МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Л.И. КУДИНА

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

ББК 22.213я7
К 88
УДК 531.3(07)

Рецензент
доцент А.С. Зиновьев

Кудина, Л.И.

К 88 **Устойчивость равновесия консервативных систем: методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Прикладные задачи механики» / Л.И. Кудина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – 33 с.**

Методические указания содержат краткие сведения из теории устойчивости равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы, рекомендации к решению задач устойчивости с использованием энергетического критерия, а также варианты расчетно-графического задания по исследованию устойчивости равновесия консервативной системы с двумя степенями свободы и пример его решения.

Предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению 653500 «Строительство», при выполнении расчетно-графического задания по дисциплине «Прикладные задачи механики».

ББК 22.213я7

Введение

Одно из основных требований, предъявляемых к строительным конструкциям, заключается в необходимости обеспечения их устойчивости, под которой понимают способность сооружений противостоять случайным воздействиям и самостоятельно восстанавливать первоначальную форму равновесия, когда эти воздействия исчезают. Потеря устойчивости всего сооружения в целом или отдельных его элементов стала причиной многих крупных катастроф, произошедших в процессе возведения или эксплуатации различных конструкций: крушение Квебекского моста (Канада, 1907), разрушение Гамбургского газгольдера (Германия,1907), крушение Такомского моста (США, 1940) и др.

Принципы и методы определения значений нагрузок, при котором происходит переход сооружения из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое, стали предметом исследования специального раздела механики – теории статической устойчивости сооружений.

Реальные инженерные сооружения являются системами с бесконечно большим числом степеней свободы. При исследовании устойчивости реальных систем их всегда приходиться заменять механическими моделями, допуская ту или иную степень идеализации, которая, в первую очередь, зависит от выбора числа обобщенных координат, определяющих положение системы. Поэтому исследование устойчивости равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы представляет большой практический интерес, так как в ряде случаев позволяет достаточно точно описать истинную работу сооружений. Однако всегда следует иметь в виду, что любая расчетная модель – это абстракция, отражающая основные свойства поведения реального объекта и пренебрегающая сравнительно менее важными факторами. И ни один метод расчета, как бы он ни был точен с математической точки зрения, не может дать решения, точность которого превышает точность исходных допущений.

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания по исследованию устойчивости равновесия механических систем в курсе дисциплины «Прикладные задачи механики» предназначены, в первую очередь, для студентов строительных специальностей. Вместе с тем настоящие методические указания могут быть рекомендованы и студентам других инженерно-технических специальностей в качестве пособия при самостоятельном изучении одной из специальных глав курса теоретической механики - теории устойчивости равновесия и движения механических систем.

1 Основные теоретические положения

1.1 Понятие об устойчивости равновесного положения системы

Положением равновесия называется такое состояние механической системы, в котором она может находиться сколь угодно долго, если в начальный момент времени система была приведена в это положение с нулевыми скоростями.

Положение равновесия механической системы может быть устойчивым, неустойчивым или безразличным.

Для наглядности рассмотрим положение равновесия на примере одного твердого тела (рисунок 1).

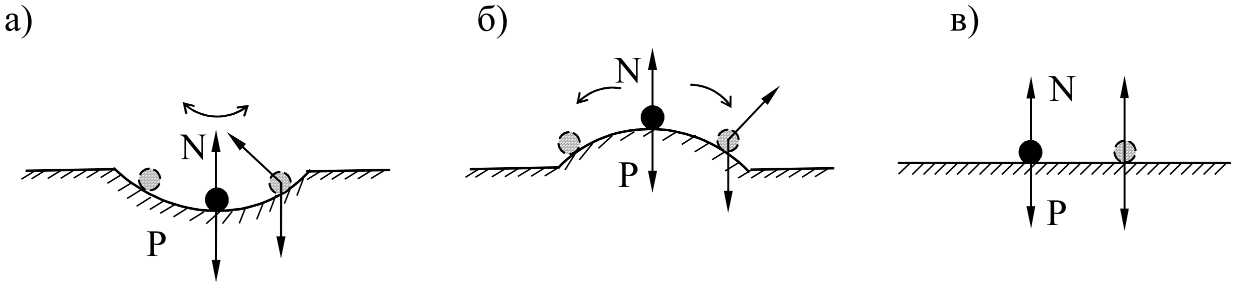


Рисунок 1 – Виды равновесия:
а) устойчивое; б) неустойчивое; в) безразличное

*Положение равновесия механической системы называется **устойчивым**, если при сколь угодно малом отклонении системы от этого положения она стремится вернуться в исходное состояние и в последующем движении весьма мало отклоняется от него.*

*Положения равновесия механической системы называется **неустойчивым**, если при сколь угодно малом отклонении системы от этого положения она все более удаляется от него и не проявляет стремления вернуться в исходное состояние.*

*Положение равновесия механической системы называется **безразличным**, если при отклонении от него система и в новом положении может оставаться в равновесии.*

В общем случае кроме начальных отклонений точкам системы следует сообщить и некоторые начальные скорости. Тогда безразличное равновесие следует отнести к неустойчивому, так как точки системы будут удаляться от него по инерции.

Наибольший практический интерес представляет устойчивое равновесие, так как в таком положении система может находиться длительное время.

Строгое определение устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX века в работах русского ученого А.М. Ляпунова.

Рассмотрим механическую голономную систему материальных точек с S степенями свободы. Тогда для характеристики ее положения требуется

S обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_S$. Условимся отсчитывать обобщенные координаты от положения равновесия, тогда в положении равновесия все обобщенные координаты будут одновременно равняться нулю: $q_1 = q_2 = ... = q_S = 0$.

Выведем систему из положения равновесия, сообщив ее точкам небольшие по модулю *начальные возмущения*. Начальные возмущения системы в общем случае состоят из начальных значений обобщенных координат $q_1^0, q_2^0, ..., q_S^0$ и начальных значений обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, ..., \dot{q}_S^0$.

Обозначим значения обобщенных координат и обобщенных скоростей при дальнейшем движении системы через $q_1(t), q_2(t), ..., q_S(t)$ и $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), ..., \dot{q}_S(t)$.

Равновесие системы называется устойчивым, если для всякого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое малое число $\eta(\varepsilon) > 0$, что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям:

$$\left|q_i^0\right| < \eta(\varepsilon); \ \left|\dot{q}_i^0\right| < \eta(\varepsilon) \ \ (i = 1,2,...,S); \tag{1.1}$$

в дальнейшем движении механической системы выполняются неравенства:

$$\left|q_i(t)\right| < \varepsilon; \ \left|\dot{q}_i(t)\right| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Если при устойчивом положении равновесия все обобщенные координаты и скорости с течением времени стремятся к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0; \ \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \ \ (i = 1,2,...,S), \tag{1.3}$$

то рассматриваемое положение равновесия называется ***асимптотически устойчивым.***

Приведенному определению устойчивого положения равновесия можно дать наглядную геометрическую трактовку (рисунок 2). Обозначим равновесные положения точек системы через A_1, A_2, …, A_n. Опишем вокруг этих точек сферы малого радиуса $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда если положение равновесия системы устойчиво, то как бы ни было мало $\boldsymbol{\varepsilon}$, всегда можно найти такое значение начальных возмущений $\boldsymbol{\eta(\varepsilon)}$, что во все время движения каждая точка системы останется внутри этой описанной сферы. Разумеется, чем меньше $\boldsymbol{\varepsilon}$, тем меньше $\boldsymbol{\eta(\varepsilon)}$.

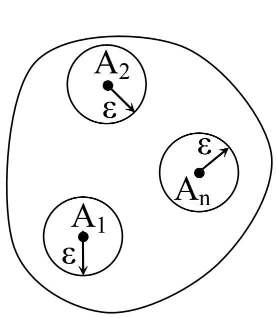


Рисунок 2

1.2 Потенциальная энергия консервативной системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим механическую систему с голономными, стационарными связями, находящуюся под действием сил, имеющих потенциал. Такую систему называют ***консервативной***.

Потенциальная энергия Π консервативной системы с S степенями свободы является функцией обобщенных координат этой системы:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_S). \tag{1.4}$$

Разложим потенциальную энергию в окрестности положения равновесия в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_S$:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, ..., q_S) = \Pi(0, 0, ..., 0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_S}\right)_0 q_S + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {q_1}^2}\right)_0 q_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {q_S}^2}\right)_0 q_S^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \ldots \right. \\ \left. \ldots + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{S-1} \partial q_S}\right)_0 q_{S-1} q_S \right] + \ldots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь и далее обозначение $(...)_0$ показывает, что соответствующее выражение вычисляется в положении равновесия при $q_1 = q_2 = ... = q_S = 0$.

Как известно, в положении равновесия механической системы все обобщенные силы системы равны нулю:

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., S). \tag{1.6}$$

Для случая потенциального силового поля обобщенные силы:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, ..., S). \tag{1.7}$$

Следовательно, для консервативной системы в положении равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, ..., S). \tag{1.8}$$

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия системы равна нулю:

$$\Pi_0 = \Pi(0, 0, ..., 0) = 0. \tag{1.9}$$

Введем обозначения:

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 . \tag{1.10}$$

Коэффициенты (1.10) называются *обобщенными коэффициентами жесткости* и вычисляются в положении равновесия при $q_1 = q_2 = ... = q_S = 0.$ Следовательно,

$$c_{ij} = const; \quad c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j = 1,2,...,S). \tag{1.11}$$

Тогда с учетом (1.8) – (1.11) выражение для потенциальной энергии (1.5) примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{11}q_1^2 + ... + c_{SS}q_S^2 + 2c_{12}q_1q_2 + ... + 2c_{S-1,S}q_{S-1}q_S \right] + ... \tag{1.12}$$

Будем рассматривать только малые смещения точек системы из положения равновесия. В этом случае обобщенные координаты $q_i \;\; (i = 1,2,...,S)$, отсчитываемые от положения равновесия, можно считать величинами первого порядка малости. Тогда в выражении (1.12) можно пренебречь всеми членами выше второго порядка малости. В результате приближенное выражение для потенциальной энергии консервативной системы примет вид:

$$\Pi(q_1, q_2, ..., q_S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} c_{ij}q_iq_j . \tag{1.13}$$

Выражение (1.13) показывает, что потенциальная энергия является *однородной квадратичной формой обобщенных координат* с точностью до величин второго порядка малости включительно. Такое представление потенциальной энергии значительно упрощает решение многих технических задач, а с другой стороны, обеспечивает точность, достаточную для практических целей.

1.3 Теорема Лагранжа – Дирихле. Критерий Сильвестра

Критерий, дающий простое достаточное условие устойчивости равновесия механической системы материальных точек, был впервые указан Ж.Л.Лагранжем (1788 г.). Приведенное им недостаточно строгое доказательство уточнил П.Г.Л. Дирихле (1846 г.), в связи с чем оно и получило название ***теоремы Лагранжа – Дирихле.***

Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Поясним понятие строгого минимума. Функция нескольких переменных $V(q_1, q_2, ..., q_n)$ имеет минимум при значениях аргументов $q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*$ в том случае, если при $\left|q_i - q_i^*\right| < \varepsilon \ (i = 1,2,...,n)$, где $\varepsilon > 0$ - малая величина, имеет место неравенство

$$V(q_1,q_2,...,q_n) \geq V(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*). \tag{1.14}$$

Если при тех же условиях выполняется строгое неравенство

$$V(q_1,q_2,...,q_n) > V(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*), \tag{1.15}$$

то говорят о *строгом*, или *изолированном*, минимуме.

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле для доказательства устойчивости равновесия консервативной системы достаточно убедиться, что потенциальная энергия имеет в рассматриваемом положении минимум.

Для системы с одной степенью свободы определение минимума выполняется достаточно просто. В этом случае производная второго порядка от потенциальной энергии по обобщенной координате, вычисленная в положении равновесия, должна быть положительна (предполагается, что она существует).

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0. \tag{1.16}$$

Для консервативной системы, имеющей *S* степеней свободы, устойчивость рассматриваемого положения равновесия также определяется из условия минимума потенциальной энергии. Но в этом случае решение вопроса о существовании минимума потенциальной энергии существенно усложняется.

Ранее условлено, что в положении равновесия потенциальная энергия системы $\Pi_0 = 0$. Тогда наличие минимума потенциальной энергии должно одновременно означать, что вблизи положения равновесия потенциальная энергия системы должна быть положительной. Следовательно, на основании теоремы Лагранжа-Дирихле потенциальная энергия системы (1.13) должна представлять собой *определенно положительную* квадратичную форму обобщенных координат.

Квадратичная форма называется определенно положительной, если она положительна при всех значениях аргументов, одновременно не равных нулю.

Вопрос о знаке любой квадратичной формы устанавливается ***теоремой Сильвестра***, доказательство которой приводится в курсе линейной алгебры.

Для того чтобы квадратичная форма была определенно положительной необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы были положительны .

Матрица квадратичной формы (1.13) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \ldots\ldots c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \ldots\ldots c_{2S} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \ldots\ldots c_{3S} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ c_{S1} & c_{S2} & c_{S3} \ldots\ldots c_{SS} \end{Vmatrix} \tag{1.17}$$

Отметим, что эта матрица симметричная. Главные диагональные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = c_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \ldots c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \ldots c_{2S} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \ldots c_{3S} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{S1} & c_{S2} & c_{S3} \ldots c_{SS} \end{vmatrix}.$$

(1.18)

Таким образом, критерий определенной положительности квадратичной формы имеет вид

$$\Delta_1 > 0;\ \Delta_2 > 0;\ \ldots,\ \Delta_S > 0. \tag{1.19}$$

Заметим особо, что дискриминант определенно положительной формы не равен нулю.

Следовательно, чтобы установить наличие минимума потенциальной энергии, нужно:

– разложить потенциальную энергию в ряд по степеням обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_S$, ограничиваясь членами второго порядка малости;
– определить обобщенные коэффициенты жесткости (1.10);

– составить определители $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_S$. Если условие (1.19) выполняется, то положение равновесия устойчиво.

Теорема Лагранжа-Дирихле дает критерий, позволяющий утверждать, что равновесное положение консервативной системы устойчиво, если ее потенциальная энергия имеет минимум. Однако по этой теореме нельзя определить, каково равновесие системы, если ее потенциальная энергия в положении равновесия не имеет минимума.

Ответ на этот важный вопрос для весьма обширного класса задач содержится в теоремах А.М. Ляпунова:

Теорема 1. ***Равновесие системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии узнается по членам второго порядка малости в разложении потенциальной энергии без необходимости рассмотрения членов высшего порядка.***

Теорема 2. ***Равновесие системы неустойчиво, если потенциальная энергия имеет максимум и наличие этого максимума может быть установлено из рассмотрения членов наименее высокого порядка малости в разложении потенциальной энергии.***

Последнюю теорему применяют в том случае, если невозможно определить наличие или отсутствие минимума по членам второго порядка малости, например в случае, когда эти члены в разложении потенциальной энергии просто отсутствуют (равны нулю).

1.4 Задачи и методы исследования устойчивости равновесия

В теории статической устойчивости сооружений рассматриваются принципы и методы определения статических нагрузок, при которых система переходит из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое.

Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое называют *потерей устойчивости*, границу этого перехода называют *критическим состоянием* сооружения, а соответствующая нагрузка, приводящая к этому переходу, носит название *критической нагрузки* или *критической силы*. Если внешняя нагрузка не достигает этого значения, то система находится в состоянии устойчивого равновесия, а если нагрузка превзошла это значение, то наряду с первоначальным может существовать и иное положение равновесия системы.

В системе с S степенями свободы теоретически возможно существование S положений равновесия, а значит и S значений критической нагрузки, но из них практическое значение имеет лишь одна, низшая, так как при расчете сооружения нужно знать наименьшую опасную нагрузку. Следовательно, расчетным считается меньшее значение критической силы, а соответствующая ей форма потери устойчивости будет определять предельное состояние системы.

Существует три основных классических метода для определения критических нагрузок.

Статический метод (или метод равновесия) основан на рассмотрении условий равновесия системы в деформированном (отклоненном от равновесного) состоянии, допускаемом наложенными на систему связями. Обычно считают, что отклоненное положение системы бесконечно близко к исходному. Определенные на основе таких предпосылок нагрузки считаются критическими. Они соответствуют безразличному равновесию между исследуемым состоянием и близким к нему.

Энергетический метод основан на анализе приращения потенциальной энергии системы при переходе от равновесного состояния в отклоненное, примерно совпадающее по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесия после потери устойчивости системы.

Одна из разновидностей этого метода базируется на принципе Лагранжа - Дирихле, который в случае систем с S степенями свободы приводит к условиям (1.19). Другая разновидность основана на принципе возможных перемещений применительно к деформированному (отклоненному от равновесного) состоянию системы. В этом случае для системы с S степенями свободы составляется S уравнений возможных работ на бесконечно малых перемещениях, соответствующих приращениям обобщенных координат, определяющих положение системы.

Динамический метод является наиболее универсальным. Он связан с математической задачей об устойчивости движения. В основе метода лежит рассмотрение свободных колебаний системы. Решение сводится к определению нагрузок, при которых частота собственных колебаний системы равна нулю и любое внешнее возбуждение приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний. Для составления уравнений свободных колебаний, как правило, используются уравнения Лагранжа II рода.

Следует заметить, что во всех трех методах задача устойчивости формулируется по-разному.

Так, в первом методе определяется нагрузка, при которой могут существовать равновесные положения, отличные от исходных.

Во втором методе определяются нагрузки, при которых потенциальная энергия системы перестает быть положительно определенной, т.е. такие нагрузки, при действии которых в случае малейшего отклонения системы от первоначального состояния выражение для потенциальной энергии содержит отрицательные коэффициенты.

В третьем методе определяются нагрузки, при которых амплитуда свободных колебаний становится неограниченно большой.

Так как эти три задачи существенно отличаются друг от друга, то и значения критических сил в общем случае получаются различными. Однако для консервативных систем все три метода приводят, как правило, к совпадающим результатам.

2 Вопросы для самоконтроля

1. Какое состояние называется положением равновесия механической системы?
2. Каким может быть положение равновесия механической системы?
3. Как формулируются условия равновесия механической системы в обобщенных координатах?
4. Можно ли по уравнениям равновесиям определить вид этого равновесия?
5. Какую механическую систему называют консервативной?
6. С какой степенью точности определяют потенциальную энергию системы при решении задач устойчивости?
7. Функция какого вида называется однородной квадратичной формой?
8. При выполнении какого условия квадратичная форма называется определенно положительной?
9. Как формулируется критерий определенной положительности квадратичной формы?
10. Как вычисляются обобщенные коэффициенты жесткости?
11. От каких параметров зависят обобщенные коэффициенты жесткости?
12. Как формулируются энергетические критерии устойчивости консервативной системы с одной степенью свободы? с двумя степенями свободы? с несколькими степенями свободы?
13. Является ли условие минимума потенциальной энергии необходимым условием устойчивости равновесия системы?
14. Можно ли утверждать, что в случае отсутствия минимума потенциальной энергии в положении равновесия, это положение равновесия неустойчиво? Как установить вид равновесия механической системы в этом случае?
15. Как установить вид равновесия механической системы с одной степенью свободы, если $\left.\left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)\right|_{q=q_0} = 0$?
16. Каков порядок исследования состояния равновесия механической системы на устойчивость?
17. Какая нагрузка носит название критической?
18. Какие методы определения критических нагрузок существуют?
19. Какое из полученных значений критической силы принимают в качестве расчетного?
20. Какая форма потери устойчивости определяет предельное состояние системы?

3 Контрольное задание. Исследование устойчивости положения равновесия консервативной механической системы

Для системы, состоящей из абсолютно жестких шарнирно соединенных между собой стержней и наделенной в узлах упругими связями, найти условия, при которых заданное исходное положение является равновесным. Определить значение критической силы и соответствующую форму потери устойчивости стержневой системы.

Схемы рам представлены на рисунках 3 – 6. Исходные данные к задаче приведены в таблице 1. При решении задачи собственным весом стержней пренебречь.

Таблица 1 – Исходные данные

№ варианта	Геометрические размеры, м				Коэффициенты жесткости			
					упругих стержней, кН/см		упругих шарниров, кН·м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	c_1	c_2	k_1	k_2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	5	3	2	-	-	-	$8\cdot10^2$	$1\cdot10^3$
2	2	3	3	2	-	-	$6\cdot10^2$	$8\cdot10^2$
3	3	2	1	1	5	-	$1\cdot10^3$	$1,2\cdot10^3$
4	2	2	3	2	-	-	$1\cdot10^3$	$1,2\cdot10^3$
5	2	3	5	-	12	-	$8\cdot10^2$	-
6	3	2	3	4	-	-	$6\cdot10^2$	$1\cdot10^3$
7	3	2	4	4	-	-	$1\cdot10^3$	$1,5\cdot10^3$
8	6	2	2	-	-	-	$1\cdot10^3$	$1,4\cdot10^3$
9	4	2	2	5	8	-	$1\cdot10^3$	$1,2\cdot10^3$
10	4	4	5	-	-	-	$1,6\cdot10^3$	$1,4\cdot10^3$
11	2	3	4	5	6	10	$1,5\cdot10^3$	-
12	2	5	3	2	-	-	$1,2\cdot10^3$	$1,4\cdot10^3$
13	3	3	4	-	-	-	$1\cdot10^3$	$1,5\cdot10^3$
14	3	2	3	5	12	-	$8\cdot10^2$	-
15	2	3	3	4	-	-	$1,4\cdot10^3$	$1\cdot10^3$

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
16	4	2	6	5	-	-	$1{,}5\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^3$
17	2	3	3	5	15	-	$1\cdot10^3$	-
18	2	2	3	2	14	-	$8\cdot10^2$	-
19	4	2	2	1	10	12	$8\cdot10^2$	-
20	2	5	3	3	-	-	$1{,}5\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^3$
21	2	3	4	3	-	-	$1{,}4\cdot10^3$	$1\cdot10^3$
22	2	3	1	-	-	-	$1{,}5\cdot10^3$	-
23	2	3	3	2	16	14	$8\cdot10^2$	-
24	2	2	1	3	14	12	$1\cdot10^3$	-
25	2	3	3	2	16	18	$1{,}2\cdot10^3$	-
26	3	3	3	2	10	14	$1{,}5\cdot10^3$	-
27	2	3	3	4	14	16	$1{,}2\cdot10^3$	-
28	2	6	4	2	-	-	$1{,}8\cdot10^3$	$1{,}4\cdot10^3$
29	3	3	5	4	18	-	$1{,}2\cdot10^3$	$1\cdot10^3$
30	2	3	6	4	-	-	$1{,}6\cdot10^3$	$1{,}8\cdot10^3$
31	4	2	2	2	15	-	$1{,}4\cdot10^3$	$1{,}6\cdot10^3$
32	3	3	4	5	-	-	$1{,}2\cdot10^3$	$1{,}8\cdot10^3$

Примечание – Коэффициентом жесткости упругого шарнира называется реактивный момент, возникающий в шарнире при взаимном повороте элементов, соединенных в шарнире, на угол, равный единице. Условное обозначение упругих шарниров на рисунках 3 – 6 принято по /1/.

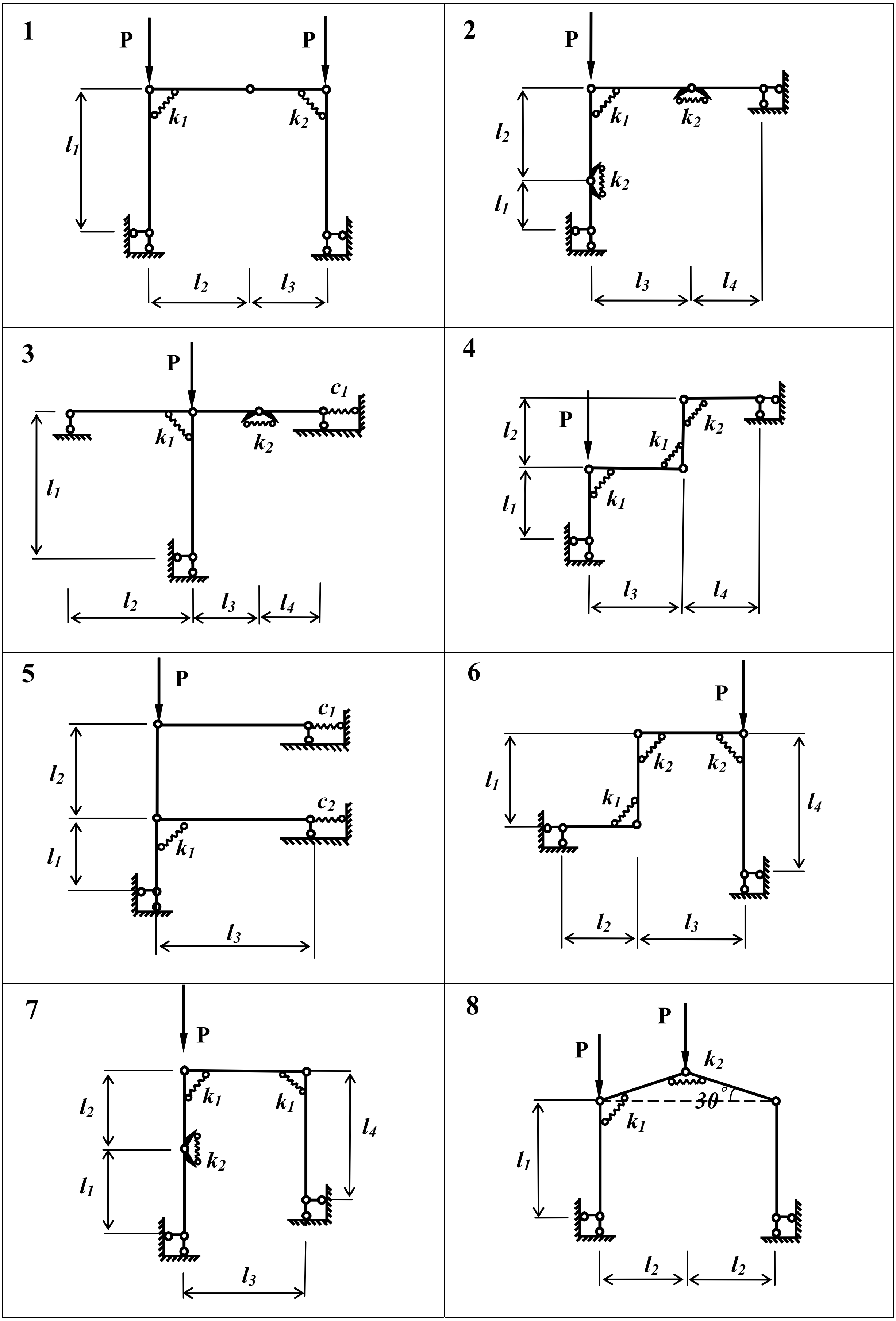


Рисунок 3 – Схемы рам

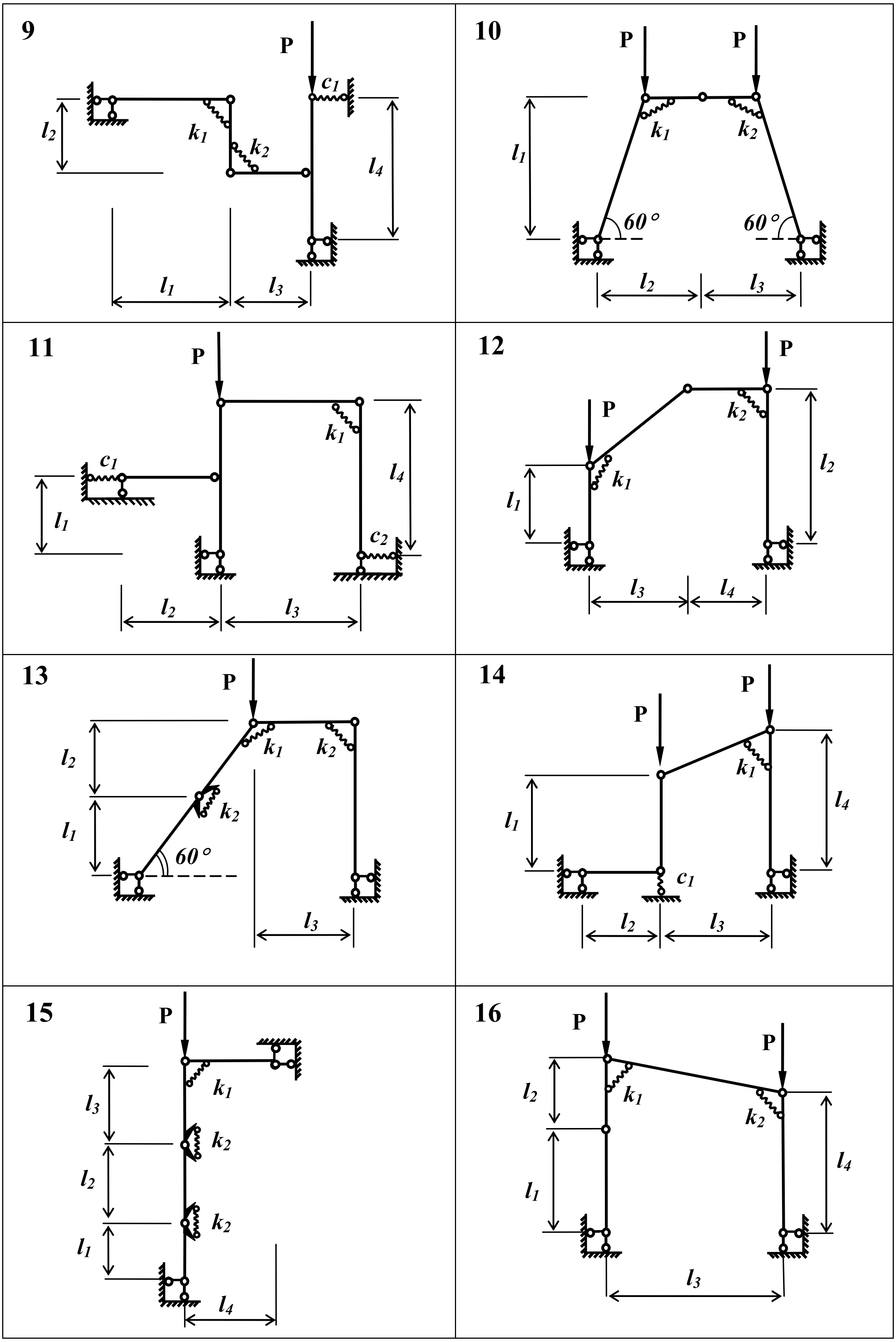


Рисунок 4 – Схемы рам

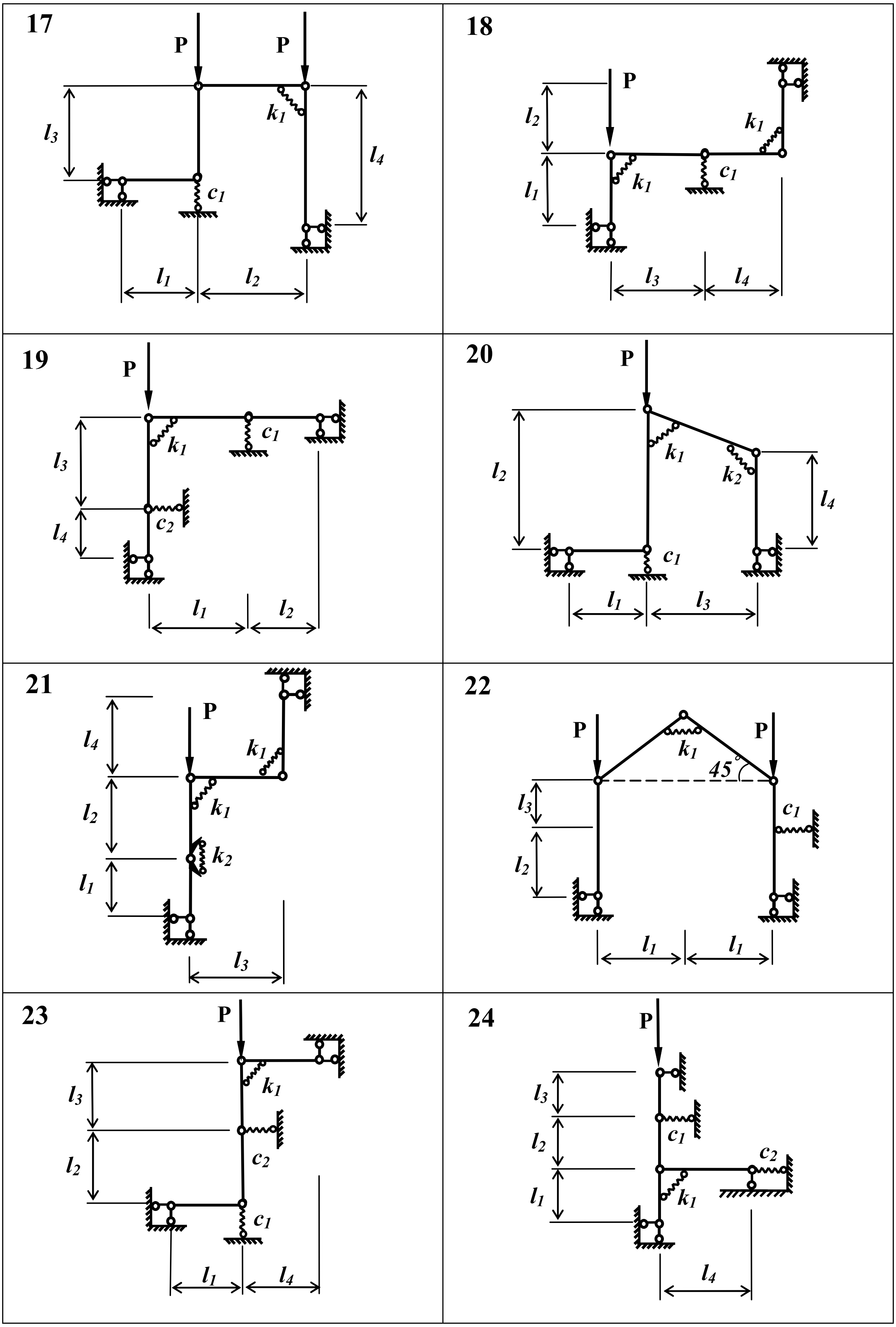


Рисунок 5 – Схемы рам

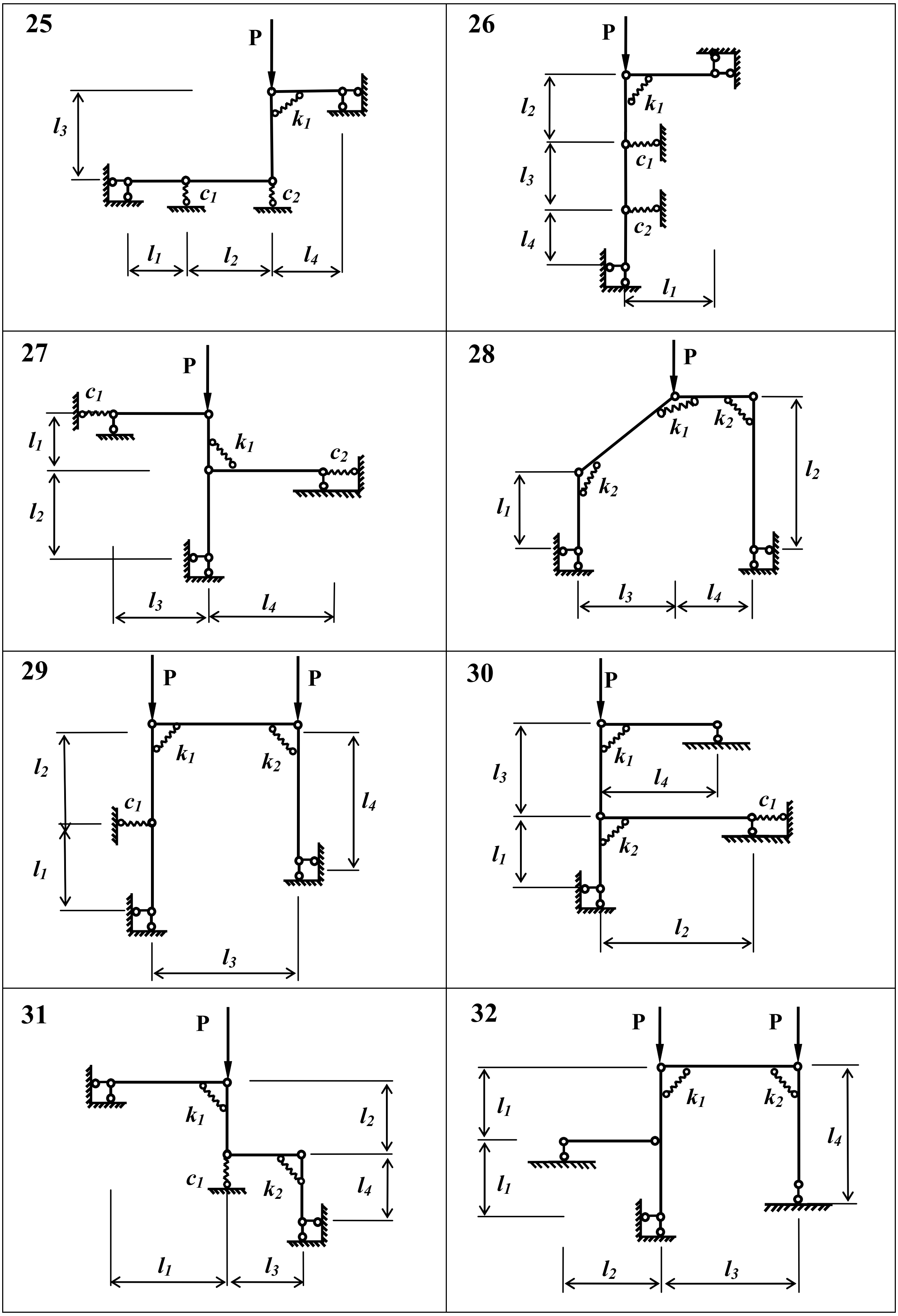


Рисунок 6 – Схемы рам

4 Рекомендации к выполнению задания

4.1 Рекомендуемый алгоритм выполнения задания

1. Определить число степеней свободы рассматриваемой механической системы.
2. Выбрать обобщенные координаты.
3. Изобразить предполагаемую форму малого отклонения системы от исходного положения равновесия. Составить выражение для потенциальной энергии рассматриваемой консервативной системы как функции выбранных обобщенных координат.
4. Найти обобщенные силы системы и, приравняв их к нулю, найти условия, при которых заданное исходное положение системы является равновесным.
5. Записать условия устойчивости исследуемого равновесного положения системы и вычислить значение критической силы.
6. Подставив полученное значение критической силы в уравнения равновесия системы, найти соответствующую форму потери устойчивости.

4.2 Пояснения к алгоритму выполнения задания

1. Число степеней свободы W рассматриваемой стержневой системы рекомендуется находить по формуле П.Л.Чебышева:

$$W = 3Д - 2Ш - C_{оп}; \tag{4.1}$$

где $Д$ – число жестких дисков (звеньев), входящих в систему;
$Ш$ – число простых шарниров;
$C_{оп}$ – число абсолютно твердых (жестких) опорных стержней.

Под жесткими дисками понимают простейшие неизменяемые элементы системы. Например, в рассматриваемом случае жесткими дисками могут считаться абсолютно твердые стержни, составляющие данную раму.

Простым называется шарнир, соединяющий только два диска (стержня). Сложный шарнир образуется при соединении в одном узле трех и более дисков (стержней). Если в одном узле соединяется n жестких дисков (стержней), то полученный сложный шарнир эквивалентен $(n - 1)$ простым шарнирам.

$$Ш = n - 1. \tag{4.2}$$

2. Так как рассматриваемая стержневая система представляет собой механическую систему с голономными стационарными связями, то число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Отсчет обобщенных координат рекомендуется производить от заданного исходного положения равновесия. Тогда в положении равновесия все обобщенные координаты будут равными нулю.

3. Потенциальную энергию системы рекомендуется находить как работу консервативных сил системы на перемещении системы из произвольного отклоненного положения в положение нулевого уровня, за которое следует принять заданное исходное. Поскольку перемещения предполагаются малыми, то в разложении потенциальной энергии в окрестности исследуемого положения равновесия следует ограничиться членами второго порядка малости.

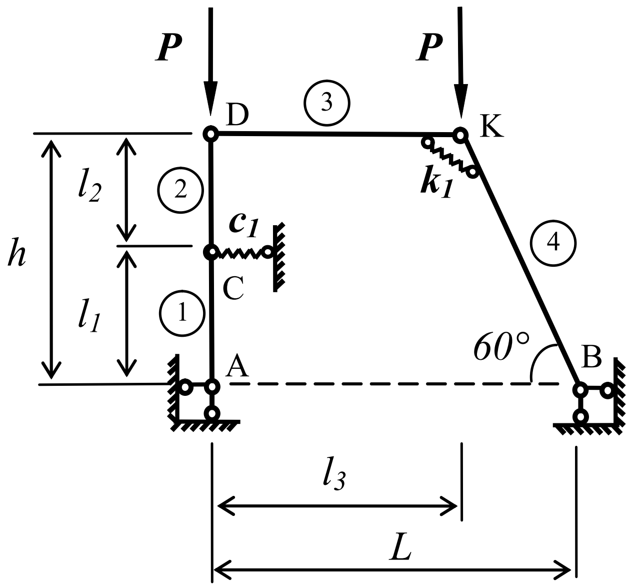
4. Обобщенные силы системы следует вычислять по формулам (1.7) как частные производные от потенциальной энергии системы по выбранным обобщенным координатам. Условия, при которых заданное положение будет равновесным, получают по формулам (1.8).

После определения условий равновесия заданного положения системы, следует привести полученное ранее выражение для потенциальной энергии к виду (1.13) и вычислить обобщенные коэффициенты жесткости по формуле (1.10).

5. Условия устойчивости исследуемого положения равновесия записывают с помощью критерия Сильвестра (1.19). Решение полученных неравенств можно проводить двумя способами: вручную или с помощью ЭВМ.

6. После подстановки найденных значений критических сил в уравнения равновесия (1.8), эти уравнения будут линейно зависимыми. Поэтому для определения формы потери устойчивости можно использовать любое из полученных уравнений.

5 Пример выполнения задания



Дано:

$l_1 = 3м;\ l_2 = 2м;\ l_3 = 5м;$

$c_1 = 5кН/см = 5 \cdot 10^5\ Н/м;$

$k_1 = 8 \cdot 10^2\ кН \cdot м = 8 \cdot 10^5\ Н \cdot м.$

Определить:

1) значение критической силы для заданной формы равновесия рамы (рисунок 7);

2) форму потери устойчивости, соответствующую найденному значению критической силы.

Рисунок 7 – Исходная схема.

Решение.

1. Число степеней свободы плоской стержневой системы.

Определяем по формуле (4.1) число степеней свободы заданной плоской стержневой системы.

Для рассматриваемой схемы:

- число жестких дисков $Д = 4$;
- число простых шарниров $Ш = 3$;
- число абсолютно твердых (жестких) опорных стержней $C_{оп} = 4$.

Тогда,

$$W = 3Д - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 4 = 2. \qquad (5.1)$$

следовательно, система имеет две степени свободы.

2. Выбор обобщенных координат.

За обобщенные координаты примем углы отклонения стержней 1 и 4 от положения равновесия $q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_4$.

Тогда в положении равновесия, изображенном на рисунке 7, обобщенные координаты равны нулю $q_1 = 0$; $q_2 = 0$.

Дадим обобщенным координатам малые отклонения, считая $q_1 > 0$; $q_2 > 0$, и изобразим систему в состоянии, отклоненном от положения равновесия (рисунок 8).

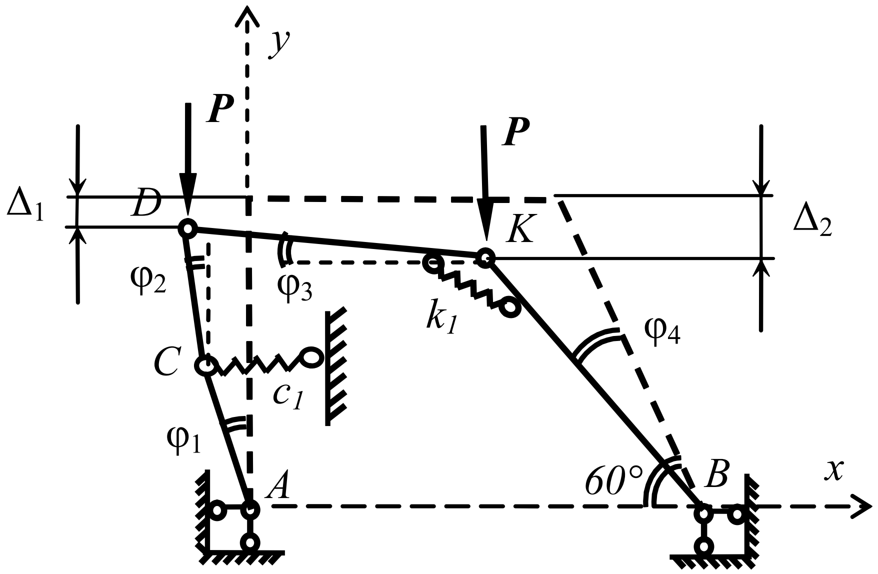


Рисунок 8 – Предполагаемая форма отклонения системы
от исходного положения равновесия

Введем в рассмотрение вспомогательные углы φ_2, φ_3, характеризующие отклонение стержней 2 и 3 от первоначального положения. Так как система имеет две степени свободы, то углы поворота стержней 2 и 3 будут функциями выбранных обобщенных координат $\varphi_2 = f(\varphi_1, \varphi_4)$, $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_4)$.

Для получения зависимостей между углами отклонения стержней от начального равновесного положения, воспользуемся векторным равенством:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB}; \tag{5.2}$$

где

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = l_1;\quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = l_2;\quad \left|\overrightarrow{DK}\right| = l_3;\quad \left|\overrightarrow{KB}\right| = l_4 = \frac{h}{\sin 60^o};$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = L = l_3 + h \cdot ctg 60^\circ;\qquad h = l_1 + l_2. \tag{5.3}$$

Спроецировав (5.2) на оси координат Axy, получим

$$\begin{cases} -l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \cos\varphi_3 + l_4 \cos(60^\circ - \varphi_4) = L; \\ l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 \sin\varphi_3 - l_4 \sin(60^\circ - \varphi_4) = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Для решения системы уравнений (5.4) воспользуемся формулами разложения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} &\cos\varphi = 1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+...;\\ &\sin\varphi = \varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+... \end{aligned} \tag{5.5}$$

Так как в задаче рассматриваются малые отклонения системы от положения равновесия, то потенциальная энергия стержневой системы в соответствии с (1.13) вычисляется в задаче с точностью до величин второго порядка малости, поэтому в формулах (5.5) ограничимся величинами до второго порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} &\cos\varphi \approx 1-\frac{\varphi^2}{2};\\ &\sin\varphi \approx \varphi. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Применяя также известные из тригонометрии формулы:

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta;\\ &\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

получим,

$$\begin{aligned} &\cos(60^\circ-\varphi_4) = \cos60^\circ\cdot\cos\varphi_4 + \sin60^\circ\cdot\sin\varphi_4;\\ &\sin(60^\circ-\varphi_4) = \sin60^\circ\cdot\cos\varphi_4 - \cos60^\circ\cdot\sin\varphi_4. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Уравнения (5.4) после преобразований с учетом (5.3), (5.6) и (5.8) примут вид:

$$\begin{cases} l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \dfrac{l_3}{2}\varphi_3^2 - h\varphi_4 + \dfrac{h\cdot ctg60^\circ}{2}\varphi_4^2 = 0;\\ \dfrac{l_1}{2}\varphi_1^2 + \dfrac{l_2}{2}\varphi_2^2 + l_3\varphi_3 - h\cdot ctg60^\circ\cdot\varphi_4 - \dfrac{h}{2}\varphi_4^2 = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Представим (5.9) в виде:

$$\begin{cases} \varphi_2 = -\dfrac{l_1}{l_2}\varphi_1 - \dfrac{l_3}{2l_2}\varphi_3^2 + \dfrac{h}{l_2}\varphi_4 - \dfrac{h\cdot ctg60^\circ}{2l_2}\varphi_4^2; \\ \varphi_3 = -\dfrac{l_1}{2l_3}\varphi_1^2 - \dfrac{l_2}{2l_3}\varphi_2^2 + \dfrac{h\cdot ctg60^\circ}{l_3}\varphi_4 + \dfrac{h}{2l_3}\varphi_4^2. \end{cases} \tag{5.10}$$

Так как углы φ_1; φ_4 приняты за величины первого порядка малости, то и выражения (5.10) представим в виде:

$$\begin{cases} \varphi_2 = -\dfrac{l_1}{l_2}\varphi_1 + \dfrac{h}{l_2}\varphi_4 + \lambda^2; \\ \varphi_3 = \dfrac{h\cdot ctg60^\circ}{l_3}\varphi_4 + \eta^2; \end{cases} \tag{5.11}$$

где через λ^2 и η^2 обозначены величины второго порядка малости.

3. Определение потенциальной энергии стержневой системы.

Потенциальная энергия системы будет складываться из потенциальной энергии сил P и потенциальной энергии деформации упругих связей:

$$\Pi = \Pi_P + \Pi_{упр.св.}. \tag{5.12}$$

Определим входящие в (5.12) слагаемые как работу соответствующих консервативных сил при перемещении системы из отклоненного положения в равновесное (нулевое).

а) Потенциальная энергия сил P.

$$\Pi_P = -P\cdot\Delta_1 - P\cdot\Delta_2 = -P(\Delta_1 + \Delta_2). \tag{5.13}$$

Определим вертикальное перемещение узла D с учетом (5.6) и (5.11):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= l_1(1-\cos\varphi_1) + l_2(1-\cos\varphi_2) = \frac{l_1}{2}\varphi_1^2 + \frac{l_2}{2}\varphi_2^2 = \frac{l_1}{2}\varphi_1^2 + \\ &+ \frac{l_2}{2}\Big(-\frac{l_1}{l_2}\varphi_1 + \frac{h}{l_2}\varphi_4 + \lambda^2\Big)^2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Анализируя (5.14), приходим к выводу, что величина λ^2 будет содержаться в выражении для потенциальной энергии (5.13) в слагаемых выше второго порядка малости, следовательно, величиной λ^2 можно пренебречь.

Тогда,

$$\varDelta_1 = \frac{l_1}{2}\varphi_1^2 + \frac{l_2}{2}\left(-\frac{l_1}{l_2}\varphi_1 + \frac{h}{l_2}\varphi_4\right)^2 = \frac{hl_1}{2l_2}\varphi_1^2 - \frac{hl_1}{l_2}\varphi_1\varphi_4 + \frac{h^2}{2l_2}\varphi_4^2. \qquad (5.15)$$

Вертикальное перемещение узла К:

$$\varDelta_2 = l_4 \sin 60^\circ - l_4 \sin(60^\circ - \varphi_4) = \frac{h}{2}\varphi_4^2 + \left(h \cdot ctg 60^\circ\right)\varphi_4. \qquad (5.16)$$

Выражение для потенциальной энергии Π_P (5.13) с учетом (5.15) и (5.16) примет вид:

$$\Pi_P = -P\left[\frac{hl_1}{2l_2}\varphi_1^2 - \frac{hl_1}{l_2}\varphi_1\varphi_4 + \frac{h}{2}\left(\frac{h}{l_2} + 1\right)\varphi_4^2 + \left(h \cdot ctg 60^\circ\right)\varphi_4\right]. \qquad (5.17)$$

б) Потенциальная энергия деформации упругих связей:

$$\Pi_{упр.св.} = \frac{k_1}{2}\left[\left(\theta_K + \phi_{cm,K}\right)^2 - \phi_{cm,K}^2\right] + \frac{c_1}{2}\left[\left(\lambda_C + f_{cm,C}\right)^2 - f_{cm,C}^2\right] =$$

$$= \frac{k_1}{2}\left[\theta_K^2 + 2\theta_K \cdot \phi_{cm,K}\right] + \frac{c_1}{2}\left[\lambda_C^2 + 2\lambda_C \cdot f_{cm,C}\right]; \qquad (5.18)$$

где $\phi_{cm,K}$ - взаимный угол поворота сечений в шарнире К (равный изменению угла между стержнями, сходящимися в узле К) в результате статической деформации в положении равновесия;

θ_K - взаимный угол поворота сечений в шарнире К в результате отклонения системы от положения равновесия;

$f_{cm,C}$ - статическая деформация упругой связи в узле С в положении равновесия;

λ_C - деформация упругой связи в узле С в результате отклонения системы от положения равновесия.

Как видно из рисунка 8, взаимный угол поворота сечений в шарнире К в результате отклонения системы от положения равновесия:

$$\theta_K = \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{h \cdot ctg 60^\circ + l_3}{l_3}\varphi_4 + \eta^2 = \frac{L}{l_3}\varphi_4 + \eta^2. \qquad (5.19)$$

Пренебрегая в связи с малостью рассматриваемых перемещений отклонением упругой связи в узле С от горизонтали и учитывая (5.6), имеем:

$$\lambda_C = l_1 \sin\varphi_1 = l_1\varphi_1. \tag{5.20}$$

Анализ (5.18) показывает, что в выражении для потенциальной энергии $\Pi_{упр.св.}$ величина η^2 будет содержаться в слагаемых выше второго порядка малости и, следовательно, ее можно отбросить.

Тогда,

$$\begin{gathered} \theta_K = \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{L}{l_3}\varphi_4; \\ \lambda_C = l_1\varphi_1. \end{gathered} \tag{5.21}$$

Подстановка (5.21) в выражение для потенциальной энергии упругих связей (5.18) дает:

$$\Pi_{упр.св.} = \frac{k_1}{2}\left[\left(\frac{L}{l_3}\varphi_4\right)^2 + \frac{2L}{l_3}\varphi_4 \cdot \phi_{ст,K}\right] + \frac{c_1}{2}\Big[(l_1\varphi_1)^2 + 2l_1\varphi_1 \cdot f_{ст,C}\Big]. \tag{5.22}$$

Выражение для потенциальной энергии системы (5.12) с учетом (5.17) и (5.22) примет вид:

$$\begin{gathered} \Pi = -P\left[\frac{hl_1}{2l_2}\varphi_1^2 - \frac{hl_1}{l_2}\varphi_1\varphi_4 + \frac{h}{2}\left(\frac{h}{l_2}+1\right)\varphi_4^2 + \left(h \cdot ctg60^\circ\right)\varphi_4\right] + \\ + \frac{k_1}{2}\left[\left(\frac{L}{l_3}\varphi_4\right)^2 + \frac{2L}{l_3}\varphi_4 \cdot \phi_{ст,K}\right] + \frac{c_1}{2}\Big[(l_1\varphi_1)^2 + 2l_1\varphi_1 \cdot f_{ст,C}\Big]. \end{gathered} \tag{5.23}$$

4. Условия равновесия заданного положения системы:

В положении равновесия обобщенные силы системы равны нулю:

$$\begin{gathered} Q_1 = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_4=0}} = 0; \\ Q_2 = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_4=0}} = 0. \end{gathered} \tag{5.24}$$

С учетом полученного выражения для потенциальной энергии (5.23), имеем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_4=0}} = c_1 l_1 f_{cm,C} = 0; \\ \\ \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4}\right)_{\substack{\varphi_1=0\\ \varphi_4=0}} = -Ph\cdot ctg60^{\circ} + \dfrac{k_1 L}{l_3}\phi_{cm,K} = 0. \end{cases} \tag{5.25}$$

Отсюда,

$$\begin{cases} f_{cm,C} = 0; \\ \phi_{cm,K} = \dfrac{hl_3}{k_1 L}Pctg60^{\circ}. \end{cases} \tag{5.26}$$

После подстановки (5.26) в (5.23) выражение для потенциальной энергии исследуемой системы с учетом условий равновесия примет вид:

$$\Pi = \frac{l_1}{2}\left(c_1 l_1 - P\frac{h}{l_2}\right)\varphi_1^2 + Ph\frac{l_1}{l_2}\varphi_1\varphi_4 + \frac{1}{2}\left(\frac{k_1 L^2}{l_3^2} - Ph\left(\frac{h}{l_2}+1\right)\right)\varphi_4^2. \tag{5.27}$$

Приведем полученное выражение к виду (1.13):

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1 q_2 + c_{22}q_2^2\right). \tag{5.28}$$

Обобщенные коэффициенты жесткости c_{ij}, входящие в (5.28), определим по формуле (1.10):

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = l_1\left(c_1 l_1 - P\frac{h}{l_2}\right);$$

$$c_{12} = c_{21} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = Ph\frac{l_1}{l_2}; \tag{5.29}$$

$$c_{22} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = \frac{k_1 L^2}{l_3^2} - Ph\left(\frac{h}{l_2}+1\right);$$

или с учетом исходных значений

$$c_{11} = 45 \cdot 10^5 - 7{,}5P(H \cdot м); \qquad c_{12} = c_{21} = 7{,}5P(H \cdot м);$$
$$c_{22} = 19{,}904 \cdot 10^5 - 17{,}5P(H \cdot м). \qquad (5.30)$$

5. Определение критических сил.

Для определения условий устойчивости равновесного положения рассматриваемой стержневой системы применим критерий Сильвестра (1.19), согласно которому должны выполняться соотношения:

$$c_{11} > 0; \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0. \qquad (5.31)$$

Отсюда, находим следующие условия устойчивости системы:

1) $$l_1\left(c_1 l_1 - P\frac{h}{l_2}\right) > 0. \qquad (5.32)$$

или

$$P < \frac{c_1 l_1 l_2}{h}; \qquad P < 6 \cdot 10^6\, H. \qquad (5.33)$$

2) $$c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2 > 0; \qquad (5.34)$$

или

$$\left(45 \cdot 10^5 - 7{,}5P\right)\left(19{,}904 \cdot 10^5 - 17{,}5P\right) - \left(7{,}5P\right)^2 > 0. \qquad (5.35)$$

Решая соответствующее квадратное уравнение и найдя его корни, приводим (5.35) к виду:

$$\left(P - 1{,}043 \cdot 10^5\right)\left(P - 11{,}447 \cdot 10^5\right) > 0. \qquad (5.36)$$

Решая совместно (5.33) и (5.36), получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} P < 6 \cdot 10^6\ H \\ P < 1{,}043 \cdot 10^5\ H \qquad \Rightarrow P < 1{,}043 \cdot 10^5\ H; \\ P < 11{,}447 \cdot 10^5\ H \end{cases} \\ \\ \begin{cases} P < 6 \cdot 10^6\ H \\ P > 1{,}043 \cdot 10^5\ H \qquad \Rightarrow \text{решения не имеет.} \\ P > 11{,}447 \cdot 10^5\ H \end{cases} \end{array}\right. \tag{5.37}$$

Следовательно, искомое значение критической силы, соответствующее заданной форме равновесия рамы:

$$P_{кр} = 1{,}043 \cdot 10^5\ H = 104{,}3\ кH. \tag{5.38}$$

6. Определение формы потери устойчивости.

Уравнения равновесия рассматриваемой консервативной системы в обобщенных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0; \\ Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4} = 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

С учетом выражения для потенциальной энергии (5.28) уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{cases} c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0; \\ c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0. \end{cases} \tag{5.40}$$

После подстановки найденного значения критической силы $P_{кр}$ в выражения для обобщенных коэффициентов жесткости (5.30) определитель системы (5.40) будет равен нулю, т.е. уравнения будут линейно зависимыми. Поэтому для нахождения формы потери устойчивости можно использовать любое из уравнений.

Представим первое из уравнений (5.40) в виде:

$$q_2 = -\frac{c_{11}}{c_{12}} q_1. \tag{5.41}$$

Подставляя значение критической силы (5.38), получим:

$$\varphi_4 = -\frac{45 \cdot 10^5 - 7,5P_{кр}}{7,5P_{кр}} \varphi_1 = -\frac{(45 - 7,5 \cdot 1,043) \cdot 10^5}{7,5 \cdot 1,043 \cdot 10^5} \varphi_1 = -4,75\varphi_1. \tag{5.42}$$

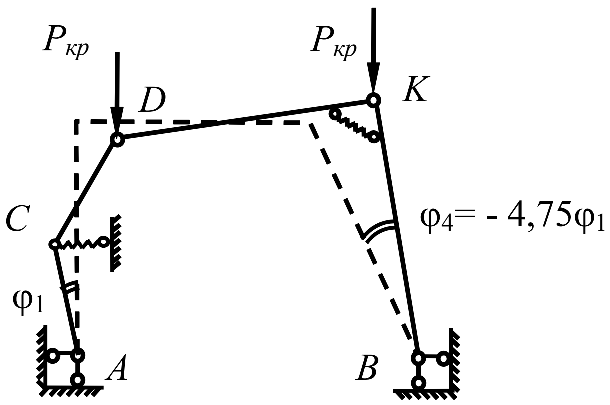


Рисунок 9 – Форма потери устойчивости

Форма потери устойчивости показана на рисунке 9.

Заметим, что при использовании второго из уравнений (5.40) будет получен тот же самый результат.

6 Рекомендации по использованию при выполнении задания системы Mathcad

При выполнении расчетно-графического задания по исследованию устойчивости равновесия системы с двумя степенями свободы приходится выполнять трудоемкие численные расчеты. Для проведения этих расчетов удобно воспользоваться популярной системой компьютерной математики Mathcad.

Mathcad прост в использовании и не требует изучения специальных языков программирования. Кроме того, Mathcad предоставляет пользователю уникальную возможность написания алгоритмов на естественном формульном языке. Большинство операторов и встроенных функций системы имеют вид привычных математических символов, которые можно набирать непосредственно с клавиатуры.

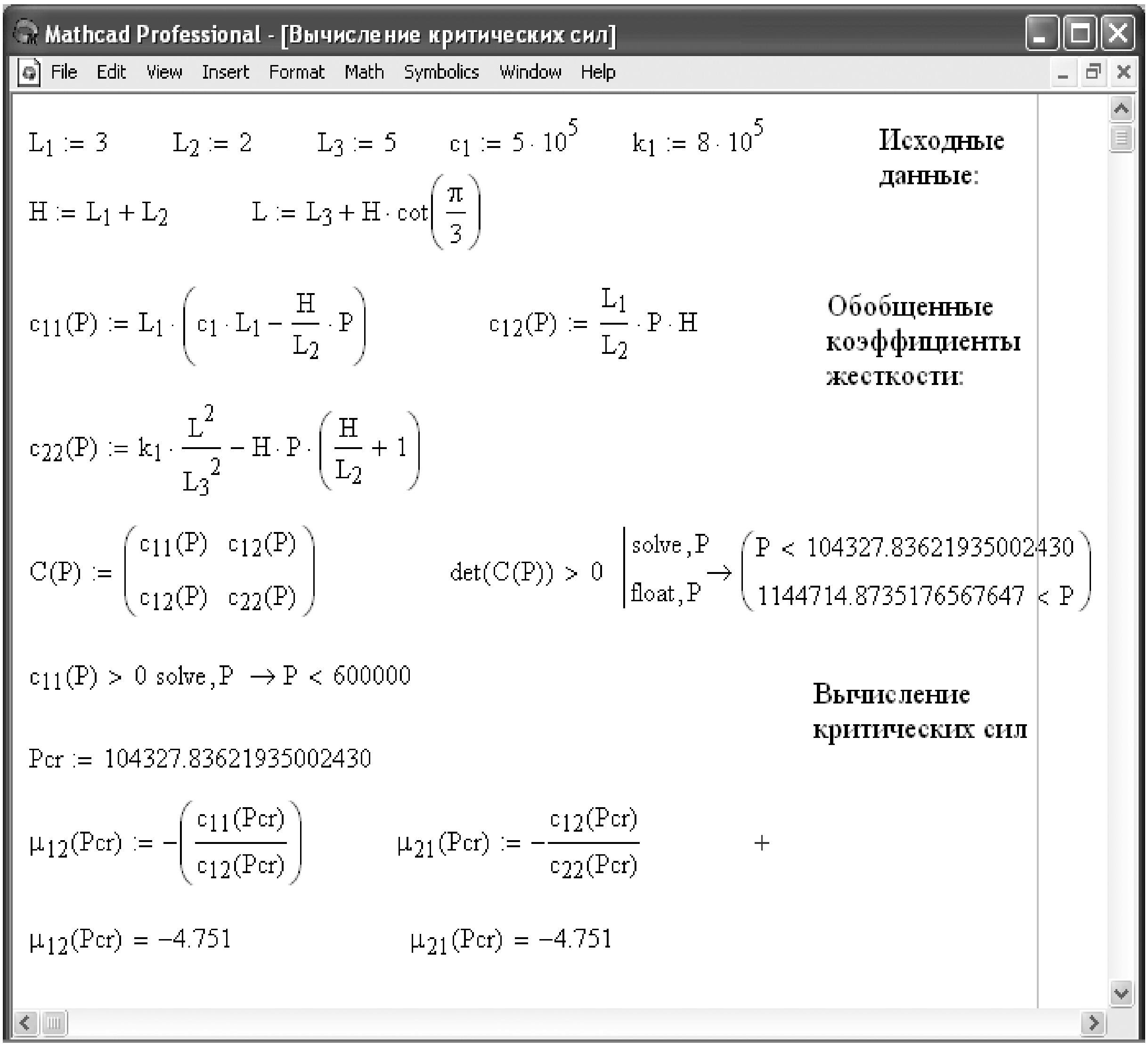


Рисунок 10 – Пример программы для вычисления критических сил

В настоящее время имеется обширная литература на русском языке по применению Mathcad для решения различных инженерных, математических и физических задач. Подробные инструкции по использованию системы содержатся, например, в /3/.

На рисунке 10 показан пример программы для вычисления критических сил. Для реализации численных расчетов можно использовать любую версию системы. В приведенном примере была использована версия Mathcad 2001 Professional. В правой части документа содержатся текстовые комментарии, поясняющие выполняемые операции.

В тексте программы использованы следующие встроенные функции и директивы:

– cot(β) – вычисляет котангенс угла;
– det(M) – вычисляет определитель матрицы M;
– solve, z – решение нелинейных уравнений и неравенств относительно указанной переменной z;
– float, z – вывод результата вычислений z в форме числа с плавающей точкой.

7 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах: учеб. пособие для строит. специальностей вузов / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебник для втузов. В 2 т. Т.II. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
3. Дьяконов, В. MATHCAD 8/2000: специальный справочник / В. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.
4. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов. В 3 т. Т.III. Специальные главы механики / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1973. – 488 с.
5. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний: учеб. пособие для студентов втузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – М.: Высшая школа, 1990. – 255 с.