МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. В. Прояева, А. Д. Сафарова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО КУРСУ «МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ»

Учебно-методическое пособие для студентов
физико-математических факультетов
педагогических вузов

Оренбург
Издательство ОГПУ
2016

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73
П84

Рецензенты

А. С. Ракитянский, кандидат физико-математических наук, доцент
Г. М. Гузаиров, кандидат физико-математических наук, доцент

Прояева И. В.

П84 **Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Методы изображений»** : учеб.-метод. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов педвузов / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова ; Мин-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВПО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2016. — 36 с. : ил. — ISBN 978-5-85859-629-5.

Пособие содержит темы, входящие в рабочую программу дисциплины «Геометрия: методы изображений», а также планы семинарских занятий, дополнительные задания для работы над задачами по темам семинарских занятий, небольшой глоссарий. Книга предназначена студентам очной и заочной форм обучения (направление подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика», «Математика и информатика»).

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73

ISBN 978-5-85859-629-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
1. Параллельное проектирование и его свойства 5
2. Изображение плоских фигур..7
3. Изображение пространственных фигур 11
4. Изображение комбинации тел..15
5. Полные изображения. Позиционные задачи........................18
5.1. Метод следа...19
5.2. Метод внутреннего проектирования
(или метод соответствия)..21
5.3. Метод использования теорем и аксиом геометрии 26
6. Метрические задачи...27
Задачи для самостоятельного решения 30
Вопросы к экзамену (зачету)..34
Список литературы 35

Введение

Основная цель пособия — организация самостоятельной аудиторной и внеаудиторной деятельности студентов по курсу «Методы изображений».

Целью курса является формирование пространственных и конструктивных компетенций. Этому способствует материал пособия в целом, и прежде всего задания, носящие проблемно-поисковый характер. Значительное место при изучении курса отводится работе над построением пространственных фигур, особенно их сечений [1].

Основное внимание уделяется методике построения сечений различных пространственных тел. Теоретический материал соединен с практическими задачами, что способствует формированию математического мышления как инструмента для правильной постановки задачи, для оценки ее данных с целью выделения существенных из них и для выбора метода ее решения; математической интуиции, позволяющей предвидеть нужный результат, прежде чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений.

Пособие адресовано в первую очередь студентам бакалавриата четвертого семестра очной формы обучения (направление подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика», «Математика и информатика»), изучающим предмет «Геометрия», а также может быть использовано студентами заочной формы обучения, слушателями курсов профессиональной переподготовки и повышения квалификации учителей, преподающих геометрию в 10—11 классах средней школы, лицеях и гимназиях [2], преподавателями вузов в качестве руководства и дополнительного материала при подготовке к практическим занятиям по геометрии.

1. Параллельное проектирование и его свойства

Рассмотрим в пространстве плоскость π и прямую l, не параллельную этой плоскости.

Зададим отображение пространства на плоскость π следующим образом. Каждой точке M' пространства поставим в соответствие точку M плоскости π такую, что $M'M \parallel l$ (рис. 1).

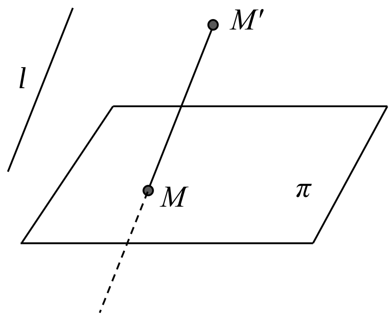

Рис. 1

Полученное отображение пространства на плоскость называется ***параллельным проектированием***. Точка M называется ***параллельной проекцией*** точки-оригинала M'. Плоскость π называется ***плоскостью проекции***. Прямая l задает направление проектирования. Прямые, параллельные прямой l, называются ***проектирующими прямыми***. Если в пространстве рассмотреть фигуру F' и задать параллельное проектирование каждой точки этой фигуры на плоскость проекции π по направлению прямой l, то в плоскости π получим фигуру F, которая называется проекцией оригинала F' (рис. 2).

Часто в качестве плоскости проекции выступает плоскость листа, и проекция оригинала может не поместиться на доске или листе. В этом случае проекция подвергается преобразованию подобия. Таким образом, проекция оригинала, подвергнутая преобразованию подобия, называется ***изображением оригинала***.

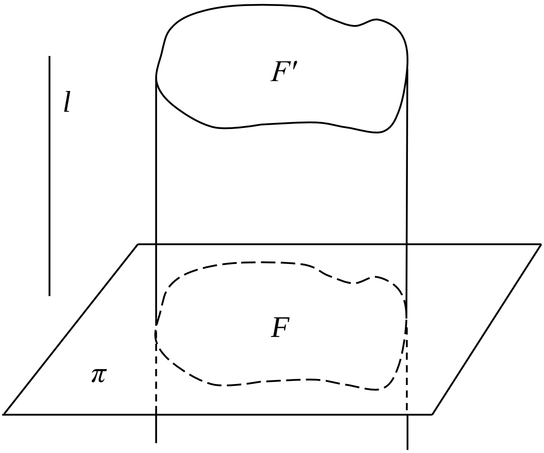

Рис. 2

Параллельное проектирование обладает следующими ***свойствами:***

1. Параллельной проекцией точки является точка.

2. Проекцией прямой, не параллельной направлению проектирования, является прямая. Прямые, параллельные прямой *l*, проектируются в точки.

3. Сохраняется простое отношение трех точек прямой.

4. Сохраняется параллелизм прямых и отрезков.

5. Сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой.

Принято коэффициентом искажения отрезка $A'B'$ при параллельном проектировании называть величину, равную отношению длины проекции отрезка к длине оригинала $k = \dfrac{AB}{A'B'}$.

Выделяют ***два вида параллельного проектирования:***

1) ортогональное проектирование, для него $l \perp \pi$.

2) неортогональное (косоугольное) проектирование, для него $l \not\perp \pi$.

2. Изображение плоских фигур

При изображении плоских фигур в параллельной проекции применяют следующие две теоремы:

Теорема 1. Любой треугольник плоскости проекции является изображением треугольника любой наперед заданной формы.

Теорема 2. Если ΔABC плоскости проекции является изображением вполне определенного $\Delta A'B'C'$ плоскости π', то каждая точка плоскости π является изображением определенной точки плоскости π'.

Следствие 1. Изображением параллелограмма плоскости является любой другой параллелограмм. Квадрат, ромб, прямоугольник являются частными случаями параллелограммов, поэтому их изображениями будут любые параллелограммы.

Следствие 2. Изображением трапеции является трапеция с тем же отношением длин оснований.

Следствие 3. Изображением данного четырехугольника будет четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся в том же отношении, что и у данного.

Четырехугольник *ABCD* — изображение четырехугольника $A'B'C'D'$, причем $(AO,C)=(A'O',C')$, $(BO,D)=(B'O',D')$ (рис. 3).

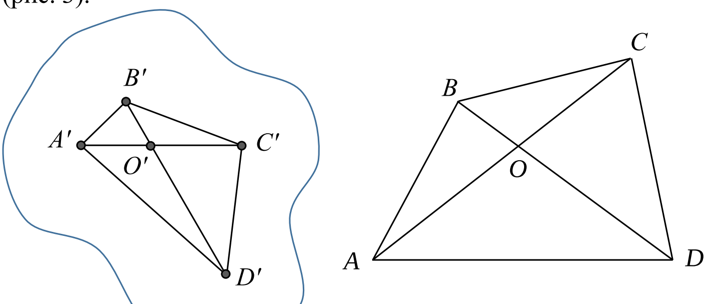

Рис. 3

Изображения фигур делятся на два вида:

1) изображение фигуры определенной формы (то есть заданной с точностью до подобия); изображение таких фигур называется ***метрически определенным***;

2) изображение фигуры, форма которой не определена.

Изображение окружности, правильного многоугольника, прямоугольного треугольника с заданным отношением катетов — примеры метрически определенных изображений.

Изображение произвольного многоугольника, параллелограмма, равнобедренного треугольника — примеры изображений, не являющихся метрически определенными. Изображения второго вида становятся метрически определенными, если на оригинал наложить условия, задающие его форму.

Пример 1. Построить изображение правильного шестиугольника.

Анализ. Форма фигуры-оригинала задана. Задача носит метрический характер.

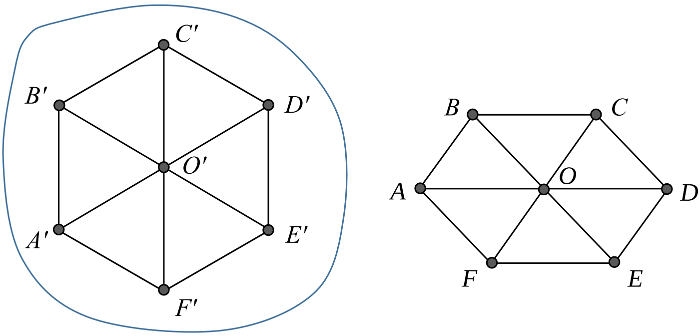

Рис. 4

Рассмотрим оригинал $A'B'C'D'E'F'$ (рис. 4). Выделим ромб $B'C'D'O'$. За изображение ромба $B'C'D'O'$ примем параллелограмм $BCDO$. Точка O' — середина отрезков $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$, следовательно, точка O будет серединой отрезков AD, BE, CF.

Построение:

1. Строим параллелограмм $BCDO$ — изображение ромба $B'C'D'O'$.

2. На продолжении CO откладываем $OF = CO$.

3. На продолжении BO откладываем $EO = BO$.

4. На продолжении DO откладываем $AO = DO$.

5. $ABCDEF$ — изображение правильного шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$.

Пример 2. Дано изображение равнобедренной трапеции. Построить изображение ее высот, проведенных из тупых углов.

Анализ. Рассмотрим оригинал $A'B'C'D'$ (рис. 5). $B'K'$, $C'F'$ — высоты равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$. Замечаем, что отрезок $M'N'$, соединяющий середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярен ее основаниям и, следовательно, параллелен отрезкам $B'K'$, $C'F'$.

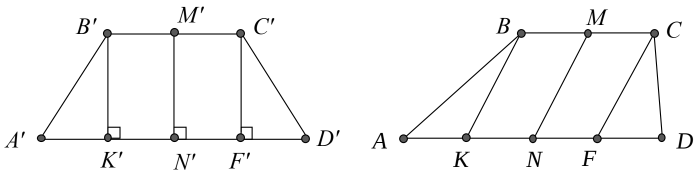

Рис. 5

Построение:

1. Трапеция $ABCD$ — изображение равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$.
2. M — середина BC, N — середина AD.
3. $BK \parallel MN$, $CF \parallel MN$.
4. BK, CF — искомые изображения.

Теорема 3. Изображением окружности является эллипс наперед заданной формы.

Пример 3. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности.

Анализ. Рассмотрим окружность и два взаимно перпендикулярных диаметра $A'B' \perp C'D'$ (рис. 6).

Проведем хорду $M'N' \parallel A'B'$, середина хорды $M'N'$ лежит на диаметре $C'D'$. Можно заметить, что каждый из взаимно перпендикулярных диаметров окружности есть множество середин хорд, параллельных другому диаметру.

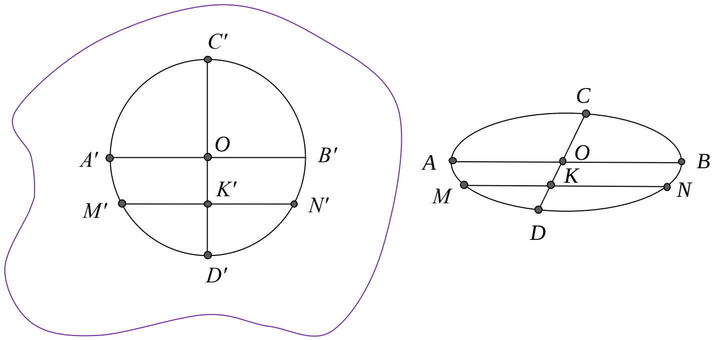

Рис. 6

Построение:

1. Эллипс — изображение окружности.
2. AB — диаметр эллипса, O середина AB.
3. $MN \parallel AB$.
4. K — середина MN.
5. CD — диаметр, сопряженный с диаметром AB эллипса.

Пример 4. Построить изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

Анализ. Рассмотрим оригинал — правильный треугольник $A'B'C'$, вписанный в окружность (рис. 7).

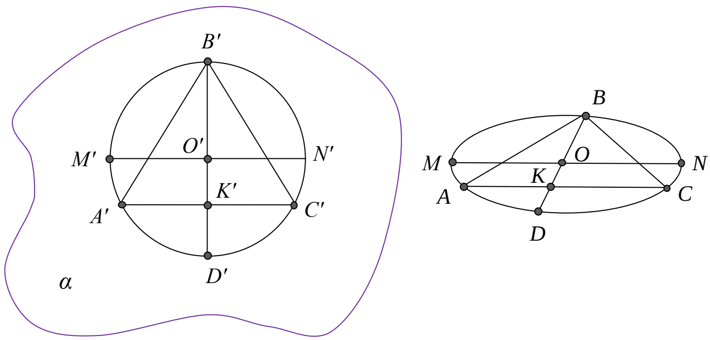

Рис. 7

Замечаем, что медиана правильного треугольника $A'B'C'$ принадлежит диаметру окружности $B'D'$. Взаимно перпендикулярный ему диаметр $M'N'$ параллелен стороне $A'C'$ и проходит через точку O', в которой пересекаются медианы ($B'O' : O'K' = 2:1$).

Построение:

1. Эллипс — изображение окружности ω'.

2. BD, MN — два сопряженных диаметра эллипса, $BD \cap MN = O$.

3. Точка K — середина OD.

4. $AK \parallel MN$.

5. Треугольник ABC — изображение треугольника $A'B'C'$, вписанного в окружность ω'.

3. Изображение пространственных фигур

Построение изображений пространственных фигур основывается на двух теоремах.

Теорема 1 (Польке — Шварца). Всякий плоский четырехугольник вместе со своими диагоналями является изображением тетраэдра любой произвольной формы.

Следствием этой теоремы является ***теорема Польке***: любые три отрезка плоскости, исходящие из одной точки, являются изображением любых трех отрезков пространства, имеющих общее начало, в том числе три попарно ортогональных и равных отрезка.

Теорема 2. Если четырехугольник $ABCD$ плоскости вместе с его диагоналями является изображением данного тетраэдра $A'B'C'D'$, то каждая точка M плоскости π является изображением вполне определенной точки M' пространства.

Пример 5. Построить изображение n-угольной призмы.

Построение:

1. Строим изображение n-угольника, лежащего в основании призмы, в соответствии с правилами параллельного проектирования.

2. От одной из вершин данного многоугольника в любом направлении откладываем отрезок произвольной длины, который по теореме Польке является изображением бокового ребра n-угольной призмы.

3. Дальнейшее построение ведется с учетом того, что боковые грани n-угольной призмы состоят из двух равных n-угольников и n параллелограммов (рис. 8).

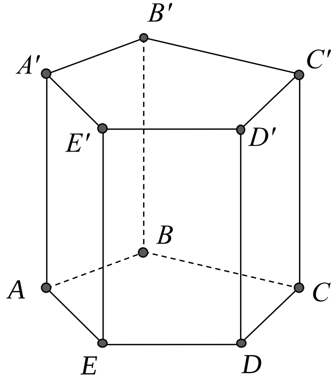

Рис. 8

Пример 6. Построить изображение n-угольной пирамиды.

Построение:

1. Строим изображение n-угольника, лежащего в основании пирамиды.

2. Выбираем произвольно точку S, которая является изображением вершины пирамиды.

3. Соединяем отрезками точку S и вершины построенного n-угольника основания (рис. 9).

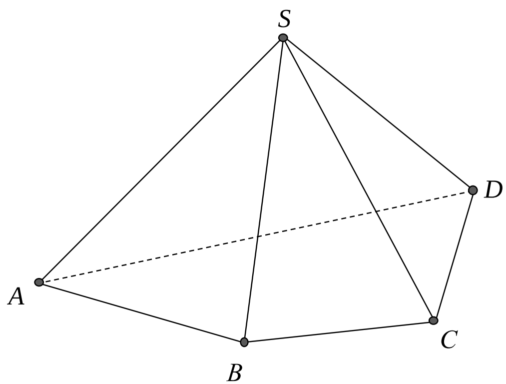

Рис. 9

При построении изображения усеченной пирамиды необходимо помнить, что боковые ребра пирамиды должны изображаться отрезками, лежащими на прямых, проходящих через одну точку.

Пример 7. Построить изображение цилиндра.

Построение:

1. Строим произвольный эллипс, который вместе со своими внутренними точками является изображением нижнего основания цилиндра.

2. От центра эллипса откладываем отрезок OO_1 произвольного направления и произвольной длины.

3. Строим эллипс с центром в точке O_1, равный предыдущему и имеющий те же направления осей.

4. Проводим два параллельных отрезка, касательных к построенным эллипсам (рис. 10). При построении изображения прямого цилиндра отрезок OO_1 выбирается так, чтобы он содержал малую ось исходного эллипса, то есть $OO_1 \perp AB$ (рис. 11).

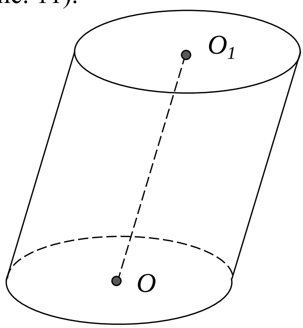

Рис. 10

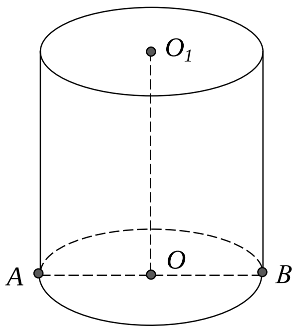

Рис. 11

Пример 8. Построить изображение конуса.

Построение:

1. Строим произвольный эллипс, который вместе со своими внутренними точками является изображением основания конуса.

2. Выбираем произвольно точку S, которую принимаем за изображение вершины конуса.

3. Из точки S проводим касательные к эллипсу, причем заметим, что точки касания A и B не являются диаметрально противоположными точками эллипса (рис. 12).

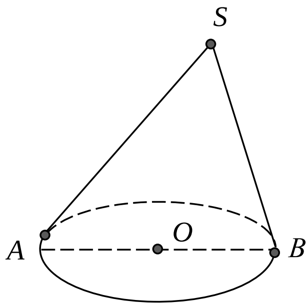

Рис. 12

Пример 9. Построить изображение шара.

Изображением шара в общем случае является эллипс с внутренними точками. Однако данное изображение не является наглядным. Поэтому чаще всего изображение шара строят в ортогональной проекции. В этом случае изображением шара является круг (рис. 13).

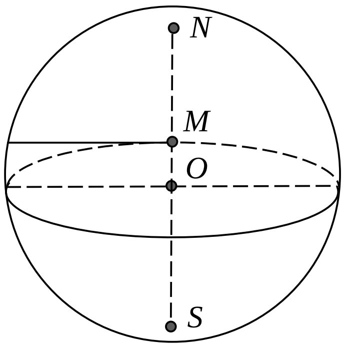

Рис. 13

Для того чтобы изображение шара было более наглядным, обычно строят изображение одной из больших окружностей шара, которую называют экватором, а также точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью шара, которые называют полюсами шара. Причем $ON = ML$, $OS = ON$, где ML — отрезок касательной к изображению экватора в точке M.

4. Изображение комбинации тел

При построении изображения комбинации тел для большей наглядности будем использовать предположение, что тело является прозрачным по отношению к вписанному в него телу и непрозрачным по отношению к себе. Целесообразно изображение комбинации цилиндра с призмой (конуса с пирамидой) начинать с изображения цилиндра (конуса); а изображение комбинации шара с другими телами — с построения изображения шара.

Пример 10. Построить изображение прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра.

Анализ. Пусть $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — прямоугольный параллелепипед, описанный около цилиндра. Тогда основаниями параллелепипеда являются квадраты, описанные около верхнего и нижнего оснований цилиндра. Стороны квадрата $A'B'C'D'$ — нижнего основания параллелепипеда — параллельны двум перпендикулярным диаметрам $M'N'$, $K'L'$ нижнего основания цилиндра, то есть $A'B' \parallel M'N' \parallel D'C'$, а $A'D' \parallel K'L' \parallel C'B'$, и касаются окружности в точках: $A'B'$ — в точке L', $B'C'$ — в точке N', $C'D'$ — в точке K', $A'D'$ — в точке M'. Боковые ребра параллелепипеда параллельны образующим цилиндра и равны им.

Построение:

1. Строим изображение цилиндра.
2. Строим параллелограмм $ABCD$ — изображение квадрата $A'B'C'D'$, описанного около нижнего основания цилиндра.
3. Строим отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, равные и параллельные отрезку OO_1.
4. Строим параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$.

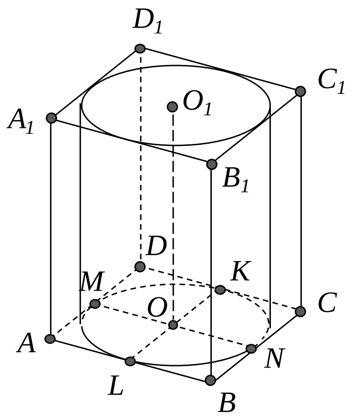

Рис. 14

Пример 11. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

Анализ. Пусть $A'B'C'S'$ — правильная треугольная пирамида, вписанная в конус. Тогда по условию задачи $\Delta A'B'C'$ — равносторонний. Изображение равностороннего треугольника, вписанного в окружность, было рассмотрено выше. Вершина пирамиды является вершиной конуса.

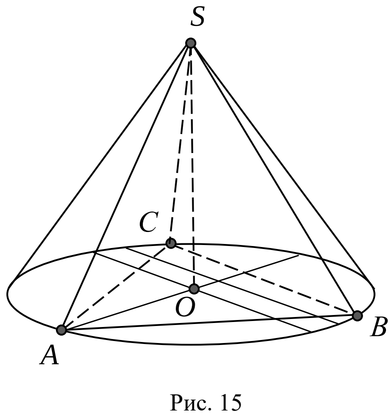

Рис. 15

Построение:

1. Строим изображение конуса с вершиной в точке S.

2. Строим ΔABC — изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

3. Строим отрезки SA, SB, SC.

Пример 12. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, описанной около шара.

Анализ. Пусть $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — правильная четырехугольная призма, описанная около шара. Заметим, что основания призмы касаются шара в полюсах. Тогда боковые грани призмы касаются шара в точках M', L', P', Q', принадлежащих экватору шара и являющихся концами двух перпендикулярных диаметров. Плоскость экватора пересекает боковую поверхность призмы по квадрату $A_0'B_0'C_0'D_0'$, стороны которого параллельны диаметрам $M'P'$, $L'Q'$. Заметим, что боковые ребра призмы $AA_1' = BB_1' = CC_1' = DD_1' = 2R$, где R — радиус шара.

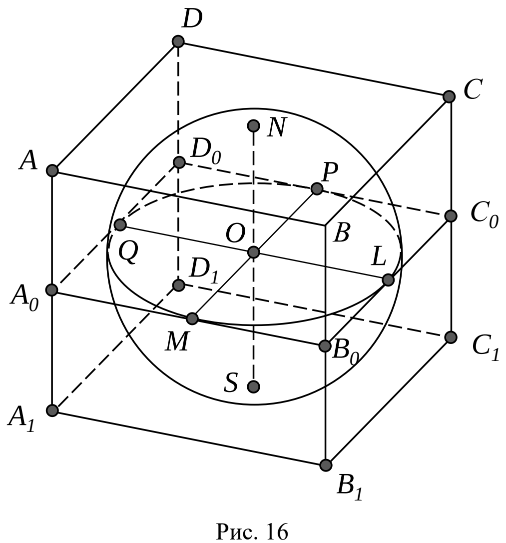

Рис. 16

Построение:

1. Строим изображение шара.

2. Строим параллелограмм $A_0B_0C_0D_0$ — изображение квадрата, описанного около экватора.

3. Строим
$A_0A = A_0A_1 = B_0B = B_0B_1 = C_0C = C_0C_1 = D_0D = D_0D_1 = R$ и параллельные NS.

4. Строим $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$.

5. Полные изображения. Позиционные задачи

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π', точку A', не принадлежащую плоскости π', и прямую a', не параллельную плоскости π' (рис. 17).

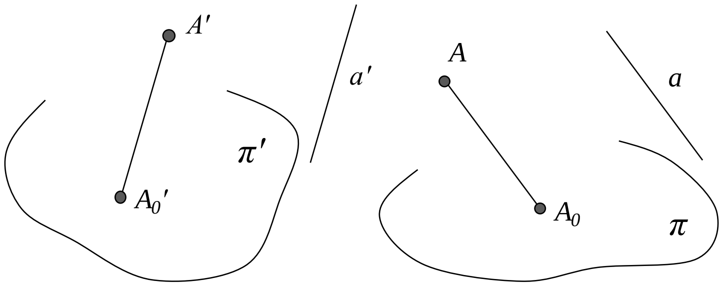

Рис. 17

Построим точку A_0' — параллельную проекцию точки A' на плоскость π' по направлению прямой a. Спроектируем данную конструкцию в некотором направлении на плоскость проекции — плоскость α и пусть $\pi' \to \pi$, $A' \to A$, $A_0' \to A_0$, $a' \to a$. Плоскость π назовем основной плоскостью, а точку A_0 — основанием точки A.

Определение. Точка называется заданной на проекционном чертеже, если на нем изображена сама точка и ее параллельная проекция на основную плоскость, то есть основание точки.

Прямая AA_0, как и любая другая прямая, параллельная ей, определяет направление проектирования точек на основную плоскость. Будем называть такое проектирование ***внутренним проектированием***.

Замечание: внутреннее проектирование может быть как параллельным, так и центральным проектированием.

Определение. Изображение фигуры называется полным, если каждая точка этой фигуры является заданной.

Справедливы следующие ***утверждения:***

1. Изображение прямой, определенной двумя различными заданными точками, является полным.

2. Изображение плоскости, определенной тремя различными заданными точками, не лежащими на одной прямой, является полным.

3. Изображение любой призмы (цилиндра) является полным.

4. Изображение любой пирамиды (конуса) является полным.

К позиционным задачам относятся задачи на построение изображений общих элементов данных фигур. Остановимся на рассмотрении построения изображения сечений плоскостью многогранника, конуса, цилиндра.

Под сечением фигуры плоскостью будем понимать множество точек, общих для плоскости и фигуры. Так, плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику. Причем число сторон многоугольника не меньше трех, но не превосходит числа граней многогранника.

Выделяют ***три метода*** решения задач на построение сечений многогранников, цилиндров и конусов.

5.1. Метод следа

Суть этого метода состоит в том, что строится прямая l (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью определенной грани многогранника. Затем строятся точки пересечения соответствующих ребер с секущей плоскостью. С помощью этих точек строятся следы секущей плоскости на плоскостях остальных граней многогранника. При построении данным методом сечений цилиндра или конуса обычно сначала строят след секущей плоскости на плоскости основания. В дальнейшем договоримся обозначать одним и теми же буквами точки и прямые оригинала и их изображения.

При решении задач методом следа полезно уметь решать следующие две задачи.

1. Построить точку пересечения заданной прямой AB с основной плоскостью.

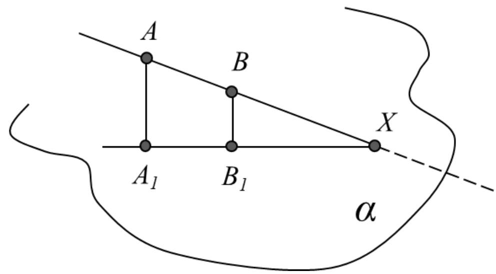

Рис. 18

Построение:

1) AB — прямая.

2) $AB \cap A_1B_1 = X$.

2. Построить след плоскости, определенной тремя различными заданными точками, не лежащими на одной прямой, с основной плоскостью α (рис. 19).

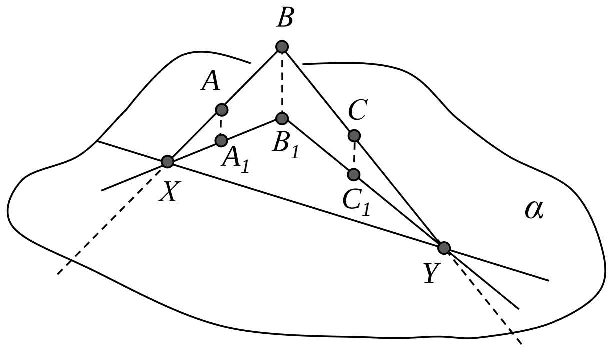

Рис. 19

Построение:

1) $A_1B_1 \cap AB = X$.

2) $BC \cap B_1C_1 = Y$.

3) XY — след плоскости (A, B, C) на основной плоскости α .

Пример 13. Построить сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки *E*, *F*, *K* (рис. 20).

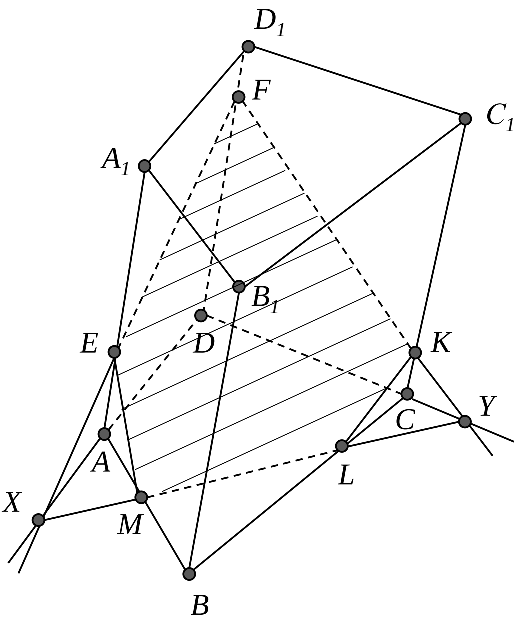

Рис. 20

Построение:
1) EF.
2) FK.
3) $EF \cap AD = X$.
4) $FK \cap DC = Y$.
5) XY — след.
6) $XY \cap BC = L$.
7) $XY \cap AB = M$.
8) $MEFKL$ — искомое сечение.

5.2. Метод внутреннего проектирования (или метод соответствия)

Этот метод был предложен Н. Ф. Четверухиным для построения сечения призм и цилиндров, пирамид и конусов.

При построении сечений призм и цилиндров целесообразно пользоваться решением следующей задачи:

Даны три различные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость β при внутреннем параллельном проектировании. На плоскости β взята произвольная точка X_1, и проведена прямая l, параллельная проектирующей прямой AA_1 и проходящая через точку X_1. (рис. 21).

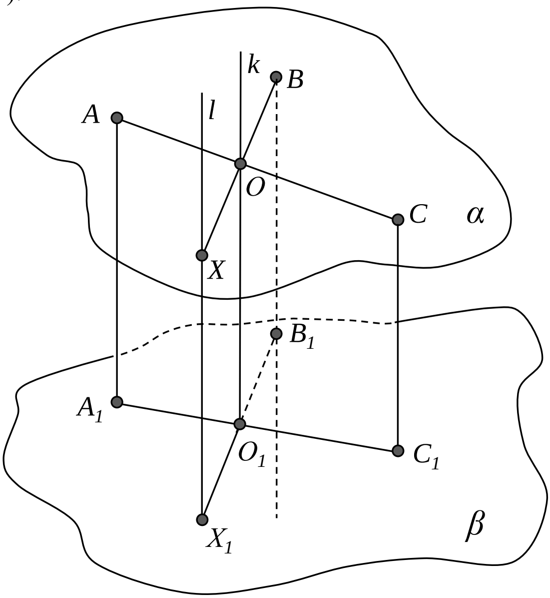

Рис. 21

Требуется построить точку $X = l \cap пл.(A, B, C)$.

Построение:

1) точка $O_1 = A_1C_1 \cap B_1X_1$.

2) точка $O_1 \in k : k$ параллельна l.

3) $AC \cap k = O$.

4) $BO \cap l = X$.

Пример 14. Построить сечение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Построение:

Выберем за внутреннее проектирование параллельное проектирование по направлению бокового ребра на плоскость нижнего основания. K_1, L_1, M_1 — проекции точек K, L, M при выбранном проектировании (рис. 22).

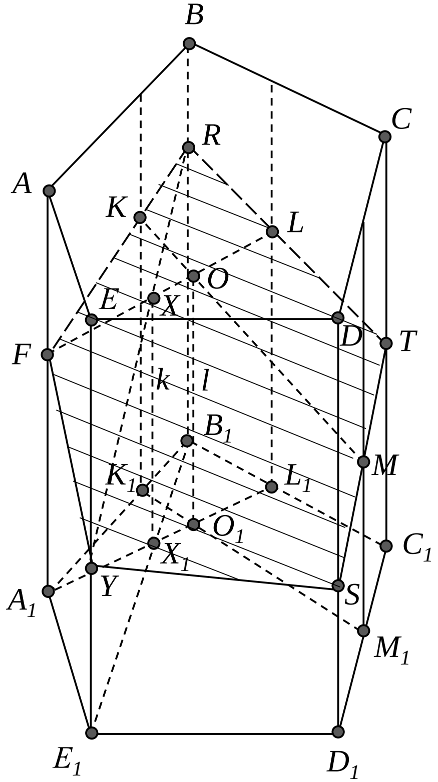

Рис. 22

1) $K_1M_1 \cap A_1L_1 = O_1$.

2) т. $O_1 \in l$, $l \parallel AA_1$.

3) $l \cap KM = O$.

4) $LO \cap AA_1 = F$.

5) $FK \cap BB_1 = R$.

6) $RL \cap CC_1 = T$.

7) $TM \cap DD_1 = S$.

8) $B_1E_1 \cap A_1L_1 = X_1$.

9) т. $X_1 \in k, k \parallel AA_1$.

10) $k \cap FL = X$.

11) $RX \cap EE_1 = Y$.

12) $YEERT$ — искомое сечение.

Для построения сечений пирамиды, конуса рассмотрим следующую **задачу**.

Даны три различные точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость β при внутреннем центральном проектировании с центром в точке *S*. На плоскости β взята произвольная точка X_1. Построить точку $X = SX_1 \cap пл.(A, B, C)$ (рис. 23).

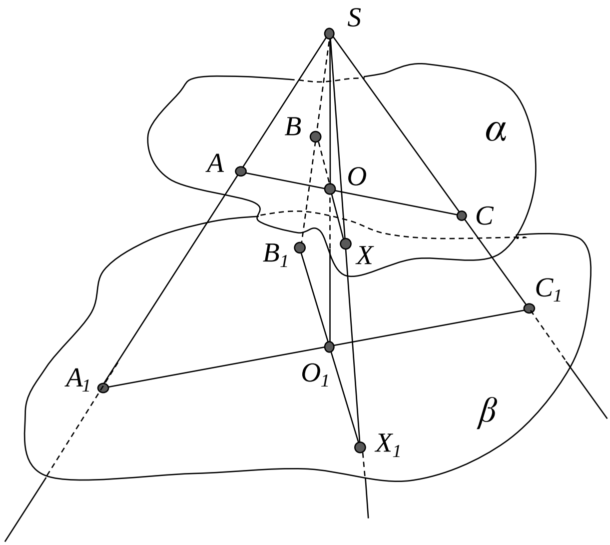

Рис. 23

Построение:

1) $A_1C_1 \cap B_1X_1 = O_1$.

2) $SO_1 \cap AC = O$.

3) $BO \cap SX_1 = X$.

Пример 15. Построить сечение четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Построение:

За внутреннее проектирование выберем центральное проектирование с центром в точке S. Точки A, C, D — проекции точек K, L, M на плоскость оснований. Найдем точку секущей плоскости на ребре SB (рис. 24).

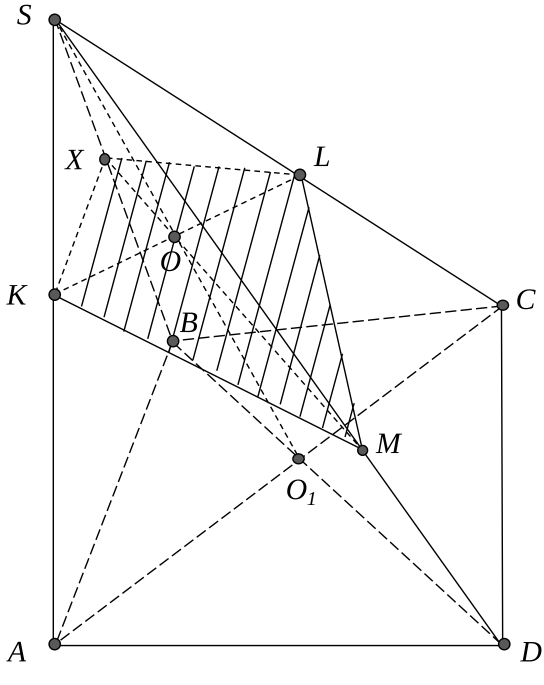

Рис. 24

1) $AC \cap BD = O_1$.
2) $SO_1 \cap KL = O$.
3) $MO \cap SB = X$.
4) $KXLM$ — искомое сечение.

5.3. Метод использования теорем и аксиом геометрии

При решении задач на построение сечений этим методом часто используются признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах, теорема: «Прямые, по которым плоскость пересекает две параллельные плоскости, параллельны между собой» — и другие.

Пример 16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M — внутренняя точка квадрата $ABCD$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной B_1D (рис. 25).

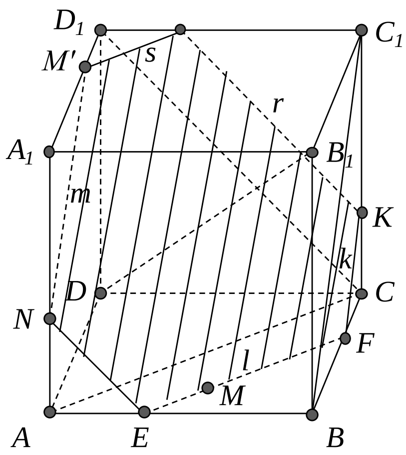

Рис. 25

Решение

Известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. BD — ортогональная проекция DB_1 на плоскость основания. $BD \perp AC$ — как диагонали квадрата, поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp AC \Rightarrow B_1D$ перпендикулярна прямой, проходящей через точку M и параллельной AC.

1) т. $M \in l : l \parallel AC$,

2) $l \cap AB = E,\ l \cap BC = F$,

B_1C — ортогональная проекция B_1D на плоскость грани BCC_1B_1, и так как BCC_1B_1 — квадрат, то $B_1C \perp C_1B$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp C_1B$. Поэтому прямая B_1D перпендикулярна прямой *k*, проходящей через точку *F* параллельно BC_1;

3) т. $F \in k : k \parallel BC_1$,

4) $k \cap CC_1 = K$.

Проводя аналогичные рассуждения для DB_1 и грани DCC_1D_1, выполняем следующие шаги построения.

5) т. $K \in r : r \parallel CD_1$,

6) $r \cap D_1C_1 = L$.

Так как плоскости верхнего и нижнего оснований параллельны, то по сформулированной выше теореме

7) $L \in s : s \parallel FE$,

8) $s \cap A_1D_1 = M'$.

Далее по той же теореме:

9) т. $M' \in m : m \parallel KF$,

10) $m \cap AA_1 = N$,

11) $NM'LKFE$ — искомое сечение.

6. Метрические задачи

Метрические задачи составляют группу задач, решение которых возможно только при известной форме оригинала. Эти задачи, как правило, передают свойства оригинала, не сохраняющиеся при параллельном проектировании: величину угла, перпендикулярность прямой и плоскости, свойство луча быть биссектрисой угла, отношение непараллельных отрезков и так далее. При решении метрических задач чаще всего применяется один из следующих способов:

1) использование метрики оригинала;

2) метод восстановления формы оригинала;

3) алгебраический метод.

Рассмотрим каждый из данных способов на конкретных примерах.

Пример 17. Параллелограмм $ABCD$ служит изображением квадрата $A'B'C'D'$. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки M' (точка M' принадлежит отрезку $D'C'$) к прямой $B'E'$, где E' — середина отрезка $A'D'$.

Решение

1 способ. Используем свойства оригинала: если F' — середина стороны $A'B'$, то отрезки $B'E'$ и $C'F'$ взаимно перпендикулярны и, следовательно, $M'K' \parallel C'F'$, где $M'K' \perp B'E'$ (рис. 26).

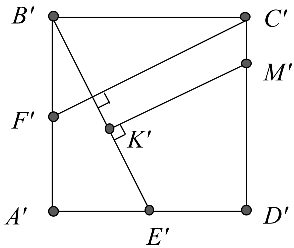

Рис. 26

На изображении квадрата строим изображение точки F' — точку F, которая будет серединой стороны AB. Проводим отрезок MK, параллельный FC (рис. 27).

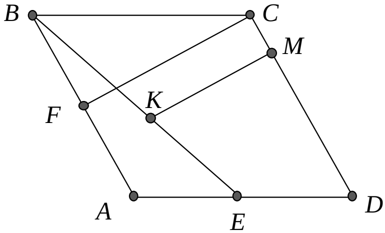

Рис. 27

2 способ. Решим задачу методом восстановления формы оригинала. Строим на стороне AD квадрат AB_0C_0D, который подобен оригиналу, и задаем параллельное проектирование по направлению CC_0. Из точки M_0 проводим перпендикуляр M_0K_0 к отрезку B_0E, затем строим отрезок KK_0, параллельный CC_0. MK — искомое изображение.

Действительно, из подобия квадратов $A'B'C'D'$ и AB_0C_0D и проведенных построений следует, что

$(CM, D) = (C'M', D') =$
$= (C_0M_0, D)$

и

$(BK, E) = (B_0K_0, E) =$
$= (B'K', E')$

(рис. 28).

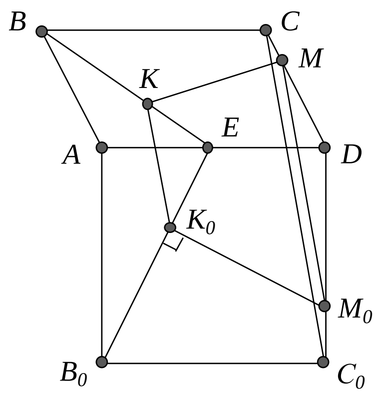

Рис. 28

Пример 18. Треугольник ABC является изображением прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого $\angle C' = 90°$, $A'C' : B'C' = 3:4$. Построить изображение биссектрисы, проведенной из вершины A'.

Решение

Решим эту задачу алгебраическим методом. Воспользуемся свойством биссектрисы внутреннего угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Отсюда $\dfrac{C'D'}{D'B'} = \dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{3}{5}$, тогда $CD : DB = 3:5$.

Таким образом, задача сводится к построению точки D на отрезке CB, удовлетворяющей условию: $CD : DB = 3:5$ (рис. 29).

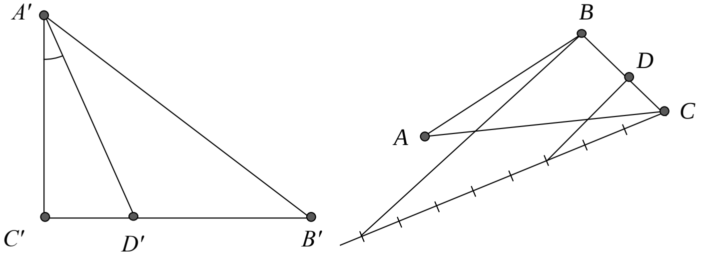

Рис. 29

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Треугольник ABC — изображение равностороннего треугольника $A'B'C'$. Построить изображение прямых, перпендикулярных сторонам треугольника $A'B'C'$ и проведенных через точку M', взятую: 1) на одной из сторон $\Delta A'B'C'$, 2) внутри $\Delta A'B'C'$.

2. Треугольник ABC есть изображение $\Delta A'B'C'$. Построить изображение центра окружности, вписанной в $\Delta A'B'C'$, если $A'B' : B'C' : A'C' = 2:2:3$.

3. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды.

4. Построить изображение правильной треугольной призмы, вписанной в шар.

5. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани CDD_1C_1.

6. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно одному из боковых ребер.

Вариант 2

1. Дано изображение треугольника и двух его высот. Построить изображение центра круга, описанного около треугольника-оригинала.

2. Дано изображение $\Delta A'B'C'$ ($\angle C' = 90°$, $A'C' = 6$, $B'C' = 8$). Построить изображение биссектрисы угла $\angle A'B'C'$.

3. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных осевых сечений цилиндра.

4. Построить изображение правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар.

5. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон и середину высоты.

6. Построить сечение правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диа-

гональ BD_1 призмы, параллельной не пересекающим ее диагоналям оснований.

Вариант 3

1. Построить изображение правильного треугольника, описанного около окружности.

2. Треугольник ABC — изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$ (C' — вершина прямого угла), катеты которого $A'C'$ и $C'B'$ относятся как 1 : 3. Построить изображение высоты треугольника $\Delta A'B'C'$, проведенной к гипотенузе $A'B'$.

3. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных осевых сечений конуса.

4. Построить изображение правильной треугольной призмы, описанной около шара.

5. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью MKL, где M принадлежит ребру AA_1, точка K принадлежит грани A_1ABB_1, а точка L расположена вне призмы.

6. Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую AD, точку N, принадлежащую AB, и параллельно AC.

Вариант 4

1. Дано изображение окружности и вписанного в нее $\Delta A'B'C'$. Построить изображение высоты и медианы $\Delta A'B'C'$, проведенных из вершины A'.

2. Дано изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого катет $B'C'$ в два раза больше катета $C'A'$. Построить изображения биссектрис углов $\angle A'$, $\angle B'$.

3. Построить изображение цилиндра, вписанного в шар.

4. Построить изображение конуса и описанной около него правильной треугольной пирамиды.

5. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, одна из которых принадлежит нижнему основанию призмы, вторая — одному из ее боковых ребер, а третья — одной из боковых ее граней.

6. Построить сечение тетраэдра *ABCD* плоскостью, содержащей медиану *CM* грани *ABC* и параллельной прямой *AD*.

Вариант 5

1. Данный эллипс есть изображение окружности. Построить изображение квадратов, вписанного и описанного около окружности.

2. Дано изображение равнобедренного треугольника $A'B'C'$, боковая сторона которого в два раза больше основания $A'C'$. Построить изображение высоты треугольника $A'B'C'$, проведенной к стороне $A'B'$.

3. Построить изображение конуса, вписанного в шар.

4. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

5. Построить изображение сечения четырехугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками на ее поверхности.

6. Построить сечение тетраэдра *ABCD* плоскостью, проходящей через точку *M*, принадлежащую *AB*, и параллельной грани *DBC*.

Вариант 6

1. Дано изображение треугольника, описанного около окружности. Построить изображения его биссектрисы и высоты, проведенных из вершины B'.

2. Дано изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, катеты которого $A'C' : B'C' = 1 : 2$. Построить изображение прямой l', проходящей через середину O' его гипотенузы и перпендикулярной к ней.

3. Построить изображение конуса, описанного около шара.

4. Построить изображение цилиндра, вписанного в конус так, что нижнее основание цилиндра принадлежит основанию конуса, а окружность верхнего основания цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса.

5. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через точку *A*, лежащую на боковой поверхности цилиндра, и

через точки *B* и *C*, лежащие в плоскости его нижнего основания.

6. Построить сечение шестиугольной пирамиды *SABCDEF* плоскостью, проходящей через точку *M* на основании пирамиды и параллельной боковой грани *SAF*.

Вариант 7

1. Дано изображение окружности и треугольника, вписанного в эту окружность. Построить изображения высот треугольника.

2. Дано изображение треугольника $A'B'C'$, стороны которого $A'B' : B'C' : C'A' = 2:4:5$. Построить изображение высоты $B'H'$ к стороне $A'C'$.

3. Построить изображение цилиндра, описанного около шара.

4. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в правильную треугольную призму так, чтобы вершины основания пирамиды принадлежали сторонам основания призмы.

5. Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной следом и точкой, не лежащей на поверхности цилиндра.

6. На двух гранях параллелепипеда даны две скрещивающиеся диагонали. Построить сечение параллелепипеда, плоскость которого проходила бы через одну из этих диагоналей и была бы параллельна другой.

Вариант 8

1. На плоскости задано изображение окружности и треугольника. Построить изображение ортоцентра треугольника.

2. Треугольник *ABC* — изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого катеты $A'C' : B'C' = 3:4$. Построить изображение центра окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$.

3. Построить изображение шара, описанного около усеченного конуса.

4. Построить изображение цилиндра и вписанной в него правильной треугольной призмы.

5. Построить сечение конуса плоскостью, заданной точкой A, лежащей на образующей конуса, и точками B и C, принадлежащими плоскости основания.

6. Построить сечение усеченной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно диагонали основания.

Вариант 9

1. В параллельной проекции даны изображения окружности и угла, лежащего в плоскости окружности. Построить изображение его биссектрисы.

2. Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна удвоенной стороне основания. Построить изображение центра окружности, описанного около него.

3. Построить изображение шара, вписанного в усеченный конус.

4. Построить изображение правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.

5. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, две из которых принадлежат боковым ребрам пирамиды, а третья — плоскости основания.

6. Дано изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точек $P \in B_1C_1$, $K \in DC$. Построить сечение плоскостью, проходящей через точки A_1, K, P.

Вопросы к экзамену (зачету)

1. Параллельное проектирование и его свойства.

2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции.

3. Теорема Польке — Шварца.

4. Изображения тетраэдра, куба, призм, пирамид в параллельной проекции.

5. Изображение конуса, цилиндра, шара в параллельной проекции.

6. Изображение комбинации тел в параллельной проекции.

7. Полные и неполные изображения.

8. Решение задач на построение сечений многогранников, цилиндров и конусов методом следа.

9. Решение задач на построение сечений методом внутреннего проектирования.

10. Метод использования аксиом и теорем геометрии при решении задач на построение сечений.

11. Метрические задачи и методы решений метрических задач.

Список литературы

1. Вахмянина, О. А. Методы изображений / О. А. Вахмянина, Т. С. Измайлова. Оренбург, 1997.

2. Атанасян, Л. С. Геометрия, ч. 2 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. М., 1987.

3. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии, ч. 2 / Л. С. Атанасян [и др.]. М., 1975.

4. Панкратов, А. А. Начертательная геометрия / А. А. Панкратов. М., 1959.

5. Казаков, П. Г. Параллельные проекции и методы решения конструктивных задач / П. Г. Казаков. М., 1960.

6. Болодурин, В. С. Пособие по элементарной геометрии. Часть 2 / В. С. Болодурин, О. А. Вахмянина, Т. С. Измайлова. Оренбург, 1995.

7. Литвиненко, В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений. Книга для учителя / В. Н. Литвиненко. М., 1991.

8. Липкин, А. Е. Начертательная геометрия в чертежах / А. Е. Липкин. М., 1964.

9. Зенгин, А. Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии / А. Р. Зенгин. М., 1962.

Учебное издание

Прояева Ирина Владимировна
Сафарова Алия Дамировна

Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Методы изображений»

Учебно-методическое пособие для студентов физико-математических факультетов педвузов

Редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано в печать 12.02.2016 г.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,1
Тираж 100 экз. Заказ 9

ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный педагогический университет». 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19