляции показывает, что линейная корреляционная связь между *X*, *Y* наблюдается, но она недостаточно сильна.

Задача 4 Дана таблица закона распределения двумерной случайной величины

x_i \ y_j	-1	0	0,5	p_{xi}
1	0,1	0,3	0,2	0,6
2	0,1	0,1	0,2	0,4
p_{yj}	0,2	0,4	0,4	1

Сделать выводы относительно зависимости и коррелированности составляющих.

Решение:

Проверим, выполняется ли условие независимости $P_{ij} = P_{x_i} \cdot P_{y_j}$, $i = 1,2;\quad j = 1,2,3$

Возьмем вероятность $P_{2,3} = 0{,}2;\ P_{x_2} = 0{,}4;\ P_{y_3} = 0{,}4;\ P_{2,3} \neq P_{x_2} \cdot P_{y_3}$, *т.к.* $0{,}2 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$ компоненты *X* и *Y* зависимы.

Вычислим cov(*X*,*Y*)=*M*(*X*·*Y*)-*M*(*X*)·*M*(*Y*)

$$M(X) = (-1) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0$$
$$M(Y) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}4$$
$$M(X \cdot Y) = (-1) \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ (-1) \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}2 = 0$$

cov(*X*,*Y*)=0-0·1,4=0 $\Rightarrow$ составляющие *X* и *Y* некоррелированы.

7.1.2 Задачи к разделу

По данной корреляционной таблице построить: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условные законы для *X* при *j*=2 и для *Y* при *i*=3; вычислить: а) ковариацию, б) коэффициент корреляции.

1	x_i / y_j	5	7	9	6	x_i / y_j	3	6	8
	4	0,14	0,15	0,21		2	0,21	0,07	0,23
	7	0,16	0,20	0,14		8	0,11	0,20	0,18
2	x_i / y_j	1	4	6	7	x_i / y_j	3	4	7
	3	0,14	0,12	0,13		4	0,15	0,23	0,15
	7	0,13	0,20	0,28		8	0,21	0,09	0,17
3	x_i / y_j	5	8	10	8	x_i / y_j	4	5	8
	2	0,11	0,13	0,26		3	0,13	0,14	0,19
	6	0,21	0,06	0,23		5	0,24	0,08	0,22
4	x_i / y_j	4	7	9	9	x_i / y_j	6	9	12
	4	0,22	0,09	0,32		5	0,23	0,07	0,15
	7	0,14	0,17	0,06		9	0,17	0,20	0,18
	x_i / y_j	8	9	12		x_i / y_j	5	8	10

5	x_i / y_j	8	9	12	10	x_i / y_j	5	8	10
	1	0,14	0,11	0,18		2	0,11	0,21	0,14
	6	0,23	0,04	0,30		7	0,20	0,09	0,25

8 Закон больших чисел

8.1 Задачи, решаемые с помощью теорем закона больших чисел

8.1.1 Примеры решения задач

Задача 1 Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено не более 200 клиентов.

Решение. По неравенству Маркова оценим вероятность, $M(x)=100$; $A=200$

$$P(X \le 200) > 1 - \frac{100}{200} \Rightarrow P(X \le 200) > 0{,}5.$$

Задача 2 Среднее значение длины детали равна 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не более 50,5 см.

Решение. Ответим на вопрос, пользуясь неравенством Чебышева. По условию задачи $M(X)=560$; $49{,}5 \le x \le 50{,}5$. Следовательно, $|X-M(X)| \le 0{,}5$, значит $E=0{,}5$, по условию же $D(X)=0{,}1$. Тогда получим:

$$P(|X-50| \le 0{,}5) \ge 1-\frac{0{,}1}{0{,}25}; \Rightarrow P(|X-50| \le 0{,}5) \ge 0{,}6$$

Задача 3 При штамповке пластинок из пластмассы по данным ОТК брак составляет 3 %. Оценить вероятность того, что при просмотре партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1 %.

Решение. Здесь следует использовать неравенство Чебышева для частости (доли) $\frac{m}{n}$, т.к.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le E\right) > 1 - \frac{pq}{nE^2},$$ где $p=0{,}03$; $q=0{,}97$; $n=1000$; $E=0{,}01$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}03\right| \le 0{,}01\right) > 1 - \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{(0{,}01)^2 \cdot 1000},$$

получается, что $P>0{,}709$.

Задача 4 Партия деталей для оборудования завода распределена по ящикам, имеющим одинаковый вес (нетто). Из каждого ящика на выборку берется по одной детали и определяется ее вес. Известно, что дисперсия по каждому из ящиков не превышает 4. Установить, при каком числе ящиков отклонение среднего выборочного веса детали от общего среднего веса ее менее чем на 0,2 кг определяется вероятностью, превышающей 0,95.

Решение. По условию $P > 1 - \dfrac{D(x)}{n\xi^2} = 0{,}95,$ причем *D(x)*=4; ξ=0,2.

$$1 - \frac{4}{0{,}04 \cdot n} = 0{,}95; \quad 0{,}5 = \frac{4}{0{,}04 \cdot n}$$

100:*n*=0,05, тогда число ящиков *n*=2000.

8.1.2 Задачи к разделу

1 В страховой компании застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января $12 страховых, и, в случае смерти, его родственники получают от компании $1000. Найти вероятность того, что компания потерпит убыток.

2 Пусть всхожесть семян некоторых растений составляет 70 %. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших от вероятности взойти каждому их них не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

3 Среднее количество вызовов скорой помощи, поступающих на районную станцию в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов скорой помощи превысит 400.

4 Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X\text{-}M(X)|<0{,}2$.

5 Путем взятия проб установлено, что потери зерна при уборке составляют в среднем 30 кг на 1 га, среднее квадратическое отклонение потерь 0,1 кг. Найдите вероятность того, что потери на 1 га отклонятся от среднего значения не более, чем на 0,2 кг.

6 Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от математического ожидания их не превышало (по модулю) 50?

7 Вероятность сдачи в срок всех экзаменов наудачу взятым студентом ОГУ равна 0,7. Оценить вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в пределах от 0,66 до 0,74.

8 Для иллюминации города на 2-х высотных зданиях используется 500 электроламп, каждая с надежностью 0,98. Оценить вероятность того, что доля надежных электроламп отличается от 0,98 не более чем на 0,1 (по модулю).

9 Вероятность того, что проезжающий легковой автомобиль подъедет на бензозаправку, равна 0,3. Найти границы, в которых с вероятностью не меньшей 0,79, находится доля заправившихся за какой то промежуток времени 100 автомобилей.

10 В студенческой группе 20 студентов, средняя вероятность их готовности к зачету равна 0,8. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом студентов сдавших зачет и средним числом готовых к зачету студентов меньше трех.

9 Справочный раздел

9.1 К разделу 1

При классическом определении вероятность события выражается равенством $P(A)=\frac{m_A}{n}$, где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению событию A; общее число равновозможных элементарных исходов испытаний.

Число перестановок вычисляется по формуле:

$P_n=1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n=n!$ $(0!=1)$.

Число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для непосредственного вычисления вероятностей часто используют формулу гипергеометрической вероятности. Вероятность события A состоящего в том, что среди отобранных M объектов, из общего числа их N, объектов с нужными свойствами m, в то время как в общем числе объектов их n.

$$P(A)=\frac{C_n^m \cdot C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M}.$$

9.2 К разделу 2

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Следствия:

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Условная вероятность события B при условии, что событие A произошло:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

По определению независимости событий A и B можно записать:

$P(A/B)=P(A)$; $P(B/A)=P(B)$;

тогда, в случае зависимости событий A и B:

$P(A/B)\neq P(A)$; $P(B/A)\neq P(B)$.

Вероятность произведения двух зависимых событий:

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$

Вероятность произведения конечного числа зависимых событий:

$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\ldots A_{n-1})$.

Если события A и B независимы, то:

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Вероятность произведения конечного числа попарно независимых событий:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Вероятность суммы двух совместных событий:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Вероятность наступления хотя бы одного из конечного числа совместных и независимых в совокупности событий:

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n)$; в частности,

если $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, то

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n$, где $q = P(\bar{A}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

9.3 К разделу 3

Вероятность события A, которое может произойти совместно только с одним из событий (гипотез) H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Для того, чтобы узнать, как изменятся условные вероятности гипотез, если в результате опыта появилось событие A, следует для каждой гипотезы применить формулу Байеса:

$$P(H_i/A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

9.4 К разделу 4

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, либо нет, причем вероятность p наступления его в любом испытании одна и та же. Вероятность наступления события $\bar{A}$ в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в испытаниях событие A произойдет равно k раз вычисляется по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Эта формула называется формулой Бернулли.

9.5 К разделу 5

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$

Для $f(x)$ есть таблицы значений, эта функция четная. Формула эта дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2}(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)),$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ – нечетная.

Для $\Phi(x)$ есть таблицы значений.

9.6 К разделу 6

Математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D(X)$=$M((X$-$M(X))^2$

Дисперсия дискретной случайной величины:

$$D\left(X\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot p_i$$

Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M\left(x\right)\right)^2\cdot f\left(x\right)dx$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$D(X)$=$M(X)^2$-$(M(X))^2$, для этого необходимо вычислить:

$M\left(X^2\right)=\sum\limits_{i-1}^{k}x_i^2 p_i$ для дискретной случайной величины;

$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$ для непрерывной случайной величины.

Вероятность попадания случайной величины в интервал вычисляется по формуле

$$P\left(a\le x\le b\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу вычисляется по формуле:

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Функция плотности равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 0, \; при \quad x < a, \; x > b\end{cases}$$

$$M(x)=\frac{a+b}{2}, \quad D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

***9.7 К разделу** 7*

Условное распределение случайной величины X при условии Y=y_j задается с помощью условных вероятностей:

$$P_j(x_i)=\frac{P_{ij}}{P_j}$$

Условное распределение случайной величины Y при условии X=x_i задается с помощью условных вероятностей:

$$P_i(y_j)=\frac{P_{ij}}{P_i}$$

Ковариацию вычисляем по формуле:

cov(X,Y)=M(X·Y)-M(X) M(Y).

Если cov(X,Y)=0, то случайные величины X, Y будут некоррелированы. Обратное утверждение не всегда верно.

Коэффициент корреляции имеет вид: $\rho_{xy}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

По значению ρ_{xy} судят о тесноте линейной корреляционной связи.

$$0 \le \left|\rho_{xy}\right| \le 1.$$

9.8 К разделу 8

Конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений. Именно эта устойчивость и представляет собой физическое содержание закона больших чисел, понимаемого в широком смысле слова, так: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В узком смысле слова под законом больших чисел понимают ряд теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

При решении задач чаще всего используются неравенства Маркова и Чебышева.

Неравенство Маркова:

Если случайная величина X имеет только неотрицательные значения, имеет математическое ожидание $M(x)$, то для любого положительного числа A верно неравенство:

$$P(X > A) \le \frac{M(x)}{A}, \text{ следовательно}$$

$$P(X \le A) > 1 - \frac{M(x)}{A}.$$

Неравенство Чебышева:

Для любой случайной величины, имеющей математическое ожидание и дисперсию, справедливо неравенство

$$P(|x-a| > E) \le \frac{D(x)}{E^2}, \text{ следовательно}$$

$$P(|x-a| \le E) > 1 - \frac{D(x)}{E^2},$$

Для случайной величины $X=m$, имеющий биноминальный закон распределения с $a=M(x)=np$ и $D(x)=npq$

$$P(m - np| \le E) > 1 - \frac{npq}{E^2}$$

Для частости (доли) $\frac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью

$$a = M\left(\frac{m}{n}\right) = p \quad \text{и} \quad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le E\right) > 1 - \frac{npq}{nE^2}$$

Список использованных источников

1 **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 543с.

2 **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики [Текст]: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 5-е изд. стер. - М.: Высшая школа, 2000. - 400с.

3 **Колемаев В.А.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для вузов / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003. – 352с.

4 **Зубков А.И.** Сборник задач по теории вероятностей [Текст]: учебное пособие для вузов / А.И. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. - М.: Наука, 1989. – 320с.

5 **Вентцель Е.С.** Прикладные задачи теории вероятностей [Текст]: учебник / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416с.

6 **Колемаев В.А**. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский. - М.: Высшая школа, 1991. - 236с.