МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. В. Прояева, А. Д. Сафарова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО КУРСУ «ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ»

Учебно-методическое пособие

Оренбург
Издательство ОГПУ
2017

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73
П84

Рецензенты

А. С. Ракитянский, кандидат физико-математических наук, доцент

Н. А. Мунасыпов, кандидат физико-математических наук, доцент

Прояева И. В.

П84 **Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Преобразования плоскости и методы изображений»** : учебно-методическое пособие / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова ; Мин-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2017. — 56 с. : ил. — ISBN 978-5-85859-658-5.

Пособие содержит темы, входящие в рабочую программу дисциплины «Геометрия» (преобразования плоскости и методы изображений), а также план лекционного курса, подробный план семинарских занятий, задания для самостоятельной работы, вопросы к экзамену или зачету. Книга предназначена для студентов очной и заочной форм обучения, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование», профили подготовки «Математика», «Математика и информатика».

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73

ISBN 978-5-85859-658-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Основная цель пособия — организация самостоятельной аудиторной и внеаудиторной деятельности студентов по курсу «Преобразования плоскости и методы изображений».

Целью курса является формирование пространственных и конструктивных компетенций. Этому способствует как материал пособия, так и задания, носящие проблемно-поисковый характер. Значительное место при изучении курса отводится работе по преобразованию плоских фигур, построениям изображений пространственных фигур на евклидовой плоскости [1].

Основное внимание уделяется методике нахождения образов и прообразов различных фигур, нахождению их уравнений, построению плоских и пространственных фигур. Теоретический материал соединен с практическими задачами, что способствует формированию математического мышления как инструмента для правильной постановки задачи, для оценки ее данных с целью выделения из них существенных и выбора метода решения; математической интуиции, позволяющей предвидеть нужный результат, прежде чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений.

Пособие адресовано в первую очередь студентам бакалавриата третьего и четвертого семестров заочной формы обучения. Материал может быть использован студентами бакалавриата третьего и четвертого семестров очной формы обучения (направление подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика», «Математика и информатика», «Математика и физика»), изучающими предмет «Геометрия», слушателями курсов профессиональной переподготовки и повышения квалификации учителей, преподающих геометрию в 10—11 классах средней школы, лицеях и гимназиях [2].

Пособие может быть рекомендовано преподавателям вузов в качестве руководства и дополнительного материала при подготовке к практическим занятиям по геометрии.

Рабочей программой по курсу «Геометрия» заочной формы обучения на изучение преобразований плоскости и методов изображений предусматривается 6 часов лекций, 8 часов практических занятий в третьем семестре, 6 часов лекций, 10 часов практических занятий в четвертом семестре, выполнение контрольной работы, сдача зачета и экзамена в пятом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Содержание лекций	Литература, рекомендуемая для изучения темы лекции	Материал для самостоятельного изучения
Преобразования плоскости		
1. Отображения и преобразования множеств. Примеры. Группа преобразований и ее подгруппы. Движения плоскости. Общие свойства, аналитические формулы	[3], стр. 5—16	Доказательство теорем о групповых свойствах преобразований
2. Частные виды движений: параллельный перенос, поворот, осевая, скользящая симметрии. Разложение движений в произведение осевых симметрий	[3], стр. 17—28	Доказательство свойств частных типов движений
3. Подобия, гомотетия, аналитические формулы, групповые свойства. Аффинные преобразования, свойства, аналитические формулы, групповые свойства	[3], стр. 32—45	Вывод аналитических формул отдельных типов преобразований
Проективная геометрия		
4. Параллельное проектирование и его свойства. Методы изображения плоских фигур	[5], § 1—2	Доказательство свойств параллельного проектирования
5. Изображение пространственных фигур и их комбинаций	[5], § 3—4	Изображение усеченных фигур
6. Позиционные и метрические задачи	[5], § 5—6	Метод восстановления формы оригинала

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема занятий	Задачи, решаемые на занятии	Задачи для самостоятельного решения
1. Отображения и преобразования множеств. Примеры. Группа преобразований и ее подгруппы. Движения плоскости. Общие свойства, аналитические формулы	[8]: 1, 2, 4, 7, 9	[8]: 3, 6, 8
2. Движение на плоскости и его свойства	[8]: 10, 12, 15, 17 (а, б), 18	[8]: 11, 13, 17 (в), 19
3. Частные виды движений: а) параллельный перенос; б) поворот и центральная симметрия; в) осевая и скользящая симметрии	[8]: 20, 22, 23, 28, 29, 32, 36, 42, 44, 49, 53, 57, 59, 61, 66, 72, 75, 77, 81, 83, 85	[8]: 21, 24, 30, 31, 35, 38, 43, 45, 51, 56, 60, 68, 74, 76, 82, 84
4. Подобие и гомотетия. Подобные фигуры. Аффинное преобразование плоскости и его свойства	[8]: 108, 113, 116, 118, 123, 126 (а, в, г), 133, 134, 142, 144 (а, в, г), 146, 150, 154, 155, 156	[8]: 109, 114, 117, 121, 126 (б, е), 132, 138, 143, 144 (б, е), 147, 151, 153
5. Параллельное проектирование и его свойства. Методы изображения плоских фигур	[5]: № 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 23, 26, 27, 29	[5]: № 5, 7, 8, 10, 14, 16, 24, 28, 31
6. Изображение пространственных фигур	[5]: № 46, 48, 50	[5]: № 51, 52, 53
7. Изображение пространственных комбинаций фигур	[5]: № 54, 55, 56 (1—4)	[5]: № 56 (5—8)
8. Позиционные задачи	[5]: № 64, 65, 66, 68, 70, 72, 74, 76	[5]: № 60, 67, 69, 71, 73
9. Метрические задачи	[5]: № 94, 96, 98, 100, 104, 106, 108	[5]: № 95, 97, 99, 101, 103

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

1.1. Отображение и преобразования множеств

Пусть даны два непустых множества M и M'. Обозначим через x, y, … элементы множества M, а через x', y', … — элементы множества M'.

Если каждому элементу x из множества M по некоторому правилу f ставится в соответствие элемент x' из множества M', то говорят, что задано отображение f множества M во множество M', и обозначают: $f\colon M \to M'$, $f(x)= x'$, $M \xrightarrow{f} M'$.

Элемент x' называется образом элемента x, а элемент x — прообразом элемента x' при данном отображении f.

Отображение $f\colon M \to M'$ называется инъективным, если различным элементам из M ставятся в соответствие различные элементы из M'.

Отображение $f\colon M \to M'$ называется сюръективным, если каждый элемент из множества M' является образом хотя бы одного элемента из множества M.

Отображение $f\colon M \to M'$ называется биективным, или взаимно однозначным, если отображение f одновременно сюръективно и инъективно.

Биективное отображение множества M на себя называется преобразованием этого множества.

1.2. Движение на плоскости и его свойства

Движением называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между точками.

***Свойства движения*:**

1) Движение сохраняет порядок точек на прямой.

Следствие: движение прямую переводит в прямую, луч — в луч, отрезок — в отрезок, угол — в угол, полуплоскость — в полуплоскость, точки, лежащие на одной прямой, в точки, лежащие на одной прямой, и точки, не лежащие на одной прямой, в точки, не лежащие на одной прямой.

2) Движение сохраняет величину угла.

3) Движение сохраняет скалярное произведение векторов.

4) Движение окружность переводит в окружность равного радиуса.

5) Движение ортонормированный репер R переводит в ортонормированный репер R' и точку $M(x, y)_R$ — в точку $M'(x, y)_{R'}$.

6) Движение параллельные прямые переводит в параллельные прямые.

7) Движение сохраняет простое отношение трех точек.

Всякое движение плоскости либо сохраняет ориентацию плоскости (такое движение называется движением I рода), либо меняет ориентацию плоскости и называется движением II рода.

Пусть f — некоторое движение плоскости. Выберем ортонормированный репер $R\{O, E_1, E_2\}$ и обозначим (x, y) координаты произвольной точки M в репере R; (x', y') — координаты ее образа — точки M' в том же репере R. Рассмотрим образ репера R при движении f: $f(R) = R'$, где $R' = \{O', E_1', E_2'\}$.

И пусть $O'(a,b)_R$, $\overrightarrow{OE_1}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{O'E_1'} = \alpha$.

Тогда аналитическое выражение движения I рода имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1. \qquad (1)$$

Движение II рода задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + b, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1. \qquad (2)$$

Имеет место **теорема (*)**: если аналитическое выражение отображения в ортонормированном репере R имеет вид:

$$x' = a_1x + b_1y + a\ , \ y' = a_2x + b_2y + b\ , \qquad (3)$$

где матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ортогональная (т.е. $a_1^2 + a_2^2 = 1$, $b_1^2 + b_2^2 = 1$, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$), то f — движение. При этом если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, то f — движение I рода, а если $\Delta = -1$, то f — движение II рода.

1.3. Частные виды движений

Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется такое преобразование плоскости, которое точке M ставит в соответствие точку M' по закону $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}'$. Обозначается $\Pi_{\vec{a}}$.

***Параллельный перенос можно задать*:**

1) указанием вектора $\vec{a}$ параллельного переноса;

2) указанием точки A и ее образа A' при данном $\Pi_{\vec{a}}$;

3) аналитически.

Если $\vec{a}\{a,b\}$, $M(x\ ,y)_R$, $M'(x'\ ,y')_R$, $$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \qquad (4)$$

то, сравнивая выражение (4) с (1), замечаем, что параллельный перенос является движением I рода (в этом случае $\alpha = 0$) и, следовательно, обладает всеми свойствами движения. Кроме того, при параллельном переносе прямая, не параллельная вектору параллельного переноса, переходит в параллельную ей прямую, а прямая, параллельная вектору параллельного переноса, — сама в себя.

Таким образом, параллельный перенос имеет бесчисленное множество инвариантных прямых, параллельных вектору $\vec{a}$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то получим тождественное преобразование. Параллельный перенос на $\vec{a} \neq \vec{0}$ не имеет инвариантных точек.

Поворот плоскости

Рассмотрим ориентированную плоскость и на ней точку O и ориентированный угол α.

Поворотом с центром в точке O на угол α называется такое преобразование плоскости, которое точку O преобразует в себя, а любую другую точку M в точку M' по закону:

1) $OM = OM'$;

2) $\angle MOM' = \alpha$ и одинаково ориентирован с углом α.

Обозначается $R_{O,\alpha}$.

Поворот можно задать:

1) указанием центра поворота и угла поворота;

2) указанием центра поворота, точки и ее образа при данном повороте;

3) указанием угла поворота, точки и ее образа при данном повороте;

4) аналитически.

Если брать $R\{O, E_1, E_2\}$ на плоскости так, чтобы начало координат совпало с центром поворота, то аналитическое выражение $R_{O,\alpha}$ имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Сравнивая выражение (5) с (1), замечаем, что поворот является движением I рода и обладает всеми свойствами движения.

Поворот имеет одну инвариантную точку — центр поворота и бесконечное множество инвариантных прямых, если угол поворота $\alpha = 180°$.

Центральная симметрия

Точки M и M' называются симметричными относительно точки O, если O является серединой отрезка MM'.

Точка O симметрична сама себе.

Симметрией относительно точки O называется такое преобразование плоскости, которое каждой точке ставит в соответствие симметричную точку относительно O. Точка O называется центром симметрии.

Легко заметить, что центральная симметрия с центром в точке O является поворотом с центром в точке O на угол $\alpha = 180°$.

Обозначается центральная симметрия S_O.

Центральную симметрию можно задать:

1) указанием центра симметрии;

2) указанием точки и ее образа при данной центральной симметрии;

3) аналитически.

Центральная симметрия с центром в точке $O(a,b)$ задается выражением

$$\begin{cases} x' = -x + 2a, \\ y' = -y + 2b. \end{cases} \tag{6}$$

В частности, если центр симметрии совпадает с началом координат, то

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{7}$$

Точка O называется центром фигуры F, если $S_O\colon F \to F$.

Осевая симметрия

Точки M и M', не принадлежащие прямой l, называются симметричными относительно прямой l, если

1) $MM' \perp l$,

2) $MO = OM'$, где точка O — пересечение прямых l и MM'.

Считается, что каждая точка прямой l симметрична сама себе.

Осевой симметрией с осью l называется такое преобразование плоскости, которое точки прямой l переводит в эти же точки прямой, а точку M, не принадлежащую прямой l, в точку M', симметричную точке M относительно прямой l.

Обозначается S_l.

***Способы задания осевой симметрии*:**

1) указанием оси симметрии;

2) указанием точки и ее образа при данной осевой симметрии;

3) аналитически.

Если ввести ПДСК на плоскости так, чтобы ось OX совпала с осью симметрии, то

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{8}$$

Сравнивая выражения (8) и (2), замечаем, что осевая симметрия является движением II рода и обладает всеми свойствами движения. Осевая симметрия имеет бесчисленное множество инвариантных точек, которые лежат на оси симметрии, и бесконечное множество инвариантных прямых, перпендикулярных оси симметрии.

Прямая l называется осью симметрии фигуры P, если при осевой симметрии относительно прямой l фигура P переходит сама в себя.

Скользящая симметрия

Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Способы задания скользящей симметрии:

1) указанием оси симметрии и вектора переноса $\vec{a}$;

2) указанием оси симметрии точки и ее образа при данной скользящей симметрии;

3) указанием вектора параллельного переноса, точки и ее образа при данной скользящей симметрии;

4) указанием двух точек и их образов при данной скользящей симметрии;

5) аналитический.

Введем $R\{O, E_1, E_2\}$ так, чтобы ось OX совпала с осью симметрии, $\vec{a}\,(a,\ 0)$, тогда скользящая симметрия задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{9}$$

Скользящая симметрия является движением II рода и обладает всеми свойствами движения.

Скользящая симметрия не имеет инвариантных точек и имеет одну инвариантную прямую — ось симметрии.

Пример 1. Известно, что при параллельном переносе образом окружности ω: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ является окружность ω': $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 16 = 0$. Составьте формулы параллельного переноса. Найдите образы и прообразы точки $M(2;1)$ и прямой l: $x - y + 2 = 0$ при данном параллельном переносе.

Решение. ω: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow \omega(S, R)$, где $S(2;-1)$, $R = 2$. Для того чтобы найти координаты центра и радиус окружности ω', выделим полный квадрат из ее уравнения.

$(x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 16 = 0.$

ω': $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow \omega'(S',R')$, где $S'(4;-2)$, $R' = 2$.

При параллельном переносе $\Pi_{\vec{a}}$ т. S переходит в т. S', т.е. $\overrightarrow{SS'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SS'}\,(2;-1) \Rightarrow \vec{a}\,(2;-1)$. Тогда

$$\Pi_{\vec{a}} \begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y - 1. \end{cases}$$

Чтобы найти образы и прообразы точки M и прямой l, запишем формулы преобразования, обратного данному параллельному переносу:

$$\Pi^{-1}_{\vec{a}} \begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y' + 1. \end{cases}$$

$$\underbrace{M''(x;y)}_{\text{прообраз}} \xrightarrow{\Pi_a} M(2;1) \xrightarrow{\Pi_{\vec{a}}} \underbrace{M'(x';y')}_{\text{образ}}$$

$$M': \begin{cases} x' = 2 + 2 \\ y' = 1 - 1 \end{cases} \Rightarrow M'(4;0),$$

$$M'': \begin{cases} x = 2 - 2 \\ y = 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow M''(0;2).$$

Прообраз $l'' \to l: x - y + 2 = 0 \xrightarrow{\Pi_a} l'$ — образ.

$l': (x' - 2) - (y' + 1) + 2 = 0,$ $\quad l'': (x + 2) - (y - 1) + 2 = 0.$

$l': x' - y' + 1 = 0,$ $\quad l'': x - y + 5 = 0.$

1.4. Классификация движений плоскости

Группа движений плоскости и ее подгруппы

На плоскости имеют место теоремы:

1. Всякое движение либо не имеет инвариантных точек, либо имеет одну инвариантную точку, либо имеет бесконечное множество инвариантных точек.

2. Движение I рода — либо параллельный перенос, либо поворот на угол α.

3. Движение II рода — либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия.

Таким образом, можно составить следующую таблицу:

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
Движение I рода		
1) поворот на угол α а) поворот на угол $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm\pi$	центр поворота	нет

Продолжение табл.

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
б) тождественное преобразование ($\alpha = 0$)	любая точка плоскости	любая прямая плоскости
в) центральная симметрия ($\alpha = \pm\pi$)	центр симметрии	любая прямая, проходящая через центр симметрии
2) параллельный перенос на вектор $\vec{v}$ а) параллельный перенос на вектор $\vec{v} \neq 0$	нет	любая прямая, параллельная вектору
б) тождественное преобразование ($\vec{v} = 0$)	любая точка плоскости	любая прямая плоскости
Движение II рода		
3) осевая симметрия	все точки оси симметрии	ось симметрии и любая прямая, перпендикулярная к ней
4) скользящая симметрия	нет	одна прямая — ось симметрии

Говоря о групповых свойствах движений плоскости, необходимо учитывать следующие утверждения:

1) Множество всех движений плоскости образует группу.

2) Множество всех движений I рода образует группу.

3) Множество параллельных переносов образует группу.

4) Множество поворотов с общим центром образует группу.

5) Множество всех движений II рода группу не образует.

Две фигуры F_1 и F_2 называются равными, если существует движение, которое фигуру F_1 переводит в фигуру F_2.

Пример 2. В ортонормированном репере R преобразование f плоскости задано формулами $f: \begin{cases} x' = -x + 1, \\ y' = -y. \end{cases}$ Докажите, что f — движение, определите его род и вид.

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой (*) п. 1.2.

$$f:\begin{cases} x' = x+3, & a_1 = 1, a_2 = 0, \\ y' = -y, & b_1 = 0, b_2 = -1, \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1, \\ a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ — движение.}$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$ f — движение II рода, значит, f — или скользящая симметрия, или осевая симметрия. Найдем инвариантные точки движения f. Если $M(x;y)$ — инвариантная точка, то $M(x;y) \xrightarrow{f} M'(x;y)$.

$\begin{cases} x = x+3, \\ y = -y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3, \\ 2y = 0, \end{cases}$ $0 \neq 3 \Rightarrow$ система решений не имеет, а f — не имеет инвариантных точек, поэтому f — скользящая симметрия.

1.5. Подобие и гомотетия

Подобием называется такое преобразование плоскости, которое любым двум различным точкам A и B плоскости ставит в соответствие точки A' и B': $A'B' = kAB$, где k — положительное число.

Число k называется коэффициентом подобия. Обозначение: $П_k$.

***Свойства подобия*:**

1) Движение является частным случаем подобия.
2) Подобие сохраняет порядок точек на прямой.
3) Подобие сохраняет величину угла.
4) Подобие сохраняет отношение отрезков.
5) Подобие сохраняет параллельность прямых.
6) При $П_k$ скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a}',\vec{b}') = k^2(\vec{a},\vec{b})$.

7) Образом окружности с радиусом R при $П_k$ является окружность, радиус которой равен $k \cdot R$.

8) Подобие ортонормированный репер R переводит в ортогональный репер R' и точку $M(x,y)_R$ — в точку $M'(x,y)_{R'}$. Репер $R'\{o',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, где $\vec{e}_1' \perp \vec{e}'$, $|\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = k$.

Справедлива **теорема:** любое преобразование плоскости, которое ортонормированный репер R переводит в ортогональный репер R' и точку $M(x,y)_R$ в точку $M'(x,y)_{R'}$, есть подобие.

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое точку O переводит в точку O, а любую другую точку M в точку M': $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Обозначается $H_{o,k}$.

Из определения следует, что O, M и M' лежат на одной прямой.

Способы задания $H_{o,k}$:

1) указанием центра O и коэффициента k;

2) указанием центра O, точки M и ее образа M' при данной $H_{o,k}$;

3) указанием коэффициента, точки и ее образа при данной $H_{o,k}$;

4) аналитически.

Свойства гомотетии:

1) Гомотетия сохраняет принадлежность точек прямым.

2) Гомотетия является частным случаем подобия: $H_{o,k} = П_{|k|}$.

3) Гомотетия прямую, проходящую через центр гомотетии, переводит в себя, а прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую.

4) Гомотетия сохраняет ориентацию плоскости.

5) Аналитические формулы гомотетии.

Пусть дана $H_{S,k}$ и $S(x_0,y_0)_R$ и точка $M(x;y)_R \xrightarrow{H_{S,k}} M'(x';y')_R$.

Тогда

$$\begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0, \\ y' = k(y - y_0) + y_0. \end{cases} \tag{10}$$

6) Множество гомотетий с общим центром образует группу.

Частные виды подобия. Подобные фигуры

Известно, что всякое преобразование подобия можно представить в виде произведения (композиции) гомотетии $H_{o,k}$ и движения f, т.е. $П_k=f \circ H_{o,k}$. Так как движения плоскости бывают двух родов (сохраняющие ориентацию плоскости и не сохраняющие), а гомотетия всегда сохраняет ориентацию плоскости, то подобие либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет ее ориентацию. В первом случае такое преобразование называется подобием I рода, а во втором — подобием II рода. Используя названные свойства и формулы движения и гомотетии, легко получить аналитические выражения подобия первого рода:

$$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + a, \\ y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + b, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{vmatrix} = k^2. \quad (11)$$

подобия второго рода:

$$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + a, \\ y' = kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + b, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} k\cos\alpha & k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & -k\cos\alpha \end{vmatrix} = -k^2. \quad (12)$$

Имеют место утверждения:

1. Любое преобразование подобия, отличное от движения, имеет одну и только одну неподвижную точку.

2. Любое подобие, имеющее более чем одну инвариантную точку или не имеющее неподвижных точек, является движением.

Используя эти факты и теорему о классификации движений, можно провести классификацию подобий плоскости:

Преобразования подобия I рода	Преобразования подобия II рода
1. Гомотетия 2. Центрально-подобное вращение (композиция гомотетии и вращения $R_{O,\alpha} \circ H_{O,k}$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm\pi$)) 3. Параллельный перенос	4. Осевая симметрия 5. Центрально-подобная симметрия (композиция гомотетии и осевой симметрии $S_l \circ H_{O,k}$, где $O \in l$) 6. Скользящая симметрия

Две фигуры называются подобными, если существует подобие, которое одну фигуру переводит в другую.

Пример 3. При гомотетии с центром в т. $S(1;2)$ прямая l: $x+y+2=0$ отображается на прямую l': $2x+2y-3=0$. Записать формулы гомотетии.

Решение. При гомотетии любая т. $A\in l$ переходит в т. $A'\in l'$: $A'=SA\cap l'$ и тогда $\overrightarrow{SA'}=k\cdot\overrightarrow{SA}$.

$A(0;-2)\in l$ $(0+(-2)+2=0)$ и

SA: $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y+2}{2+2}$,

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{4}$.

$4x = y + 2$.

SA: $4x - y - 2 = 0$.

$$A':\ \begin{cases}4x-y-2=0,\\2x+2y-3=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x-2,\\2x+8x-4-3=0,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x-2,\\10x=7,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0{,}7,\\y=0{,}8,\end{cases}\Rightarrow A'(0{,}7;0{,}8).$$

$$\overrightarrow{SA'}(-0{,}3;-1{,}2)\ \ \overrightarrow{SA}(-1;-4),\Rightarrow\begin{cases}-0{,}3=k\cdot(-1),\\-1{,}2=k\cdot(-4),\end{cases}\Rightarrow k=0{,}3.$$

$$H_{S,k}:\begin{cases}x'=0{,}3(x-1)+1,\\y'=0{,}3(y-2)+2,\end{cases}\quad H_{S,k}:\begin{cases}x'=0{,}3x+0{,}7,\\y'=0{,}3y+1{,}4.\end{cases}$$

1.6. Аффинное преобразование плоскости и его свойства

Преобразование плоскости называется аффинным, если оно любые три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переводит в три точки A', B', C', лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т.е. $(ABC)=(A'B'C')$.

Свойства аффинного преобразования:

1) Аффинное преобразование сохраняет порядок точек на прямой.

2) Аффинное преобразование точки, не лежащие на одной прямой, переводит в точки, не лежащие на одной прямой.

3) Подобие является частным случаем аффинного преобразования.

4) Аффинное преобразование параллельные прямые переводит в параллельные прямые.

5) Аффинное преобразование сохраняет отношение параллельных отрезков.

6) Любое аффинное преобразование аффинный репер $R\{O,E_1,E_2\}$ переводит в аффинный репер $R'\{O',E_1',E_2'\}$ и любую точку $M(x,y)_R$ в точку $M'(x,y)_{R'}$.

7) Для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует и притом единственное аффинное преобразование, которое точки $A\to A'$, $B\to B'$, $C\to C'$.

8) Любое аффинное преобразование либо сохраняет, либо меняет ориентацию плоскости.

Аффинное преобразование называется преобразованием первого рода, если оно не меняет ориентацию плоскости, и преобразованием второго рода, если оно меняет ориентацию плоскости.

***Способы задания аффинного преобразования*:**

1) указанием тройки точек, не лежащих на одной прямой, и их образов при данном аффинном преобразовании;

2) аналитически.

Пусть аффинное преобразование f: $R\{O,E_1,E_2\}\to R'\{O',E_1',E_2'\}$, причем $O'(a,b)_R$, $\vec{e}_1'=\overrightarrow{O'E_1'}(a_1,b_1)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$, $\vec{e}_2'=\overrightarrow{O'E_2'}(a_2,b_2)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$

$M(x,y)_R\to M'(x',y')_R$, тогда

$$\begin{cases} x'=a_1x+a_2y+a, \\ y'=b_1x+b_2y+b, \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{13}$$

Если f — аффинное преобразование первого рода, то $\Delta>0$, если f — аффинное преобразование второго рода, то $\Delta<0$.

Имеет место обратное утверждение.

Всякое отображение, заданное формулами (13), где $\Delta\neq 0$, является аффинным преобразованием, при этом, если $\Delta>0$ ($\Delta<0$), то аффинное преобразование первого (второго) рода.

2. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

2.1. Параллельное проектирование и его свойства

Рассмотрим в пространстве плоскость π и прямую l, не параллельную этой плоскости $l \not\parallel \pi$.

Зададим отображение пространства на плоскость π следующим образом. Каждой точке M' пространства поставим в соответствие точку M плоскости π такую, что $M'M \parallel l$ (рис. 1).

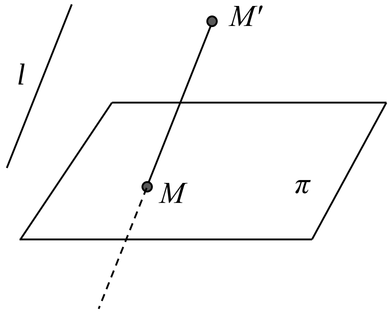

Рис. 1

Полученное отображение пространства на плоскость называется ***параллельным проектированием***. Точка M называется ***параллельной проекцией*** точки-оригинала M'. Плоскость π называется ***плоскостью проекции***. Прямая l задает направление проектирования. Прямые, параллельные прямой l, называются ***проектирующими прямыми***. Если в пространстве рассмотреть фигуру F' и задать параллельное проектирование каждой точки этой фигуры на плоскость проекции π по направлению прямой l, то в плоскости π получим фигуру F, которая называется проекцией оригинала F' (рис. 2).

Часто в качестве плоскости проекции выступает плоскость листа, и проекция оригинала может не поместиться на доске или листе. В этом случае проекция подвергается преобразованию подобия. Таким образом, проекция оригинала, подвергнутая преобразованию подобия, называется ***изображением оригинала***.

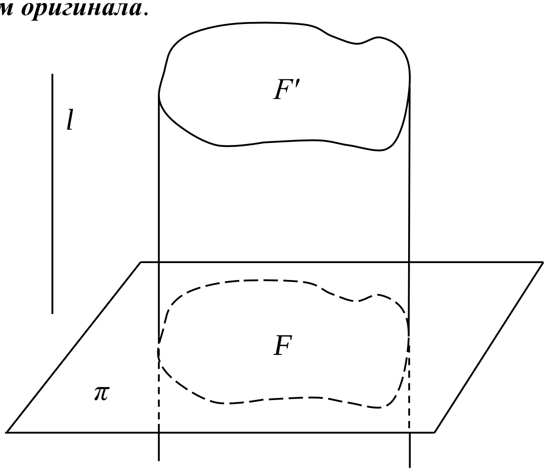

Рис. 2

Параллельное проектирование обладает следующими ***свойствами***:

1. Параллельной проекцией точки является точка.
2. Проекцией прямой, не параллельной направлению проектирования, является прямая. Прямые, параллельные прямой *l*, проектируются в точки.
3. Сохраняется простое отношение трех точек прямой.
4. Сохраняется параллелизм прямых и отрезков.
5. Сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой.

Принято коэффициентом искажения отрезка $A'B'$ при параллельном проектировании называть величину, равную отношению длины проекции отрезка к длине оригинала $k = \dfrac{AB}{A'B'}$.

Выделяют ***два вида параллельного проектирования:***

1) ортогональное проектирование, для него $l \perp \pi$.

2) неортогональное (косоугольное) проектирование, для него $l \not\perp \pi$.

2.2. Изображение плоских фигур

При изображении плоских фигур в параллельной проекции применяют следующие две теоремы:

Теорема 1. Любой треугольник плоскости проекции является изображением треугольника любой наперед заданной формы.

Теорема 2. Если ΔABC плоскости проекции является изображением вполне определенного $\Delta A'B'C'$ плоскости π', то каждая точка плоскости π является изображением определенной точки плоскости π'.

Следствие 1. Изображением параллелограмма плоскости является любой другой параллелограмм. Квадрат, ромб, прямоугольник являются частными случаями параллелограммов, поэтому их изображениями будут любые параллелограммы.

Следствие 2. Изображением трапеции является трапеция с тем же отношением длин оснований.

Следствие 3. Изображением данного четырехугольника будет четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся в том же отношении, что и у данного.

Четырехугольник $ABCD$ — изображение четырехугольника $A'B'C'D'$, причем $(AO,C)=(A'O',C')$, $(BO,D)=(B'O',D')$ (рис. 3).

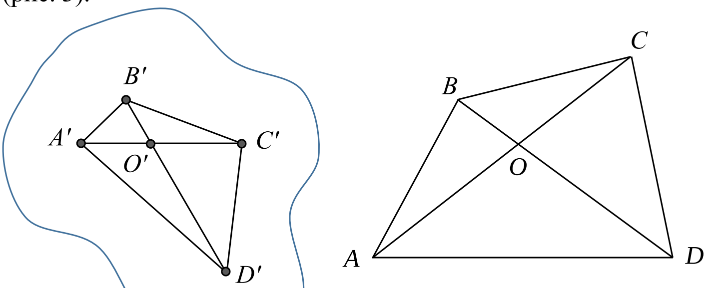

Рис. 3

Изображения фигур делятся на два вида:

1. Изображение фигуры определенной формы (то есть заданной с точностью до подобия). Изображение таких фигур называется ***метрически определенным.***

2. Изображение фигуры, форма которой не определена.

Изображение окружности, правильного многоугольника, прямоугольного треугольника с заданным отношением катетов — примеры метрически определенных изображений.

Изображение произвольного многоугольника, параллелограмма, равнобедренного треугольника — примеры изображений, не являющихся метрически определенными. Изображения второго вида становятся метрически определенными, если на оригинал наложить условия, задающие его форму.

Пример 1. Построить изображение правильного шестиугольника.

Анализ. Форма фигуры-оригинала задана. Задача носит метрический характер.

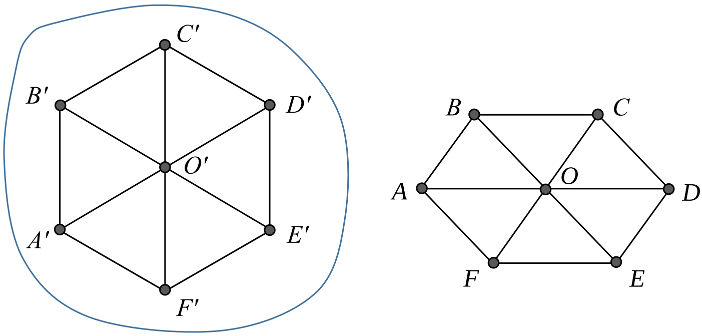

Рис. 4

Рассмотрим оригинал $A'B'C'D'E'F'$ (рис. 4). Выделим ромб $B'C'D'O'$. За изображение ромба $B'C'D'O'$ примем параллелограмм $BCDO$. Точка O' — середина отрезков $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$, следовательно, точка O будет серединой отрезков AD, BE, CF.

Построение:

1. Строим параллелограмм $BCDO$ — изображение ромба $B'C'D'O'$.

2. На продолжении CO откладываем $OF = CO$.

3. На продолжении BO откладываем $EO = BO$.

4. На продолжении DO откладываем $AO = DO$.

5. $ABCDEF$ — изображение правильного шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$.

Пример 2. Дано изображение равнобедренной трапеции. Построить изображение ее высот, проведенных из тупых углов.

Анализ. Рассмотрим оригинал $A'B'C'D'$ (рис. 5). $B'K'$, $C'F'$ — высоты равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$. Замечаем, что отрезок $M'N'$, соединяющий середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярен ее основаниям и, следовательно, параллелен отрезкам $B'K'$, $C'F'$.

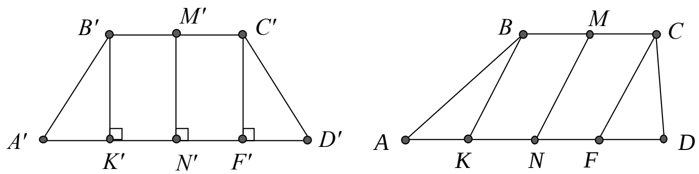

Рис. 5

Построение:

1. Трапеция $ABCD$ — изображение равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$.
2. M — середина BC, N — середина AD.
3. $BK \parallel MN$, $CF \parallel MN$.
4. BK, CF — искомые изображения.

Теорема 3. Изображением окружности является эллипс наперед заданной формы.

Пример 3. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности.

Анализ. Рассмотрим окружность и два взаимно перпендикулярных диаметра $A'B' \perp C'D'$ (рис. 6).

Проведем хорду $M'N' \parallel A'B'$, середина хорды $M'N'$ лежит на диаметре $C'D'$. Можно заметить, что каждый из взаимно перпендикулярных диаметров окружности есть множество середин хорд, параллельных другому диаметру.

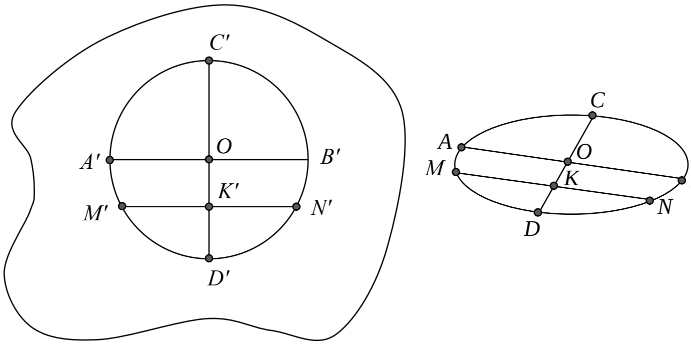

Рис. 6

Построение:

1. Эллипс — изображение окружности.
2. AB — диаметр эллипса, O середина AB.
3. $MN \parallel AB$.
4. K — середина MN.
5. CD — диаметр, сопряженный с диаметром AB эллипса.

Пример 4. Построить изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

Анализ. Рассмотрим оригинал — правильный треугольник $A'B'C'$, вписанный в окружность (рис. 7).

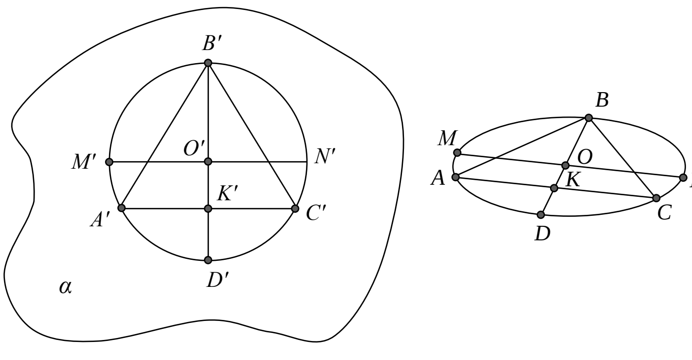

Рис. 7

Замечаем, что медиана правильного треугольника $A'B'C'$ принадлежит диаметру окружности $B'D'$. Взаимно перпендикулярный ему диаметр $M'N'$ параллелен стороне $A'C'$ и проходит через точку O', в которой пересекаются медианы ($B'O':O'K' = 2:1$).

Построение:

1. Эллипс — изображение окружности ω'.

2. *BD*, *MN* — два сопряженных диаметра эллипса, $BD \cap MN = O$.

3. Точка *K* — середина *OD*.

4. $AK \| MN$.

5. Треугольник *ABC* — изображение треугольника $A'B'C'$, вписанного в окружность ω'.

2.3. Изображение пространственных фигур

Построение изображений пространственных фигур основывается на двух теоремах.

Теорема 1 (Польке — Шварца). Всякий плоский четырехугольник вместе со своими диагоналями является изображением тетраэдра любой произвольной формы.

Следствием этой теоремы является ***теорема Польке***: любые три отрезка плоскости, исходящие из одной точки, являются изображением любых трех отрезков пространства, имеющих общее начало, в том числе три попарно ортогональных и равных отрезка.

Теорема 2. Если четырехугольник *ABCD* плоскости вместе с его диагоналями является изображением данного тетраэдра $A'B'C'D'$, то каждая точка *M* плоскости π является изображением вполне определенной точки M' пространства.

Пример 5. Построить изображение *n*-угольной призмы.

Построение:

1. Строим изображение *n*-угольника, лежащего в основании призмы, в соответствии с правилами параллельного проектирования.

2. От одной из вершин данного многоугольника в любом направлении откладываем отрезок произвольной длины, который по теореме Польке является изображением бокового ребра *n*-угольной призмы.

3. Дальнейшее построение ведется с учетом того, что боковые грани n-угольной призмы состоят из двух равных n-угольников и n параллелограммов (рис. 8).

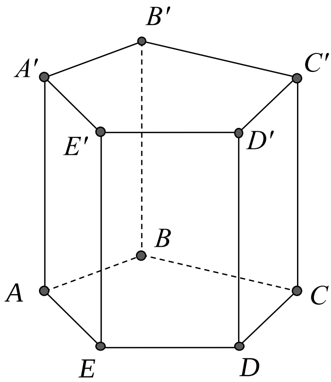

Рис. 8

Пример 6. Построить изображение n-угольной пирамиды.

Построение:

1. Строим изображение n-угольника, лежащего в основании пирамиды.

2. Выбираем произвольно точку S, которая является изображением вершины пирамиды.

3. Соединяем отрезками точку S и вершины построенного n-угольника основания (рис. 9).

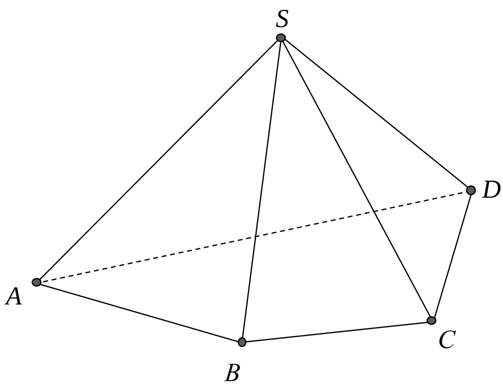

Рис. 9

При построении изображения усеченной пирамиды необходимо помнить, что боковые ребра пирамиды должны изображаться отрезками, лежащими на прямых, проходящих через одну точку.

Пример 7. Построить изображение цилиндра.

Построение:

1. Строим произвольный эллипс, который вместе со своими внутренними точками является изображением нижнего основания цилиндра.

2. От центра эллипса откладываем отрезок OO_1 произвольного направления и произвольной длины.

3. Строим эллипс с центром в точке O_1, равный предыдущему и имеющий те же направления осей.

4. Проводим два параллельных отрезка, касательных к построенным эллипсам (рис. 10). При построении изображения прямого цилиндра отрезок OO_1 выбирается так, чтобы он содержал малую ось исходного эллипса, то есть $OO_1 \perp AB$ (рис. 11).

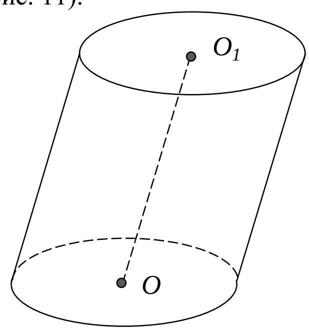

Рис. 10

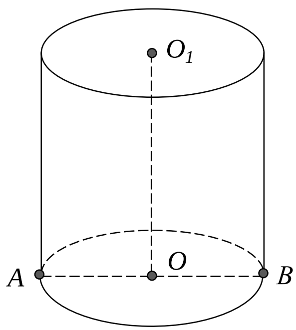

Рис. 11

Пример 8. Построить изображение конуса.

Построение:

1. Строим произвольный эллипс, который вместе со своими внутренними точками является изображением основания конуса.

2. Выбираем произвольно точку S, которую принимаем за изображение вершины конуса.

3. Из точки S проводим касательные к эллипсу, причем заметим, что точки касания A и B не являются диаметрально противоположными точками эллипса (рис. 12).

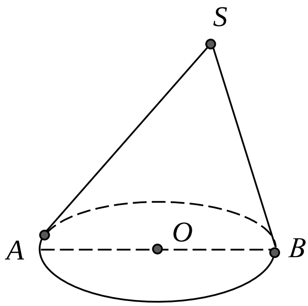

Рис. 12

Пример 9. Построить изображение шара.

Изображением шара в общем случае является эллипс с внутренними точками. Однако данное изображение не является наглядным. Поэтому чаще всего изображение шара строят в ортогональной проекции. В этом случае изображением шара является круг (рис. 13).

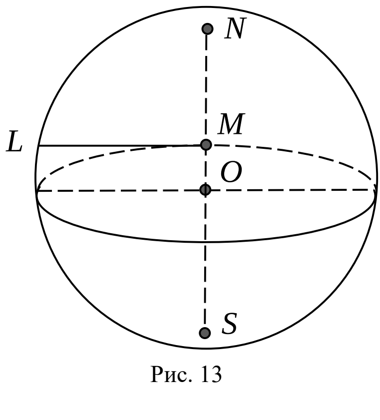

Рис. 13

Для того чтобы изображение шара было более наглядным, обычно строят изображение одной из больших окружностей шара, которую называют экватором, а также точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью шара, которые называют полюсами шара. Причем $ON = ML$, $OS = ON$, где ML — отрезок касательной к изображению экватора в точке M.

2.4. Изображение комбинации тел

При построении изображения комбинации тел для большей наглядности будем использовать предположение, что тело является прозрачным по отношению к вписанному в него телу и непрозрачным по отношению к себе. Целесообразно изображение комбинации цилиндра с призмой (конуса с пирамидой) начинать с изображения цилиндра (конуса), а изображение комбинации шара с другими телами — с построения изображения шара.

Пример 10. Построить изображение прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра.

Анализ. Пусть $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — прямоугольный параллелепипед, описанный около цилиндра. Тогда основаниями параллелепипеда являются квадраты, описанные около верхнего и нижнего оснований цилиндра. Стороны квадрата $A'B'C'D'$ — нижнего основания параллелепипеда — параллельны двум перпендикулярным диаметрам $M'N'$, $K'L'$ нижнего основания цилиндра, то есть $A'B' \parallel M'N' \parallel D'C'$, а $A'D' \parallel K'L' \parallel C'B'$, и касаются окружности в точках: $A'B'$ — в точке L', $B'C'$ — в точке N', $C'D'$ — в точке K', $A'D'$ — в точке M'. Боковые ребра параллелепипеда параллельны образующим цилиндра и равны им.

Построение:

1. Строим изображение цилиндра.

2. Строим параллелограмм $ABCD$ — изображение квадрата $A'B'C'D'$, описанного около нижнего основания цилиндра.

3. Строим отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, равные и параллельные отрезку OO_1.

4. Строим параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$.

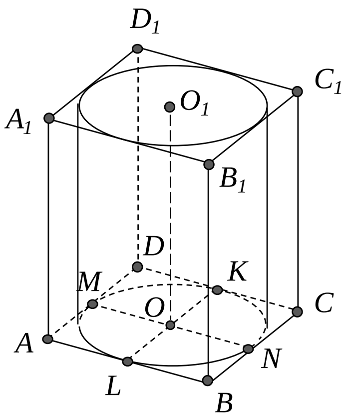

Рис. 14

Пример 11. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

Анализ. Пусть $A'B'C'S'$ — правильная треугольная пирамида, вписанная в конус. Тогда по условию задачи $\Delta A'B'C'$ — равносторонний. Изображение равностороннего треугольника, вписанного в окружность, было рассмотрено выше. Вершина пирамиды является вершиной конуса.

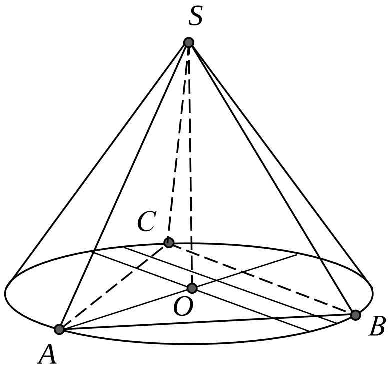

Рис. 15

Построение:

1. Строим изображение конуса с вершиной в точке S.

2. Строим ΔABC — изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

3. Строим отрезки SA, SB, SC.

Пример 12. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, описанной около шара.

Анализ. Пусть $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — правильная четырехугольная призма, описанная около шара. Заметим, что основания призмы касаются шара в полюсах. Тогда боковые грани призмы касаются шара в точках M', L', P', Q', принадлежащих экватору шара и являющихся концами двух перпендикулярных диаметров. Плоскость экватора пересекает боковую поверхность призмы по квадрату $A_0'B_0'C_0'D_0'$, стороны которого параллельны диаметрам $M'P'$, $L'Q'$. Заметим, что боковые ребра призмы $AA_1' = BB_1' = CC_1' = DD_1' = 2R$, где R — радиус шара.

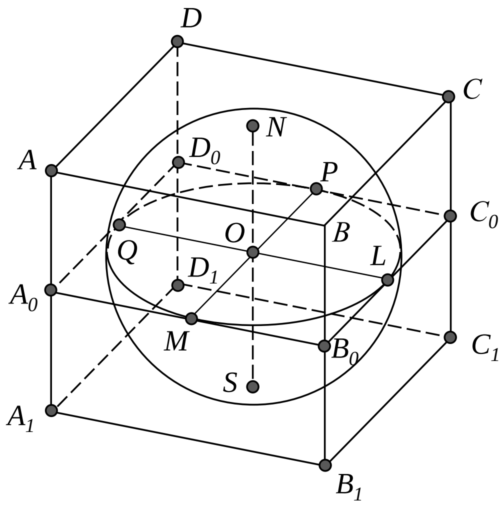

Рис. 16

Построение:

1. Строим изображение шара.

2. Строим параллелограмм $A_0B_0C_0D_0$ — изображение квадрата, описанного около экватора.

3. Строим
$A_0A = A_0A_1 = B_0B = B_0B_1 = C_0C = C_0C_1 = D_0D = D_0D_1 = R$ и параллельные NS.

4. Строим $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$.

2.5. Полные изображения. Позиционные задачи

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π', точку A', не принадлежащую плоскости π', и прямую a', не параллельную плоскости π' (рис. 17).

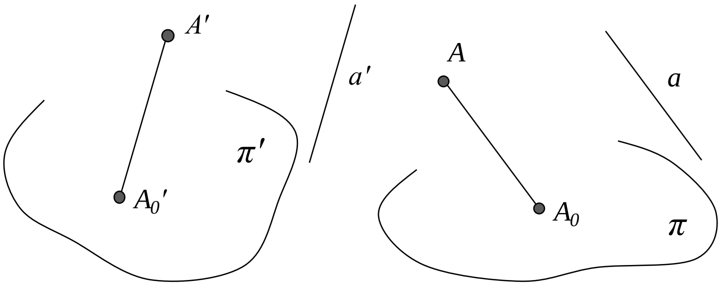

Рис. 17

Построим точку A_0' — параллельную проекцию точки A' на плоскость π' по направлению прямой a. Спроектируем данную конструкцию в некотором направлении на плоскость проекции — плоскость α, и пусть $\pi' \to \pi$, $A' \to A$, $A_0' \to A_0$, $a' \to a$. Плоскость π назовем основной плоскостью, а точку A_0 — основанием точки A.

Определение. Точка называется *заданной на проекционном чертеже*, если на нем изображена сама точка и ее параллельная проекция на основную плоскость, то есть основание точки.

Прямая AA_0, как и любая другая прямая, параллельная ей, определяет направление проектирования точек на основную плоскость. Будем называть такое проектирование ***внутренним проектированием***.

Замечание: внутреннее проектирование может быть как параллельным, так и центральным проектированием.

Определение. Изображение фигуры называется полным, если каждая точка этой фигуры является заданной.

Справедливы следующие ***утверждения:***

1. Изображение прямой, определенной двумя различными заданными точками, является полным.

2. Изображение плоскости, определенной тремя различными заданными точками, не лежащими на одной прямой, является полным.

3. Изображение любой призмы (цилиндра) является полным.

4. Изображение любой пирамиды (конуса) является полным.

К позиционным задачам относятся задачи на построение изображений общих элементов данных фигур. Остановимся на рассмотрении построения изображения сечений плоскостью многогранника, конуса, цилиндра.

Под сечением фигуры плоскостью будем понимать множество точек, общих для плоскости и фигуры. Так, плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику. Причем число сторон многоугольника не меньше трех, но не превосходит числа граней многогранника.

Выделяют ***три метода*** решения задач на построение сечений многогранников, цилиндров и конусов.

2.5.1. Метод следа

Суть этого метода состоит в том, что строится прямая l (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью определенной грани многогранника. Затем строятся точки пересечения соответствующих ребер с секущей плоскостью. С помощью этих точек строятся следы секущей плоскости на плоскостях остальных граней многогранника. При построении данным методом сечений цилиндра или конуса обычно сначала строят след секущей плоскости на плоскости основания. В дальнейшем договоримся обозначать одними и теми же буквами точки и прямые оригинала и их изображения.

При решении задач методом следа полезно уметь решать следующие две задачи.

1. Построить точку пересечения заданной прямой AB с основной плоскостью.

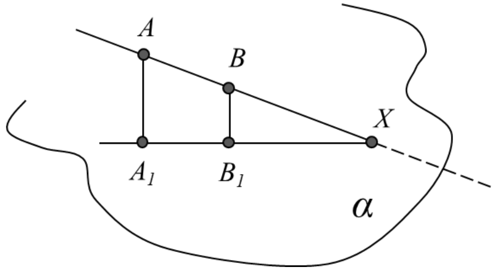

Рис. 18

Построение:

1) AB — прямая.

2) $AB \cap A_1B_1 = \text{X}$.

2. Построить след плоскости, определенной тремя различными заданными точками, не лежащими на одной прямой, с основной плоскостью α (рис. 19).

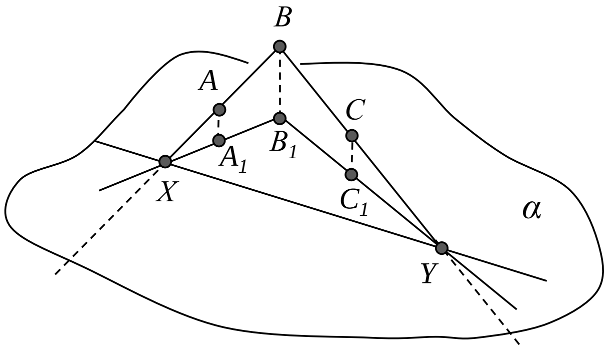

Рис. 19

Построение:

1) $A_1B_1 \cap AB = X$.

2) $BC \cap B_1C_1 = Y$.

3) XY — след плоскости (A, B, C) на основной плоскости α .

Пример 13. Построить сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки *E*, *F*, *K* (рис. 20).

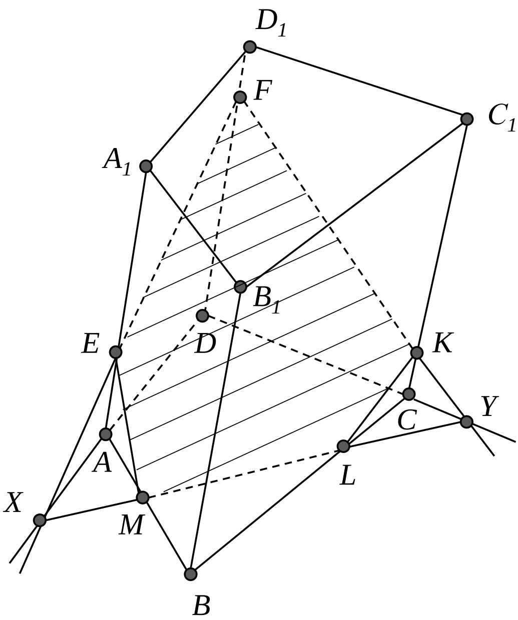

Рис. 20

Построение:

1) EF.
2) FK.
3) $EF \cap AD = X$.
4) $FK \cap DC = Y$.
5) XY — след.
6) $XY \cap BC = L$.
7) $XY \cap AB = M$.
8) $MEFKL$ — искомое сечение.

2.5.2. Метод внутреннего проектирования (или метод соответствия)

Этот метод был предложен Н. Ф. Четверухиным для построения сечения призм и цилиндров, пирамид и конусов.

При построении сечений призм и цилиндров целесообразно пользоваться решением следующей задачи:

Даны три различные точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость β при внутреннем параллельном проектировании. На плоскости β взята произвольная точка X_1 и проведена прямая *l*, параллельная проектирующей прямой AA_1 и проходящая через точку X_1 (рис. 21).

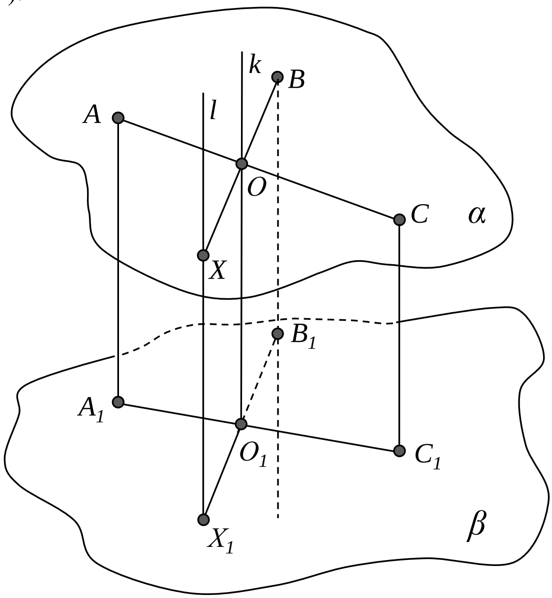

Рис. 21

Требуется построить точку $X = l \cap пл.(A, B, C)$.

Построение:

1) точка $O_1 = A_1C_1 \cap B_1X_1$.

2) точка $O_1 \in k : k$ параллельна *l*.

3) $AC \cap k = O$.

4) $BO \cap l = X$.

Пример 14. Построить сечение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки *K*, *L*, *M*.

Построение

Выберем за внутреннее проектирование параллельное проектирование по направлению бокового ребра на плоскость нижнего основания. K_1, L_1, M_1 — проекции точек K, L, M при выбранном проектировании (рис. 22).

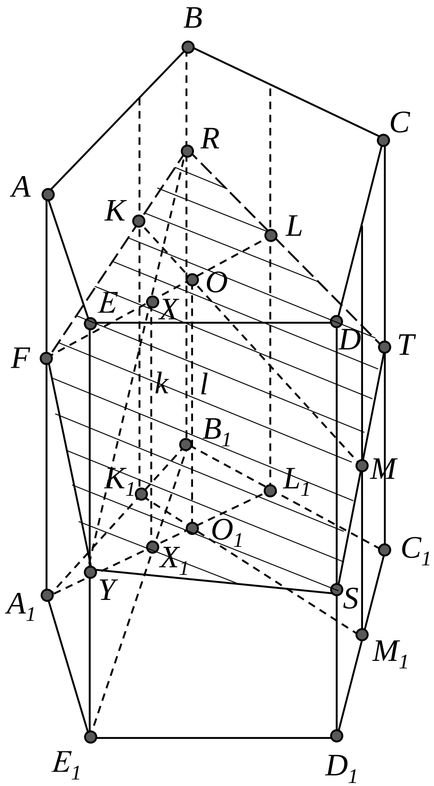

Рис. 22

1) $K_1M_1 \cap A_1L_1 = O_1$.
2) т. $O_1 \in l, l \parallel AA_1$.
3) $l \cap KM = O$.
4) $LO \cap AA_1 = F$.
5) $FK \cap BB_1 = R$.
6) $RL \cap CC_1 = T$.

7) $TM \cap DD_1 = S$.

8) $B_1E_1 \cap A_1L_1 = X_1$.

9) т. $X_1 \in k, k \parallel AA_1$.

10) $k \cap FL = X$.

11) $RX \cap EE_1 = Y$.

12) $YEERT$ — искомое сечение.

Для построения *сечений пирамиды*, конуса рассмотрим следующую **задачу**.

Даны три различные точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость β при внутреннем центральном проектировании с центром в точке *S*. На плоскости β взята произвольная точка X_1. Построить точку $X = SX_1 \cap пл.(A, B, C)$ (рис. 23).

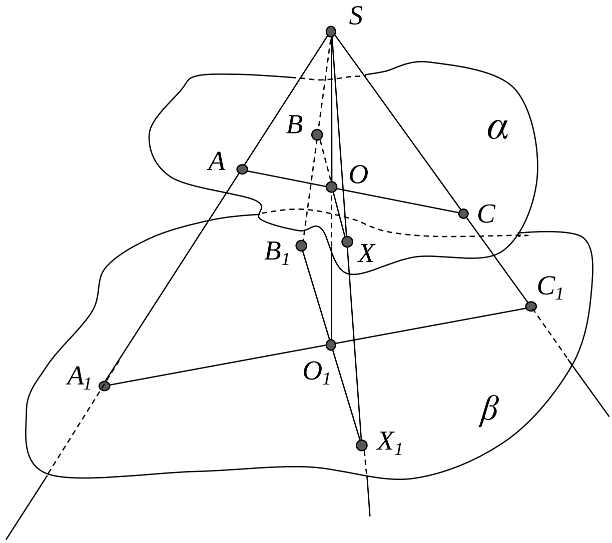

Рис. 23

Построение:

1) $A_1C_1 \cap B_1X_1 = O_1$.

2) $SO_1 \cap AC = O$.

3) $BO \cap SX_1 = X$.

Пример 15. Построить сечение четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Построение

За внутреннее проектирование выберем центральное проектирование с центром в точке S. Точки A, C, D — проекции точек K, L, M на плоскость оснований. Найдем точку секущей плоскости на ребре SB (рис. 24).

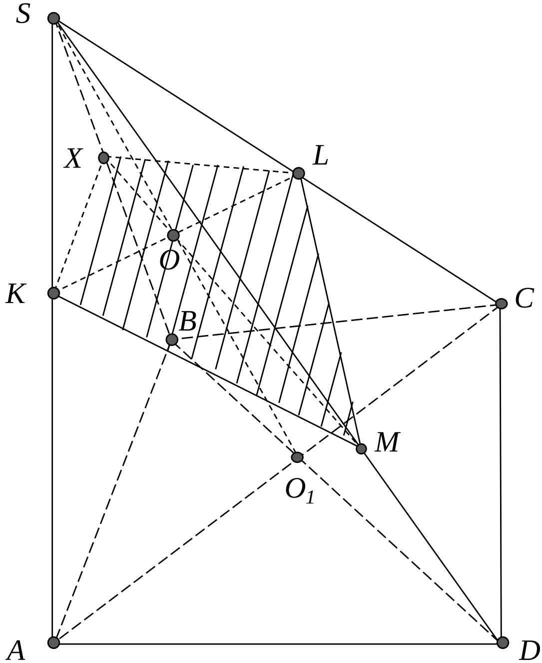

Рис. 24

1) $AC \cap BD = O_1$.
2) $SO_1 \cap KL = O$.
3) $MO \cap SB = X$.
4) $KXLM$ — искомое сечение.

2.5.3. Метод использования теорем и аксиом геометрии

При решении задач на построение сечений этим методом часто используются признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах, теорема: «Прямые, по которым плоскость пересекает две параллельные плоскости, параллельны между собой» — и другие.

Пример 16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M — внутренняя точка квадрата $ABCD$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной B_1D (рис. 25).

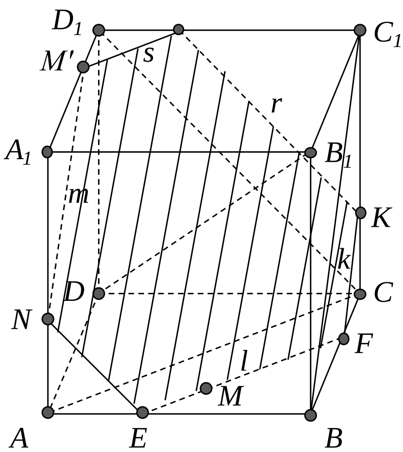

Рис. 25

Решение

Известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. BD — ортогональная проекция DB_1 на плоскость основания. $BD \perp AC$ — как диагонали квадрата, поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp AC \Rightarrow B_1D$ перпендикулярна прямой, проходящей через точку M и параллельной AC.

1) т. $M \in l : l \parallel AC$,

2) $l \cap AB = E,\ l \cap BC = F$,

B_1C — ортогональная проекция B_1D на плоскость грани BCC_1B_1, и так как BCC_1B_1 — квадрат, то $B_1C \perp C_1B$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp C_1B$. Поэтому прямая B_1D перпендикулярна прямой *k*, проходящей через точку *F* параллельно BC_1;

3) т. $F \in k : k \parallel BC_1$,

4) $k \cap CC_1 = K$.

Проводя аналогичные рассуждения для DB_1 и грани DCC_1D_1, выполняем следующие шаги построения.

5) т. $K \in r : r \parallel CD_1$,

6) $r \cap D_1C_1 = L$.

Так как плоскости верхнего и нижнего оснований параллельны, то по сформулированной выше теореме

7) $L \in s : s \parallel FE$,

8) $s \cap A_1D_1 = M'$.

Далее по той же теореме:

9) т. $M' \in m : m \parallel KF$,

10) $m \cap AA_1 = N$,

11) $NM'LKFE$ — искомое сечение.

2.6. Метрические задачи

Метрические задачи составляют группу задач, решение которых возможно только при известной форме оригинала. Эти задачи, как правило, передают свойства оригинала, не сохраняющиеся при параллельном проектировании: величину угла, перпендикулярность прямой и плоскости, свойство луча быть биссектрисой угла, отношение непараллельных отрезков и так далее. При решении метрических задач чаще всего применяется один из следующих способов:

1) использование метрики оригинала;

2) метод восстановления формы оригинала;

3) алгебраический метод.

Рассмотрим каждый из данных способов на конкретных примерах.

Пример 17. Параллелограмм $ABCD$ служит изображением квадрата $A'B'C'D'$. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки M' (точка M' принадлежит отрезку $D'C'$) к прямой $B'E'$, где E' — середина отрезка $A'D'$.

Решение

1 способ. Используем свойства оригинала: если F' — середина стороны $A'B'$, то отрезки $B'E'$ и $C'F'$ взаимно перпендикулярны и, следовательно, $M'K' \parallel C'F'$, где $M'K' \perp B'E'$ (рис. 26).

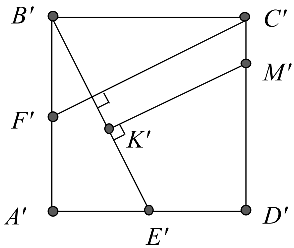

Рис. 26

На изображении квадрата строим изображение точки F' — точку F, которая будет серединой стороны AB. Проводим отрезок MK, параллельный FC (рис. 27).

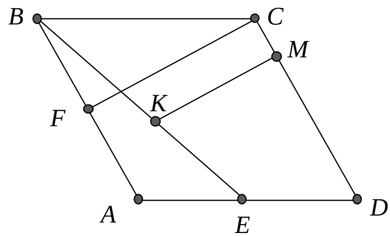

Рис. 27

2 способ. Решим задачу методом восстановления формы оригинала. Строим на стороне AD квадрат AB_0C_0D, который подобен оригиналу, и задаем параллельное проектирование по направлению CC_0. Из точки M_0 проводим перпендикуляр M_0K_0 к отрезку B_0E, затем строим отрезок KK_0, параллельный CC_0. MK — искомое изображение.

Действительно, из подобия квадратов $A'B'C'D'$ и AB_0C_0D и проведенных построений следует, что $\left(CM, D\right) = (C'M', D') =$ $= (C_0M_0, D)$
и
$(BK, E) = (B_0K_0, E) =$ $= (B'K', E')$
(рис. 28).

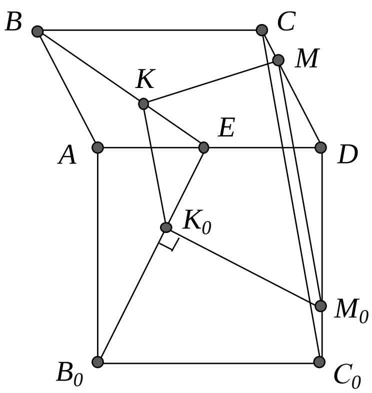

Рис. 28

Пример 18. Треугольник ABC является изображением прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого $\angle C' = 90°$, $A'C' : B'C' = 3:4$. Построить изображение биссектрисы, проведенной из вершины A'.

Решение

Решим эту задачу алгебраическим методом. Воспользуемся свойством биссектрисы внутреннего угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Отсюда $\dfrac{C'D'}{D'B'} = \dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{3}{5}$, тогда $CD : DB = 3:5$.

Таким образом, задача сводится к построению точки D на отрезке CB, удовлетворяющей условию: $CD : DB = 3:5$ (рис. 29).

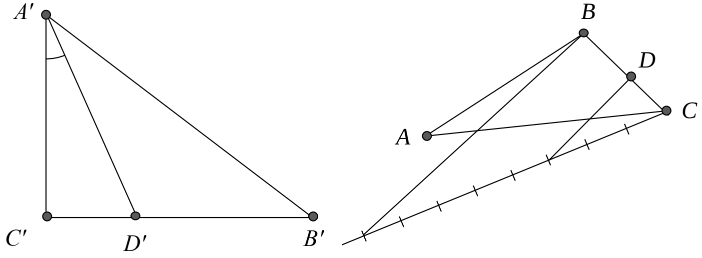

Рис. 29

Варианты контрольных работ

1—3 задачи контрольной работы предложены по теме «Преобразования плоскости», 4—9 задачи — по теме «Методы изображений».

Вариант 1

1. Определить тип преобразования. Найти координаты образа и прообраза точки $M(0,0)$ $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y + 4, \\ y' = \dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y. \end{cases}$

2. Найти уравнение оси осевой симметрии, при которой образом окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ является окружность $(x+4)^2+(y-5)^2=9$.

3. Найти уравнение образа и прообраза оси OX при гомотетии, переводящей точки $A(1,2)$, $B(-3,0)$ соответственно в точки $A'(2,1)$ и $B'(-4,-2)$.

4. Треугольник ABC — изображение равностороннего треугольника $A'B'C'$. Построить изображение прямых, перпендикулярных сторонам треугольника $A'B'C'$ и проведенных через точку M', взятую: 1) на одной из сторон $\Delta A'B'C'$, 2) внутри $\Delta A'B'C'$.

5. Треугольник ABC есть изображение $\Delta A'B'C'$. Построить изображение центра окружности, вписанной в $\Delta A'B'C'$, если $A'B' : B'C' : A'C' = 2 : 2 : 3$.

6. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды.

7. Построить изображение правильной треугольной призмы, вписанной в шар.

8. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1.

9. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно одному из боковых ребер

Вариант 2

1. Определить тип преобразования, найти его элементы: $\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y, \\ y' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y. \end{cases}$

2. Аффинное преобразование плоскости задано формулами $\begin{cases} x' = -x - y + 2, \\ y' = 2x + y - 2. \end{cases}$ Найти координаты образа и прообраза вектора $\vec{a}\,(3,-2)$, уравнение образа и прообраза прямой $x+y=4$.

3. Найти координаты центров гомотетий, переводящих линию $x^2+y^2-1=0$ в линию $x^2 + y^2 - x = 0$.

4. Дано изображение треугольника и двух его высот. Построить изображение центра круга, описанного около треугольника-оригинала.

5. Дано изображение $\Delta A'B'C'$ ($\angle C' = 90°$, $A'C'$ = 6, $B'C'$ = 8). Построить изображение биссектрисы угла $\angle A'B'C'$.

6. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных осевых сечений цилиндра.

7. Построить изображение правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар.

8. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон и середину высоты.

9. Построить сечение правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ BD_1 призмы, параллельной не пересекающим ее диагоналям оснований.

Вариант 3

1. Найти координаты образа и прообраза точки $M(2,3)$ при параллельном переносе, который переводит линию $x^2+y^2-4=0$ в линию $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

2. Определить тип преобразования, найти его элементы: $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y. \end{cases}$

3. Найти уравнение прообраза прямой $l: 2x + 3y = 0$ при гомотетии с центром в точке $S(1,2)$ и переводящей $m: x + y + 1 = 0$ в $m': x + y + 5 = 0$.

4. Построить изображение правильного треугольника, описанного около окружности.

5. Треугольник ABC — изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$ (C' — вершина прямого угла), катеты которого $A'C'$ и $C'B'$ относятся как 1 : 3. Построить изображение высоты треугольника $\Delta A'B'C'$, проведенный к гипотенузе $A'B'$.

6. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных осевых сечений конуса.

7. Построить изображение правильной треугольной призмы, описанной около шара.

8. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью MKL, где M принадлежит ребру AA_1, точка K принадлежит грани A_1ABB_1, а точка L расположена вне призмы.

9. Построить сечение тетраэдра ABCD плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую AD, точку N, принадлежащую AB, и параллельной AC.

Вариант 4

1. Написать аналитические формулы гомотетии с центром в точке $A(2,-1)$ и коэффициентом $k = 4$. Найти образ и прообраз линий $x - y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 - x - 1 = 0$.

2. Доказать, что формулы $x' = x+4$, $y' = -y+2$, заданные в ПДСК, задают движение. Определить вид этого движения.

3. Прямая $l: y + 2x - 3 = 0$ отображается симметрией с центром в точке $S(1,2)$ в некоторую прямую. При этом точка M, принадлежащая прямой l, отображается в точку $M'(-3, b)$. Определите координаты точки M.

4. Дано изображение окружности и вписанного в нее $\Delta A'B'C'$. Построить изображение высоты и медианы $\Delta A'B'C'$, проведенных из вершины A'.

5. Дано изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого катет $B'C'$ в два раза больше катета $C'A'$. Построить изображения биссектрис углов $\angle A'$, $\angle B'$.

6. Построить изображение цилиндра, вписанного в шар.

7. Построить изображение конуса и описанной около него правильной треугольной пирамиды.

8. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, одна из которых принадлежит нижнему основанию призмы, вторая — одному из ее боковых ребер, а третья — одной из боковых ее граней.

9. Построить сечение тетраэдра ABCD плоскостью, содержащей медиану CM грани ABC и параллельной прямой AD.

Вариант 5

1. Дано аффинное преобразование $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5, \\ y' = 4x - 3y - 2. \end{cases}$ В какие прямые перейдут при этом преобразовании оси *(OX), (OY)* и прямые $2x + 3y + 5 = 0$ и $4x - 3y - 2 = 0$?

2. Доказать, что формулы $x' = -x - 2$, $y' = y + 1$, заданные в ПДСК, являются формулами движения. Определить вид движения.

3. Найти уравнение образа прямой $2x + 3y = 0$ при гомотетии с центром $S(1,2)$, которая переводит прямую $x + y + 1 = 0$ в прямую $x + y - 5 = 0$.

4. Данный эллипс есть изображение окружности. Построить изображение квадратов, вписанного и описанного около окружности.

5. Дано изображение равнобедренного треугольника A′B′C′, боковая сторона которого в два раза больше основания A′C′. Построить изображение высоты треугольника A′B′C′, проведенной к стороне A′B′.

6. Построить изображение конуса, вписанного в шар.

7. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

8. Построить изображение сечения четырехугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками на ее поверхности.

9. Построить сечение тетраэдра ABCD плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую AB, и параллельной грани DBC.

Вариант 6

1. В прямоугольной декартовой системе координат параллельный перенос задан парой соответственных точек $M(1,2)$, $M'(5,4)$. Написать аналитические формулы параллельного переноса. Найти образы точек $A(-2,4)$, $M(3,-5)$ и параболы $y = x^2$. Сделать чертеж.

2. Доказать, что формулы $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$, записанные в ПДСК, являются формулами движения. Определить вид движения.

3. Записать формулы гомотетии с центром в точке $S(2,3)$ и $k = 2$. Найти уравнения образа и прообраза окружности ω: $x^2 + y^2 = 4$ при данной гомотетии.

4. Дано изображение треугольника, описанного около окружности. Построить изображения его биссектрисы и высоты, проведенных из вершины B'.

5. Дано изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, катеты которого $A'C' : B'C' = 1 : 2$. Построить изображение прямой l', проходящей через середину O' его гипотенузы и перпендикулярной к ней.

6. Построить изображение конуса, описанного около шара.

7. Построить изображение цилиндра, вписанного в конус так, что нижнее основание цилиндра принадлежит основанию конуса, а окружность верхнего основания цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса.

8. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через точку A, лежащую на боковой поверхности цилиндра, и через точки B и C, лежащие в плоскости его нижнего основания.

9. Построить сечение шестиугольной пирамиды SABCDEF плоскостью, проходящей через точку M на основании пирамиды и параллельной боковой грани SAF.

Вариант 7

1. Определить тип преобразования, найти его элементы:
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

2. Найти уравнения инвариантных прямых осевой симметрии, при которой образом окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ является окружность $(x+4)^2+(y-5)^2=2$.

3. Найти уравнение прообраза прямой l: $3x-y+1=0$ при гомотетии, переводящей $A(2,1)\to A'(7,4)$, $B(3,0)\to B'(11,0)$.

4. Дано изображение окружности и треугольника, вписанного в эту окружность. Построить изображения высот треугольника.

5. Дано изображение треугольника A′B′C′, стороны которого $A'B' : B'C' : A'C' = 2 : 4 : 5$. Построить изображение высоты $B'H'$ к стороне $A'C'$.

6. Построить изображение цилиндра, описанного около шара.

7. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в правильную треугольную призму так, чтобы вершины основания пирамиды принадлежали сторонам основания призмы.

8. Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной следом и точкой, не лежащей на поверхности цилиндра.

9. На двух гранях параллелепипеда даны две скрещивающиеся диагонали. Построить такое сечение параллелепипеда, плоскость которого проходила бы через одну из этих диагоналей и была бы параллельна другой.

Вариант 8

1. Написать аналитические формулы параллельного переноса, отображающего график функции $y = x^2$ на график функции $y = x^2 - 4x + 10$. Сделать чертеж. Написать уравнения образа и прообраза прямой $x - 3y + 5 = 0$. Репер ортонормированный.

2. В ортонормированном репере R преобразование f плоскости задано формулами: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}, \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Доказать, что f — движение, определить его род и вид. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые.

3. Составить формулы гомотетии, зная уравнение инвариантной прямой $x+2y-3=0$ и координаты двух соответствующих точек $M(2,2)$ и $M'(-4,4)$.

4. На плоскости задано изображение окружности и треугольника. Построить изображение ортоцентра треугольника.

5. Треугольник ABC — изображение прямоугольного треугольника A′B′C′, у которого катеты A′C′ : B′C′ = 3 : 4. Построить изображение центра окружности, вписанной в треугольник A′B′C′.

6. Построить изображение шара, описанного около усеченного конуса.

7. Построить изображение цилиндра и вписанной в него правильной треугольной призмы.

8. Построить сечение конуса плоскостью, заданной точкой A, лежащей на образующей конуса, и точками B и C, принадлежащими плоскости основания.

9. Построить сечение усеченной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно диагонали основания.

Вариант 9

1. Записать формулы параллельного переноса, при котором точка $A(1,-3)$ переходит в точку $A'(-2,4)$. Найти образы и прообразы точки $K(1,-1)$ и кривой $\gamma : x^2 - 2xy + y^2 - 5 = 0$.

2. В ортонормированном репере R преобразование f плоскости задано формулами: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + 6. \end{cases}$ Доказать, что f — движение, определить его род и вид. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые.

3. Найти координаты образа точки $M(-1,8)$ при гомотетии с центром $S(1,-5)$, которая переводит точку $A(0,0)$ в $A'(-4,20)$.

4. В параллельной проекции даны изображения окружности и угла, лежащего в плоскости окружности. Построить изображение его биссектрисы.

5. Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна удвоенной стороне основания. Построить изображение центра окружности, описанной около него.

6. Построить изображение шара, вписанного в усеченный конус.

7. Построить изображение правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.

8. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, две из которых принадлежат боковым ребрам пирамиды, а третья — плоскости основания.

9. Дано изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точек $P \in B_1C_1$, $K \in DC$. Построить сечение плоскостью, проходящей через точки A_1, K, P.

Вариант 10

1. Составить в ПДСК формулы гомотетии, при которой окружность с центром $O_1(1,1)$ переходит в окружность с центром $O_2(4,4)$ того же радиуса.

2. Вычислить координаты центра поворота, заданного формулами:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 1, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 2. \end{cases}$$

3. В ортонормированном репере R преобразование f плоскости задано формулами: $\begin{cases} x' = -x - 6, \\ y' = y. \end{cases}$ Доказать, что f — движение, определить его род и вид. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые.

4. Дано изображение окружности и треугольника, вписанного в эту окружность. Построить изображения высот треугольника.

5. Дано изображение равнобедренного треугольника A′B′C′, боковая сторона которого в два раза больше основания $A'C'$. Построить изображение высоты треугольника A′B′C′, проведенной к стороне $A'B'$.

6. Построить изображение цилиндра, вписанного в шар.

7. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в правильную треугольную призму так, чтобы вершины основания пирамиды принадлежали сторонам основания призмы.

8. Построить сечение конуса плоскостью, заданной точкой A, лежащей на образующей конуса, и точками B и C, принадлежащими плоскости основания.

9. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1.

Вопросы к экзамену (зачету). III курс, 5 семестр

1. Преобразования множеств. Группа преобразований плоскости.
2. Движение плоскости и его свойства.
3. Движения плоскости I и II рода. Аналитические формулы движения.
4. Параллельный перенос и поворот плоскости.
5. Осевая и скользящая симметрии плоскости.
6. Классификация движений плоскости.
7. Разложение движений в произведение осевых симметрий.
8. Аффинное преобразование пространства. Свойства аффинного преобразования. Частные виды аффинных преобразований. Групповой подход к определению геометрии.
9. Групповые свойства движений плоскости. Симметрия фигур. Равенство фигур.
10. Подобие плоскости и его свойства.
11. Гомотетия плоскости и ее свойства.
12. Аналитическое выражение подобия. Групповые свойства подобия. Подобные фигуры.

Вопросы к экзамену (зачету). III курс, 6 семестр

1. Параллельное проектирование и его свойства.
2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции.
3. Теорема Польке — Шварца.
4. Изображения тетраэдра, куба, призм, пирамид в параллельной проекции.
5. Изображение конуса, цилиндра, шара в параллельной проекции.
6. Изображение комбинации тел в параллельной проекции.
7. Полные и неполные изображения.
8. Решение задач на построение сечений многогранников, цилиндров и конусов методом следа.
9. Решение задач на построение сечений методом внутреннего проектирования.

10. Метод использования аксиом и теорем геометрии при решении задач на построение сечений.

11. Метрические задачи и методы решения метрических задач.

Список рекомендуемой литературы

1. Атанасян, Л. С. Геометрия, ч. 2 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. М., 1987.

2. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии, ч. 2 / Л. С. Атанасян [и др.]. М., 1975.

3. Болодурин, В. С. Краткий курс лекций по геометрии. Ч. 1, 2 / В. С. Болодурин. Оренбург, 2003.

4. Базылев, В. Т. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев [и др.]. М. : Просвещение, 1980.

5. Вахмянина, О. А. Методы изображений / О. А. Вахмянина, Т. С. Измайлова. Оренбург, 1997.

6. Прояева, И. В. О развитии конструктивных способностей учащихся в школьном курсе геометрии / И. В. Прояева // Россия и Европа: связь культуры и экономики : материалы IX междунар. науч.-практ. конф. Прага, Чешская республика, 2014. С. 200—201.

7. Прояева, И. В. Формирование конструктивных способностей учащихся при решении стереометрических задач / И. В. Прояева // Россия и Европа: связь культуры и экономики : материалы XI междунар. науч.-практ. конф. Прага, Чешская республика, 2015.

Учебное издание

Прояева Ирина Владимировна
Сафарова Алия Дамировна

Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Преобразования плоскости и методы изображений»

Учебно-методическое пособие

Редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано в печать 15.03.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 3,27
Тираж 50 экз. Заказ 6

ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет». 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19