МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. В. Прояева, А. Д. Сафарова

Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к государственной итоговой аттестации по курсу «Геометрия»

Учебно-методическое пособие для студентов
физико-математических факультетов
педагогических вузов

Оренбург
Издательство ОГПУ
2016

УДК 514 (075.8)
ББК 21.151я73
П84

Рецензенты

А. С. Ракитянский, кандидат физико-математических наук, доцент
Г. М. Гузаиров, кандидат физико-математических наук, доцент

Прояева И. В.

П84 **Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к государственной итоговой аттестации по курсу «Геометрия»** : учеб.-метод. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов педвузов / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова ; Минво образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВПО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2016. — 48 с. : ил. — ISBN 978-5-85859-639-4.

Пособие содержит темы, входящие в рабочую программу дисциплины «Геометрия»: элементы проективной и конструктивной геометрий, геометрии Лобачевского, топологии, преобразования плоскости, методы изображений, аксиоматическое построение геометрии, небольшой глоссарий. Адресовано студентам очной и заочной форм обучения, обучающимся по направлению подготовки «Педагогическое образование», профили подготовки «Математика», «Математика и информатика».

УДК 514 (075.8)
ББК 21.151я73

ISBN 978-5-85859-639-4

© Прояева И. В., Сафарова А. Д., 2016
© Оформление. Издательство ОГПУ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ГЕОМЕТРИИ. ГЛАВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ ИНВАРИАНТЫ 5

2. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СИСТЕМЕ АКСИОМ. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ 8

3. СИСТЕМА АКСИОМ ВЕЙЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. ЕЕ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ В ЭТОЙ АКСИОМАТИКЕ НЕКОТОРЫХ ФИГУР 12

4. ПЛОСКОСТЬ ЛОБАЧЕВСКОГО. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО 19

5. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ МОДЕЛИ. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ 24

6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ. ПРИМЕРЫ 29

7. КОНСТРУКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ 34

8. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР 42

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 48

Введение

Основная цель пособия — организация самостоятельной работы студентов по подготовке к государственной итоговой аттестации по курсу «Геометрия».

Цель курса — формирование пространственных и конструктивных компетенций. Пособие содержит темы, входящие в рабочую программу дисциплины «Геометрия»: элементы проективной и конструктивной геометрий, геометрии Лобачевского, топологии, преобразования плоскости, методы изображений, аксиоматическое построение геометрии [1].

Основное внимание уделяется методике изложения изученного теоретического материала при ответе на вопросы государственной итоговой аттестации по курсу «Геометрия». Чертежи и рисунки облегчают усвоение материала. В пособии теория соединена с практическими задачами, что помогает проиллюстрировать глубину усвоения изученного материала выпускниками-бакалаврами, определяет уровень сформированности их компетенций, заявленных в рабочей программе данной учебной дисциплины.

Книга адресована в первую очередь студентам бакалавриата выпускного курса очной и заочной форм обучения (направление подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика», «Математика и информатика»). Материал данного пособия может быть использован слушателями курсов профессиональной переподготовки учителей и повышения квалификации учителей, преподающих геометрию в 10—11 классах средней школы, лицеях и гимназиях, а также может быть рекомендовано преподавателям вузов в качестве руководства и дополнительного материала при подготовке к обзорным лекциям по курсу «Геометрия».

1. Теоретико-групповой подход к геометрии. Главные группы преобразований плоскости и их инварианты

Теория геометрических преобразований лежит в основе общего определения геометрии. Пусть дана группа преобразований G некоторого непустого множества M, фигуры F, F', принадлежащие множеству M.

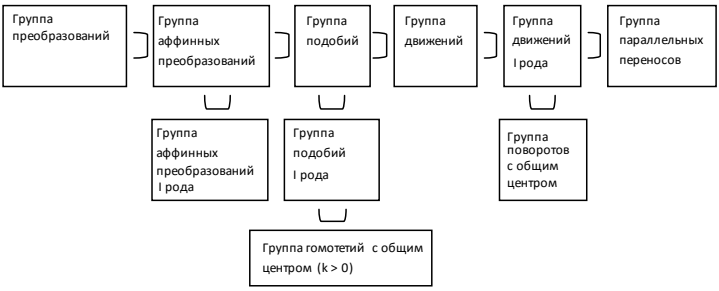
Определение. Две фигуры F и F' называются *G-эквивалентными*, если в группе G найдется такое преобразование f, что $f(F) = F'$.

Понятие G-эквивалентности является отношением эквивалентности на множестве всех подмножеств множества M. Например, если M — множество точек плоскости, а G — группа движений, то «G-эквивалентность» заменяется термином *«равенство»*, если G — подобие, то «G-эквивалентность» — *«подобие»*, если G — аффинное преобразование, то «G-эквивалентность» — это *«аффинная эквивалентность»*.

Пусть данная фигура F принадлежит множеству M.

Определение. Свойства фигуры F, которые сохраняются при любых преобразованиях из G, называются *инвариантными свойствами* фигуры F относительно группы G.

Схема включений групп преобразований плоскости



При доказательстве того, что множества аффинных преобразований, подобий, движений плоскости образуют группу, опираются на то, что каждое из перечисленных преобразований является подмножеством множества преобразований плоскости, образующих группу относительно композиции преобразований, и на теорему:

Теорема. *Непустое множество H группы G является подгруппой этой группы, если:*

1) $\forall a,b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$ *,*

2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ *.*

Например, докажем, что множество движений плоскости образует группу.

Для доказательства данного факта необходимо проверить выполнимость двух групповых свойств.

Пусть W_1 и W_2 — движения и $W_3 = W_2 \circ W_1$ — их композиция. Движения сохраняют расстояния, поэтому и их композиция сохранит расстояние, следовательно, W_3 — движение. Первое свойство выполнено.

Обозначим через W^{-1} преобразование, обратное к движению W. Пусть $M' = W(M)$, $N' = W(N)$ тогда $MN = M'N'$. Для преобразования W^{-1} имеем $M = W^{-1}(M')$, $N = W^{-1}(N')$ и так как $MN = M'N'$, то W^{-1} — также движение.

Рассмотрим ***инварианты главных групп преобразований плоскости***

	Расстояние между точками	Скалярное произведение векторов	Величина угла	Отношение отрезков	Отношение параллельных отрезков	Простое отношение трех точек	Параллельность прямых
Группа движений плоскости	■	■	■	■	■	■	■
Группа подобий			■	■	■	■	■
Группа аффинных преобразований					■	■	■

Например, докажем, что

1) движение сохраняет скалярное произведение векторов.

Доказательство. Движение $W: \vec{a} \to \vec{a}'$, $\vec{b} \to \vec{b}'$, отсюда следует, что $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$, $|\vec{b}| = |\vec{b}'|$, и так как движение сохраняет величину угла, то $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}', \vec{b}')$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}'| \cdot |\vec{b}'| \cos(\vec{a}', \vec{b}') = (\vec{a}', \vec{b}');$$

2) подобие сохраняет отношение отрезков (под отношением отрезков понимают отношение длин этих отрезков).

Доказательство. Подобие

$$\Pi_{k,k>0} : [AB] \to [A'B']; \ [CD] \to [C'D'].$$

Следовательно, $A'B' = kAB$, $C'D' = kCD$.

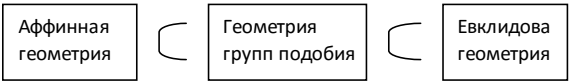
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{kAB}{kCD} = \frac{AB}{CD};$$

3) аффинное преобразование сохраняет параллельность прямых (отрезков).

Доказательство. Пусть $a||b$ и a', b' — образы прямых a и b. Допустим, что существует точка $M' = a' \cap b'$. Пусть M — прообраз точки M'. Так как $M' \in a'$, то $M \in a$, и так как $M' \in b'$, то $M \in b$. Следовательно, $M = a \cap b$, что противоречит условию $a||b$. Значит, $a' \parallel b'$.

Определение. *Геометрия* — наука, изучающая такие свойства фигуры, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях некоторой группы.

Схема включений геометрий



Аффинная геометрия — наука, изучающая свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы аффинных преобразований плоскости.

Геометрия групп подобия — наука, изучающая свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы подобия.

Евклидова геометрия — наука, изучающая свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы движений.

2. Аксиоматическое построение геометрии. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Примеры систем аксиом евклидовой геометрии

Аксиоматический метод построения теории включает следующие этапы:

1. Выбираются основные (неопределенные) понятия: основные объекты и основные отношения между ними.

2. Формулируются аксиомы, которые устанавливают связь между основными объектами и основными отношениями.

3. Принимается, что все последующие математические предложения (теоремы), которые не являются аксиомами, должны быть получены из аксиом при помощи логических выводов.

4. Принимается, что все понятия, которые не являются основными, должны быть определены через основные и ранее определяемые.

Определение. *Аксиома* — математическое утверждение, которое принимается без доказательства.

Определение. *Теорема* — математическое утверждение, которое доказывается или подлежит доказательству.

Определение. *Доказательством* называется рассуждение, которое может быть цепочкой высказываний, каждое из которых является или аксиомой или логическим следствием из аксиом.

Определение. *Определение* — математическое предложение, которое раскрывает смысл нового понятия через основные понятия или ранее введенные определения.

Принцип научности в аксиоматическом построении требует:

1. Чтобы любое математическое утверждение было аксиомой или теоремой.

2. Чтобы любое понятие было основным либо имело определение.

Рассмотрим систему множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ и их декартово произведение $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Элементами его будет набор $(m_1, m_2, .. m_n)$, где $m_i \in M_i$.

Пусть $\Delta \subset M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, тогда говорят, что Δ *определяет n-арное отношение,* а элементы

$$m_1, m_2, ..., m_n : (m_1, m_2, ..., m_n) \in \Delta$$

находятся в отношении Δ.

1) если *n = 2*, то говорят о бинарном *отношении* и вместо $(m_1, m_2) \subset \Delta$ пишут $m_1 \Delta m_2$.

Пример 1. На плоскости множество треугольников и отношение Δ — «два треугольника подобны друг другу». Это отношение выделяет на плоскости пары подобных треугольников;

2) если *n = 3*, то говорят о *тернарном отношении*.

Пример 2. Пусть на множестве *G* задана некоторая математическая операция «+». Операция $a + b \to c$, тогда $(a, b, c) \in G \times G \times G$. Те тройки, которые находятся в этом отношении, составляют $\Delta \in G \times G \times G$ — пример тернарного отношения.

Допустим, что на декартовом произведении задано несколько отношений $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$. Каждое из этих отношений задается либо указанием конкретных элементов, входящих в Δ_i, либо указанием свойств элементов, входящих в Δ_i. Обозначаются свойства $A_1, A_2, ..., A_n$.

Определение. Под *математической структурой* понимают систему множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ с заданными на этих множествах отношениями $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$, удовлетворяющими системе свойств $A_1, A_2, ..., A_n$.

Математические структуры могут содержать только одно множество: *«G,+»* — группа, *«K,+,·»* — кольцо, а может, и несколько множеств: *(V, R,+,·)* — векторное пространство,

На первом этапе базовые множества абстрактны. Но если элементам базовых множеств и отношениям придать конкретный смысл, то мы приходим к понятию модели математической структуры.

Например, моделями проективной плоскости является связка прямых в E_3; расширенная аффинная плоскость.

Можно говорить об *изоморфизме* моделей.

Если между основными объектами и основными отношениями двух моделей можно установить взаимно-однозначное соответствие так, чтобы всякому отношению между объектами первой модели отвечало соответствующее отношение между соответствующими объектами второй модели, то модели называются *изоморфными*.

Требования, предъявляемые к системе аксиом

Несмотря на определенный произвол в выборе системы аксиом, к ней предъявляют следующие требования:

1. Непротиворечивость.
2. Независимость.
3. Полнота.

Определение 1. Система аксиом называется *внутренне непротиворечивой*, если среди самой системы аксиом и ее логических следствий не существует взаимопротиворечивых утверждений.

Определение не конструктивно, так как все утверждения проверить нельзя.

Определение 2. Система аксиом называется *содержательно непротиворечивой*, если допускается существование моделей.

В геометрии проблему непротиворечивости сводят к арифметике. Для доказательства непротиворечивости системы аксиом строят такую ее арифметическую модель, относительно которой можно сказать, противоречива она или нет.

Существуют два определения независимости системы аксиом.

Определение 1. Непротиворечивая система аксиом называется *порядково независимой*, если любая ее аксиома A_i не является следствием предыдущих аксиом $\{A_1, A_2, ..., A_{i-1}\}$.

Определение 2. Непротиворечивая система аксиом называется *абсолютно независимой*, если любая ее аксиома не есть следствие остальных.

Рассмотрим способ доказательства абсолютной независимости системы аксиом.

Пусть дана система аксиом $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Выясним, является ли аксиома A_i логическим следствием всех остальных. Обозначим $\Sigma' = [A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n]$.

Если аксиома A_i является логическим следствием остальных, то она неявно будет присутствовать в Σ'.

Пусть $\overline{A_i}$ — предложение, противоречивое к A_i. Если существует модель системы (Σ', $\overline{A_i}$), то аксиома A_i не зависит от системы аксиом Σ'. Следовательно, вопрос о независимости аксиомы A_i сводится к обоснованию непротиворечивости некоторой системы аксиом.

Определение. Непротиворечивая система аксиом $\sum$ называется *неполной*, если существует такая аксиома A:

1) A не вводит новых основных понятий;

2) A не является следствием из системы аксиом;

3) система аксиом $\sum$ и A — непротиворечива.

Определение. Если A не существует, система аксиом $\sum$ называется *полной*.

Чтобы проверить полноту системы аксиом $\sum$, поступают следующим образом: если $\sum$ — неполная, то существует A: $\sum + A$ — непротиворечива и $\sum + \bar{A}$ — непротиворечива.

Пусть M_1 — модель $\{\sum + A\}$, M_2 — модель $\{\sum + \bar{A}\}$, тогда M_1 и M_2 — модели $\sum$ и M_1 и M_2 не изоморфны. Значит, $\sum$ — неполная, если существуют две неизоморфные ее модели. Для доказательства полноты системы аксиом $\sum$ надо доказать, что любые две ее модели изоморфны.

Пример. Система аксиом абсолютной геометрии по Гильберту, состоящая из четырех групп аксиом, неполная, так как существует V′-аксиома параллельности Лобачевского: не вводит новых основных понятий, не является логическим следствием системы аксиом I—IV и система I—IV+V′ — непротиворечива.

Приведем пример системы аксиом евклидовой геометрии.

Аксиоматика Гильберта:

Основные объекты: точка, прямая, плоскость.

Основные отношения: принадлежности, лежать между, движение.

5 групп аксиом:

I группа — аксиомы принадлежности;

II группа — аксиомы порядка;
III группа — аксиомы движения;
IV группа — аксиома непрерывности;
V группа — аксиома параллельности.

3. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Ее непротиворечивость. Определение в этой аксиоматике некоторых фигур

С точки зрения математической структуры база будет состоять из 3-х множеств *E, V, R*, где элементы множества *E* будем называть *точками*, элементы множества *V* — *векторами*, а *R* — множество действительных чисел.

Заданы отображения f_1, f_2, f_3, f_4, свойства которых описываются соответствующими группами аксиом.

$f_1 : V \times V \to V$ называется *операцией сложения векторов*, которая позволяет поставить в соответствие любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ третий вектор $f_1(\vec{a},\vec{b})$, который называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

$f_2 : V \times R \to V$ называется *операцией умножения вектора на действительное число*, которая каждому вектору $\vec{a} \in V$ и числу $\alpha \in R$ ставит в соответствие вектор $f_2(\alpha,\vec{a})$, который называется *произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* α и обозначается $\alpha\vec{a}$.

$f_3 : E \times E \to V$ называется *операцией откладывания вектора от точки*, т.е. каждой упорядоченной паре точек *A* и *B* из множества *E* ставится в соответствие вектор из множества *V*, обозначается $\overrightarrow{AB}$.

$f_4 : V \times V \to R$ называется *операцией скалярного произведения векторов*, которая позволяет любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ставить в соответствие число $f_4(\vec{a},\vec{b})$. Будем обозначать $(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Аксиомы Вейля распределяются на 5 групп:

I_{1-4}: Аксиомы сложения векторов

$I_1: \forall \vec{a}, \vec{b} \in V: \ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(коммутативность)*,

$I_2: \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V: \ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ *(ассоциативность)*,

$I_3: \exists \vec{0}$ *(нуль-вектор)*, $\forall \vec{a}: \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,

$I_4: \forall \vec{a} \in V \ \exists (-\vec{a})$ *(противоположный вектору* $\vec{a}$*)*:

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

II_{1-4}: Аксиомы умножения вектора на число

$II_1: \forall \vec{a} \in V: \ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

$II_2: \forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in R: \ \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$,

$II_3: \forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in R: \ (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,

$II_4: \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha \in R: \ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Аксиомы I и II группы позволяют дать понятие векторного пространства.

Определение. *Векторным пространством V* над полем действительных чисел *R* называется множество $V \neq \emptyset$, для элементов которого определены операции сложения и умножения на действительное число так, что выполняются требования аксиом I и II группы.

Определение. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ называется *линейно зависимой (ЛЗ)*, если существуют такие действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие что выполняется равенство:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}. \qquad (1)$$

Определение. Если равенство (1) возможно лишь в том случае, когда все числа равны нулю, то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ называется *линейно независимой (ЛНЗ).*

III_{1-2}: Аксиомы размерности

III_1: *Существуют три линейно независимых вектора.*

III_2*: Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Аксиомы I, II, III групп позволяют дать определение трехмерного векторного пространства.

Определение. *Трехмерным векторным пространством* называется векторное пространство *V* над полем действитель-

ных чисел R, для которых выполняются аксиомы размерности III_1, III_2.

IV_{1-2}: Аксиомы откладывания вектора от точки

$$IV_1 : \forall A \in E, \forall \vec{a} \in V \; \exists \, B \in E : \overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

$$IV_2 : \forall A, B, C \in E : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (аксиома треугольника).}$$

Зная аксиомы I—IV групп, можно дать определение трехмерного аффинного пространства A_3.

Определение. Непустое множество E элементов, именуемых точками, называется *трехмерным аффинным пространством*, если существует отображение упорядоченных пар элементов этого множества на трехмерное векторное пространство V_3 над R, удовлетворяющее аксиомам откладывания вектора.

V_{1-4}: Аксиомы скалярного произведения

$$V_1 : \forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \; (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a}),$$

$$V_2 : \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : \; (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

$$V_3 : \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \lambda \in R : \; \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b},$$

$$V_4 : \forall \vec{a} : \; (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{a}^2 \geq 0 \;\; и \;\; \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

Аксиомы I, II, III и V групп позволяют дать определение трехмерного евклидового векторного пространства.

Определение. Трехмерное векторное пространство, в котором определены операции скалярного произведения векторов так, что выполняются требования аксиом V_{1-4}, называется *трехмерным евклидовым векторным пространством.*

Определение. Множество $E \neq \emptyset$ элементов (точек) называется *трехмерным евклидовым пространством* E_3, если существует отображение упорядоченных пар элементов этого множества на трехмерное векторное пространство V_3 над R, определенное аксиомами I, II, III, V и допускающее операцию откладывания векторов, удовлетворяющую требованиям аксиом IV группы.

Для системы аксиом Вейля справедлива теорема:

Теорема. *Геометрия, построенная на основе системы аксиом Вейля, столь же непротиворечива, как и арифметика.*

Для доказательства теоремы необходимо построить модель системы аксиом через объекты арифметики. Эту модель принято называть аналитической моделью. Это значит, что среди множества величин (действительных чисел) нам нужно отыскать такие величины и такие отношения между ними, чтобы выполнялись все 5 групп аксиом Вейля.

Введем интерпретационный словарь.

1. Под *точкой* будем понимать упорядоченную совокупность трех действительных чисел $M = (x_1, x_2, x_3)$.

2. Под *вектором* будем понимаем упорядоченную совокупность трех действительных чисел, записанных в виде:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Под *суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ будем понимать следующую упорядоченную тройку чисел $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$.

4. *Умножение вектора на число* зададим следующим образом:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

5. *Скалярное произведение векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ зададим следующим образом: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

6. Если даны точки $M(x_1, x_2, x_3), N(y_1, y_2, y_3)$, то под *вектором* $\vec{MN}$ будем понимать:

$$\vec{MN} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнимость некоторых аксиом Вейля в построенной интерпретации.

$I_1: \forall \vec{a}, \vec{b}\ \ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

$I_3: \exists \vec{0}: \forall \vec{a}\ \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$$\textit{Пусть}\ \ \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$II_1: \forall \vec{a},\ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$$1 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1a_1 \\ 1a_2 \\ 1a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

III_1: *Аксиомы размерности:*

$\exists\, 3$ *ЛНЗ вектора* $: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Определим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Составим равенство:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 1 \\ \alpha_1 0 \\ \alpha_1 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 0 \\ \alpha_2 1 \\ \alpha_2 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 0 \\ \alpha_3 0 \\ \alpha_3 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0; \\ \alpha_2 = 0; \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — линейно независимые.

III_2: *Любые 4 вектора линейно зависимы*.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\ \ \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}+\alpha_4\vec{d}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1a_1+\alpha_2b_1+\alpha_3c_1+\alpha_4d_1\\ \alpha_1a_2+\alpha_2b_2+\alpha_3c_2+\alpha_4d_2\\ \alpha_1a_3+\alpha_2b_3+\alpha_3c_3+\alpha_4d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1a_1+\alpha_2b_1+\alpha_3c_1+\alpha_4d_1=0,\\ \alpha_1a_2+\alpha_2b_2+\alpha_3c_2+\alpha_4d_2=0,\\ \alpha_1a_3+\alpha_2b_3+\alpha_3c_3+\alpha_4d_3=0.\end{cases}$$

Имеем систему из трех линейных однородных уравнений относительно четырех неизвестных. Известно, что такая система имеет бесконечно много решений, зависящих от одного параметра, в том числе и ненулевое решение.

Значит, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ — линейно зависимые векторы.

$$\mathrm{IV}_2:\forall A,B,C\in E:\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

$$A(x_1,x_2,x_3);\ B(y_1,y_2,y_3);\ C(z_1,z_2,z_3)$$

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}y_1-x_1\\ y_2-x_2\\ y_3-x_3\end{pmatrix};\ \vec{BC}=\begin{pmatrix}z_1-y_1\\ z_2-y_2\\ z_3-y_3\end{pmatrix};\ \vec{AC}=\begin{pmatrix}z_1-x_1\\ z_2-x_2\\ z_3-x_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\begin{pmatrix}y_1-x_1+z_1-y_1\\ y_2-x_2+z_2-y_2\\ y_3-x_3+z_3-y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1-x_1\\ z_2-x_2\\ z_3-x_3\end{pmatrix}=\vec{AC}$$

$$V_1:\forall\vec{a},\vec{b}\in V\ \ (\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{b}\cdot\vec{a})$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=(\vec{b}\cdot\vec{a})$$

Введем определения некоторых фигур в аксиоматике Вейля.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует такое число $\alpha\in R$, что $\vec{a}=\alpha\vec{b}$. Обозначается $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

1. Определение прямой

Пусть даны точка M_0 и $\vec{a}\neq\vec{0}$ в E_3.

Определение. *Прямой*, заданной точкой M_0 и вектором $\vec{a}$, называется множество точек M пространства E_3:

$$\vec{M_0M}=\alpha\vec{a},\ \ \alpha\in R.$$

$$l = \left\{ M \in E_3 : \overrightarrow{M_0 M} = \alpha \vec{a}, \alpha \in R \right\},$$

M_0 — начальная точка, $\vec{a}$ — направляющий вектор.

Заметим, что за начальную точку можно принять любую точку пространства, за направляющий вектор — любой ненулевой вектор пространства, коллинеарный вектору $\vec{a}$.

Прямую можно задать с помощью двух различных точек A и B:

$$l = \left\{ M \in E_3 : \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB},\ \alpha \in R \right\}.$$

2. Определение плоскости

Пусть даны точка M_0 и два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в E_3.

Определение. *Плоскостью* π называется множество точек $M \in E_3 : \overrightarrow{M_0 M} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b},\ \alpha, \beta \in R$, где M_0 — начальная точка, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — направляющие векторы.

Заметим, что за начальную точку можно принять любую точку плоскости π, за направляющие векторы — любые два неколлинеарных вектора пространства V_2, натянутого на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Плоскость можно задать с помощью трех точек *A, B, C,* не лежащих на одной прямой:

$$\pi = \left\{ M \in E_3 : \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC},\ \alpha, \beta \in R \right\}.$$

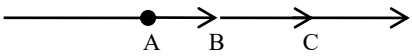
3. Определение отношения «лежать между»

Определение. Будем говорить, что точка *B лежит между точками A и C*, если имеет место равенство

$\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC},\ 0 < t < 1$. Обозначается: $\overset{*}{ABC}$.

Следствия

1. Если точка *B* лежит между точками *A* и *C*, то точки *A, B, C* принадлежат одной прямой.



Доказательство. Прямая

$$AC = \left\{ M \in E_3 : \vec{AM} = \alpha \vec{AC},\ \alpha \in R \right\}.$$

И так как $\vec{AB} = t \cdot \vec{AC},\ 0 < t < 1$, то точки *A, B, C* принадлежат одной прямой.

2. Если точка *B* лежит между точками *A* и *C*, то точки *A*, *B*, *C* различные.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l} t \neq 0 \Rightarrow A \neq B \\ t \neq 1 \Rightarrow B \neq C \end{array}\right| \Rightarrow A, B, C \text{ — различны.}$$

3. Если точка *B* лежит между точками *A* и *C*, то точка *B* лежит между точками *A* и *C*.

Доказательство

$$\overset{*}{ABC} \Rightarrow \vec{AB} = t \cdot \vec{AC},\ 0 < t < 1.$$

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CA} + t\,\vec{AC} = \vec{CA} - t\,\vec{CA} = (1-t)\,\vec{CA}.$$

Так как $0 < t < 1$, то и $0 < 1 - t < 1$.

4. Определение отрезка

Определение. *Отрезком с концами* в точках *A* и *B* называется фигура, состоящая из точек *A* и *B* и точек, лежащих между точками *A* и *B*. Обозначается [*AB*].

Определение. *Лучом* с началом в точке *O* и проходящим через точку *A* называется множество точек $M \in E_3$, для которых выполняется равенство $\vec{OM} = t\,\vec{OA},\ t \geq 0$.

4. Плоскость Лобачевского. Некоторые факты геометрии Лобачевского

В 1899 году Гильбертом была опубликована работа «Основания геометрии», в которой впервые была представлена аксиоматика евклидовой плоскости, удовлетворяющая всем требованиям науки.

Основные объекты: точка, прямая.

Основные отношения: отношение принадлежности, порядка, движения.

Все аксиомы делятся на V групп:

I группа: аксиомы принадлежности;

II группа: аксиомы порядка;

III группа: аксиомы движения;

IV группа: аксиомы непрерывности;

V группа: аксиома параллельности.

Геометрия Лобачевского на плоскости строится на *I—IV* группах аксиом Гильберта и на аксиоме *V′ — аксиоме Лобачевского*.

V′: Через точку вне прямой в плоскости прямой и точки можно провести, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную.

Так как в геометрии Лобачевского справедлива аксиома *V′*, противоречащая *V* постулату Евклида, то на плоскости Лобачевского имеет место отрицание *V* постулата Евклида и его эквивалентов.

Эквиваленты V постулата в плоскости Евклида	***Их отрицания в плоскости Лобачевского***
Сумма внутренних углов треугольника равна *2d*	Сумма внутренних углов треугольника меньше *2d*
Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника равна *4d*	Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника меньше *4d*
Около любого треугольника можно описать окружность	Ни около любого треугольника можно описать окружность
Существуют два подобных, но не равных треугольника	Не существует двух подобных и не равных треугольников
Расстояние между непересекающимися прямыми конечно	Расстояние между непересекающимися прямыми не является конечным
Перпендикуляр и наклонная, проведенные к одной прямой, пересекаются	Перпендикуляр и наклонная, проведенные к одной прямой, не всегда пересекаются

Рассмотрим некоторые свойства треугольников на плоскости Лобачевского.

Определение. *Дефектом треугольника ABC* называется разность $D_{\Delta} = 2d - \angle A - \angle B - \angle C$.

Теорема. *Дефект треугольника зависит от формы и размеров треугольника.*

Доказательство. Допустим, что дефект треугольника постоянен, т.е. $D_{\Delta} = a = const$. Рассмотрим ΔABC и проведем к нему чевиану *BD* (рис. 1).

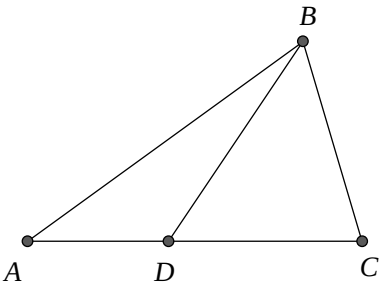


Рис. 1

Тогда

$$D_{\Delta ABC} = 180° - \angle A - \angle B - \angle C = 180° - \angle A - \angle ABD - \angle ADB +$$
$$+180° - \angle DBC - \angle BDC - \angle C = D_{\Delta ABD} + D_{\Delta CBD}.$$

Так как $D_\Delta = a$, то $a = a + a$, следовательно $D_\Delta = a = 0$. Последнее противоречит свойству $D_\Delta > 0$, что доказывает теорему.

Следствие. *Дефект треугольника обладает свойством аддитивности.*

Действительно, в процессе доказательства теоремы было показано, что $D_{\Delta ABC} = D_{\Delta ABD} + D_{\Delta CBD}$.

В геометрии Лобачевского справедливы все три признака конгруэнтности треугольников. Дополнительно выполняется четвертый признак: *если три угла одного треугольника конгруэнтны трем соответственным углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.*

Понятие параллельности в геометрии Лобачевского имеет особое понимание.

Определение. Прямая *CE* называется *параллельной прямой AB* в направлении от *A* к *B* в точке *C*, если: 1) *CE* не пересекает *AB*; 2) всякий внутренний луч *CF* угла *ACE* пересекает прямую *AB* (рис. 2).

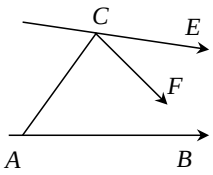


Рис. 2

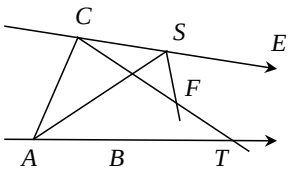


Рис. 3

Обозначают параллельность следующим образом: $CE \uparrow\uparrow AB$.

Теорема. *Если прямая* $CE \uparrow\uparrow AB$ *в точке C, то она параллельна AB в любой другой своей точке.*

Доказательство. Пусть точка *S* лежит между *C* и *E*, тогда *SE* не пересекает *AB*, так как *CE* не пересекает *AB*. Возьмем произвольный внутренний луч *SF* угла *ASE* (рис. 3). Если точка *F* принадлежит *AB* или точки *S* и *F* лежат по разные стороны от прямой *AB*, то *SF* пересекает *AB*. Пусть *S* и *F* лежат по одну сторону от *AB*. Рассмотрим луч *CF*. Этот луч внутренний для угла *ACE*. Так как $CE \uparrow\uparrow AB$ в точке *C,* то *CF* пересекает *AB* в точке *T.* Применим аксиому Паша к прямой *SF* и треугольнику *ACT.* Прямая *SF* не может пересечь сторону *AC*, так как лучи *AC* и *SF* лежат по разные стороны от прямой *AS,* поэтому *SF* пересекает *AT.* Следовательно $SE \uparrow\uparrow AB$.

Если точка *S* лежит слева от точки *C*, то рассуждения во многом аналогичны.

Доказывается, что если $a \uparrow\uparrow b$, то $b \uparrow\uparrow a$ в том же направлении. Если $a \uparrow\uparrow b$ и $b \uparrow\uparrow c$ в некотором направлении, то $a \uparrow\uparrow c$ в этом же направлении.

Если даны точка и прямая, не проходящая через точку, то через точку проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих данную (рис. 4).

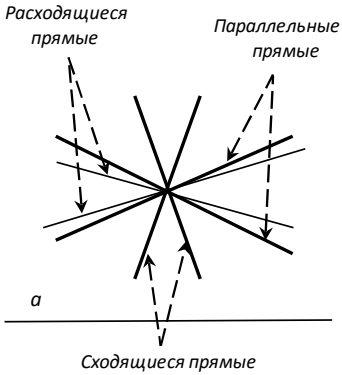


Рис. 4

Все эти прямые лежат внутри одной пары вертикальных углов с вершиной в данной точке. Прямые, содержащие сто-

роны этих углов, *параллельны данной прямой* в разных направлениях.

Прямые, лежащие внутри этой пары вертикальных углов, называются *расходящимися с прямой a*. Прямые, проходящие через точку *A* и пересекающие прямую *a*, называются *сходящимися с прямой a.*

Рассмотрим две параллельные прямые *a* и *b*, точку $A \in a$ и опустим из точки *A* перпендикуляр на прямую *b* (рис. 5).

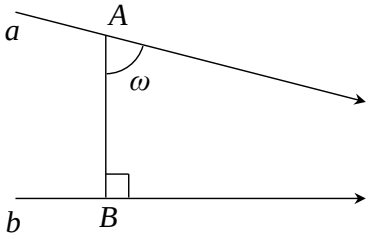


Рис. 5

Принято угол ω называть *углом параллелизма*, отрезок *AB — отрезком угла параллелизма*. Известно, что угол параллелизма есть функция своего отрезка, т.е. ω = П(*AB*). При этом

$$\lim_{x\to\infty}\Pi(x)=0,\ \lim_{x\to 0}\Pi(x)=\frac{\pi}{2}.$$

При малых значениях *x* угол параллелизма близок к π/2, поэтому для этих значений *x* факты геометрии Лобачевского близки к фактам геометрии Евклида.

Доказывается, что расстояние между параллельными прямыми неограниченно уменьшается при движении в сторону параллелизма и увеличивается при обратном движении. Любые две расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр, расстояние от одной из них до другой неограниченно увеличивается при движении от основания общего перпендикуляра.

На плоскости Лобачевского существует несколько замечательных кривых. Трем видам пучков прямых: эллиптическому, параболическому, гиперболическому — соответствуют окружности, орициклы и эквидистанты.

Теорема. *Через три точки плоскости Лобачевского, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести одну из замечательных кривых*.

Окружности, орициклы, эквидистанты являются ортогональными траекториями своих пучков.

5. Проективная плоскость и ее модели. Некоторые факты проективной геометрии

Определение. Непустое множество P_2 называется *проективной плоскостью*, если существует отображение $f : V_3 / \{\vec{0}\} \to P_2$, для которого выполняются следующие аксиомы:

1) f — сюръективно, т.е. каждый элемент P_2 имеет хотя бы один прообраз;

2) образы двух векторов совпадают тогда и только тогда когда векторы коллинеарные

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Leftrightarrow \vec{x} \| \vec{y}, \ \textit{т.е.} \ \vec{x} = \lambda \vec{y}, \ \lambda \in R .$$

Элементы множества P_2 называются *проективными точками.*

Согласно второй аксиоме образы коллинеарных векторов в отображении $f : V_3 / \{\vec{0}\} \to P_2$ совпадают. Это означает, что в одну проективную точку отображается множество векторов $V_1 / \{\vec{0}\}$, т.е. $f\left(V_1 / \{\vec{0}\}\right) = A, \ A \in P_2$. Различные точки порождаются различными одномерными векторными подпространствами, т.е. если $A \neq B$ и $A = f\left(V_1 / \{\vec{0}\}\right), B = f\left(V_1' / \{\vec{0}\}\right)$, то $V_1 \cap V_1' = \{\vec{0}\}$.

Принято множество образов векторов $V_2 / \{\vec{0}\}$ называть *проективной прямой a*, т.е. $a = f\left(V_2 / \{\vec{0}\}\right)$.

Если плоскость P_2 порождается $V_3 / \{\vec{0}\}$, прямая l — $V_2 / \{\vec{0}\}$, точка A порождается $V_1 / \{\vec{0}\}$, то можно доказать теорему.

Теорема. *Прямая* $l \in P_2 \Leftrightarrow V_2 \subset V_3$,

точка $A \in P_2 \Leftrightarrow V_1 \subset V_3$,

точка $A \in l \Leftrightarrow V_1 \subset V_2$.

Проективная плоскость обладает рядом свойств.

1° *Через две различные точки плоскости проходит единственная прямая.*

Каждая проективная точка есть образ некоторого одномерного векторного подпространства без нулевого вектора. Пусть $A = f\left(V_1 / \{\vec{0}\}\right), B = f\left(V_1' / \{\vec{0}\}\right)$. Так как $A \neq B$, то $V_1 \neq V_1'$. Рассмотрим V_2, натянутое на V_1 и V_1'. Такое пространство существует и оно единственно. Обозначим через $a = f\left(V_2 / \{\vec{0}\}\right)$. По определению a — проективная прямая, причем $A \in a, B \in a$. Свойство доказано.

2° *Две различные прямые проективной плоскости пересекаются в одной точке.*

Двух общих точек различные прямые, согласно первому свойству, иметь не могут. Докажем существование одной общей точки. Пусть a, b — две различные проективные прямые. Тогда $a = f\left(V_2 / \{\vec{0}\}\right)$ и $b = f\left(V_2' / \{\vec{0}\}\right)$. Векторные пространства V_2 и V'_2 содержатся в V_3 и не совпадают, поэтому $\dim\left(V_2 \cap V_2'\right) = \dim\left(V'\right) = 1$. Обозначим через $A = f\left(V' / \{\vec{0}\}\right)$. Тогда $A \in a$ и $A \in b$, свойство доказано.

3° *Существуют три точки плоскости, не принадлежащие одной прямой.*

Определение. Под *моделью проективной плоскости* понимается любое конкретное множество, для элементов которого выполняются аксиомы проективной плоскости.

Существует несколько моделей проективной плоскости. Среди них — связка прямых в трехмерном аффинном (евклидовом) пространстве A_3 (V_3) и расширенная аффинная (евклидова) плоскость.

Определение. Под *связкой прямых с центром в точке O* в пространстве A_3 (V_3) понимают совокупность прямых, проходящих через эту точку.

Возьмем пространство A_3 (V_3) и множество P, элементы которого — прямые связки с центром в точке O. Зададим отображение $f : V_3 / \{\vec{0}\} \to P$, при котором каждому вектору $\vec{x}$ ставится в соответствие прямая связки x, параллельная вектору $\vec{x}$. Это отображение сюръективно, так как для любого вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ существует прямая x, проходящая через точку

O и параллельная вектору $\vec{x}$. Пусть $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, тогда согласно законам отображения векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ параллельны одной прямой и, следовательно, $\vec{x} = \lambda\vec{y}$.

Обе аксиомы выполнены. Рассматриваемая связка является моделью проективной плоскости. В связке прямых каждая прямая играет роль проективной точки; множество прямых связки, лежащих в одной плоскости, — роль проективной прямой. Проанализируем, как выполняются свойства проективной плоскости в построенной модели.

Свойства проективной плоскости	***Интерпретация свойств на построенной модели***
Через любые две точки проходит единственная прямая	Через любые две прямые связки проходит единственная плоскость связки
Любые две прямые на проективной плоскости пересекаются	Любые две плоскости связки пересекаются по прямой связки
Существуют три точки, не лежащие на одной прямой	Существуют три прямые связки, не лежащие в одной плоскости связки

Рассмотрим вторую модель. В трехмерном аффинном пространстве выделим плоскость α и связку прямых с центром в точке O, не принадлежащей α (рис. 6).

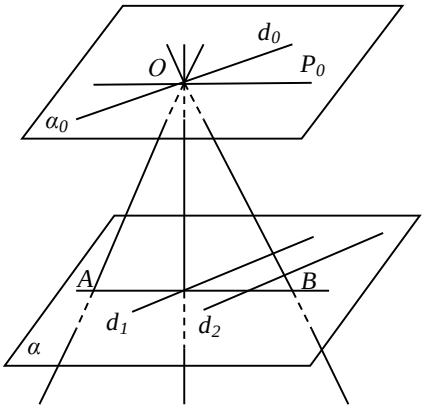


Рис. 6

Каждой точке $A \in \alpha$ в связке соответствует прямая *OA*. Каждой прямой $AB \in \alpha$ отвечает плоскость связки *OAB*. Всякой прямой связки, пересекающей плоскость α, соответствует точка пересечения ее с плоскостью α. Однако существуют прямые связки, для которых нет прообраза на плоскости. Все эти прямые расположены в плоскости α_0, где $\alpha_0 \| \alpha$ и точка $O \in \alpha_0$.

Для того чтобы отображение прямых связки на плоскость α стало биективным, необходимо пополнить плоскость α так называемыми *несобственными точками*. Число этих точек должно быть бесконечным, так как бесконечно множество прямых связки в плоскости α_0. Все эти точки нужно расположить на *несобственной прямой*, которую необходимо поставить в соответствие плоскости α_0.

Пусть d_0 — прямая в плоскости α_0. Проведем через d_0 различные плоскости. Они пересекут α по пучку параллельных прямых. Каждая из таких прямых d_1, d_2 и т.д. должна содержать несобственную точку, соответствующую прямой d_0. Для сохранения биективности отображения необходимо считать, что все прямые пучка параллельных прямых плоскости α имеют одну общую несобственную точку.

Определение. Плоскость, пополненная указанным образом несобственными точками, называется *расширенной аффинной плоскостью*.

Между связкой и расширенной плоскостью существует биективное отображение. Расширенная аффинная плоскость является второй моделью проективной плоскости.

Роль проективных точек в ней играют собственные и несобственные точки, роль проективных прямых — собственные прямые и несобственная прямая.

На проективной плоскости вводится понятие репера.

Определение. Под *репером проективной плоскости* понимается упорядоченная четверка по три неколлинеарных точек $R\{A_1, A_2, A_3, E\}$.

Для всякого проективного репера существует согласованная четверка векторов такая, что

$$f(\vec{a}_1) = A_1,\ f(\vec{a}_2) = A_2,\ f(\vec{a}_3) = A_3,\ f(\vec{e}) = E,$$

где $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Каждая точка проективной плоскости имеет координаты $(x_1, x_2, x_3)_R$, которые находятся неоднозначно с точностью до умножения на общий множитель.

Отметим два характерных проективных свойства фигур на плоскости.

На проективной плоскости справедлив ***принцип двойственности:***

Если в предложении, касающемся взаимного расположения точек и прямых, слово «точка» заменить на слово «прямая», а слово «прямая» — на слово «точка», оставив без изменения отношение принадлежности, то получим предложение столь же верное, как и предыдущее.

Принцип двойственности применим не только к теоремам, но и к определениям. При этом получаются фигуры, двойственные исходным. Двойственными фигурами являются трехсторонники и трехвершинники, четырехсторонники и четырехвершинники.

На проективной плоскости справедливы прямая и обратная теоремы Дезарга.

Теорема Дезарга. *Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух трехвершинников, проходят через одну точку, то точки пересечения соответственных сторон трехвершинников принадлежат одной прямой.*

Теорема обратная. *Если точки пересечения соответственных сторон двух трехвершинников принадлежат одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку.*

Вводится понятие сложного отношения четырех точек. На проективной прямой зададим репер $R(A_1, A_2, E)$, рассмотрим точки $A(a_1, a_2)_R$, $B(b_1, b_2)_R$, $C(c_1, c_2)_R$, $D(d_1, d_2)_R$.

Определение. *Сложным*, или *двойным*, *отношением четырех точек A, B, C, D* на проективной плоскости, взятых в определенном порядке, называется число

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

Определение. Четверка точек проективной прямой называется *гармонической*, если сложное отношение этих точек равно минус единице.

Полный четырехвершинник обладает гармоническими свойствами.

Теорема 1. *На каждой диагонали полного четырехвершинника имеется гармоническая четверка точек, состоящая из двух диагональных точек и двух точек пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку.*

Теорема 2. *На каждой стороне полного четырехвершинника имеется гармоническая четверка точек, состоящая их двух вершин, диагональной точки и точки пересечения стороны с прямой, проходящей через две другие диагональные точки.*

Последние теоремы позволяют выполнять построения на евклидовой плоскости с помощью одной линейки.

Определение. *Проективная геометрия* — это наука, изучающая свойства фигур, остающиеся инвариантными при проективных преобразованиях плоскости.

Определение. Проективным преобразованием проективной плоскости называется отображение плоскости на себя, при котором каждой точке $M(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R(A_1, A_2, A_3, E)$ ставится в соответствие точка $M'(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R'(A'_1, A'_2, A'_3, E')$.

6. Топологические пространства. Топологические многообразия. Примеры

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ_α — подмножество T и $\Sigma = \{\Sigma_\alpha\}$. Говорят, что *$\Sigma$ задает на T топологическую структуру*, если выполняются аксиомы:

1) объединение любого множества множеств из Σ принадлежит к Σ;

2) пересечение любых двух множеств из Σ принадлежит к Σ;

3) $T \in \Sigma$;

4) $\varnothing \in \Sigma$.

Пара (T, Σ) образует топологическое пространство. Элементы T называются *точками*, элементы Σ — *открытыми множествами* топологического пространства.

Определение. *Окрестностью точки* топологического пространства называют всякое открытое множество, содержащее эту точку.

Пример 1. Пусть $\Sigma = \{T, \varnothing\}$. Очевидно, что все аксиомы выполняются. Принято эту топологию называть *тривиальной*.

Пример 2. Σ состоит из всех возможных подмножеств множества T. Все четыре аксиомы будут выполнены, так как объединения, пересечения подмножеств из T дают вновь подмножества из T, или само множество T, или пустое множество, которые являются подмножествами T. Эту топологию называют *дискретной*.

Пример 3. $T = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ $\Sigma = \{T,\varnothing,\{\alpha\},\{\alpha\beta\}\}$. Проверяя все четыре аксиомы, убеждаемся, что (T, Σ) — топологическое пространство.

Пример 4. Обозначим через R^n множество всевозможных кортежей длины n, состоящих из n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Элементы множества R^n назовем точками, то есть точка $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Обозначим через $U(S_0, r)$ множество точек $K = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2,$$

где $r = const > 0$, а $S_0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0)$ — некоторая фиксированная точка из R^n.

Определение. Назовем *множество* $U(S_0, r)$ *открытым шаром с центром в точке* S_0 *и радиусом* r.

Введем в R^n топологию следующим образом. Будем считать открытыми в R^n пустое множество, а также такое множество, которое наряду с каждой своей точкой содержит открытый шар с центром в этой точке. Проверим выполнение аксиом топологического пространства: 1) обозначим объединение любого числа открытых множеств через Ф. Возьмем произвольную точку $K \in \Phi$, тогда K принадлежит по крайней мере Σ_α — одному из открытых множеств, входящих в Ф. Следо-

вательно, для точки K существует $U(K,r_1)$: $U(K,r_1)$ содержится в Σ_α, а так как $\Sigma_\alpha \in \Phi$, то $U(K,r_1) \in \Phi$, то есть множество Ф открыто; 2) пусть Σ_α и Σ_β — открытые множества и $\Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \bigcap \Sigma_\beta$. Если $\Sigma_\gamma = \varnothing$, то по выбору открытых множеств в R^n Σ_γ является открытым множеством. Предположим, что $\Sigma_\gamma \neq \varnothing$. Возьмем произвольную точку $M \in \Sigma_\gamma$, тогда $M \in \Sigma_\alpha$ и $M \in \Sigma_\beta$, поэтому существуют такие числа $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $U(M,r_1)$ принадлежит Σ_α, $U(M,r_2)$ принадлежит Σ_β. Обозначим $U(M,r_1) \bigcap U(M,r_2) = U(M,r)$, где $r = \min(r_1,r_2)$, тогда $U(M,r) \in \Sigma_\gamma$, то есть множество Σ_γ — открыто. Аксиомы 3 и 4 выполняются по выбору открытых множеств в R^n. Следовательно, множество R^n с введенной на нем топологической структурой является топологическим пространством.

Введем понятие замкнутых множеств.

Пусть X — некоторое непустое множество, H — его подмножество, тогда множество X/H называется *дополнением множества H до множества X*.

Определение. Множество F топологического пространства *(X, Σ)* называется *замкнутым множеством*, если его дополнение до множества X является открытым.

Для замкнутых множеств справедливы *свойства:*

1. Пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто.

2. Объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто.

3. Само топологическое пространство и пустое множество замкнуты.

Множество $B = \{B_\alpha\}$ определяет *базис* топологического пространства, если всякое множество Σ_α представимо в виде объединения некоторых множеств B_α. Например, множество интервалов на числовой прямой образует базис евклидовой топологии на R^1. Базис может состоять из конечного, счетного, бесконечного множества элементов.

Определение. Топологическое пространство называется *отделимым* или *хаусдорфовым*, если для любых двух точек пространства можно указать непересекающиеся окрестности.

Определение. Система множеств X_α образует *покрытие пространства*, если объединение X_α совпадает с пространством.

Покрытие может состоять из конечного числа элементов, быть счетным множеством. Если X_α открытое множество, то говорят об *открытом покрытии.*

Определение. *Подпокрытием покрытия* X_α называется такое его подмножество, которое в свою очередь является покрытием.

Определение. Топологическое пространство называется *компактным,* если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение. Топологическое пространство называется *связным,* если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых множеств непересекающихся множеств.

Рассмотрим два топологических пространства X и Y и пусть $f : X \to Y$.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки $f(x_0) \in Y$ существует окрестность V точки x_0 такая, что $f(V) \subset U$.

Если непрерывно f в каждой точке $x_0 \in X$, то отображение называется f *непрерывным на X.*

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом* или *топологическим*, если:

1) f — биективно;
2) f — непрерывно;
3) f^{-1} — непрерывно.

Принято под *топологическими инвариантами фигур* понимать свойства этих фигур, сохраняющиеся при гомеоморфизмах.

Определение. Теория, изучающая топологические свойства фигур, называется *топологией.*

Определение. *n-мерным топологическим многообразием* называется связное отделимое топологическое пространство

со счетным базисом, окрестность каждой точки которого гомеоморфна окрестности точки в R^n.

Примером одномерного некомпактного многообразия является прямая, одномерного компактного — окружность. Точки ребер тетраэдра не образуют одномерное топологическое многообразие. Примерами двумерных многообразий являются плоскость, открытый круг, сфера, тор.

Существуют многообразия с краем.

Определение. *Топологическим многообразием с краем размерности n* называется связное отделимое топологическое пространство со счетным базисом, окрестность каждой точки которого гомеоморфна либо R^n, либо R^n_+.

Примерами таких многообразий являются отрезок, сфера с дыркой, лист Мёбиуса. Для классификации двумерных топологических многообразий введем понятие клеточного покрытия.

Определение. Под *клеткой* понимают фигуру, гомеоморфную простому плоскому многоугольнику.

Говорят, что *на многообразии задано клеточное покрытие* F_i, если:

1. $\bigcup_i F_i$ — объединение клеток совпадает с многообразием.

2. $F_i \cap F_j$ — пересечение любых двух клеток либо пусто, либо есть общая вершина, либо есть общее ребро этих клеток.

Если указан порядок обхода вершин клеток, то она считается *ориентированной*. Зададим ориентацию в каждой клетке покрытия многообразия, тогда ориентация покрытия считается *согласованной,* если вдоль общего ребра в соседних клетках она проводится в противоположных направлениях.

Все двумерные топологические многообразия разбиваются на два класса. Многообразия одного класса допускают покрытия с согласованной ориентацией, и они называются *двусторонними.* Многообразия другого класса такую ориентацию не допускают, и их называют *односторонними.* Примерами двусторонних многообразий являются сфера, тор, круг. Классическим примером одностороннего многообразия с краем является лист Мёбиуса.

Топологическим инвариантом служит ***характеристика Эйлера.***

Число k = В + Г – Р, где В — число вершин, Г — число клеток, Р — число ребер клеточного покрытия, называется эйлеровой характеристикой двумерного многообразия. Эйлерова характеристика не меняется при гомеоморфных преобразованиях многообразия, не зависит от способа нанесения покрытия на многообразии. Она характеризует само многообразие. Известно, что характеристика Эйлера сферы равна 2, тора — 0, листа Мёбиуса — 0, круга — 1.

Важным свойством характеристики Эйлера является сложение характеристик при склеивании двух многообразий вдоль общего края.

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Все двумерные компактные двусторонние многообразия гомеоморфны одному из многообразий ряда, состоящего из сферы, сферы с одной ручкой, сферы с двумя ручками и т.д., т.е. $S_0, S_2, S_4, \ldots$.

Утверждение 2. Все двумерные компактные односторонние многообразия гомеоморфны одному из многообразий ряда, состоящего из сферы с дыркой, заклеенного листа Мёбиуса, сферы с двумя дырками, заклеенными листами Мёбиуса, и т.д., т.е. $S_1^*, S_2^*, S_3^*, \ldots$.

7. Конструктивная геометрия. Основные методы решения задач на построение

Определение. *Конструктивной геометрией* называется раздел геометрии, в котором рассматриваются методы и способы решения задач на построение.

Конструктивную геометрию можно строить на аксиоматической основе. К основным понятиям евклидовой геометрии добавим понятие «построить фигуру».

Все аксиомы делят на две группы: общие аксиомы и аксиомы инструментов. К *общим аксиомам* относят следующие утверждения:

I_1: если фигура дана, то она построена.

I_2: если построены две фигуры, то построено и их объединение.

I_3: если построены две фигуры и их пересечение или разность не пусты, то они построены.

I_4: если фигура дана, то можно построить точки, принадлежащие фигуре, и точки, не принадлежащие ей.

Традиционно в качестве инструментов в классической конструктивной геометрии используется линейка и циркуль.

II_1: Аксиома линейки: если даны две точки A и B, то можно построить два луча AB и BA.

II_2: Аксиома циркуля: если даны точка и отрезок, то можно построить окружность с центром в этой точке и радиусом, равным отрезку.

Принято все построения, вытекающие из общих аксиом и аксиом инструментов, называть *основными построениями*. К их числу относятся построение точки, принадлежащей данной фигуре, и точки, не принадлежащей ей; построение отрезка по его концам; построение прямой по двум точкам; построение точек пересечения прямой и окружности, двух окружностей и т.д.

Определение. Под *задачей на построение* понимают задачу, в которой по заданным фигурам с помощью указанных инструментов можно построить фигуру, удовлетворяющую заданным условиям.

Решить задачу на построение — значит указать конечную упорядоченную последовательность основных построений, которые нужно выполнить, чтобы получить фигуру, удовлетворяющую заданным условиям.

При решении достаточно сложной задачи число основных построений может быть велико. Для упрощения записи построения используют *элементарные построения*, понимая при этом под ними решение простых, часто употребляемых задач. Примерами элементарных построений являются построение биссектрисы угла, серединного перпендикуляра, треугольника по стороне и двум прилежащим углам, треугольника по трем сторонам и т.д.

Существует определенная методика решения задач на построение. Все решение разбивается на четыре этапа: *анализ, построение, доказательство* и *исследование.* Анализ понимается как поиск решения задачи. Это наиболее сложная часть решения, не поддающаяся жесткой алгоритмизации.

Рассмотрим в качестве примера ***задачу 1:*** *построить треугольник по основанию и медианам, проведенным к боковым сторонам.*

Проведем ***анализ.*** Предположим, что задача решена и треугольник ABC искомый. Пусть в нем $AB = c$, $BM = m_1, AN = m_2$. Искомый треугольник будет построен, если будет указан способ нахождения третьей вершины C.

Пусть точка O есть точка пересечения медиан. Тогда $AO = \frac{2}{3}m_2, BO = \frac{2}{3}m_1$. В треугольнике AOB все стороны известны (рис. 7).

Его можно построить. Нетрудно затем найти точки M и N. Точка C строится как точка пересечения прямых AM и BN. Путь решения задачи найден. Цель этапа анализа достигнута.

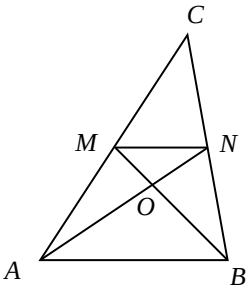


Рис. 7

Суть второго этапа — ***построение*** — состоит в указании конечной последовательности основных и элементарных построений, которые необходимо выполнить, чтобы получить искомую фигуру. Практика геометрических построений показывает, что запись пунктов построения желательно проводить одновременно с их выполнением циркулем и линейкой. Это помогает избежать ошибок при записи пунктов построения и облегчает проведение дальнейших этапов решения задачи.

Для рассматриваемой задачи построение будет состоять из следующих пунктов:

1. отрезок $AB = c$;

2. отрезки $\frac{2}{3}m_2, \frac{2}{3}m_1$;

3. треугольник ABO, где $AB = c, AO = \frac{2}{3}m_2, BO = \frac{2}{3}m_1$;

4. луч AO и точка N на этом луче, так чтобы $AN = m_2$;

5. луч BO и точка M на этом луче, так чтобы $BM = m_1$;

6. лучи AM и BN;

7. точка $C = AM \cap BN$.

В процессе третьего этапа — ***доказательство*** — необходимо установить, что построенная фигура удовлетворяет всем

условиям задачи и, следовательно, является искомым решением. При этом предполагается, что каждый пункт построения выполним и поэтому построенная фигура существует.

В рассматриваемой задаче $AB = c$ по построению, поэтому треугольник ABC будет искомым, если его медианы, проведенные к боковым сторонам треугольника, равны данным отрезкам m_1, m_2. Для этого необходимо, чтобы точки M и N являлись серединами боковых сторон.

Рассмотрим треугольники ABO и NMO. Они подобны, так как $AO:ON = BO:OM = 2:1$ по построению, а углы AOB и NOM равны как вертикальные. Отсюда следует, что $MN||AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. Значит, отрезок MN есть средняя линия треугольника, а точки M и N — середины боковых сторон. Что и требовалось доказать.

Цель последнего этапа — ***исследование*** — выяснить, при каких условиях на данные элементы задача имеет решение и сколько решений.

Удобно исследование проводить по пунктам построения, последовательно выясняя условия выполнимости каждого пункта и число возможных вариантов этого выполнения. Однако исследование по этой схеме позволяет ответить только на вопрос о том, при каких условиях и сколько решений имеет задача при данном способе построения.

Для завершения исследования необходимо показать, что любое возможное решение совпадает с одним из найденных. Если это не удается сделать, то, возможно, существуют решения, не являющиеся частными случаями найденного решения. Чтобы найти это решение, нужно вернуться к проведению анализа и искать другие способы.

В нашей задаче пункты построения 1 и 2 всегда выполнимы. Пункт 3 выполняется, если справедливы неравенства $\frac{2}{3}|m_2 - m_1| < c < \frac{2}{3}(m_2 + m_1)$.

Пункты 4, 5, 6 выполняются однозначно. Лучи AM и BN не могут быть параллельны. Действительно, если прямые AM и BN параллельны, то треугольники AOM и BON подобны. Тогда $\frac{MO}{OB} = \frac{AO}{ON}$, а $MO = \frac{1}{3}m_1, OB = \frac{2}{3}m_1, AO = \frac{2}{3}m_2, ON = \frac{1}{3}m_2.$

Получаем, что $\frac{1}{2}=\frac{2}{1}$, чего быть не может. Пришли к противоречию. Итак, задача имеет единственное решение при данном способе решения при условии

$$\frac{2}{3}|m_2-m_1|<c<\frac{2}{3}(m_2+m_1).$$

Выделяют три основных метода решения задач на построение: *метод пересечения фигур (метод геометрических мест точек), метод геометрических преобразований, алгебраический метод.*

Суть метода пересечения фигур: в искомой фигуре выделяют некоторый элемент (обычно точку), удовлетворяющий условиям F_1 и F_2. Тогда рассматривают одно условие F_1 и строят множество точек, удовлетворяющих этому условию. Затем строят второе множество точек, удовлетворяющих условию F_2. Пересечение построенных множеств определяет искомый элемент. С помощью этого элемента заканчивают построение искомой фигуры.

Задача 2. *Построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведенным к этому основанию.*

Анализ. Пусть треугольник ABC — искомый и пусть $AB=c$, $CD=m_c$, $CK=h_c$. Замечаем, что точка C удовлетворяет одновременно двум условиям. Во-первых, $CD=m_c$, следовательно, точка C принадлежит окружности $\omega(D,m_c)$. Во-вторых, так как $CK=h_c$, то точка C принадлежит геометрическому месту точек, которые находятся на постоянном расстоянии h_c от прямой AB. Поэтому точка C принадлежит пересечению этих множеств.

Построение:

1. отрезок $AB=c$;

2. геометрическое место точек, отстоящих от прямой AB на постоянное расстояние h_c;

3. точка D — середина отрезка AB;

4. $\omega(D,m_c)$;

5. C — точка пересечения геометрического места точек пункта 2 с окружностью $\omega(D,m_c)$;

6. треугольник ABC (рис. 8).

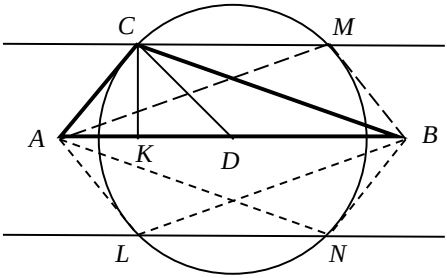


Рис. 8

Доказательство. В треугольнике *ABC* по построению: $AB = c$, точка *D* — середина отрезка *AB,* отрезок $CD = m_c$ — медиана. Высота треугольника *ABC* равна $CK = h_c$. Треугольник *ABC* — искомый.

Исследование. Пункты 1, 2, 3, 4 выполняются однозначно. При проведении пункта 5 возможны случаи:

a) если $m_c < h_c$, то точек пресечения нет;

b) если $m_c = h_c$, то существуют две точки пересечения;

c) если $m_c > h_c$, то существуют четыре точки пересечения.

Так как задача не связана с положением и треугольники, получающиеся во втором и третьем случаях, соответственно равны, то при $m_c \geq h_c$ задача имеет единственное решение при данном способе решения.

При использовании этого метода необходимо знать способы построения разных геометрических мест точек. Особенно таких, как окружность, биссектриса угла, серединный перпендикуляр, отрезки, множество точек, из которых отрезок виден под данным углом, окружность Аполлония и т.д.

Общая *идея метода геометрических преобразований* — в использовании при решении задачи не только данных элементов, но и дополнительных, полученных из данных с помощью преобразований. Различают метод параллельного переноса, метод поворота, метод осевой симметрии, метод гомотетии.

Задача 3. *Даны три параллельные прямые, построить равносторонний треугольник с вершинами на этих прямых.*

Анализ. Предположим, что задача решена и треугольник *ABC* — искомый. Тогда каждый угол треугольника *ABC* равен

60°. Примем одну из вершин треугольника, например точку *A*, за центр и повернем плоскость на угол в 60° против часовой стрелки. Так как отрезок *AB* равен отрезку *AC*, то точка *B* перейдет в точку *C*, при этом образ прямой *b* пересечет прямую *c* в точке *C*. Этот факт подсказывает способ решения задачи (рис. 9).

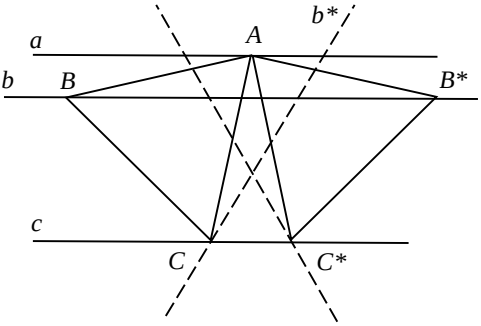


Рис. 9

Построение:

1. произвольная точка *A* прямой *a*;

2. прямая b^* как образ прямой *b* при повороте плоскости вокруг точки *A* на угол в 60° против часовой стрелки;

3. точка $C = c \cap b^*$;

4. точка *B* как образ точки *C* на прямой *b*;

5. треугольник *ABC*.

Доказательство. По построению *AB* = *AC* и угол *BAC* равен 60°. Следовательно, треугольник *ABC* — равносторонний. Так как его вершины по построению принадлежат данным параллельным прямым, то этот треугольник искомый.

Исследование. Пункты 3, 4, 5 выполняются однозначно. Число решений зависит от выполнения второго пункта. Прямую *b* можно поворачивать вокруг точки *A* на 60° по часовой стрелке и против часовой стрелки. Поэтому с каждой точкой *A* прямой *a* связаны два треугольника, являющиеся решениями. Эти треугольники равны, но имеют разное положение относительно данных прямых. В этой задаче их необходимо считать различными решениями.

Так как все прямые *a, b, c* равноправны, то выбор точек на прямых *b, c* в качестве новых центров поворота не даст новых решений.

При использовании *алгебраического метода* в искомой фигуре выделяют некоторый элемент, обычно это отрезок, с

помощью которого строится искомая фигура. Длину этого отрезка выражают аналитически через длины данных отрезков. Используя затем правила построения с помощью циркуля и линейки отрезков, заданных аналитически, строят отрезок. С его помощью завершают построение искомой фигуры.

Известны способы сложения, вычитания, деления, умножения отрезков с помощью циркуля и линейки. Циркуль и линейка позволяют строить отрезки, заданные формулами: $x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{c^2 - a^2}$. Более сложен случай, когда $x = f(a, b, \ldots, c)$, где f — функция и a, b, c — длины заданных отрезков.

Существует ***критерий разрешимости задачи на построение***.

Отрезок можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда длина этого отрезка выражается через длины данных отрезков при помощи конечного числа арифметических операций (т.е. сложения, вычитания, умножения, деления) и извлечения квадратного корня.

Задача 4. *Данный отрезок AB разделить в крайнем и среднем отношении, т.е. построить точку X, для которой выполняется соотношение:*

$$AX^2 = AB \cdot XB .$$

Решение. Пусть $AB = a$, положим $AX = x$, тогда

$$x^2 = a(a \cdot x) \text{ или } x^2 + ax - a^2 = 0 .$$

Решая это уравнение, получаем $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Отрезок может иметь только положительную длину, поэтому

$$x = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{5} - a\right).$$

Правая часть выражения для x является суперпозицией конечного числа арифметических операций и операции извлечения квадратного корня, поэтому отрезок с длиной x построить можно. С помощью этого отрезка легко находится искомая точка на отрезке *AB*.

8. Параллельное проектирование и его свойства. Изображение плоских и пространственных фигур

Рассмотрим в пространстве плоскость π и прямую l, не параллельную плоскости π. Зададим отображение пространства на плоскость π следующим образом. Каждой точке M' пространства поставим в соответствие точку M плоскости π такую, что $M'M \parallel l$ (рис. 10).

Полученное отображение пространства на плоскость называется *параллельным проектированием*. Точка M называется *параллельной проекцией* точки оригинала M'. Плоскость π называется *плоскостью проекции*. Прямая l задает направление проектирования. Прямые, параллельные прямой l, называются *проектирующимися прямыми*. Если в пространстве рассмотреть фигуру F' и задать параллельное проектирование каждой точки этой фигуры на плоскость проекции π по направлению прямой l, то в плоскости π получим фигуру F, которая называется *проекцией оригинала* F' (рис. 11).

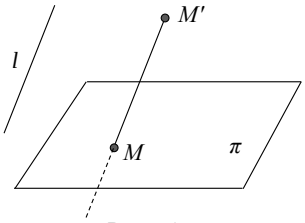


Рис. 10

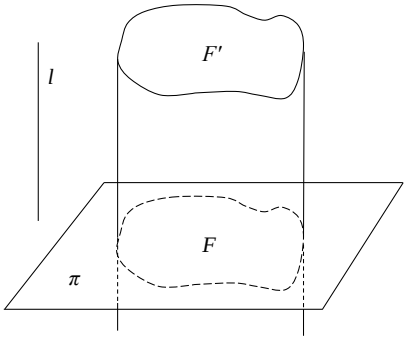


Рис. 11

Часто в качестве плоскости проекции выступает плоскость листа и проекция оригинала может не поместиться на доске или листе. В этом случае проекция подвергается преобразованию подобия. Таким образом, проекция оригинала, подвергнутая преобразованию подобия, называется *изображением оригинала*.

Параллельное проектирование обладает следующими свойствами:

1. Параллельной проекцией точки является точка.

2. Проекцией прямой, не параллельной направлению проектирования, является прямая. Прямые, параллельные прямой l, проектируются в точки.

3. Сохраняется простое отношение трех точек прямой.

4. Сохраняется параллелизм прямых и отрезков.

5. Сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой.

Определение. *Коэффициентом искажения отрезка* $A'B'$ при параллельном проектировании называется величина, равная отношению длины проекции отрезка к длине оригинала $k = \dfrac{AB}{A'B'}$.

Выделяют ***два вида параллельного проектирования*:**

1. Ортогональное проектирование, для него $l \perp \pi$.

2. Неортогональное (косоугольное) проектирование, для него $l \not\perp \pi$.

При изображении плоских фигур в параллельной проекции применяют следующие две теоремы:

Теорема 1. *Любой треугольник плоскости проекции является изображением треугольника любой наперед заданной формы.*

Доказательство. Рассмотрим два треугольника $\Delta A'B'C'$ и ΔABC (рис. 12).

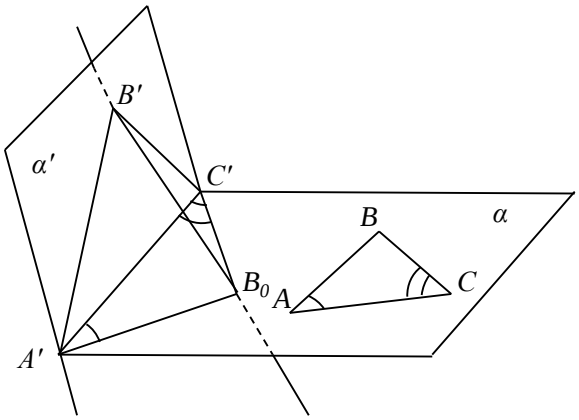


Рис. 12

Покажем, что ΔABC можно рассматривать как_изображение $\Delta A'B'C'$. Пусть α' — плоскость $\Delta A'B'C'$. Через прямую $A'C'$ проведем плоскость $\alpha \neq \alpha'$.

На отрезке $A'C'$ в плоскости α построим $\Delta A'B_0C'$, подобный ΔABC. Направление прямой $B'B_0$ примем за направление проектирования.

Тогда $\Delta A'B_0C'$ есть проекция $\Delta A'B'C'$. Так как ΔABC подобен $\Delta A'B_0C'$, то ΔABC — изображение исходного $\Delta A'B'C'$.

Теорема 2. *Если ΔABC плоскости проекций является изображением вполне определенного $\Delta A'B'C'$ плоскости α', то каждая точка плоскости α является изображением определенной точки плоскости α'.*

Следствия

1. Изображением параллелограмма плоскости является любой другой параллелограмм. Квадрат, ромб, прямоугольник являются частными случаями параллелограммов, поэтому их изображениями будут любые параллелограммы.

2. Изображением трапеции является трапеция с тем же отношением длин оснований.

3. Изображением данного четырехугольника будет четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся в том же отношении, что и у данного.

Четырехугольник *ABCD* — изображение четырехугольника *A'B'C'D'*, причем (*AOC*) = (*A'O'C'*), (*BOD*) = (*B'O'D'*) (рис. 13).

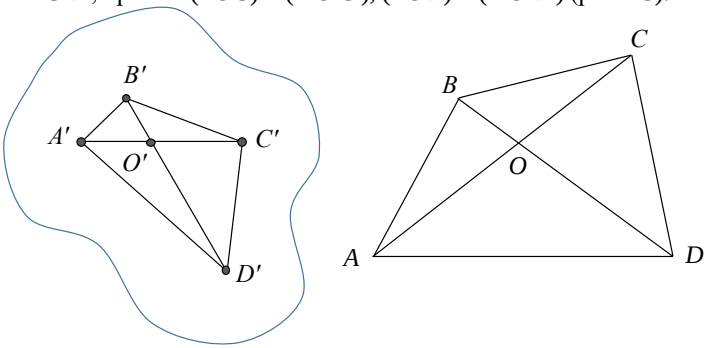


Рис. 13

Изображения фигур делятся на два вида:

1) изображение фигуры определенной формы (то есть заданной с точностью до подобия). Изображение таких фигур называется *метрически определенным*;

2) изображение фигуры, форма которой не определена.

Изображения окружности, правильного многоугольника, прямоугольного треугольника с заданным отношением катетов — примеры метрически определенных изображений.

Изображения произвольного многоугольника, параллелограмма, равнобедренного треугольника — примеры изображений, не являющихся метрически определенными. Изображения второго вида становятся метрически определенными, если на оригинал наложить условия, задающие его форму.

Теорема 3. *Изображением окружности является эллипс наперед заданной формы.*

Пример 1. Построить изображение двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности.

Анализ. Рассмотрим окружность и два взаимно перпендикулярных диаметра $A'B' \perp C'D'$ (рис. 14).

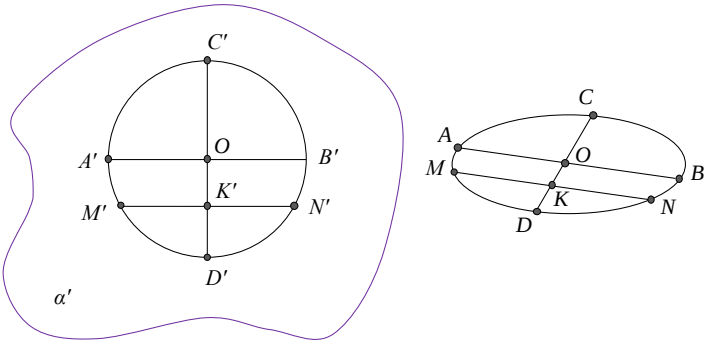


Рис. 14

Проведем хорду $M'N' \parallel A'B'$, середина хорды $M'N'$ лежит на диаметре $C'D'$. Можно заметить, что каждый из взаимно перпендикулярных диаметров окружности есть множество середин хорд, параллельных другому диаметру.

Построение:

1) эллипс — изображение окружности;

2) AB — диаметр эллипса, точка O — середина AB;

3) $MN \parallel AB$;

4) точка K — середина MN;

5) CD — диаметр, сопряженный с диаметром AB эллипса.

Построение изображений пространственных фигур основывается на двух теоремах.

Теорема 1 (теорема Польке — Шварца). *Всякий плоский невырожденный четырехугольник вместе со своими диагоналями является изображением тетраэдра любой произвольной формы.*

Следствием этой теоремы является ***теорема Польке***:

Любые три отрезка плоскости, исходящие из одной точки, являются изображением любых трех отрезков пространства, имеющих общее начало, в том числе три попарно ортогональных и равных отрезка.

Теорема 2. *Если четырехугольник ABCD плоскости вместе с его диагоналями является изображением данного тетраэдра A′B′C′D′, то каждая точка M плоскости π является изображением вполне определенной точки M′ пространства.*

Пример 2. Построить изображение n-угольной призмы.

Построение:

1. Строим изображение n-угольника, лежащего в основании призмы в соответствии с правилами параллельного проектирования (рис. 15).

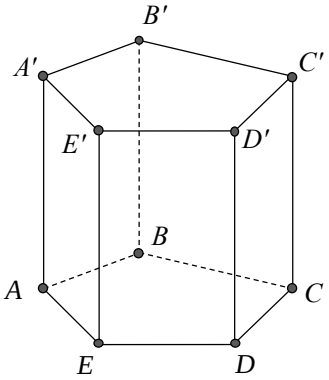


Рис. 15

2. От одной из вершин данного многоугольника в любом направлении откладываем отрезок произвольной длины, который по теореме Польке является изображением бокового ребра n-угольной призмы.

3. Дальнейшее построение ведется с учетом того, что боковые грани n-угольной призмы состоит из двух равных n-угольников и n параллелограммов.

Пример 3. Построить изображение конуса.

Построение:

1. Строим произвольный эллипс, который вместе со своими внутренними точками является изображением основания конуса.

2. Выбираем произвольно точку S, которую принимаем за изображение вершины конуса.

3. Из точки S проводим касательные к эллипсу, причем заметим, что точки касания A и B не являются диаметрально-противоположными точками эллипса (рис. 16).

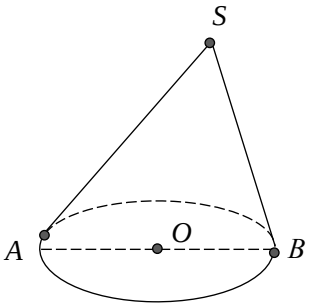


Рис. 16

Пример 4. Построить изображение шара.

Изображением шара в общем случае является эллипс с внутренними точками. Однако данное изображение не является наглядным. Поэтому чаще всего изображение шара строят в ортогональной проекции. В этом случае изображением шара является круг.

Для того чтобы изображение шара было более наглядным, обычно строят изображение одной из больших окружностей шара, которую называют экватором, а также точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью шара, которые называют полюсами шара. Причем $ON = ML$, $OS = ON$, где ML — отрезок касательной к изображению экватора в точке M (рис. 17).

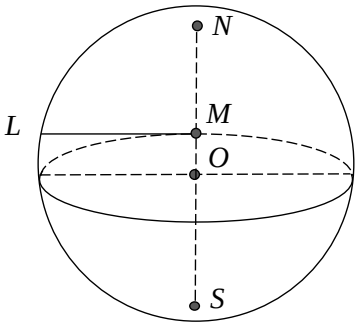


Рис. 17

Список использованной литературы

1. Болодурин В. С., Вахмянина О. А., Измайлова Т. С. Пособие по элементарной геометрии. Часть 2. Оренбург : Изд-во ОГПИ, 1995.

2. Болодурин В. С. Избранные лекции по геометрии. Оренбург : Изд-во ОГПИ, 1995.

3. Болодурин В. С., Вахмянина О. А. Введение в теорию и практику геометрических построений на плоскости. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 1998.

4. Вахмянина О. А., Измайлова Т. С., Прояева И. В., Сафарова А. Д. Методические рекомендации к изучению курса «Геометрия». Ч. 4. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2004.

5. Измайлова Т. С., Сафарова А. Д. Преобразования плоскости в задачах. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2001.

Учебное издание

Прояева Ирина Владимировна
Сафарова Алия Дамировна

Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к государственной итоговой аттестации по курсу «Геометрия»

Учебно-методическое пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов

Редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано в печать 11.05.2016 г.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,8
Тираж 100 экз. Заказ 34

ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный педагогический университет». 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19