МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
″Оренбургский государственный университет″

Кафедра общей физики

С.Н.ЛЕТУТА, А.А.ЧАКАК

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования ″Оренбургский государственный университет″.

Оренбург 2005

УДК 53 (07)
ББК 22.3я 7
Л 52

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Манаков

Летута С.Н.
Л 52 **Обработка результатов эксперимента: методические указания к лабораторным работам/ С.Н. Летута, А.А. Чакак. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. - 43 с.**

Методические указания предназначены для студентов естественнонаучных и технических специальностей, выполняющих лабораторные работы по курсу общей физики. В указаниях дается характеристика случайных, систематических, грубых погрешностей; объясняется методика оценки погрешностей при прямых и косвенных измерениях. Рассмотрены основные методы и положения, которыми следует руководствоваться при обработке и представлении экспериментальных данных, составлении таблиц, построении графиков. В методических указаниях объясняется нахождение параметров линейной зависимости по экспериментальным данным методом парных точек и методом наименьших квадратов. Указания в качестве справочного пособия могут оказаться полезными для студентов старших курсов при обработке любых экспериментальных результатов.

Методические указания рекомендованы к изданию кафедрой общей физики ОГУ. Составители – ЛЕТУТА С.Н., ЧАКАК А.А.

ББК 22.3я 7

Содержание

1 Введение

1.1 Измерение и измеряемые величины

Как наука, так и техника немыслимы без измерений. **Измерение** – это нахождение действительного значения физической величины путем сравнения измеряемой величины с другой, подобной ей, принятой за единицу измерения (или эталон) с помощью специальных технических средств. Принято различать прямые и косвенные измерения.

Простейшим видом измерения является *прямое измерение*, при котором искомое значение величины получают непосредственно с помощью измерительного прибора. К ним, например, относятся измерение длины линейкой, напряжения вольтметром, давления манометром, массы тела взвешиванием.

Когда прямые измерения невозможны, прибегают к *косвенным измерениям*, при которых искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и другими, непосредственно измеряемыми величинами. Например, плотность однородного тела находят по его массе и геометрическим размерам; электрическое сопротивление элемента цепи – по падению напряжения на нем и силе тока в цепи.

Измерения бывают *однократными* и *многократными*. Однократное измерение величины x дает единственный результат, который и принимается за *результат измерения* $x_{\text{изм}}$. Многократное измерение – повторение экспериментальной операции, в результате которой получается одно из значений x_i (i=1,2,…,n), называемых *результатами наблюдений*. Совокупность результатов наблюдений подлежит совместной обработке для получения результата измерения. При этом за результат измерения принимают *среднее арифметическое результатов наблюдений:*

$$x_{\text{изм}} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Иногда однократность измерения является вынужденной, если, например, измерения уникальны или дорогостоящи. В большинстве же случаев выбор между однократными и многократными измерениями делает экспериментатор, анализируя как качество средств измерения, так и особенности самой измеряемой величины.

При всем многообразии измеряемых величин их можно разделить на три типа.

1. Измеряемая величина является по своей природе *случайной величиной*. Результат отдельного наблюдения такой величины заранее не известен. Невозможно предсказать даже, будет этот результат больше или меньше предыдущего. Так, случайной величиной является скорость молекул газа, заполняющего некоторый объем. Радиоактивное ядро может распасться в любую секунду. Время жизни ядра до распада есть случайная величина. Практически всегда являются случайными характеристики однотипных изделий, выработанных по

определенной технологии (например, сопротивления в партии резисторов одного номинала; диаметры стальных шариков одного типоразмера, которые вырабатывает автомат и т.п.)

Хотя результаты отдельных наблюдений непредсказуемы, их совокупность при больших значениях n подчиняется так называемым *статистическим закономерностям*. Установление этих закономерностей и составляет цель экспериментального изучения случайных величин.

2. Измеряемая величина является по своей природе *постоянной* (т.е. неслучайной, а вполне определенной). К таким величинам относятся, например, фундаментальные физические постоянные: скорость света в вакууме, постоянная Планка, заряд и масса электрона и т.д. Мы можем считать, что имеем дело с постоянными величинами, когда измеряем физические свойства конкретного образца в конкретных условиях (например, его массу, плотность, электропроводность, теплоемкость и т.п.). Этот тип измеряемых величин чаще всего встречается в нашей физической лаборатории.

В процессе измерения величин этого типа возникают многочисленные неконтролируемые явления в окружающей среде, в измерительных приборах, приводящие к тому, что результаты отдельных наблюдений неодинаковы, случайны. Таким образом, в процессе измерения постоянная величина проявляется как случайная и для ее изучения приходится привлекать статистические методы.

Следует отметить, что случайный характер величин, как первого, так и второго типа может не проявиться в измерениях, если использованы слишком грубые, малочувствительные приборы. Так, если мы измерили внешний диаметр металлической трубки линейкой с делениями 1 мм и получили число 8 мм, то можем быть уверены, что повторение измерений не приведет к другим результатам. Если же взять штангенциркуль с ценой деления 0,05 мм или еще лучше – микрометр с ценой деления 0,01 мм, то легко убедимся, что результаты наблюдений будут отличаться друг от друга, составив, например, такую группу: 8,07; 7,96; 8,09; 8,10; 8,05. Несмотря на то, что в первом случае нами получено одно постоянное значение 8 мм, а во втором – пять различных, мы все же понимаем, что качество второй группы наблюдений выше – они точнее. В первом же случае прибор (линейка) слишком груб, различия в результатах наблюдений не улавливаются, и погрешность результата измерения целиком определяется погрешностью прибора (но не равна нулю, как иногда ошибочно трактуют эту ситуацию начинающие экспериментаторы).

3. Измеряемая величина закономерно меняется (*переменная*) с течением времени (например, растет температура нагреваемого образца; ″дрейфует″ частота синусоидального напряжения, вырабатываемого генератором). Так как каждое измерение требует определенного промежутка времени, то измерение становится принципиально неповторимым. Каждое следующее измерение относится уже к новым условиям; поэтому последовательность результатов x_1, x_2,… в данном случае не составляет группу наблюдений, а сами измерения нельзя назвать многократными.

Из изложенного выше можно заключить, что однократные измерения следует выполнять:

а) когда многократные измерения невозможны (например, измеряемая величина относится к третьему типу или измерения слишком сложны или дорогостоящи);

б) когда многократные измерения бесполезны (т.е. вследствие грубости, недостаточной чувствительности прибора повторные наблюдения дают одинаковые результаты).

В остальных случаях измерения должны быть многократными.

1.2 Типы погрешностей

Никакая задача измерения не может быть решена абсолютно точно. Иначе говоря, не может быть абсолютно точно найдено истинное значение измеряемой величины, то есть результат любого измерения содержит погрешности.

В учебной и методической литературе (а также в ГОСТе) погрешность измерения Δx определяется как отклонение результата измерения $x_{изм}$ от истинного значения $x_{ист}$ измеряемой величины:

$$\Delta x = x_{изм} - x_{ист},$$

где $x_{изм}$ – значение физической величины, измеренной в случае прямых измерений непосредственно с помощью прибора, или в случае косвенного измерения рассчитанного на основании известной зависимости между этой величиной и другими, непосредственно измеряемыми величинами.

Из такого определения ясна его полная бесполезность, ибо истинное значение физической величины принципиально получить невозможно. К тому же если истинное значение известно, зачем проводить измерения?

А между тем в задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но также и *оценка* допущенной при измерении погрешности, которая вносит некоторую неопределенность в результат измерения. Эта оценка должна быть сделана на основе всей информации, полученной при подготовке и проведении измерений (результаты поверки или паспортные данные о погрешностях приборов, контрольные опыты на эталонных образцах, записи результатов наблюдений, диаграммы и графики, зафиксированные самописцами и т.д.). Вся эта первоначальная информация в комплексе составляет так называемые *экспериментальные данные*, которые подлежат *обработке* для нахождения результата измерения и оценки допущенной погрешности.

Учитывая вышесказанное, *погрешностью* Δx будем называть количественную характеристику неопределенности результата измерения $x_{изм}$, оцененную экспериментатором на основе обработки собственных экспериментальных данных. Правила оценки погрешностей даются в главах 2 и 3. Погрешность измерения должна быть указана при окончательной записи результата измерения.

Погрешность Δx, выраженная в единицах измеряемой величины, называется *абсолютной погрешностью*. Абсолютная погрешность зачастую не отражает качество измерений. Так, например, если погрешность измерения длины составляет 0,5 см, то для измерения роста человека эта погрешность вполне приемлема, для измерения высоты здания – более чем удовлетворительна, а для измерения диаметра водопроводной трубы в ванной – недопустимо велика. Мы получим лучшее представление о качестве измерений, если составим отношение абсолютной погрешности к результату измерений. Это отношение называют *относительной погрешностью* $\varepsilon=\delta x$:

$$\varepsilon=\delta x=\frac{\Delta x}{x_{\text{изм}}}. \tag{1.1}$$

Относительная погрешность ε - величина безразмерная и может быть выражена в процентах. Сравним относительные погрешности для трех примеров, приведенных выше. Измерение роста человека проведено с относительной погрешностью 0,5 см/175 см=0,003 (т.е. ε=0,3 %), здания при его высоте, скажем, 50 м, - 0,5 см/5 000 см=0,0001 (т.е. ε=0,01 %), а диаметра трубки при d=2,5 см - 0,5 см/2,5 см=0,2 (т.е. ε=20 %). Напомним, что абсолютная погрешность во всех измерениях одинакова и равна 0,5 см.

Если относительная погрешность измерения мала, то говорят, что измерение проведено с высокой точностью. И, наоборот, большим относительным погрешностям соответствует малая точность измерений. Таким образом, под *точностью измерений* понимается их качество, отражающее близость результата измерения к "истинному" значению. Количественно точность измерений может быть выражена величиной, обратной относительной погрешности:

$$Q=\frac{1}{\varepsilon}=\frac{x_{\text{изм}}}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Точность, как и относительная погрешность, - величина безразмерная. Например, если погрешность измерений составляет 0,01 % (т.е. 0,0001), то точность равна 10^4.

Погрешности измерений принято подразделять на *случайные*, *систематические и грубые (промахи).*

Промахи возникают вследствие неисправности аппаратуры или небрежности, невнимательности экспериментатора, например, из-за неверной записи показаний прибора, и проявляют себя значительным отклонением от остальных данных. Грубых ошибок, конечно, следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие результаты измерений нужно отбрасывать.

Случайные погрешности уже упоминались нами. Так называются погрешности неизвестного происхождения, которые при повторных наблюдениях, как по величине, так и по знаку ведут себя нерегулярным, случайным образом. Они вызываются большим числом причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Такими причинами могут быть, например, колебания температуры элементов установки, напряженностей электрических и магнитных полей, движение воздуха, вибрация зданий и приборов, трение в движущихся элементах, погрешности при отсчете делений шкалы и т.д. Случайные погрешности оцениваются по результатам многократных измерений.

Систематические погрешности вызываются факторами различного происхождения и сохраняют свое значение при многократном повторении одних и тех же измерений или подчиняются определенным законам. Их можно условно разделить на три группы.

1. Погрешности, природа которых нам известна, а их значение может быть найдено достаточно точно. Такие погрешности устраняются введением соответствующих *поправок*. Приведем пример из области взвешивания, ставший уже классическим. Согласно закону Архимеда вес тела и гирь в воздухе уменьшается из-за выталкивающей силы на вес воздуха в объеме этого тела (вес 1 $м^3$ воздуха равен примерно 10 Н). Для того чтобы получить правильную массу, нужно после взвешивания ввести соответствующие поправки на "потерю веса" измеряемого тела и гирь. Подобные источники погрешностей нужно тщательно анализировать, значения поправок определять и учитывать в окончательном результате. Однако здесь, как и при всяких измерениях, требуется разумный подход. Так, при взвешивании на грубых технических весах бессмысленно вводить поправку на архимедову силу. Она наверняка окажется много меньше погрешностей гирь и весов.

2. Приборная погрешность. Систематическая погрешность для данного прибора неизвестна и поэтому не может быть исключена введением поправки. Ее можно оценить путем сравнения показаний этого прибора с показаниями другого, более точного. Иногда результаты такой поверки приводятся в паспорте прибора. Однако чаще указывается максимально возможная погрешность приборов данного типа, определяемая классом его точности (так называемый предел допускаемой погрешности).

3. Методическая погрешность. В основе каждого экспериментального метода лежит теоретическое обоснование, приводящее к так называемой рабочей формуле. При ее выводе обычно делается целый ряд упрощающих предположений о реальном процессе (например, предполагается одномерность задачи, т.е. зависимость свойств среды и характеристик процесса только от одной координаты; или электрическое поле считается однородным, т.е. не изменяющимся от точки к точке и т.п.). Создавая установку, экспериментатор стремится обеспечить условия, максимально близкие к принятой модели процесса. Однако полностью исключить несоответствие модели и реального процесса невозможно.

В учебной лаборатории установки задуманы, разработаны и смонтированы заранее. Поэтому остается только попытаться выявить возможные источники методических погрешностей и, если удастся, предложить способы уменьшения их влияния на результат измерения. Результаты такого анализа должны быть отражены в выводах, которые приводятся в конце каждого отчета по лабораторной работе.

В теории вероятностей доказывается, что при значительном числе измерений среднее арифметическое $\bar{x}$ стремится к истинному значению, а погрешности – к соответствующим стандартным погрешностям.

1.3 Статистические распределения

Рассмотрим, как экспериментально изучаются измеряемые величины первого типа, т.е. случайные величины. Напомним их главное свойство: при повторном измерении в идентичных условиях их результаты меняются нерегулярно, случайным образом. Вместе с тем совокупность этих результатов подчиняется статистическим закономерностям.

Закономерности в распределении изучаемой случайной величины становятся наглядными, если построить гистограмму – ступенчатую диаграмму, показывающую, как часто при измерениях появляются результаты, попадающие в тот или иной интервал Δx между наименьшим x_{min} и наибольшим x_{max} значениями величины x. Гистограмму строят в следующих координатах: ось абсцисс – измеряемая величина x, ось ординат – $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$ (рисунок 1). Здесь n - полное число наблюдений, Δn – число результатов, попавших в интервал $[x, x+\Delta x]$. Отношение $\frac{\Delta n}{n}$ есть доля результатов, попавших в указанный интервал, и имеет смысл вероятности попадания в него результата отдельного наблюдения. Отношение $\frac{\Delta n}{n}$ к ширине интервала Δx, т.е. $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$ имеет, следовательно, смысл некоторой "плотности вероятности".

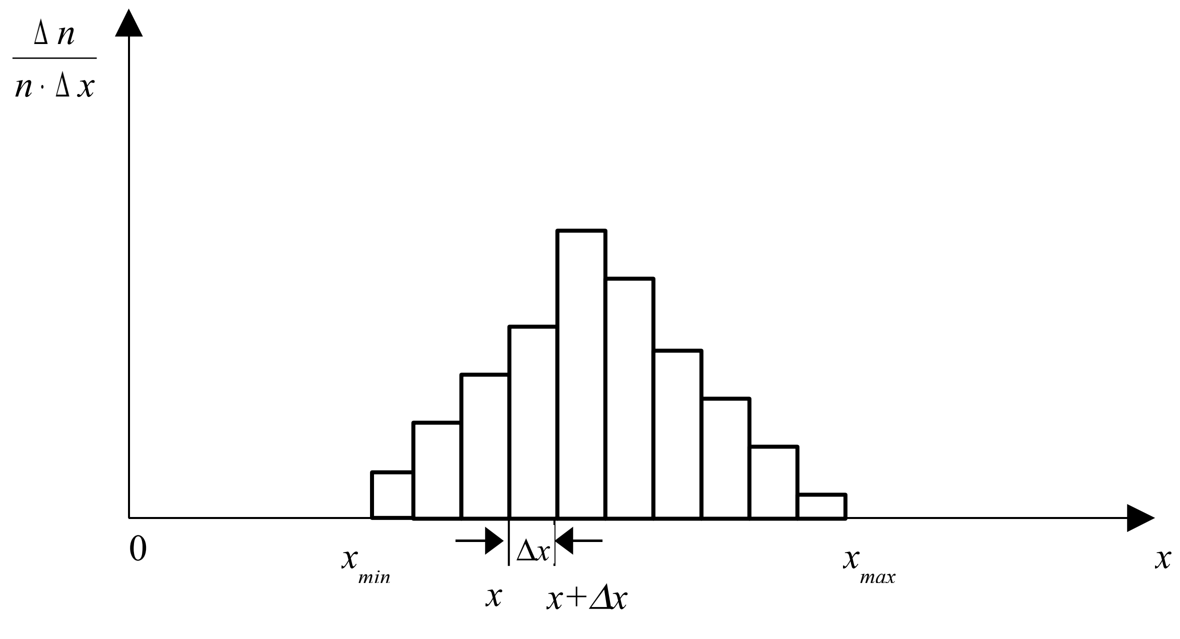

Рисунок 1- Гистограмма

При очень большом числе наблюдений ($n \to \infty$) весь диапазон значений x в принципе можно разбить на бесконечно малые интервалы dx и подсчитать число результатов dn в каждом из них. Тогда гистограмма перейдет в плавную непрерывную кривую

$$\rho(x) = \frac{dn}{n \cdot dx} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}, \qquad (1.3)$$

которую называют *плотностью вероятности* или *законом распределения погрешностей* (или просто – распределением).

Существование предела (1.3), т.е. статистического закона распределения есть неотъемлемое свойство случайной величины. Распределение является столь же определенной характеристикой случайной величины, как постоянное числовое значение – характеристикой величины неслучайной. Закон распределения можно задать в виде функции, таблицы, графика или любым другим способом, устанавливающим соотношение между интервалом значений случайной величины и вероятностью попасть в этот интервал в отдельном измерении.

Распределение дает наиболее полную информацию о случайной величине; однако пользоваться им не всегда удобно. Иногда бывает целесообразно использовать вместо закона распределения более привычные и простые числовые характеристики распределения случайной величины. Наиболее распространенными из таких характеристик являются среднее значение и дисперсия (или среднее квадратическое отклонение).

Среднее значение $\bar{x}$ измеряемой величины x, равное

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1.4)$$

указывает как бы центр распределения, около которого группируются результаты наблюдений. Как показывают подробные исследования и вся практика измерений, наиболее достоверное значение, которое можно приписать измеряемой величине на основании достаточно большого числа измерений, есть именно среднее арифметическое значение $\bar{x}$.

Дисперсией называют средний квадрат отклонения результатов наблюдений от среднего значения случайной величины:

$$D = \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}. \qquad (1.5)$$

Корень из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением* результатов наблюдений:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \qquad (1.6)$$

Как следует из определений D и σ они характеризуют разброс результатов отдельных наблюдений около среднего значения случайной величины [Строго говоря, средним значением и дисперсией называют пределы, к которым стремятся суммы (1.4) и (1.5) при $n \to \infty$; при конечных n получаются оценки этих характеристик.].

Сделаем два замечания.

1. Оценка среднего квадратического отклонения по формуле (1.6) оказывается неудачной (в статистике говорят – смещенной) при малом числе наблюдений n. Особенно ярко это проявляется при n=1 (одно измерение). Очевидно, что при одном измерении среднее значение совпадает с самим результатом наблюдений, и числитель в (1.6) обращается в нуль, а, следовательно, и σ= 0. Интуитивно ясно, что напротив, единственное измерение должно приводить к полной неопределенности в оценке σ. Это и будет так, если в знаменателе (1.6) вместо n поставить (n – 1):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} (x_\mathrm{i} - \bar{x})^2}{n-1}} . \tag{1.7}$$

В этом случае при n=1 одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель дроби. То, что при малых значениях n следует использовать именно формулу (1.7), доказывается строго в математической статистике. При больших значениях n обе формулы, естественно, практически одинаковы.

2. Среднее значение $\bar{x}$ случайной величины нельзя назвать результатом ее измерения, ибо это автоматически присваивает случайной величине постоянное значение, которое делает измеряемую величину неслучайной. Точно также σ не связана с погрешностью измерений, а является характеристикой объективного (не связанного с процессом измерения) разброса случайной величины около ее центра распределения.

Если, кроме числовых характеристик случайной величины, известен вид функции (1.3), то с помощью характеристик $\bar{x}$ и σ можно получить исчерпывающую информацию о вероятности обнаружить случайную величину в любом заданном наперед интервале значений. Покажем это на примере одного из самых распространенных и важных распределений, широко используемых при обработке результатов физического эксперимента, – нормального или Гауссова.

1.4 Нормальное распределение

При выводе закона нормального распределения погрешностей исходят из следующих предположений (аксиом) о поведении случайной величины и ее погрешностей.

1 Случайная величина может принимать непрерывный ряд значений от – ∞ до + ∞, т.е. погрешности могут принимать непрерывный ряд значений.

2 Центр распределения случайной величины является одновременно его центром симметрии, т.е. отклонения равного значения в большую и меньшую сторону от центра встречаются одинаково часто. Это означает, что при большом числе наблюдений погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто.

3 Малые отклонения от центра встречаются чаще, чем большие, т.е. увеличению отклонения от центра соответствует уменьшение вероятности обнаружить это отклонение. Это означает, что частота появления погрешностей уменьшается с увеличением величины погрешностей, т.е. большие погрешности встречаются реже, чем малые.

Эти предположения приводят к закону распределения случайной величины, описываемому знаменитой формулой Гаусса:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\cdot\sigma^2}\right), \qquad (1.8)$$

где обозначения среднего значения $\bar{x}$ и среднего квадратического отклонения σ соответствуют формулам (1.4) и (1.6) при очень больших n, а $e\approx 2{,}718...$ – основание натуральных логарифмов.

Кривые Гаусса для трех значений σ (1, 1/2 и 1/4) и одинаковом $\bar{x}=3{,}5$ (в условных единицах) показаны на рисунке 2. Как видно из рисунка, распределение Гаусса – симметричная функция, имеющая максимум при $x=\bar{x}$:

$$\rho_{\max} = \rho\big|_{x=\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}. \qquad (1.9)$$

То значение x, при котором плотность вероятности максимальна, называют наиболее вероятным значением случайной величины. Таким образом, $\bar{x}$ – оценка наиболее вероятного значения случайной величины, распределенной по нормальному закону. Максимальное значение (1.9) функции Гаусса уменьшается с увеличением σ. Одновременно кривые становятся более пологими, при этом полная площадь под кривой остается одинаковой при любых σ.

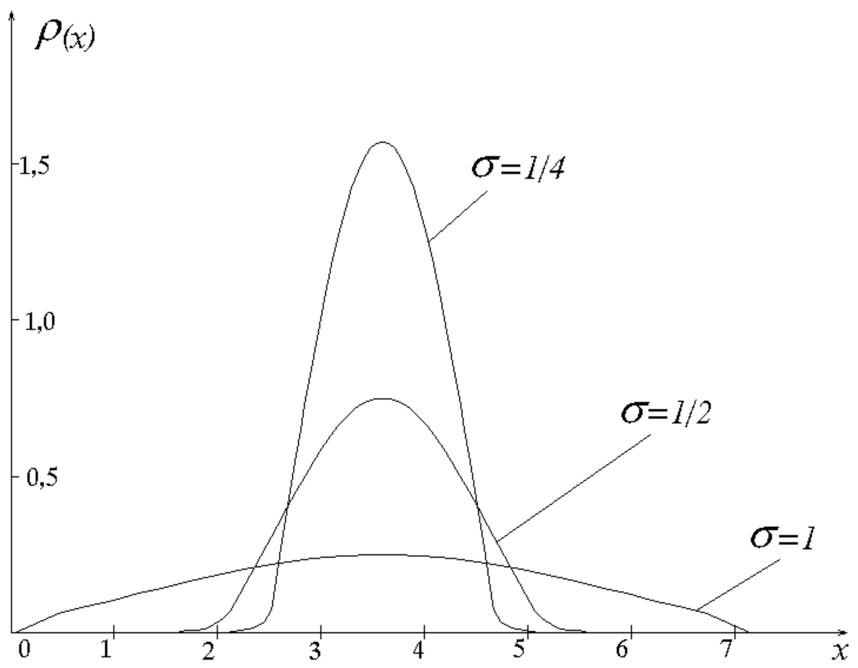

Рисунок 2- Нормальное распределение ($\bar{x}$=3,5; σ =1/4; 1/2; 1)

Обратимся к определению распределения (1.3); из него следует, что

$$\frac{dn}{n} = \rho(x) \cdot dx\,,$$

т.е. вероятность попадания отдельного наблюдения в интервал dx равна площади под участком кривой, соответствующим этому интервалу. Если мы расширим интервал до произвольного промежутка [x_1, x_2], то площадь под соответствующим участком кривой, равная вероятности Р попадания наблюдения в промежуток, будет выражаться интегралом:

$$P\left(x \in \left[x_1, x_2\right]\right) = \frac{\Delta\, n}{n} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho\,(x) dx\,. \tag{1.10}$$

В скобках при вероятности Р принято указывать тот факт или событие, вероятность которого определяется. Если границы промежутка раздвинуть в обе стороны до бесконечности, то интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(x) dx = 1\,,$$

т.е. вероятность обнаружить случайную величину где-то на числовой оси (или - площадь под всей кривой $\rho(x)$) равна, разумеется, единице, ибо это - событие достоверное.

Интегралы от функции Гаусса для разных значений пределов интегрирования вычислены и представлены в виде подробных таблиц в справочной литературе. При анализе распределения часто используется симметричный относительно $\bar{x}$ интервал [$\bar{x}-\Delta x$, $\bar{x}+\Delta x$], где Δx – произвольное отклонение от среднего. В Таблице 1 Приложения этот симметричный интервал указан величиной отношения ξ *полуширины интервала* Δx к среднеквадратичному отклонению σ:

$$\xi = \frac{\Delta x}{\sigma}. \tag{1.11}$$

Указанная в таблице 1 вероятность α есть соответственно

$$\alpha = \mathrm{P}\left(x \in \left[\bar{x} - \xi\sigma, \bar{x} + \xi\sigma\right]\right). \tag{1.12}$$

Таким образом, α - вероятность того, что результат измерений, представляющий собой среднее значение, отличается от истинного значения на величину, не превышающую погрешность измерений, т.е. представляет собой вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в интервал [$\bar{x}-\Delta x$, $\bar{x}+\Delta x$], называемый *доверительным интервалом*; α - часто называют *доверительной вероятностью* или *коэффициентом надежности.* Итак, для характеристики возможной величины случайной погрешности необходимо задавать два числа – величину самой погрешности или доверительный интервал и доверительную вероятность.

Полезно запомнить несколько цифр из таблицы А.1 приложения А:

ξ	1	2	3	4
α	0,68	0,95	0,997	0,99993

Как следует из этих данных, вероятность того, что измеренное значение случайной величины, распределенной по нормальному закону, попадает в интервал $\left[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x\right]$, составляет 68 %, т.е. в среднем каждое третье наблюдение даст результат за пределами этого интервала. При полуширине интервала 2σ за его пределами окажется один из каждых 20 результатов наблюдений, а при полуширине 3σ - только 3 из 1 000. Поэтому говорят, что условие $\Delta x=3\sigma$ определяет практически достоверный интервал (правило "трех сигм"). Следовательно, чем большей надежности результата мы требуем, тем большим получается соответствующий доверительный интервал, тем вероятнее, что результаты не выйдут за его пределы.

Особая роль распределения Гаусса состоит в том, что при обработке экспериментальных данных обычно явно или неявно предполагается, что именно нормальному закону подчиняется распределение случайных погрешностей результатов наблюдений. Говорят, что ″экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики - полагаясь на экспериментальное обоснование″. Что касается математического обоснования, то предположения 1-3, лежащие в основе вывода формулы Гаусса, никогда не выполняются достаточно строго (например, многие физические величины вообще не могут принимать отрицательные значения или имеют другие ограничения). Однако в пользу применения нормального распределения имеются следующие основания: в тех частых случаях, когда суммарная погрешность появляется в результате совместного действия ряда причин, каждая из которых вносит малую долю в общую погрешность, по какому бы закону ни были распределены погрешности, вызываемые каждой из причин, результат их суммарного действия приведет к гауссову распределению погрешностей (следствие центральной предельной теоремы Ляпунова).

2 Погрешности прямых измерений

Рассмотрим ситуацию, наиболее часто встречающуюся в практике физического эксперимента. Пусть изучается физическая величина x второго типа (т.е. неслучайная, постоянная) и многократными измерениями получены n результатов наблюдений:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n. \tag{2.1}$$

Все измерения выполнены одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности (такие измерения называются *равноточными*). Из-за погрешностей измерения результаты (2.1), вообще говоря, отличаются друг от друга (среди них, конечно, могут оказаться и повторяющиеся).

Группа результатов наблюдений (2.1) подлежит совместной обработке для определения результата измерения и оценки погрешности.

Прежде всего, должны быть выявлены грубые погрешности (промахи) и соответствующие результаты отброшены. Обычно для этого бывает достаточно внимательно просмотреть таблицы результатов наблюдений, обращая внимание на резко выделяющиеся, "неестественные" результаты. Иногда может помочь изображение последовательности результатов на графиках (ось абсцисс - номера опытов, ось ординат - результаты наблюдений).

Следующим этапом обработки является учет тех систематических погрешностей, которые могут быть вычислены и внесены в результаты (2.1) в виде соответствующих поправок.

Пусть грубые погрешности исключены, поправки учтены; тогда результаты наблюдений (2.1) содержат, в основном, случайные и приборные погрешности. Ниже мы рассмотрим правила их раздельного и совместного учета.

2.1 Случайные погрешности

Случайные погрешности проявляются в том, что результаты наблюдений (2.1) меняются от опыта к опыту нерегулярным, случайным образом. Для их оценки требуется применение статистических методов.

Приступая к оценке погрешности, нужно, прежде всего, разобраться в том, что мы хотим характеризовать – качество применяемого способа измерения или погрешность полученного экспериментального результата.

В первом случае следует указать среднее квадратическое отклонение результата наблюдения σ, оценка которого делается по формуле (1.7). С увеличением числа измерений n оценка σ по (1.7) стабилизируется и практически перестает зависеть от n. Таким образом, увеличивая число измерений, мы лишь лучше узнаем случайную погрешность результатов наблюдений (так сказать, уменьшаем погрешность оценки погрешности). Но уменьшить саму погрешность можем, только совершенствуя методику и технику эксперимента. Величины σ используются при сравнении различных методов измерения и экспериментальных установок, при планировании эксперимента - например, выборе нужного числа повторных наблюдений и т.п.

С увеличением числа измерений стабилизируется и оценка среднего значения измеряемой величины $\bar{x}$ по формуле (1.4). А это значит, что, увеличивая n, мы все надежнее узнаем $\bar{x}$ и наша оценка погрешности среднего значения - результата измерения - должна уменьшаться. Известно, что среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ результата измерения связано со средним квадратическим отклонением результата наблюдения σ соотношением:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}\ . \qquad (2.2)$$

Из него следует, что, желая повысить точность измерений в 2 раза, мы должны сделать в 4 раза больше измерений. А чтобы повысить точность в 10 раз (т.е. узнать еще одну значащую цифру в результате измерений), нужно увеличить число измерений n в 100 раз! Хотя с ростом n погрешность уменьшается не так быстро, как нам хотелось бы, все же, выбрав n достаточно большим, мы можем существенно уменьшить погрешность результата измерения. Разумеется, это рассуждение относится лишь к таким измерениям, при которых точность результата полностью определяется случайной погрешностью.

Итак, в качестве числовой характеристики погрешности результата измерения можно указать среднее квадратическое отклонение результата измерения $\sigma_{\bar{x}}$. Если закон распределения результатов наблюдений (2.1) известен, то можно получить более информативные *интервальные* оценки погрешности. Обычно явно или неявно подразумевается применимость нормального закона распределения. Все дальнейшие рекомендации и расчеты сделаны для случая нормального распределения как результатов отдельных наблюдений x_i, так и средних значений $\bar{x}$.

Примем в качестве оценки погрешности результата измерения величину Δx, задающую симметричный относительно $\bar{x}$ интервал значений от $[\bar{x} - \Delta x]$ до $[\bar{x} + \Delta x]$, называемый *доверительным интервалом*. Вероятность найти измеряемую величину в указанном интервале называют *доверительной вероятностью* (или *надежностью*) α:

$$\alpha = P\left(\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x\right). \qquad (2.3)$$

В таблице А.1 приложения А указаны доверительные вероятности α для доверительных интервалов, выраженных в долях среднего квадратического отклонения:

$$\xi = \frac{\Delta x}{\sigma}. \qquad (2.4)$$

Понятие доверительного интервала можно отнести к результату отдельного наблюдения, и тогда в (2.4) под σ понимается среднее квадратическое отклонение результата наблюдения; но его можно отнести и к результату измерения $\bar{x}$, и тогда в (2.4) под σ следует подразумевать среднее квадратическое отклонение результата измерения, т.е. $\sigma_{\bar{x}}$. Поэтому случайную погрешность результата измерения можно записать так:

$$(\Delta x)_{\text{случ}} = \xi \cdot \sigma_{\bar{x}} = \xi \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \qquad (2.5)$$

где величина ξ находится для заданной доверительной вероятности по таблице А.1.

Мы пришли к очень важному заключению: для характеристики величины случайной погрешности необходимо задать *два числа*, а именно значение самой погрешности (или доверительного интервала) и значение доверительной вероятности. Указание одной только погрешности без соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как при этом неизвестно, сколь надежны наши данные.

Вместо (2.3) обычно используется эквивалентная запись:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x,\quad \alpha=\ldots \qquad (2.3а)$$

Чем большей надежности мы требуем, тем большим получается соответствующий доверительный интервал, и наоборот, чем больший доверительный интервал мы задаем, тем вероятнее, что измеряемая величина не находится за его пределами. Выбор доверительной вероятности определяется характером производимых измерений. При обычных измерениях можно ограничиться доверительной вероятностью 0,9 или 0,95 (им соответствуют значения ε, равные 1,65 и 2). Для измерений, к результатам которых предъявляются высокие требования по надежности, обычно задают α=0,997 (ξ=3). Большая величина доверительной вероятности в подавляющем большинстве измерительных задач не требуется.

При обработке результатов лабораторных работ мы рекомендуем принимать α=0,95. Договорившись о выборе величины доверительной вероятности, мы можем не приводить ее в записи (2.3а).

Итак, мы можем найти доверительный интервал для любой доверительной вероятности, если известно среднее квадратическое отклонение результата наблюдения σ. В тех случаях, когда измерения проводятся с помощью уже хорошо исследованного метода, погрешности которого известны, мы заранее знаем σ. Как правило, однако, σ приходится оценивать по своим измерениям, используя формулу (1.7). При этом число повторных наблюдений *n* обычно равно 5 – 10, а то и меньше. Ясно, что в таком случае мы находим σ с малой точностью. Это вносит дополнительную неопределенность в результат измерения, и поэтому границы доверительного интервала нужно расширить по сравнению со случаем известного σ, причем тем больше, чем меньше число измерений. Иначе говоря, вместо (2.5) нужно использовать формулу:

$$(\Delta x)_{случ} = t(\alpha, n) \cdot \sigma_{\bar{x}} \ , \qquad (2.6)$$

где $t(\alpha, n)$ - коэффициенты, зависящие от числа измерений n и доверительной вероятности α. Величины $t(\alpha, n)$, носящие название *коэффициентов Стьюдента*, вычислены по законам теории вероятности для различных значений α и n и приведены в таблице А.2 приложения А (Стьюдент – литературный псевдоним английского математика Госсета). Значения коэффициентов $t(\alpha, n)$ находятся на пересечении строк, соответствующих числу наблюдений n, и столбцов, соответствующих некоторой доверительной вероятности α.

Очевидно, что при больших значениях n коэффициенты Стьюдента должны практически совпадать с коэффициентами $\xi(\alpha)$ для той же доверительной вероятности α, отличаясь от ξ тем сильнее (в большую сторону), чем меньше n (сравните таблицы А.1 и А.2).

2.2 Приборная погрешность

Приборные погрешности обусловлены конструктивными и технологическими недостатками средств измерения. Для конкретного прибора его погрешность является систематической, но ее величина неизвестна, и поэтому эту погрешность нельзя исключить введением поправки. Обычно указывается предел допускаемой погрешности ϑ - максимально возможная погрешность для приборов данного типа (разумеется, если они исправны и эксплуатируются в нормальных условиях).

Для электроизмерительных стрелочных приборов указывают класс точности. Число, обозначающее класс точности (0,05; 0,1; ...; 4,0), представляет собой наибольшую относительную погрешность прибора, выраженную в процентах от конечного деления шкалы. Так, при классе точности 1,0 вольтметра, диапазон измерений которого 0 – 30 В, абсолютная погрешность в любой точке шкалы составляет ± 0,3 В. Относительная же погрешность зависит от величины измеряемого напряжения, и для малых напряжений может быть недопустимо высокой. Если, например, указанным вольтметром измерять напряжение U=0,5 В, то приборная погрешность может составить 60 %. Бессмысленно также применять этот вольтметр для исследования таких процессов, в результате которых напряжение меняется на 0,1 - 0,5 В.

У стрелочных приборов цена деления шкалы обычно согласована с погрешностью данного прибора. Поэтому нецелесообразно пытаться визуально оценивать малые доли деления, если они не отмечены на шкале. Это же обстоятельство позволяет находить погрешность прибора, класс точности которого неизвестен - за приборную погрешность принимается 0,5 цены его минимального деления.

Такое же правило существует для оценивания погрешностей линеек и других приборов с нанесенными шкалами, а также для погрешности отсчета при анализе осциллограммы, при использовании градуировочных графиков и т.п. На экране осциллографа нанесена сетка с размерами ячейки 10·10 или 5·5 мм (это и есть деление, которое указывается у переключателей на лицевой панели осциллографа). Кроме того, для отсчета десятых долей деления имеется миллиметровая сетка. Следовательно, погрешность отсчета при измерении линейного размера на экране осциллографа не менее 1 мм, при плохой фокусировке луча она увеличивается. Если размеры наблюдаемых на экране изображений составляют 5–10 мм, то им соответствуют погрешности отсчета не менее 20 –10 %. Помните об этом, устанавливая изображение измеряемого сигнала на экране осциллографа и делая отсчет по осциллограмме.

Погрешность цифрового прибора обычно указывается с помощью формулы погрешности. В первом приближении можно за оценку погрешности принять единицу наименьшего разряда. Так, если на цифровом табло частотомера высвечивается 161,3 кГц, то результат измерения $f = (161{,}3 \pm 0{,}1)$ кГц.

2.3 Сравнение случайной и приборной погрешностей. Суммарная погрешность

Обычно результаты наблюдений (2.1) содержат в себе и случайную, и приборную погрешности. При этом случайная погрешность зависит от числа измерений, уменьшаясь с ростом n, в то время как приборная погрешность от n не зависит, оставаясь постоянной во всех повторных измерениях в пределах оценки $\pm\vartheta$. Если нет ограничений при организации эксперимента, то следует проводить такое число измерений, чтобы было

$$(\Delta x)_{\text{случ}} << \vartheta\,.$$

Тогда погрешность результата измерений будет целиком определяться приборной погрешностью, т.е. возможностями экспериментальной установки. Однако не всегда можно осуществить необходимое число измерений (в условиях учебной лаборатории n обычно не более 5 – 10). В результате приходится мириться с положением, когда случайная и приборная погрешности близки друг к другу и обе они в одинаковой степени определяют точность результата измерений. К сожалению, в этом, случае трудно дать достаточно строгое определение суммарной погрешности Δx, и поэтому общепринятой методики оценки суммарной погрешности не существует.

Но, прежде всего, необходимо провести количественное сравнение случайной и приборной погрешностей. Учитывая, что оценки обеих погрешностей являются приближенными, мы можем отбросить как незначительную ту из погрешностей, которая меньше другой в 3 и более раз:

$$\text{если} \quad \frac{(\Delta x)_{\text{случ}}}{\vartheta} > 3, \quad \text{то } \Delta x = (\Delta x)_{\text{случ}}\,, \tag{2.7}$$

$$\text{если} \quad \frac{\vartheta}{(\Delta x)_{\text{случ}}} > 3, \quad \text{то} \quad \Delta x = \vartheta.$$

Если неравенства (2.7) не выполняются, то обе погрешности сопоставимы, и за суммарную погрешность принимают *стандартную погрешность* Δx, рассчитываемую по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{\text{случ}}\right)^2 + \vartheta^2}\ , \tag{2.8}$$

где $(\Delta x)_{\text{случ}}$ рассчитывают по формуле (2.6).

Поскольку случайную погрешность мы договорились оценивать с доверительной вероятностью 0,95, а ϑ - оценка максимальной погрешности прибора, то можно утверждать, что доверительный интервал оценивается по (2.8) с вероятностью, по крайней мере, не меньшей, чем 0,95.

Если по тем или иным причинам выполняется однократное измерение, то оценкой его погрешности является приборная погрешность: $\Delta x = \vartheta$.

Иногда встречается ситуация, при которой сравнить случайную и приборную погрешности удается без вычислений σ, $\sigma_{\bar{x}}$ и $(\Delta x)_{\text{случ}}$. Это возможно, если результаты наблюдений (2.1), хотя и изменяются случайным образом, но не выходят за пределы допускаемой приборной погрешности $\pm\vartheta$ (т.е. за границы интервала шириной 2ϑ), что эквивалентно выполнению неравенства

$$\frac{\left(x_{\max} - x_{\min}\right)}{2\vartheta} \le 1, \tag{2.9}$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее значения из группы результатов наблюдений (2.1). Очевидно, проведение многократных измерений в такой ситуации вообще теряет смысл и в окончательном результате эксперимента следует указать приборную погрешность.

А при измерениях, в которых погрешность результата полностью определяется случайной погрешностью, точность можно повысить, увеличивая количество измерений.

2.4 Правила округления погрешности и результата измерения

После вычисления погрешности ее округляют - обычно до одной значащей цифры (т.е. первой ненулевой). Если первая значащая цифра в погрешности меньше 3, то при числе наблюдений $n > 10$ в погрешности иногда оставляют две значащие цифры.

Округление погрешности производят потому, что неопределенность ее оценки весьма велика (при $n \le 10$ погрешность погрешности может быть более 30 %) и цифры, следующие за первой, недостоверны. Часто, проводя расчеты с помощью микрокалькуляторов, студенты записывают и используют промежуточные и окончательные результаты и погрешности с тем количеством цифр, которое видят на табло (8 – 10 цифр). Это совершенно нецелесообразно, так как погрешность результата измерения $\bar{x}$ не может быть меньше единицы низшего разряда в значении результата наблюдения x_i. Поэтому все вычисления следует производить не более чем с одной дополнительной цифрой, которая в дальнейшем, после анализа величины погрешности, может пригодиться для округления.

В конечном итоге, последняя значащая цифра результата измерения, до которой его и следует округлять, находится в том же десятичном разряде, что и первая значащая цифра погрешности. Нужно приучить себя к мысли, что экспериментатор несет ответственность за достоверность каждой значащей цифры, которую он приводит в результате измерений. Записать лишнюю цифру в результате - значит завысить точность использованного метода и экспериментальной установки, т.е. приписать себе незаслуженные достоинства.

Абсолютная погрешность определяется числом верных десятичных знаков в его записи. Например, для числа 28,70 абсолютная погрешность равна 0,005. При этом значащими считаются все цифры числа, кроме нулей, до первой цифры отличной от нуля. Пользуясь термином ″значащая цифра″ можно сформулировать следующее правило записи приближенных чисел: приближенные числа следует записывать так, чтобы все цифры числа кроме нулей слева, если они есть, были верными.

Используют две формы записи чисел – с фиксированной и с плавающей запятой. Форма с фиксированной запятой предполагает обычную запись чисел: 52,16; 0,0813; 2,623 и тому подобное. Для записи числа в форме с плавающей запятой его необходимо представить в виде:

$$Q=M\cdot 10^{n},$$

где $|M| < 1$ – мантисса числа, n – порядок числа.

Говорят, что число записано в нормированном виде, если первая цифра мантиссы больше единицы, то есть $1<|M|<10$ и порядок n определен однозначно. Правило представления числа в форме с плавающей запятой реализуется, например, так: $152{,}8=0{,}1528\cdot 10^3$, то есть $M=0{,}1528$, а $n=3$. Если число отрицательно, то отрицательна и его мантисса. Обычно в процессе вычислений стремятся иметь все числа записанными с одинаковой точностью. Одинаковую абсолютную погрешность можно обеспечить, записывая все числа в фиксированной форме с одинаковым количеством десятичных знаков. Одинаковая относительная погрешность обеспечивается записью с плавающей запятой с одинаковым числом знаков в мантиссе.

При округлении приближенных чисел руководствуются следующим правилом Гаусса: если первая отбрасываемая цифра меньше или равна 4, то последняя сохраняемая цифра остается без изменений; если же первая отбрасываемая цифра больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если первая отбрасываемая цифра равна 5, то последняя сохраняемая цифра остается без изменений, если она четная, и последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если она – нечетная.

Окончательная запись результата эксперимента приводится в виде (2.3а):

$$x = \bar{x} \pm \Delta x,$$

при этом одинаковый множитель, указывающий порядок величины, выносится за скобки. Обязательно следует указывать единицы измерения физических величин.

Примеры:

$\bar{U}$=8,252 В, ΔU=0,032 В, U=(8,25±0,03) В

$\bar{R}$=0,0364 Ом, ΔR=0,00021 Ом, R=$(3,64\pm0,02)\cdot10^{-2}$ Ом

$\bar{R}$=7875000 Ом, ΔR=7500 Ом, R=$(7,88\pm0,08)\cdot10^{6}$ Ом

$\bar{f}$=125,3 кГц, Δf=0,06 кГц – вычисления произведены некорректно, следовало вычислять $\bar{f}$ с точностью до сотых долей кГц. Необходимо пересчитать и $\bar{f}$ и Δf.

$\bar{T}$=8,7253638 мс, ΔT=0,63456327 мс – вычисления произведены нерационально, впечатление высокой точности является ложным. Результат следует записывать в виде:

$$T = (8,7 \pm 0,6) \text{ мс}.$$

Среднее арифметическое значение измеряемой величины округляется до десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной ошибки.

3 Погрешности косвенных измерений

В предыдущей главе были рассмотрены правила оценивания погрешностей, которые появляются при измерении какой-либо одной величины, непосредственно интересующей экспериментатора. Однако в большинстве реальных экспериментов осуществляется другая схема опыта, когда на нескольких разных приборах одновременно измеряются несколько различных физических величин x, y, z, . . . , а интересующая экспериментатора величина W связана с ними так называемой рабочей формулой

$$W=f(x, y, z, \ldots). \tag{3.1}$$

Для таких измерений, называемых *косвенными*, необходимо также уметь оценивать как результат измерения $W_{изм}$, так и его погрешность ΔW. Естественно, эти оценки должны основываться на анализе результатов прямых измерений величин x, y, z ... . Поэтому следует, пользуясь рекомендациями гл. 2, получить сначала оценки результатов прямых измерений и их погрешностей:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x; \quad y = \bar{y} \pm \Delta y; \quad z = \bar{z} \pm \Delta z. \qquad (3.2)$$

В (3.2) включаются, кроме результатов собственных измерений, также справочные данные для других физических величин, входящих в рабочую формулу (3.1), и результаты предварительных измерений. Эти так называемые исходные данные приводятся на лабораторных установках вместе с оценками погрешностей.

Чтобы получить результат косвенного измерения $W_{изм}$ (или $\bar{W}$), нужно подставить в рабочую формулу (3.1) результаты прямых измерений и провести вычисления:

$$\bar{W} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...). \qquad (3.3)$$

Чтобы найти оценку погрешности ΔW, необходимо, также основываясь на (3.1), получить формулу погрешности, связывающую ΔW с погрешностями прямых измерений:

$$\Delta W = F(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots).$$

3.1 Формулы погрешности для частных случаев

Случай одной переменной $W=f(x)$. Для погрешностей, малых по сравнению с измеряемой величиной, мы можем с достаточной точностью написать:

$$\Delta W = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (3.4)$$

(Это следует непосредственно из определения производной $f'(x)$). Относительная погрешность легко получается из (3.4):

$$\delta W = \frac{\Delta W}{\bar{W}} = \frac{f'(x)}{f(\bar{x})} \Delta x. \qquad (3.5)$$

Погрешность суммы (разности). Пусть величина W является суммой (разностью) двух величин x и y, результаты измерений которых независимы:

$$W = x \pm y.$$

В математической статистике доказывается, что в этом случае дисперсия величины W равна сумме дисперсий величин x и y:

$$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

или

$$\sigma_W = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Этот вывод можно распространить и на суммарные погрешности:

$$\Delta W = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,. \qquad (3.6)$$

Как мы увидим в дальнейшем, формула (3.6) отражает общее правило: для оценки общей погрешности нужно складывать не сами погрешности, а их квадраты (это относится и к совместному учету систематической и случайной погрешностей). Если W является суммой не двух, а большего числа слагаемых, то закон сложения погрешностей будет таким же, т.е. погрешность суммы (или разности) нескольких независимых величин равна корню квадратному из суммы квадратов погрешностей отдельных слагаемых.

Рассмотрим некоторые следствия из закона сложения погрешностей.

1. Влияние отдельных погрешностей Δx, Δy … на общую погрешность ΔW сильно зависит от соотношения между их значениями. Поясним сказанное примером: пусть x и y - два слагаемых, определенных с погрешностями Δx и Δy, причем Δy в два раза меньше, чем Δx. Тогда погрешность их суммы $W=x+y$ будет равна:

$$\Delta W = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(\Delta x)^2} \approx 1{,}1\Delta x\,.$$

Следовательно, если одна из погрешностей в два раза меньше другой, то общая погрешность возросла за счет этой меньшей погрешности всего на 10 %, что обычно играет очень малую роль. Это означает, что если мы хотим повысить точность измерений величины W, то нам нужно в первую очередь стремиться уменьшить ту погрешность измерения, которая больше, т.е. в данном случае погрешность измерения величины x. Если оставим точность измерения x неизменной, то, как бы мы ни повышали точность измерения слагаемого y, нам не удастся уменьшить погрешность конечного результата измерений величины W более чем на 10 %.

Конечно, если слагаемых много, а не два, как в нашем примере, то и малые погрешности могут внести заметный вклад в общую погрешность. И все же при оценке общей погрешности косвенного измерения целесообразно отбрасывать малые погрешности. Обычно пользуются правилом: отбрасываются все погрешности, которые меньше максимальной погрешности отдельных слагаемых в 3 и более раз.

2. Если нужная нам величина W является разностью двух независимо измеряемых величин x и y, то ее относительная погрешность

$$\delta W = \frac{\Delta W}{\overline{W}} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{(\bar{x} - \bar{y})}$$

будет тем больше, чем меньше $(x-y)$, и относительная погрешность возрастает до бесконечности, если x стремится к y. Это означает, что невозможно добиться хорошей точности измерения какой-либо величины, если она находится как небольшая разность результатов независимых измерений двух величин, существенно превышающих искомую. Поэтому наблюдения следует строить таким образом, чтобы по возможности, избегать случаев, когда интересующая величина находится как разность результатов независимых измерений двух величин, существенно превышающих искомую.

Погрешность произведения (частного). Пусть искомая величина W является произведением (или частным) двух величин x и y, результаты измерений которых независимы

$$W = x \cdot y \quad \text{или} \quad W = \frac{x}{y} .$$

Можно показать, что в этом случае погрешность величины W определяется формулой, аналогичной (3.6), но для *относительных погрешностей*:

$$\delta W = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} , \tag{3.7}$$

где

$$\delta W = \frac{\Delta W}{\overline{W}} , \quad \delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} , \quad \delta y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} .$$

Математическая запись большинства физических законов представляет собой комбинации произведений и частных (вспомните второй закон Ньютона или закон всемирного тяготения; закон Кулона или закон Ома и т.д.). Многие приближенно установленные закономерности также стараются представить в виде подобных формул:

$$W = \frac{k \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \ldots}{z^{\gamma} \ldots} , \tag{3.8}$$

где k – некоторый числовой множитель, α, β, γ – показатели степени (положительные или отрицательные, целые или дробные, в том числе, разумеется, и равные 1), x , y , z - измеряемые величины. Если закон сложения погрешностей (3.7) обобщить на случай рабочей формулы вида (3.8), то получится следующая формула погрешности:

$$\delta W = \sqrt{(\alpha \cdot \delta x)^2 + (\beta \cdot \delta y)^2 + (\gamma \cdot \delta z)^2 + \ldots} , \tag{3.9}$$

которая наиболее часто используется при оценках погрешности в лабораторных работах.

Как видно из (3.9), вклад погрешностей измерения отдельных величин в общую погрешность зависит от показателя степени, в которой эта величина входит в рабочую формулу (3.8). Это обстоятельство нужно иметь в виду, сравнивая отдельные погрешности между собой, чтобы отбросить незначительные.

В Таблице 3 Приложения приведены формулы погрешности для наиболее распространенных типов рабочих формул, встречающихся в физических экспериментах. В более сложных случаях приходится применять общие формулы погрешности, которые описаны в следующем параграфе.

3.2 Общие формулы погрешности

Пусть, интересующая нас величина W есть произвольная функция величин $x, y, z, \ldots$

$$W = f(x, y, z, \ldots)\ . \tag{3.10}$$

Как отмечалось выше, в случае одной переменной x погрешности ΔW и Δx связаны соотношением (3.4):

$$\Delta W = f'(x) \cdot \Delta x\ .$$

Чтобы распространить это соотношение на случай нескольких переменных, введем понятие частной погрешности величины W по аргументу x:

$$\Delta_x W = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\ . \tag{3.11}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ – так называемая частная производная от f по x; она вычисляется так, как будто в исходной формуле (3.10) все аргументы, кроме x – постоянные величины. Поскольку измерения отдельных физических величин (и их погрешности) считаются независимыми, то можно считать независимыми и частные погрешности и применить закон сложения погрешностей (3.6). В результате получим общую формулу для нахождения абсолютной погрешности величины W:

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}\ . \tag{3.12}$$

Относительную погрешность величины W легко найти из (3.12), возводя его в квадрат и поделив на $W^2 = f^2$:

$$\left(\frac{\Delta W}{W}\right)^2 = \left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z\right)^2 + \ldots .$$

Так как

$$\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}\ ,$$

то для относительной погрешности получаем

$$\delta W = \frac{\Delta W}{W} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \ldots} . \qquad (3.13)$$

В качестве упражнения рекомендуем вывести с помощью общих формул (3.12) и (3.13) частные формулы погрешности, приведенные в таблице А.3 приложения А.

3.3 Пример обработки экспериментальных данных

В качестве примера рассмотрим обработку экспериментальных данных в лабораторной работе "Изучение вынужденных поперечных колебаний металлического стержня". В основу методики эксперимента положен теоретический результат, согласно которому резонансная частота колебаний $f_р$ стержня равна:

$$f_р = \frac{\pi D}{8 l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \ , \qquad (3.14)$$

где D- диаметр стержня, l - расстояние между опорами, E, ρ - модуль упругости и плотность материала стержня. Теоретическая формула используется для нахождения модуля упругости; из (3.14) следует рабочая формула:

$$E = \frac{64 f_р^{\,2} l^4 \rho}{\pi^{\,2} D^2} \ . \qquad (3.15)$$

В качестве исходных данных имеем:

l=(300±1) мм; ρ=(7,80±0,05) г/см^3.

В ходе эксперимента подлежат измерению:

1. Резонансная частота $f_р$. Регистрирующий прибор – частотомер Ф5080. Приборная погрешность ϑ_f=1 Гц (принята единица наименьшего разряда цифрового табло при времени измерения 1 с).

2. Диаметр стержня. Приборная погрешность штангенциркуля ϑ_D=0,05 мм.

I этап. Обработка данных прямых измерений.

1 Резонансная частота.

Таблица 1 - Результаты измерений резонансной частоты

номер опыта	$f_р$, Гц	$\left(f_р - \bar{f}_р\right)$, Гц	$\left(f_р - \bar{f}_р\right)^2$, Гц^2
1	181		
2	182		
3	181		
4	182		
5	182		

По данным таблицы 1 видно, что выполняется неравенство (2.9):

$$\frac{\left(f_{max} - f_{min}\right)}{2\vartheta_f} = \frac{(182 - 181)}{2 \cdot 1} = 0,5 < 1.$$

Поэтому можно пренебречь случайной погрешностью, не вычисляя $\sigma_{\bar{f}}$ (не заполнять последние колонки таблицы 1). Следовательно, $\Delta f_р = \vartheta_f$ и окончательный результат: $f_р$ =(182 ± 1) Гц.

2 Диаметр стержня.

Таблица 2 - Результаты измерений диаметра стержня

номер опыта	D, мм	$\left(D_i - \bar{D}\right)$,мм	$\left(D_i - \bar{D}\right)^2$,мм^2
1	7,95	– 0,06	0,0036
2	8,05	0,04	0,0016
3	8,00	– 0,01	0,0001
4	8,05	0,04	0,0016
5	8,00	– 0,01	0,0001
	$\bar{D}$ =8,01	$\sum = 0$	$\sum = 0,0070$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение результата измерения:

$$\sigma_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum \left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0070}{5 \cdot 4}} = 0,0187 \text{ мм}.$$

Для доверительной вероятности α=0,95 находим по таблице А.2 приложения А коэффициент Стьюдента, соответствующий n=5, t(0,95; 5)=2,8. Вычисляем случайную погрешность:

$$(\Delta D)_{случ} = 2,8 \cdot 0,0187 = 0,0524 \text{ мм}.$$

Видно, что случайная и приборная погрешности близки (неравенства (2.7) не выполняются). Следовательно, ΔD=$(\Delta D)_{случ}$+$\vartheta_{\overline{D}}$=0,0524+0,05=0,1024 и окончательный результат:

$$D= (8{,}0 \pm 0{,}1)\text{ мм.}$$

II этап. Оценка результата и погрешности косвенного измерения.

Вычисляем результат измерения $\overline{E}$ с подстановкой данных в системе СИ:

$$\overline{E} = \frac{64\bar{f}_{\mathrm{p}}^{\,2}\bar{l}^{\,4}\bar{\rho}}{\pi^{2}\overline{D}^{2}} = \frac{64 \cdot 182^{2} \cdot 0{,}3^{4} \cdot 7800}{\pi^{2} \cdot 0{,}008^{2}} = 2{,}120 \cdot 10^{11}\text{ Па.}$$

Рабочая формула (3.15) относится к виду (3.8). Поэтому используем формулу погрешности (3.9). Относительная погрешность равна

$$\delta E=\sqrt{\left(2 \cdot \delta f_{\mathrm{p}}\right)^{2} + \left(4 \cdot \delta l\right)^{2} + \left(2 \cdot \delta D\right)^{2} + \left(\delta \rho\right)^{2}}\ . \qquad (3.16)$$

Вычисляем отдельные слагаемые в (3.16):

$$(2\cdot\delta f_p)= 2\cdot\frac{1}{182} = 1{,}10\cdot10^{-2};$$

$$(4\cdot\delta l) = 4\cdot\frac{1}{300} = 1{,}33\cdot10^{-2};$$

$$(2\cdot\delta D)= 2\cdot\frac{0{,}1}{8} = 2{,}5\cdot10^{-2}=\delta_{\max};$$

$$(\delta\rho) = \frac{0{,}05}{7{,}8} = 0{,}65\cdot10^{-2}.$$

Так как $\dfrac{\delta\rho}{\delta_{\max}} < \dfrac{1}{3}$, то отбрасываем $\delta\rho$ и получаем

$$\delta E=\sqrt{\left(2 \cdot \delta f_{\mathrm{p}}\right)^{2} + \left(4 \cdot \delta l\right)^{2} + \left(2 \cdot \delta D\right)^{2}} = \sqrt{1{,}1^{2} + 1{,}33^{2} + 2{,}5^{2}}\cdot10^{-2} = 0{,}0304$$

(т.е. 3 %).

Вычисляем абсолютную погрешность

$$\Delta E=\delta E \cdot \overline{E} = 0{,}03 \cdot 2{,}12 \cdot 10^{11}\text{ Па} = 6{,}36 \cdot 10^{9}\text{ Па}$$

Окончательный результат:

$$E = (2{,}12 \pm 0{,}06) \cdot 10^{11}\ \text{Па}.$$

$$\varepsilon = \delta E = 3\ \%.$$

4 Представление и интерпретация результатов измерений

4.1 Таблицы

Для записи результатов большого количества однотипных измерений удобно использовать таблицы. С их помощью удается избежать ненужной многократной записи обозначения измеряемой величины и ее размерности, общих множителей и т.п. В таблицы могут быть сведены как экспериментальные данные, так и промежуточные результаты обработки этих данных.

Вот некоторые правила, которыми нужно руководствоваться при построении таблиц.

Форма таблицы должна быть удобна для записи и дальнейшей обработки экспериментальных данных. С этой целью необходимо предварительно продумать, какие физические величины или результаты расчетов будут сведены в таблицу. Заранее определяется число столбцов и строк в таблице.

Таблицы вычерчивается карандашом по линейке.

Таблицы более удобны в обращении, если они пронумерованы и имеют название.

Первый столбец таблицы следует отводить для записи номера опыта.

После обозначения физической величины в заголовке таблицы через запятую приводится ее размерность (все размерности обязательно указываются в русском написании и только в системе СИ).

Общий десятичный множитель выносится в заголовок таблицы. Во избежание недоразумений при пользовании таблицей общий множитель относится к размерности физической величины.

Пример. В таблице 3 приведены результаты измерений температурной зависимости удельного электрического сопротивления ρ металла; $U_Т$ - термоэлектродвижущая сила термопары, являющейся датчиком температуры T; I, U – сила тока через образец и падение напряжения на нем.

Таблица 3 - Температурная зависимость электрического сопротивления платиновой проволоки.

номер опыта	$U_Т$, мВ	T, К	I ,мА	U, мВ	ρ, 10^{-7} Ом·м
1	0	293	1,0	2,78	1,02
2	0,20	298	1,0	2,83	1,07
…	…	…	…	…	…

4.2 Графики

Более наглядными, чем таблицы, при обработке результатов измерений являются графики зависимостей физических величин. Графики позволяют визуально представить изучаемые зависимости; графическая информация вызывает больше доверия, обладает значительной емкостью и легко воспринимается. На основе графика легко сделать вывод о соответствии теоретических представлений реальному эксперименту. Ниже даются рекомендации по построению и использованию графиков.

Выбор бумаги. Графики строятся на бумаге, имеющей координатную сетку. Это может быть обычная миллиметровка с линейным масштабом по осям, или логарифмическая бумага.

Логарифмическая бумага бывает двух типов. Первый тип - полулогарифмическая, у которой по одной оси масштаб - линейный, по другой - логарифмический. Второй тип - двойная логарифмическая, когда логарифмический масштаб используется для обеих осей. Логарифмические или полулогарифмические масштабы используют в тех случаях, когда изменения величин, откладываемых по осям, составляют несколько порядков.

Распределение координатных осей. Графики принято строить в декартовой (прямоугольной) системе координат, в которой, как правило, по оси абсцисс (ось x) откладывается *аргумент*, т.е. независимая физическая величина, а по оси ординат (ось y) - *функция*, т.е. зависимая физическая величина.

Выбор масштабов. Как правило, график строится на основании таблицы экспериментальных данных, откуда легко определить интервалы, в которых изменяются аргумент и функция. Их наименьшее и наибольшее значения задают наименьшее и наибольшее значения масштабных шкал, наносимых на оси. Не следует стремиться, чтобы начало координат (точка 0, 0) обязательно поместилось на графике. Масштабы по обеим осям выбираются независимо друг от друга и соотносятся с погрешностью измерения аргумента и функции. Желательно, чтобы цена наименьшего деления каждой шкалы была примерно равна соответствующей погрешности.

Масштабные шкалы должны легко читаться, а для этого необходимо выбирать удобную цену деления шкалы: одной клетке должно соответствовать $1\cdot 10^{\pm n}$, $2\cdot 10^{\pm n}$ или $5\cdot 10^{\pm n}$ единиц откладываемой физической величины (n- любое целое число). Так, в качестве цены деления шкалы числа 2; 0,5; 100; 0,02 - подходят, а числа 3; 7; 0,15 - не подходят. Обычно множитель $10^{\pm n}$ указывается на конце оси и понимается как общий множитель к каждому делению.

При необходимости масштаб по одной и той же оси для положительных и отрицательных значений откладываемой величины может быть выбран разным, но только в том случае, если эти значения отличаются на порядок (в 10 раз) и более. Примером может служить вольтамперная характеристика диода, у которой прямой и обратный токи отличаются не менее чем в 10^3 раз (прямой ток составляет миллиамперы, обратный - микроамперы).

Нанесение шкал. Стрелки, дающие положительное направление, на координатных осях не указываются. Против каждой оси записываются название или символ соответствующей величины и через запятую - его размерность (все размерности указываются в русском написании и только в системе СИ). Масштаб наносится на оси в виде равноотстоящих круглых чисел, например: 2 4 6 8 ... или 1,82 1,84 1,86 ... Как и для таблиц, десятичный множитель масштаба удобно отнести к единице измерения и, например, вместо 1000   3000   5000 ... писать 1   3   5 ... (общий множитель 10^3 указывается вместе с единицей измерения).

Масштабные риски аккуратно проставляются по осям и выходят на поле графика. По оси *x* - цифры пишутся под рисками, обозначение откладываемой величины и ее единица измерения указываются справа под осью. По оси *y* цифры пишутся слева от рисок, а обозначение соответствующей величины и единица измерения указываются вверху слева от оси. Например, по оси абсцисс отложен промежуток времени от 0 до $10 \cdot 10^{-4}$ с:

Здесь одно деление (цена деления) составляет $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ с.

Нанесение точек на график. Экспериментальные точки аккуратно наносятся карандашом. Они проставляются так, чтобы в дальнейшем их можно было отчетливо различать на графике. Если в одних координатных осях строятся различные экспериментальные зависимости (полученные, например, при измененных условиях эксперимента или на разных этапах работы), то точки таких зависимостей необходимо отметить разными значками (квадраты, треугольники, кружочки, крестики и т.п.) или разными цветами. Причем, если какое-либо наносимое на координатной сетке значение экспериментальной величины не совпадает с узловой точкой шкалы, то значение этой величины на координатной оси не указывается; при необходимости на координатной оси значение экспериментальной величины можно отметить риской.

Теоретические точки, получаемые в результате расчета, могут выбираться произвольно. После проведения теоретической кривой они должны с ней слиться. Как и при построении экспериментальной зависимости, пользуйтесь карандашом - при ошибке неверно поставленную точку можно будет стереть.

Выносные линии при нанесении точек ни в коем случае не используются. Для этих целей существует координатная сетка.

Проведение кривой по точкам. Экспериментальные точки соединяются карандашом плавной кривой так, чтобы они в среднем одинаково располагались по обе стороны от кривой. Если известно математическое описание наблюдаемой зависимости, то кривая (в частном случае - прямая) проводится точно так же. Не следует стремиться провести кривую линию через каждую экспериментальную точку - ведь кривая является только нашей интерпретацией результатов измерений, известных из эксперимента с некоторой погрешностью. По сути, есть только экспериментальные точки, а кривая - наше (не обязательно верное) "домысливание" эксперимента.

Если же все точки последовательно соединить, то получится ломаная линия, которая не имеет ничего общего с истинной физической зависимостью. Это следует хотя бы из того, что форма полученной ломаной линии не будет воспроизводиться при повторных сериях измерений.

Напротив, расчетные точки теоретической зависимости соединяются плавной кривой, проходящей строго через все нанесенные на график точки. Это требование очевидно, так как теоретические значения вычисляются практически точно (без погрешности).

Законченный график нумеруется, ему дается название, кратко отражающее содержание построенной зависимости. Все графические символы, использованные при построении, поясняются в подписи к графику, располагаемой под графиком или на незанятой части координатной сетки.

Считывание точек с графика. Часто возникает необходимость найти из графика значение функции y по произвольному заданному значению аргумента x. Такое считывание точек с графика требуется, например, при использовании градуировочных графиков термопар, расходомеров и т.п., которые, в свою очередь, строятся на основании предварительных измерений или берутся из справочников. При этом график даёт возможность определить промежуточное значение функции для тех значений аргумента, при которых измерения не проводились.

Погрешность координаты точки, определяемой из графика, задается ценой наименьшего масштабного деления или усредненным размером точки на графике, если он не превышает деление.

Определение координаты экстремума кривой. При дискретных измерениях физической величины (т.е. измерениях, выполненных при некоторых фиксированных значениях аргумента) исследуемая физическая зависимость не может быть восстановлена полностью. Это значит, что особенности кривой, проведенной по экспериментальным точкам, не могут быть определены абсолютно точно. Это, в первую очередь, относится к определению координат максимумов и минимумов кривых. Например, на рисунке 3 кривая может иметь форму, отмеченную как сплошной, так и пунктирными линиями. Однако график дает основание утверждать, что максимум достоверно находится на отрезке (x_1, x_2), поэтому за его координату можно принять:

$$x_{\max} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \tag{4.1}$$

а за оценку погрешности

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{2}\,. \tag{4.2}$$

Ясно, что для уменьшения графической погрешности определения максимума нужно делать измерения в области максимума как можно чаще, т.е. с минимально возможным шагом изменения величины x. Однако, если при этом окажется, что оценка (4.2) меньше погрешно-

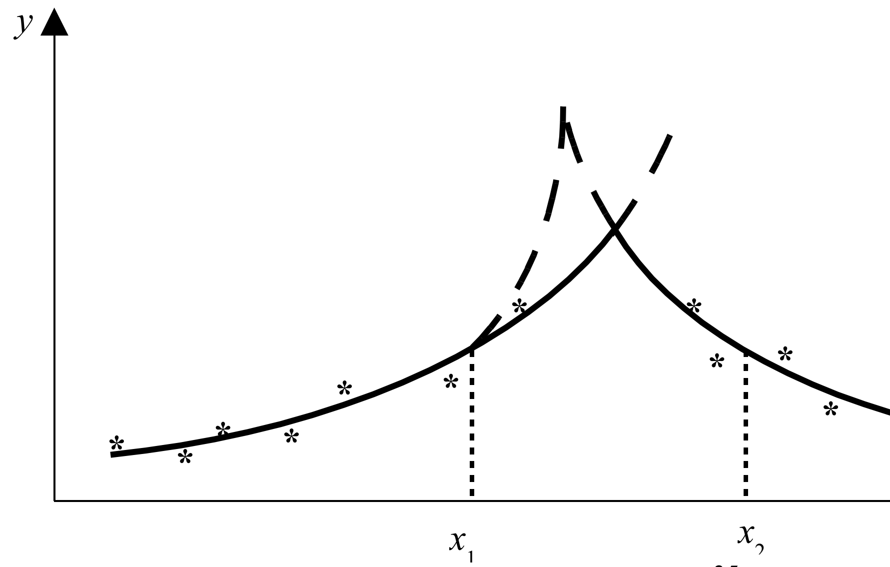

Рисунок 3- К нахождению положения экстремума кривой.

сти измерения величины x, то эту последнюю и следует принять за погрешность Δx.

4.3 Нахождение параметров линейной зависимости по экспериментальным данным

Простейшей функциональной связью двух физических величин x и y является линейная зависимость вида:

$$y = ax + в. \qquad (4.3)$$

Она наиболее удобна для зрительного восприятия, сравнения теории и эксперимента. Есть простые и надежные способы оценивания констант a и $в$ по совокупности экспериментальных данных (x_i и y_i , i = 1,2,3, ...n). Отсюда следует общее правило: экспериментатор должен стремиться путем преобразования нелинейной зависимости свести ее к линейной вида (4.3) и построить по экспериментальным данным линейный график в преобразованных переменных. Например, функциональную зависимость $y=kz^2$ можно привести к виду (4.3), если положить b=lgk, x=lgz, a=2, так как действительно, логарифмируя правую часть приведенного выражения, получаем: $\lg(kz^2)=2\lg z+\lg k$.

Определение параметров a и в уравнения (4.3) *из графика.* Сначала на графике $y(x)$ нанесем экспериментальные точки, затем проведем прямую по экспериментальным точкам и найдем ее уравнение (4.3). Для этого возьмем две произвольные точки 1 и 2 на этой прямой, достаточно удаленные друг от друга (рисунок 4). Найдем из графика их координаты x_1, y_1 и x_2, y_2.

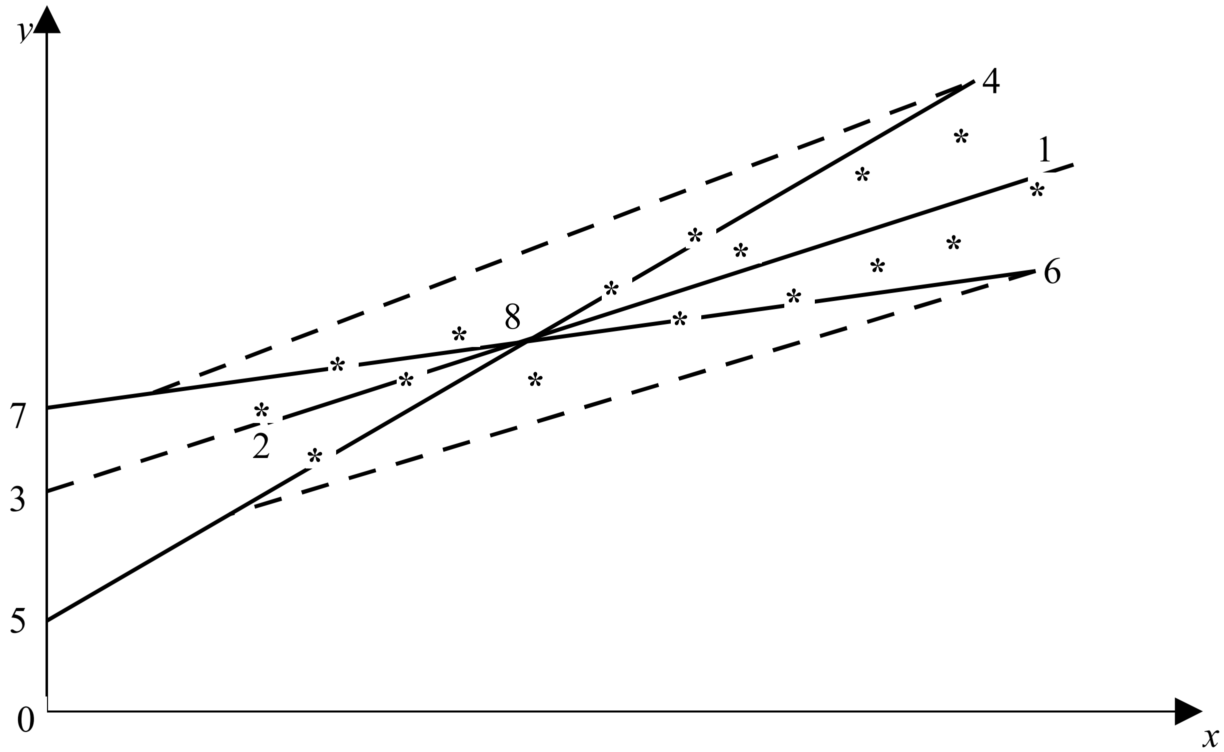

Рисунок 4- Графическая обработка линейной зависимости

Подставив эти значения в (4.3), получим два уравнения с двумя неизвестными a и $в$:

$$y_1 = ax_1 + в,$$
$$y_2 = ax_2 + в,$$

из которых находим:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,; \quad в = \frac{y_2 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2}\,. \qquad (4.4)$$

Параметр a называют угловым коэффициентом линейной зависимости или наклоном прямой; он имеет размерность $[a] = \frac{[y]}{[x]}$.

Если необходимо найти из графика не только значения a и $в$, но и оценки их погрешностей Δa и $\Delta в$, то точки 1 и 2 выбираются на границах области, где ожидаемая линейная зависимость действительно выполнена (см. рисунок 4). Затем строятся две симметричные относительно отрезка 1-2 дополнительные прямые (показаны пунктиром) так, чтобы экспериментальные точки в основном располагались между ними. Тогда дополнительные прямые определяют "коридор погрешностей эксперимента", внутри которого находится исследуемая линейная зависимость. Предельные случаи этой зависимости получим, проведя прямые через противоположные углы "коридора" (прямые 4-5 и 6-7). Как и для основной прямой 1-2, находятся параметры предельных прямых a_1, $в_1$ и a_2, $в_2$. Тогда оценки погрешностей:

$$\Delta a = \frac{|a_1 - a_2|}{2}\,; \qquad \Delta в = \frac{|в_1 - в_2|}{2}\,.$$

Может оказаться, что теоретическая зависимость между величинами является линейной, а экспериментальные точки явно не ложатся на прямую. Проведение через них прямой так, как это сделано на рисунке 5, необоснованно. Расхождение между теоретической и экспериментальной зависимостями свидетельствует о наличии методических погрешностей – неточности или неприме-

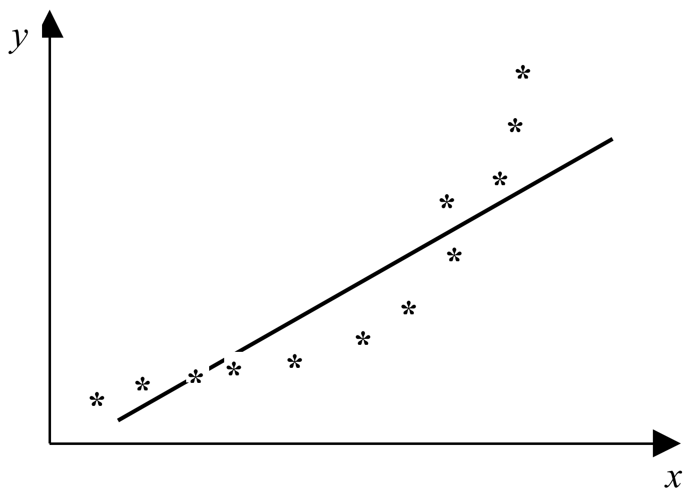

Рисунок 5- Пример необоснованной интерпретации экспериментальной зависимости.

нимости рабочих формул, ошибок в измерительной схеме или других. Эти методические погрешности должны быть выявлены и учтены при обработке результатов. В противном случае остается констатировать расхождение теории с экспериментом.

Часто линейная зависимость является приближенно справедливой в ограниченном интервале изменения физических величин x и y. В таком случае необходимо выявить границы применимости линейной зависимости и указать их в выводах по результатам эксперимента.

Метод парных точек. Часто при обработке линейной зависимости физический интерес представляет только угловой коэффициент прямой a. В этом случае для оценки углового коэффициента и его погрешности особенно удобен метод парных точек, который к тому же является объективным методом (т.е. результаты не зависят от произвола экспериментатора, как при графической обработке).

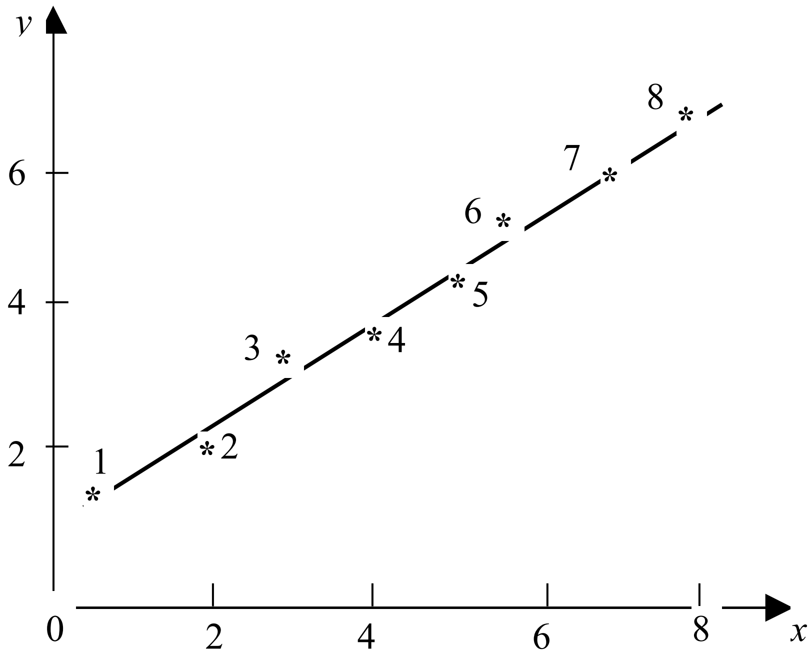

Рисунок 6- К методу парных точек

Продемонстрируем идею метода на конкретном примере. Пусть имеется 8 опытных точек, лежащих приблизительно на одной прямой (рисунок 6). Пронумеруем их по порядку от 1 до 8 и разделим мысленно на две равные группы (1 - 4 и 5 - 8). Возьмем первые точки в обеих группах, т.е. точки 1 и 5; через них проходит некоторая прямая с угловым коэффициентом a_1, вычисленным по формуле (4.4). Рассматривая следующую пару точек (2 и 6), можем найти угловой коэффициент a_2 и т.д. В итоге получим четыре значения углового коэффициента, для которых вычислим среднее значение и его погрешность по обычным формулам для прямых измерений.

Таблица 4 - Обработка экспериментальных данных методом парных точек

номер опыта	x	y	Пары точек	Δx	Δy	$a_i = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$	$a_i - \bar{a}$	$(a_i - \bar{a})^2$
1	0,9	1,2	1–5	4,0	3,3	0,82	0,05	0,0025
2	2,0	2,0	2–6	4,1	3,0	0,73	–0,04	0,0016
3	3,0	2,9	3–7	4,1	2,8	0,68	–0,09	0,0081
4	4,0	3,2	4–8	4,0	3,4	0,85	0,08	0,0064
5	4,9	4,5				$\bar{a}$ =0,77	Σ=0	Σ=0,0186
6	6,1	5,0						
7	7,1	5,7						
8	8,0	6,6						

Отметим, что для нахождения угловых коэффициентов нет необходимости в построении прямых, проходящих через парные точки. Такие построения только засоряют график. Лучше занести координаты опытных точек в Таблицу и здесь произвести необходимые вычисления, как это сделано при обработке данных по рисунку 6 (таблица 4).

Таким образом, результат измерения углового коэффициента: $\bar{a}$ =0,77. Среднее квадратическое отклонение результата измерения равно:

$$\sigma_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}0186}{4 \cdot 3}} = 0{,}04 \; .$$

При доверительной вероятности α=0,95 и n=4 коэффициент Стьюдента t=3,2 и погрешность Δa=3,2·0,04=0,13. Окончательно:

$$a = 0{,}77 \pm 0{,}13.$$

Метод наименьших квадратов. Метод дает наилучшие в статистическом смысле оценки для параметров a и $в$. Значения этих параметров определяются так, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от прямой $y(x)$, т.е. от расчетных значений $(ax_i+в)$ – была бы наименьшей.

Для нахождения коэффициентов a и $в$ искомой прямой мы должны, таким образом, найти минимум суммы $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + в - y_i)^2$, приравнивая к нулю производные этой суммы по параметрам a и $в$. Полученная в результате дифференцирования система уравнений позволяет найти не только значения параметров a и $в$, но и дисперсию отклонения точек от прямой σ_0^2 и дисперсии σ_a^2 и $\sigma_в^2$ для коэффициентов a и $в$:

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\left(\overline{x^2}\right) - \left(\bar{x}\right)^2} \; ; \quad в = \frac{\left(\overline{x^2}\right) \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \left(\overline{x \cdot y}\right)}{\left(\overline{x^2}\right) - \left(\bar{x}\right)^2} \; ;$$

$$\sigma_0^2 = \frac{n}{n-2}\left\{\left(\overline{y^2}\right) - \left(\bar{y}\right)^2 - \frac{\left[\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}\right]^2}{\left(\overline{x^2}\right) - \left(\bar{x}\right)^2}\right\} \; ;$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_0^2}{n\left\{\left(\overline{x^2}\right) - \left(\bar{x}\right)^2\right\}} \; ; \quad \sigma_в^2 = \sigma_a^2 \cdot \overline{x^2} \; .$$

Черта над переменной, как обычно, означает ее среднее значение. Такой вид формул облегчает вычисления на тех моделях микрокалькуляторов, которые непосредственно дают значения $\bar{x}$ и $\overline{x^2}$. Применение микрокалькуляторов позволяет выполнение промежуточных расчетов с количеством значащих цифр не менее 5 ÷ 6; большее округление приводит к накоплению погрешности вычислений и может приводить к неверным результатам.

5 Экспериментальная часть

Упражнение 1. Определение объёма тела правильной геометрической формы (цилиндра).

Цель работы:

1. Познакомиться с элементами теории погрешностей и обработки результатов измерения физических величин.
2. Экспериментально определить объём цилиндра.

Приборы и принадлежности: цилиндры различных размеров, штангенциркуль.

Необходимо опытным путем определить объем цилиндра по формуле:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H \, ,$$

где D – диаметр цилиндра, м;
H – высота цилиндра, м.

Последовательность работы:

1. Десять раз измерить диаметр цилиндра D_i. Результаты измерений занести в таблицу 1.

Таблица 1.

номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_i, *м*										
$(D_i - \overline{D})$, *м*										
$(D_i - \overline{D})^2$, *м*^{2}										

2. Вычисляется среднее арифметическое значение диаметра:

$$\overline{D} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} D_i}{10} \, .$$

3. Вычисляются отклонения измеренных значений D_i от среднеарифметического $\overline{D}$ и квадрат каждого такого отклонения, т.е. $(D_i - \overline{D})$ и $(D_i - \overline{D})^2$.

Результаты заносятся в таблицу 1.

4. Вычисляется стандартная ошибка измерения диаметра цилиндра σ как

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{10}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{10 \cdot 9}},$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ – приборная ошибка, которая может быть допущена штангенциркулем при этих значениях. Грубо можно положить $\sigma_{\text{пр}}$=0,025 мм.

5. Допустим, задавая значение доверительной вероятности α=95 %, мы желаем определить такой доверительный интервал, в котором истинное значение $D_{\text{ист}}$ оказалось бы с вероятностью 95 %. Для этого по таблице А.2 приложения А находим значение $t(\alpha, n)$, равное числу, стоящему на пересечении строки с n=10 и столбца с α=0,95. Им является число, равное 2,3. Следовательно, $t(\alpha, n)=t(0{,}95;\ 10)=2{,}3$. После этого находим полуширину доверительного интервала ΔD:

$$\Delta D = 2{,}3 \cdot \sigma.$$

Результат запишем в виде:

$$D = \overline{D} \pm \Delta D = \overline{D} \pm 2{,}3\sigma\ .$$

Именно в этом интервале с вероятностью 95 % будет находиться истинное значение измеряемой величины $D_{\text{ист}}$.

6. Десять раз измерить высоту цилиндра H_i. При обработке результатов измерений для высоты H цилиндра повторим пункты 1−5, и результат запишем в виде:

$$H = \overline{H} \pm \Delta H = \overline{H} \pm 2{,}3\sigma\ .$$

7. По алгоритму обработки косвенных измерений вычисляем значение объёма цилиндра и его погрешность:

$$\overline{V} = \frac{\pi \cdot \overline{D}^2 \cdot \overline{H}}{4}\ ; \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta H}{\overline{H}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\Delta D}{\overline{D}}\right)^2}\ ; \quad \Delta V = \varepsilon \cdot \overline{V}\ .$$

Результат записываем в виде:

$$V = \overline{V} \pm \Delta V\ ;$$

$$\varepsilon = \ldots\%\ .$$

Упражнение 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Цель работы:

1. Познакомиться с элементами теории погрешностей и обработки результатов измерения физических величин.

2. Экспериментально определить ускорение свободного падения при помощи математического маятника.

Приборы и принадлежности: математический маятник, метровая линейка, электромагнит, электронный секундомер.

Необходимо опытным путем определить ускорение свободного падения по формуле:

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^2}.$$

Она получается из выражения для периода колебаний T математического маятника с длиной L:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Для выполнения работы применяется маятник в виде стального шарика, подвешенного на тонкой нерастяжимой нити, электронного секундомера, электромагнита и метровой линейки. Электромагнит и цепь питания электронного секундомера соединены так, что в момент размыкания цепи питания электромагнита секундомер начинает с нуля отсчитывать время. При этом шарик, ранее удерживаемый электромагнитом, приходит в движение. В тот момент, когда шарик совершит одно полное колебание, цепь питания электромагнита замыкается, секундомер останавливается, а шарик притягивается к электромагниту. На шкале электромагнита высвечивается с точностью 0,01 с длительность одного полного колебания (период колебания) шарика.

Последовательность работы:

1. Десять раз измерить период колебаний математического маятника T_i. Результаты измерений занести в таблицу 1.

Таблица 1.

номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i, с										
$(T_i - \overline{T})$, с										
$(T_i - \overline{T})^2$, с^2										

2. Вычисляется среднее арифметическое значение периода колебаний:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{10} T_i}{10}$$

3. Вычисляются отклонения измеренных значений T_i от среднеарифметического $\overline{T}$ и квадрат каждого такого отклонения, т.е. $\left(T_i - \overline{T}\right)$ и $\left(T_i - \overline{T}\right)^2$.

Результаты заносятся в таблицу 1.

4. Вычисляется стандартная ошибка измерения периода колебаний σ как

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{np}^2 + \frac{\sum_{i=1}^{10} \left(T_i - \overline{T}\right)^2}{10 \cdot 9}},$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ – приборная ошибка, которая может быть допущена секундомером при этих измерениях, равна $\sigma_{\text{пр}}$=0,01 с.

5. Допустим, задавая значение доверительной вероятности α=95 %, мы желаем определить такой доверительный интервал, в котором истинное значение $T_{\text{ист}}$ оказалось бы с вероятностью 95 %. Для этого по таблице А.2 приложения А находим значение $t(\alpha, n)$, равное числу, стоящему на пересечении строки с n=10 и столбца с α=0,95. Им является 2,3. Следовательно, $t(\alpha, n)=t(0{,}95;\ 10)=2{,}3$. После этого находим полуширину доверительного интервала ΔT:

$$\Delta T = 2{,}3 \cdot \sigma.$$

Результат запишем в виде:

$$T = \overline{T} \pm \Delta T = \overline{T} \pm 2{,}3\sigma.$$

Именно в этом интервале с вероятностью 95 % будет находиться истинное значение измеряемой величины $T_{\text{ист}}$.

6. Измерить длину нити маятника при помощи метровой линейки с миллиметровыми делениями. Полученное значение длины можно принять за среднюю длину $\overline{L}$ математического маятника. Отсчет по шкале линейки производить от точки подвеса до середины шарика.

Результат записать в виде:

$$L = \overline{L} \mp \Delta L = \ldots$$

При этом можно полагать, что ΔL=2 мм.

7. По алгоритму обработки косвенных измерений вычисляем значение ускорения свободного падения и его погрешность:

$$\bar{g} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \bar{L}}{\bar{T}^2} \ ;$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{\bar{L}} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\Delta T}{\bar{T}} \right)^2} \ ;$$

$$\Delta g = \varepsilon \cdot \bar{g} \ .$$

Результат записать в виде:

$$g = \bar{g} \pm \Delta g = \ldots \ ;$$

$$\varepsilon = \ldots\% \ .$$

8. Сравнить полученный результат со справочным значением ускорения свободного падения g=(9,81 ± 0,01) м/с^2. При этом если доверительные интервалы сравниваемых величин перекрываются, то можно говорить, что в пределах ошибки измерения результаты согласуются друг с другом. Если доверительные интервалы не перекрываются, то можно говорить, что результаты расходятся, не согласуются друг с другом.

9. Сделать вывод.

Упражнение 3. Определение плотности тела неправильной геометрической формы.

Результаты измерений обработать, применяя последовательность действий из ***Упражнения 1*** экспериментальной части для расчета определение объёма тела правильной геометрической формы (цилиндра). Измерение массы проводите с помощью весов, а объем тела определяйте, измерив геометрические параметры предложенного тела с помощью миллиметровой линейки (штангенциркуля). Результаты измерений записать в стандартной форме и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1 Что такое измерение? Измерения однократные и многократные.
2 Какие измерения называют прямыми и косвенными?
3 Что такое ошибка единичного измерения?
4 Что понимается под абсолютной ошибкой? Можно ли её определять как разность между измеренным и истинным значением измеряемой величины? Почему? Что такое относительная ошибка?
5 Случайные и систематические ошибки. Причины их возникновения.
6 Поясните порядок математической обработки результатов серии прямых измерений, содержащих преимущественно случайную ошибку.
7 Поясните порядок математической обработки результатов косвенных измерений.
8 Какой смысл вкладывается в понятие приборная ошибка?
9 Что такое доверительная вероятность (надёжность)?
10 Что характеризует и как вычисляется стандартная ошибка?
11 Как рассчитывается доверительный интервал при прямых и косвенных измерениях?
12 Какой смысл имеет запись $x = \bar{x} \pm \Delta x$?

Список использованных источников

1 **Зайдель А.Н.** Погрешности измерений физических величин / А.Н. Зайдель. - Л.: Наука, 1985.

2 **Кассандрова О.Н.** Обработка результатов наблюдений / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. - М.: Наука, 1970.

3 **Сквайрс Дж.** Практическая физика / Дж. Сквайрс. - М.: Мир, 1971.

4 **МИ 1317-86.** Показатели точности измерения и формы представления результатов измерения. – М.: Издательство стандартов, 1986.

5. **ГОСТ 8.207-76 ГСИ.** Прямые измерения с многократными наблюдениями. Метод обработки результатов наблюдений. Основные положения. - М.: Издательство стандартов, 1976.

Приложение А
(*справочное*)

Таблица А.1 - Доверительные вероятности α для доверительного интервала, выраженного в долях среднего квадратического отклонения $\xi = \frac{\Delta x}{\sigma}$.

ξ	0,5	1,0	1,65	2,0	2,6	3,0	3,3	3,5	3,9	4,0
α	0,38	0,68	0,90	0,95	0,990	0,997	0,9990	0,9995	0,99990	0,99993

Таблица А.2 - Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$.

n	α					
	0,7	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
2	2,0	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	1,3	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	1,3	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	1,2	2,1	2,8	3,7	4,6	8,7
6	1,2	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
8	1,1	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
10	1,1	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
15	1,1	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	1,1	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
100	1,0	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Таблица А.3 - Формулы погрешности для частных видов рабочей формулы.

Рабочая формула	Формула для погрешности
$W = A\cdot x \pm B\cdot y \pm C\cdot z$	$\Delta W = \sqrt{(A\cdot\Delta x)^2 + (B\cdot\Delta y)^2 + (C\cdot\Delta z)^2}$
$W = A\cdot x^{\pm\alpha}\cdot y^{\pm\beta}\cdot z^{\pm\gamma}$	$\varepsilon = \frac{\Delta W}{W} = \delta W = \sqrt{(\alpha\cdot\delta x)^2 + (\beta\cdot\delta y)^2 + (\gamma\cdot\delta z)^2}$
$W = \ln x$	$\Delta W = \frac{\Delta x}{x}$
$W = e^x$	$\varepsilon = \frac{\Delta W}{W} = \delta W = \Delta x$
$W = A\cdot\sin\varphi$	$\Delta W = A\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\varphi$
$W = A\cdot\cos\varphi$	$\Delta W = -A\cdot\sin\varphi\cdot\Delta\varphi$
$W = A\cdot\mathrm{tg}\varphi$	$\Delta W = A\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}$