МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. С. Болодурин, И. В. Прояева, А. Д. Сафарова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО КУРСУ «ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ»

Учебное пособие для студентов
физико-математических факультетов

Оренбург
Издательство ОГПУ
2016

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73
Б79

Рецензенты

А. С. Ракитянский, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и истории математики
Н. А. Мунасыпов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики

Болодурин В. С.

Б79 **Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Элементы аналитической геометрии»** : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов / В. С. Болодурин, И. В. Прояева, А. Д. Сафарова ; Мин-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2016. — 92 с. : ил. — ISBN 978-5-85859-641-7.

Пособие содержит темы, входящие в рабочую программу дисциплины «Аналитическая геометрия»: геометрия прямой на плоскости и в пространстве, геометрия плоскости, теория кривых на плоскости, поверхностей в пространстве. Большое количество задач значительно облегчает работу на практических занятиях. Включены вопросы для самопроверки, необходимые студенту при самостоятельной работе. Книга предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», «Математика и физика», а также по направлению «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73

ISBN 978-5-85859-641-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 6
§ 1. Определение вектора. Простейшие свойства векторов...6
§ 2. Сложение векторов, умножение вектора на число 7
§ 3. Связь между коллинеарностью и компланарностью векторов и их линейной зависимостью 9
§ 4. Векторное пространство. Базис. Координаты вектора в базисе. Свойства координат..10
§ 5. Скалярное произведение векторов................................11
§ 6. Векторное произведение векторов.................................12
§ 7. Смешанное произведение векторов...............................13
§ 8. Вопросы и задачи 14
§ 9. Задачи для самостоятельного решения 22
§ 10. Вопросы для самопроверки 30
2. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА......32
§ 1. Системы координат и уравнение фигуры на плоскости...32
§ 2. Теория прямой линии на плоскости 34
§ 3. Вопросы и задачи 36
§ 4. Системы координат в пространстве..............................42
§ 5. Теория плоскости и прямой в пространстве 45
§ 6. Вопросы и задачи 48
§ 7. Задачи для самостоятельного решения 58
§ 8. Вопросы для самопроверки 66
3. ЧАСТНАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА 69
§ 1. Теория кривых второго порядка 69
§ 2. Теория поверхностей второго порядка..........................70
§ 3. Вопросы и задачи 72
§ 4. Задачи для самостоятельного решения 80
§ 5. Вопросы для самопроверки 87
Вопросы к экзамену 89
Список рекомендуемой литературы...................................91

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель пособия — организация самостоятельной аудиторной и внеаудиторной деятельности студентов по курсу «Элементы аналитической геометрии».

Данный курс занимает одно из центральных мест в структуре подготовки бакалавров по направлению «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», «Математика и физика», а также по направлению «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и знакомит студентов с положениями аналитической геометрии двумерного и трехмерного евклидовых пространств.

В основу изложения положена аксиоматика Вейля. Так как студенты первого курса не знакомы с этой аксиоматикой, то в начале изучения курса теоремы векторной алгебры доказываются на основе «школьной» аксиоматики. Однако основные теоремы и определения даны так, что если эти теоремы не доказывать, а объявить аксиомами, то можно получить аксиоматическое изложение геометрии точечно-векторного пространства. В рамках блока практических занятий студенты овладевают методами аналитической геометрии, решая задачи, необходимые для работы учителя математики, изучения других математических дисциплин, применения полученных знаний и навыков в решении профессиональных задач.

Целью курса является целенаправленное формирование математического мышления как инструмента для правильной постановки задачи, оценки ее данных, выделения существенных из них и выбора способа ее решения, а также математической интуиции, позволяющей предвидеть нужный результат, прежде чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений; формирование строгих логических рассуждений и их применение к основным методам в математических исследованиях — математическим доказательствам. Этому способствуют как материал пособия, так и задания, носящие проблемно-поисковый характер.

Пособие адресовано в первую очередь студентам бакалавриата первого и второго семестра очной формы обучения (направление подготовки «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», «Математика и физика»), изучающим предмет «Аналитическая геометрия», а также может быть использовано студентами заочной формы обучения, слушателями курсов профессиональной переподготовки и повышения квалификации учителей, преподающих геометрию.

Книгу можно рекомендовать преподавателям вузов в качестве руководства и дополнительного материала к практическим занятиям.

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определение вектора. Простейшие свойства векторов

Отрезок AB называется *направленным,* если указан порядок следования его концов. Для направленного отрезка $\vec{AB}$ точка A является началом, точка B является концом. *Длиной* $|\vec{AB}|$ направленного отрезка $\vec{AB}$ называется длина отрезка AB.

Два направленных отрезка $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *коллинеарными*, если лучи AB и CD параллельны. Нулевой отрезок считается коллинеарным любому другому отрезку.

Направленные отрезки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *сонаправленными (противоположно направленными)*, если лучи AB и CD сонаправлены (противоположно направлены).

Направленные отрезки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *равными*, если

1) направленные отрезки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ сонаправлены;

2) длины направленных отрезков равны, т. е. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

От любой точки пространства можно отложить (построить) единственный направленный отрезок, равный данному.

Вектором называется *множество равных между собой направленных отрезков пространства.*

Каждый из направленных отрезков в этом случае называется *представителем вектора.* Принято обозначать векторы следующим образом: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ Условие, означающее, что направленный отрезок $\vec{AB}$ является представителем вектора $\vec{a}$, записывается в виде $\vec{AB} = \vec{a}$.

Каждый вектор характеризуется длиной и направлением. Длина (модуль) вектора полагается равной длине его представителя, а направление вектора определяется любым его представителем.

Обозначают длину вектора через $|\vec{a}|$. Нуль-вектор $\vec{0}$ имеет нулевую длину и не имеет определенного направления.

От каждой точки M можно отложить представитель вектора $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *называются коллинеарными (сонаправленными, противоположно направленными),* если коллинеарны (сонаправлены, противоположно направлены) любые их представители.

Принято обозначать через $\vec{a} \parallel \vec{b}$ — коллинеарные векторы, через $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ — сонаправленные векторы и через $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ — противоположно направленные векторы.

§ 2. Сложение векторов, умножение вектора на число

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и некоторую точку O. От точки O отложим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, от точки A отложим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{OB}$ определит третий вектор $\vec{c}$, который называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Записывают результат сложения векторов в виде $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора начальной точки.

Существуют два практических способа сложения векторов: способ треугольника, способ параллелограмма. Первый способ может применяться для любых двух векторов. Построение суммы проводится в этом случае в полном соответствии с определением.

Согласно второму способу оба вектора откладываются от одной точки, на полученных направленных отрезках строится параллелограмм. Диагональ параллелограмма определяет представителя нового вектора, являющегося суммой данных векторов.

Свойства операции сложения векторов:

1. Для $\forall\, \vec{a}$ и $\forall\, \vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность).

2. Для $\forall \vec{a}$, $\forall \vec{b}$, $\forall \vec{c}$: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность).

3. Для $\forall \vec{a}$: $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$.

4. Для $\forall \vec{a}$, существует $\vec{a}'$: $\vec{a}+\vec{a}' = \vec{0}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется третий вектор* $\vec{x}$*, удовлетворяющий условию* $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.

Обозначают разность векторов следующим образом: $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.

Для построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выбирают произвольную начальную точку O, откладывают от нее векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ является представителем искомой разности.

Произведением числа λ *на вектор* $\vec{a}$ *называется вектор* $\vec{b}$*, обладающий следующими свойствами:*

1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; *2)* $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, *если* $\lambda \geq 0$; *3)* $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, *если* $\lambda < 0$.

Принято записывать $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

2) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$;

3) $\lambda \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$;

4) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число* α*, такое что* $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.

§ 3. Связь между коллинеарностью и компланарностью векторов и их линейной зависимостью

Рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ и систему чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Составим вектор $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$. Вектор $\vec{b}$ называют линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ *называется линейно зависимой, если существует система чисел* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *такая, что* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ *и хотя бы одно число* $\alpha_1 \neq 0$ *(*$i = 1, 2, ..., k$*).*

Если среди векторов системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ хотя бы один вектор есть нуль-вектор, то такая система линейно зависимая.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией других векторов.

Если среди системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ существует линейно зависимая подсистема, то и вся система векторов линейно зависимая.

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Вектор $\vec{a}$ *параллелен плоскости* α*,* если его представители параллельны некоторой прямой этой плоскости.

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными,* если они параллельны некоторой плоскости. Если три компланарных вектора отложить от одной точки, то получатся три направленных отрезка, лежащих в одной плоскости.

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарны* и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *не коллинеарны, то* вектор $\vec{c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

Любые четыре вектора трехмерного евклидова пространства линейно зависимы.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *линейно независимы (некомпланарны),* то любой четвертый вектор $\vec{d}$ трехмерного евклидова пространства может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, т. е. $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$.

§ 4. Векторное пространство. Базис. Координаты вектора в базисе. Свойства координат

Для множества векторов евклидова пространства выполняются свойства:

1. $\forall \vec{a}, \forall \vec{b}: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\forall \vec{a}, \forall \vec{b}, \forall \vec{c}: (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. Существует $\vec{0}$, $\forall \vec{a}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. Для $\forall \vec{a}$, существует $\vec{a}'$: $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.
5. $\forall \vec{a}: 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
6. Для любых λ, μ и $\vec{a}$: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$.
7. Для любых λ, $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.
8. Для любых λ, μ и $\vec{a}$: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$.

Такие множества называют векторными пространствами.

Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *образует базис векторного пространства V, если выполняются два условия:*

1) система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *— линейно независима;*

2) всякий вектор $\vec{a} \in V$ *есть линейная комбинация векторов базиса*.

Во множестве векторов трехмерного евклидова пространства существуют тройки линейно независимых векторов и в то же время любые четыре вектора линейно зависимы. Базис множества векторов трехмерного евклидова пространства состоит из трех некомпланарных векторов.

Пусть базис V_3 состоит из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда любой вектор $\vec{a}$ должен линейно разлагаться по векторам базиса: $\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$.

Коэффициенты линейного разложения вектора по базису называются *координатами вектора* в этом базисе.

Координаты вектора в фиксированном базисе находятся единственным образом.

Координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.

Координаты произведения вектора на число равны произведениям координат вектора на это число.

Координаты вектора, являющегося линейной комбинацией данных векторов, являются линейной комбинацией соответствующих координат данных векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от одной точки *O* и построим лучи с началом в точке *O*, содержащие представителей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\angle AOB$ называется углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначают этот угол как $(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторного пространства называется *ортогональным,* если векторы базиса попарно ортогональны, т. е. $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = (\vec{b} \hat{,} \vec{c}) = (\vec{c} \hat{,} \vec{a}) = 90°$.

Базис, состоящий из 3-х взаимно ортогональных и единичных векторов, называют *ортонормированным базисом, или ортобазисом*. Векторы ортобазиса пространства обозначают как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, векторы ортобазиса плоскости как $\vec{i}, \vec{j}$.

Для вектора $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ длина определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

§ 5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение полагается равным нулю.*

Итак, $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

Скалярное произведение векторов обладает свойствами:

1. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля).

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда один из векторов нулевой либо вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

3. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1,b_2,b_3)$, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (свойство коммутативности).

5. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

6. $(\lambda\cdot\vec{a},\vec{b})=\lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

7. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

§ 6. Векторное произведение векторов

В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выберем в этом пространстве ортобазис $R(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ *называется третий вектор* $\vec{c}$, *который обозначается как* $[\vec{a},\vec{b}]$ *и удовлетворяет трем условиям:*

1. $\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

2. *Тройка векторов* $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ *имеет ту же ориентацию, что и тройка векторов* $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

3. $|\vec{c}|=|[\vec{a},\vec{b}]|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нуль-вектору.

Векторное произведение обладает свойствами:

1. $[\vec{a},\vec{b}]=0 \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

2. Пусть $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}\,(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}\,(c_1,c_2,c_3)$, тогда

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\ .$$

3. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$.

4. $[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}]=[\vec{a}_1,\vec{b}]+[\vec{a}_2,\vec{b}]$.

5. $[\alpha\vec{a},\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$.

6. П*лощадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$*, равна модулю векторного произведения этих векторов.*

$$S_{\square}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=|[\vec{a},\vec{b}]|$$

§ 7. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\vec{a}$ *на векторное произведение векторов* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$*. Если хотя бы один из трех векторов нулевой, то смешанное произведение таких векторов полагают равным нулю.*

Обозначают смешанное произведение символом $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Итак, по определению $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\ [\vec{b},\vec{c}]$.

Свойства смешанного произведения.

1. Если даны векторы $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}\,(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}\,(c_1,c_2,c_3)$, в ортобазисе, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=$

$$=\vec{a}\ [\vec{b},\vec{c}]=a_1\cdot\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_2\cdot\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

2. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны или хотя бы один вектор нулевой.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при изменении мест любых двух сомножителей, т. е.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a}).$$

4. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

5. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

6. Модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ равен объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, отложенных от одной точки.

7. Объем тетраэдра, построенного на представителях трех векторов, отложенных от одной точки, равен $\frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

§ 8. Вопросы и задачи

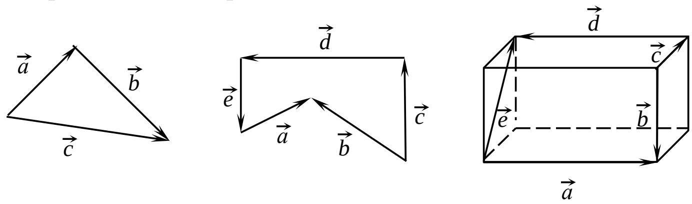
1. Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

1. Пусть ABC — любой треугольник, M, N, P — соответственно середины сторон AC, AB и BC. Какие из следующих векторов равны, а какие коллинеарны: а) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NB}$ и $\overrightarrow{MP}$?

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, точки M, N, P, Q — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Построить на чертеже следующие векторы: а) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CP}$; в) $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DP}$; д) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MQ}$; е) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$; ж) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}$; з) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; и) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{DQ}$; к) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$; л) $\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QO}$; м) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{CD}$.

3. Записать в векторной форме необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

4. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображенные на чертежах.



5. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, O — его центр. Зная, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, выразить $\overrightarrow{OC}$, OD, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. На прямой дана последовательность точек A_1, A_2, A_3, …, A_{10}, для которых $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\ldots=A_9A_{10}$. Выразить: $\overrightarrow{A_1A_2}$ через $\overrightarrow{A_8A_7}$; $\overrightarrow{A_1A_5}$ через $\overrightarrow{A_5A_3}$; $\overrightarrow{A_3A_{10}}$ через $\overrightarrow{A_5A_7}$; $\overrightarrow{A_8A_4}$ через $\overrightarrow{A_9A_3}$; $\overrightarrow{A_6A_3}$ через $\overrightarrow{A_{10}A_1}$.

7. Начертить произвольный вектор $\vec{a}$ и построить векторы: $2\vec{a}$; $-2\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $-\sqrt{2}\,\vec{a}$; $\frac{3}{5}\vec{a}$; $-\frac{3}{2}\vec{a}$.

8. В треугольнике ABC векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

9. На стороне HK ромба $MHKC$ взята точка E так, что $KE=\frac{1}{5}HE$, T — середина MH. Выразить векторы $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\overrightarrow{CK}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{CM}=\vec{n}$.

10. Точка T лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BT=TC$, а точка E — на диагонали BD и $BE:ED=2:1$. Выразить $\overrightarrow{ET}$ через $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{p}=\overrightarrow{DC}$.

11. В тетраэдре $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EB}$. Полагая, что $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$, выразить через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$.

2. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

12. Доказать, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторы $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}+3\vec{b}$ не коллинеарны.

13. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и N — середины ребер AD и AA_1 соответственно. Выяснить, компланарны ли векторы: а) $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BD}$.

14. $ABCD$ — параллелограмм, E и F — середины сторон BC и AD, O — точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{e}_2$ за базисные, определить координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{EA}$.

15. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AE}=\vec{e}_2$ выбраны за базисные. Найти в данном базисе координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$.

16. Дан тетраэдр *ABCD*. Медианы треугольника *ABC* пересекаются в точке *K*, точка *M* — середина отрезка *DK*. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе, состоящем из векторов $\overrightarrow{DA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{DB}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{DC}=\vec{e}_3$.

17. Основанием пирамиды *SABCD* служит параллелограмм *ABCD*. Приняв векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ за базисные, найти координаты векторов $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{MB}$, где *M* — середина *AB*.

18. Даны векторы $\vec{u}(2;1)$, $\vec{v}(1;0)$. Найти коэффициенты разложения вектора $\vec{a}(9;1)$ по векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

19. Даны векторы $\vec{a}(5;7;2)$; $\vec{b}(3;0;4)$, $\vec{c}(-6;1;-1)$. Найти координаты векторов $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=5\vec{a}+6\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{r}=-2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

20. Найти коэффициенты разложения вектора $\vec{c}(-2;-12)$ по векторам $\vec{a}(4;-2)$, $\vec{b}(3;-5)$.

21. Среди векторов $\vec{a}_1(1;-6;3)$, $\vec{a}_2(0;-4;5)$, $\vec{a}_3(3;0;0)$, $\vec{a}_4(0;-1;0)$, $\vec{a}_5(5;0;6)$, $\vec{a}_6(2;-3;6)$, $\vec{a}_7(0;0;-2)$, $\vec{a}_8(-3;1;0)$, $\vec{a}_9(6;0;1)$, $\vec{a}_{10}(0;5;0)$ указать векторы: а) коллинеарные вектору $\vec{e}_1$; б) коллинеарные вектору $\vec{e}_2$; в) компланарные векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$; г) компланарные векторам $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$; д) коллинеарные вектору $\vec{b}(-4;6;-12)$.

22. Даны векторы: а) $\vec{a}_1\left(\frac{3}{2};3;-2\right)$ и $\vec{a}_2(-6;-12;8)$; б) $\vec{b}_1\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{4};-2\right)$ и $\vec{b}_2\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{4};\frac{6}{5}\right)$; в) $\vec{c}_1\left(3\frac{3}{5};-3;4\frac{1}{2}\right)$ и $\vec{c}_2\left(-10;8\frac{1}{3};-12\frac{1}{2}\right)$. Указать среди них пары коллинеарных векторов.

23. Даны тройки векторов: а) $\vec{a}_1(-3;0;2)$, $\vec{a}_2(2;1;-4)$, $\vec{a}_3(11;-2;-2)$; б) $\vec{b}_1(1;0;7)$, $\vec{b}_2(-1;2;4)$, $\vec{b}_3(3;2;1)$; в) $\vec{c}_1(5;-1;4)$, $\vec{c}_2(3;-5;2)$, $\vec{c}_3(-1;-13;-2)$. Указать среди них тройки компланарных векторов.

24. Найти коэффициенты разложения вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если: а) $\vec{a}(2;3;1)$, $\vec{b}(5;7;0)$, $\vec{c}(3;-2;4)$, $\vec{d}(4;12;-3)$; б) $\vec{a}(5;-2;0)$, $\vec{b}(0;-3;4)$, $\vec{c}(-6;0;1)$, $\vec{d}(25;-22;16)$; в) $\vec{a}(3;5;6)$; $\vec{b}(2;-7;1)$, $\vec{c}(12;0;6)$, $\vec{d}(0;20;18)$.

25. Найти линейную зависимость между векторами: а) $\vec{a}(1;3;5)$, $\vec{b}(0;4;5)$, $\vec{c}(7;-8;4)$, $\vec{d}(2;-1;3)$; б) $\vec{a}(1;2;5)$, $\vec{b}(-1;6;3)$, $\vec{c}(0;0;2)$, $\vec{d}(1;0;4)$.

26. Установить, в каких из следующих случаев тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут линейно зависимыми, и, когда это возможно, представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) $\vec{a}(6;4;2)$, $\vec{b}(-9;6;3)$, $\vec{c}(-3;6;3)$; б) $\vec{a}(5;2;13)$, $\vec{b}(-1;4;2)$, $\vec{c}(-1;-1;6)$; в) $\vec{a}(6;-18;12)$, $\vec{b}(-8;24;-16)$, $\vec{c}(-8;7;3)$.

3. Скалярное произведение векторов

27. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$; б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; в) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$.

28. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 2. MN — средняя линия треугольника ($MN \parallel AC$). Вычислить скалярные произведения: а) $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{CA}\right)$; б) $\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{CB}\right)$; в) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

29. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) BD — медиана, $E \in BD$, $AC = 8$, $BD = 3$. Вычислить скалярные произведения: а) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$; б) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$; в) $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CA}\right)$.

30. В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 6$, $\angle ACB = 60°$. Найти: а) $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$; б) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CA}\right)$; в) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$.

31. В ромбе $ABCD$ $AB = 6$, $\angle A = 60°$. Найти: а) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$; б) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}\right)$; в) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$.

32. Найти угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\vec{b})=5$; б) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=6$, $(\vec{a},\vec{b})=-24\sqrt{2}$.

33. Найти $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b})$ и $(2\vec{a}+3\vec{b},\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

34. Вычислить $(\vec{a},\vec{b})$, если $\vec{a}=4\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

35. Найти $|\vec{a}|$, где $\vec{a}=3\vec{m}-4\vec{n}$, |m| = 2, $|\vec{n}|=1$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

36. Вычислить угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

37. Известно, что $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Найти $|\vec{c}|$.

38. Известно, что $\vec{m}=\vec{n}-\vec{k}$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $|\vec{k}|=3$, $\angle(\vec{n},\vec{k})=\dfrac{\pi}{4}$. Найти $|\vec{m}|$.

39. Известно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Доказать, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ ортогональны, если $\vec{c}=2\vec{b}-\vec{a}$.

40. Какой угол образуют векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если $|\vec{s}|=|\vec{t}|$, $\vec{p}\perp\vec{q}$, $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$, $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$.

41. Вычислить длины сторон и длину диагонали *AC* параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

42. В ортонормированном базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$ заданы векторы $\vec{a}(-1;5)$, $\vec{b}(3;5)$, $\vec{c}(-2;8)$, $\vec{d}(3;-1)$. Вычислить: а) $(\vec{a},\vec{b})$; б) $(\vec{a},\vec{c})$; в) $\sqrt{\vec{d}^2}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{d},\vec{c})$; д) $(\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{d})$.

43. Найти угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(3;1)$; б) $\vec{a}(1;-\sqrt{3})$, $\vec{b}(\sqrt{3};3)$; в) $\vec{a}(1;7)$; $\vec{b}(3;-4)$ (базис ортонормированный).

44. В пространстве задан ортонормированный базис и даны векторы $\vec{a}(1;5;1)$, $\vec{b}(1;-5;2)$, $\vec{c}\left(2;1;\frac{3}{2}\right)$, $\vec{d}(0;0;1)$. Вычислить их попарные скалярные произведения и выяснить, образуют ли векторы острый, прямой или тупой угол.

45. В пространстве дан четырехугольник $ABCD$ и $\overrightarrow{AB}(1;6;-2)$, $\overrightarrow{BC}(5;3;1)$, $\overrightarrow{CD}(1;-7;-1)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны (базис ортонормированный).

46. Дан треугольник ABC. В ортонормированном базисе $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$, $\overrightarrow{BC}(1;2;0)$, $\overrightarrow{CA}(-1;-3;-1)$. Выяснить, является ли треугольник остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

47. В пространстве дан ортонормированный базис $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ и дан четырехугольник $ABCD$: $\overrightarrow{AB}(1;2;-2)$, $\overrightarrow{BC}(-2;-1;-2)$, $\overrightarrow{CD}(-1;-2;2)$. Доказать, что $ABCD$ — квадрат.

4. Векторное и смешанное произведение векторов

48. Преобразовать выражения: а) $[\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}]$; б) $[\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c},\vec{a}-2\vec{b}]$; в) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}]$.

49. Определить координаты и модули векторов: а) $[\vec{a},\vec{b}]$; б) $[\vec{a},\vec{c}]$; в) $[\vec{b},\vec{d}]$; г) $[\vec{d},\vec{a}]$; д) $[\vec{a},\vec{d}]$; е) $[\vec{b},\vec{c}]$, если $\vec{a}(0;1;0)$, $\vec{b}(2;-1;3)$; $\vec{c}(0;5;-2)$, $\vec{d}(1;2;-3)$.

50. Определить координаты векторов: а) $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$; б) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$, если $\vec{a}(1;1;0)$, $\vec{b}(0;3;1)$, $\vec{c}(2;0;1)$.

51. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC, если: а) $\overrightarrow{AB}(-5;-7;4)$, $\overrightarrow{AC}(-4;3;1)$; б) $\overrightarrow{AB}(1;5;-3)$, $\overrightarrow{BC}(-3;1;-1)$; в) $\overrightarrow{BC}(-11;3;-5)$, $\overrightarrow{CA}(5;1;4)$.

52. При каком значении α векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будут коллинеарны, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные?

53. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной 1. Начертить: а) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]$; б) $[\overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{C_1D_1}]$; в) $[\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BC_1}]$; г) $[\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{BD}]$; д) $[\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{DD_1}]$; е) $[\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{DB_1}]$; ж) $[\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DC_1}]$.

54. Вычислить произведения $\left(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$, $\left(\vec{b}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{b}+2\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}\right)$, если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5$.

55. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если: а) $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(1;1;2)$, $\vec{c}(3;1;-1)$; б) $\vec{a}(-2;1;5)$, $\vec{b}(3;0;2)$, $\vec{c}(-1;4;2)$; в) $\vec{a}(1;-1;1)$, $\vec{b}(5;2;-3)$, $\vec{c}(1;4;-2)$.

56. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}])$, если $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(1;1;2)$, $\vec{c}(3;1;-1)$.

57. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — произвольные векторы α, β, γ — произвольные действительные числа. Доказать, что векторы $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ компланарны.

58. Проверить, компланарны ли векторы: а) $\vec{p}_1(1;-2;-1)$, $\vec{p}_2(3;1;-2)$, $\vec{p}_3(7;14;-13)$; б) $\vec{q}_1(2;1;-3)$, $\vec{q}_2(1;-4;1)$, $\vec{q}_3(3;-2;2)$; в) $\vec{r}_1(1;-1;2)$, $\vec{r}_2(2;0;2)$, $\vec{r}_3(-3;-1;-2)$.

59. Вычислить объем тетраэдра *ABCD*, если: а) $\overrightarrow{AB}(3;0;1)$, $\overrightarrow{AC}(1;1;-4)$, $\overrightarrow{AD}(3;1;-2)$; б) $\overrightarrow{AB}(3;4;-1)$, $\overrightarrow{BC}(-1;-1;6)$, $\overrightarrow{CD}(4;-3;-8)$.

60. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}(4;3;0)$, $\overrightarrow{AD}(2;1;2)$, $\overrightarrow{AA'}(-3;-2;5)$. Найти: а) объем параллелепипеда; б) площади граней; в) длину высоты параллелепипеда, проведенной из вершины A' на грань *ABCD*.

61. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overrightarrow{AB}(0;1;-1)$, $\overrightarrow{AC}(2;-1;4)$ определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA'}(-3;2;2)$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) площади граней; в) длину высоты призмы.

62. Дан тетраэдр *ABCD*, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}(3;4;0)$, $\overrightarrow{AD}(3;4;2)$. Найти: а) объем тетраэдра;

б) площади граней; в) длину высоты тетраэдра, проведенной из вершины D.

63. Дан тетраэдр $ABCD$: $\overrightarrow{AB}(1;-6;0)$, $\overrightarrow{BC}(-3;6;-4)$, $\overrightarrow{AD}(2;0;-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) высоту тетраэдра, опущенную из вершины D. Репер ортонормированный.

64. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами векторов: $\overrightarrow{AB}(3;-4;0)$, $\overrightarrow{AC}(-6;8;5)$, $\overrightarrow{CD}(6;-8;0)$. Найти площадь четырехугольника. Репер ортонормированный.

65. Найти объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(0;-4;10)$, $\overrightarrow{AD}(-2;-4;3)$, $\overrightarrow{AA'}(-2;3;0)$, и площадь грани $ABCD$. Репер ортонормированный.

66. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overrightarrow{AB}(5;2;0)$, $\overrightarrow{AC}(2;4;0)$ определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA'}(1;3;6)$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) длину высоты, опущенной из вершины A' на грань ABC. Репер ортонормированный.

67. Вычислить площадь треугольника ABC и найти длину высоты CH, если $\overrightarrow{AB}(-5;-7;4)$, $\overrightarrow{BC}(1;10;-3)$. Репер ортонормированный.

68. В треугольной пирамиде $ABCD$ $\overrightarrow{AB}(-5;-9;-1)$, $\overrightarrow{BC}(1;2;0)$, $\overrightarrow{CD}(4;0;-2)$. Вычислить: а) объем пирамиды; б) длину высоты, опущенной из вершины A на грань BCD. Репер ортонормированный.

69. Для треугольной призмы $ABCA'B'C'$ найти ее объем и длину высоты, опущенной из вершины C' на грань ABC, если $\overrightarrow{AB}(-5;-9;1)$, $\overrightarrow{AC}(-4;-7;1)$, $\overrightarrow{AA'}(0;-7;-1)$. Репер ортонормированный.

§ 9. Задачи для самостоятельного решения

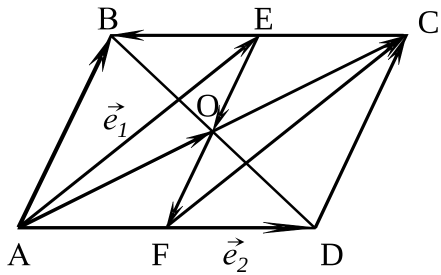
Вариант 0

1. $ABCD$ — параллелограмм, точки E и F — середины сторон BC и AD, точка O — точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overrightarrow{AE}=\vec{e}_1, \overrightarrow{FD}=\vec{e}_2$ за базисные, определить координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{FC}$.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, точка E — середина BC, точка F — середина AD; $O = AC \cap BD$. $\overrightarrow{AE}=\vec{e}_1, \overrightarrow{FD}=\vec{e}_2$.

Найти координаты $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{FC}$ в $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Решение



Для того чтобы найти координаты вектора в данном базисе, надо выразить данный вектор через базисные векторы.

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{EB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{DA} &= -2\overrightarrow{FD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}(-2)\overrightarrow{FD}$$

$$\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{FD}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FD}$$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1-\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1;-1)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$$

2) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}$

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\\&\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}\\&\overrightarrow{BA}=-(\vec{e}_1-\vec{e}_2)=\vec{e}_2-\vec{e}_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$$

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}\frac{1}{2}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$$

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}\frac{1}{2}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$$

$$\overrightarrow{AO}=\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2-\frac{1}{2}\vec{e}_1$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2\Rightarrow\overrightarrow{AO}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$$

3) $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\\&\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1-\vec{e}_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$$

$$\overrightarrow{FC}=\vec{e}_2+\vec{e}_1-\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{FC}=\vec{e}_1\Rightarrow\overrightarrow{FC}(0;1)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$$

Другой способ. Из свойств параллелограмма следует, что длина отрезка AE равна длине отрезка FC, прямые AE и FC — параллельные прямые, точки F и C лежат в одной полуплоскости, границей которой является прямая AF. Поэтому $\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{FC}\right|$ и $\overrightarrow{AE}\uparrow\uparrow\overrightarrow{FC}$. Следовательно, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$, т.е. $\overrightarrow{FC}=\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{FC}(1;0)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}(1;-1)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$, $\overrightarrow{AO}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$, $\overrightarrow{FC}(1;0)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ — линейно независимы, представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, если $\vec{a}_1(1;2;3)$, $\vec{a}_2(1;0;1)$, $\vec{a}_3(-1;4;-3)$, $\vec{d}(6;2;2)$.

Дано: $\vec{a}_1(1;2;3)$, $\vec{a}_2(1;0;1)$, $\vec{a}_3(-1;4;-3)$, $\vec{d}(6;2;2)$, $\vec{d} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3$

Доказать: 1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы;

2) α, β, γ .

Решение. 1) По определению система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно независима, если векторное равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Запишем векторное равенство (1) в координатной форме.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 / : 2, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы α_1 через α_3 и подставим в остальные уравнения системы.

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ -2\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3(-2\alpha_3) + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы третье:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ 0 + 6\alpha_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3, \\ \alpha_2 = 3\alpha_3, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

т.е. векторное равенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы.

2) Чтобы найти числа $\alpha, \beta, \gamma,$ запишем векторное равенство $\vec{d} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3$ в координатной форме.

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=6,\\ 2\alpha+0\cdot\beta+4\gamma=2,\\ 3\alpha+\beta-3\gamma=2,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=6,\\ 2\alpha+4\gamma=2\,/:2,\\ 3\alpha+\beta-3\gamma=2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=6,\\ \alpha+2\gamma=1,\\ 3\alpha+\beta-3\gamma=2,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\alpha=1-2\gamma,\\ 1-2\gamma+\beta-\gamma=6,\\ 3(1-2\gamma)+\beta-3\gamma=2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=1-2\gamma,\\ \beta-3\gamma=5,\\ \beta-9\gamma=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\alpha=1-2\gamma,\\ \beta=5+3\gamma,\\ -6\gamma=-6,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\alpha=1-2\gamma,\\ \beta=5+3\gamma,\\ \gamma=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=-1,\\ \beta=8,\\ \gamma=1.\end{cases}$$

$\vec{d}=-\vec{a}_1+8\vec{a}_2+\vec{a}_3$.

Ответ:

1) так как $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0\Rightarrow$ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ — линейно независимы.

2) $\vec{d}=-\vec{a}_1+8\vec{a}_2+\vec{a}_3$.

3. Найти $\left(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$.

Дано: $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$.

Найти: $\left(2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Решение. Для того чтобы найти скалярное произведение вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{a}+3\vec{b}$, воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов (4, 5, 6 свойства).

$$\left(2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)=\left(2\vec{a},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)+\left(-\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)=$$

$$2\left(\vec{a},\vec{a}+3\vec{b}\right)-\left(\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)=2\left(\left(\vec{a},\vec{a}\right)+\left(\vec{a},3\vec{b}\right)\right)-\left(\left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(\vec{b},3\vec{b}\right)\right)=$$

$$=2\left(\left(\vec{a},\vec{a}\right)+3\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)-\left(\left(\vec{b},\vec{a}\right)+3\left(\vec{b},\vec{b}\right)\right)=$$

$$=2\left(\vec{a},\vec{a}\right)+6\left(\vec{a},\vec{b}\right)-\left(\vec{a},\vec{b}\right)-3\left(\vec{b},\vec{b}\right)=2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\widehat{\vec{a},\vec{a}}+$$

$$+5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}} - 3|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{b},\vec{b}} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos 0 +$$

$$+5\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{4} - 3\cdot 3\cdot 3\cos 0 = 8 + 30\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 9 = 15\sqrt{2} - 1.$$

Ответ: $\left(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right) = 15\sqrt{2}-1$.

Вариант 1

1. Дан тетраэдр *OABC*. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, началом которого служит середина *E* ребра *OA*, а концом — середина *F* ребра *BC*.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 : \vec{a}_1(1;1;1)$, $\vec{a}_2(1;2;4)$, $\vec{a}_3(1;1;-2)$, $\vec{d}(2;1;-4)$.

3. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60°. Доказать, что вектор $2\vec{a}-\vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{b}$.

Вариант 2

1. Дан тетраэдр *OABC*. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, где *E* — середина ребра *OA*, *F* — точка пересечения медиан ΔABC.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(4;5;3)$, $\vec{a}_2(2;3;2)$, $\vec{a}_3(1;2;3)$, $\vec{d}(7;9;4)$.

3. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ ортогональны. Доказать, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Вариант 3

1. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор MM', соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(3;5;2)$, $\vec{a}_2(1;-2;2)$, $\vec{a}_3(3;2;3)$, $\vec{d}(5;9;3)$.

3. Дан треугольник ABC и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}(-3;0-4)$, $\overrightarrow{BC}(7;0;1)$. Найти углы треугольника.

Вариант 4

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(5;3;-2)$, $\vec{a}_2(2;5;-4)$, $\vec{a}_3(5;-3;3)$, $\vec{d}(-3;14;-12)$.

3. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$, найти значение α, при котором векторы $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 4\vec{b}$ ортогональны.

Вариант 5

1. В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(2;3;1)$, $\vec{a}_2(1;3;1)$, $\vec{a}_3(-1;2;1)$, $\vec{d}(7;8;2)$.

3. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $p = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{q} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

Вариант 6

1. Дан параллелепипед *ABCDA'B'C'D'*. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$, найти в этом базисе координаты векторов, совпадающих с диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней, для которых вершина A' служит началом.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(1;1;1)$, $\vec{a}_2(-1;1;2)$, $\vec{a}_3(1;-1;-1)$, $\vec{d}(-3;9;13)$.

3. В равностороннем треугольнике *ABC* с длиной стороны, равной единице, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

Вариант 7

1. Дан тетраэдр *OABC*. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{DE}$, где *D* — середина ребра *OA, E* — середина ребра *BC*.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(1;1;2)$, $\vec{a}_2(1;-1;-3)$, $\vec{a}_3(1;-1;1)$, $\vec{d}(8;-4;6)$.

3. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 8

1. Дан тетраэдр $OABC$. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{DF}$, где D — середина ребра OA, F — точка пересечения медиан грани BOC.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(1;1;1)$, $\vec{a}_2(2;-3;1)$, $\vec{a}_3(3;-2;2)$, $\vec{d}(-2;-2;-2)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, образующие угол в 120°. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Базис ортонормированный.

Вариант 9

1. В ромбе $ABCD$ даны $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(1;2;3)$, $\vec{a}_2(1;-3;-2)$, $\vec{a}_3(1;1;2)$, $\vec{d}(3;2;5)$.

3. Известно, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. Найти $|\vec{a} + 2\vec{b}|$. Базис ортонормированный.

Вариант 10

1. Пусть ABC — произвольный треугольник, E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — линейно независимы, и представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{a}_1(1;2;4)$, $\vec{a}_2(1;3;4)$, $\vec{a}_3(1;4;1)$, $\vec{d}(3;12;0)$.

3. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}(1;5;-3)$, $\overrightarrow{AC}(-6;2;-2)$. Найти углы треугольника.

§ 10. Вопросы для самопроверки

1. Указать координаты вектора *с*, если $\vec{a}(3;1;0)$, $\vec{b}(-2;0;4)$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

2. Даны векторы: $\vec{a}(0;3;4)$ и $\vec{b}(3;0;4)$. Найти косинус угла между ними.

3. Даны координаты точек *A*(2;1;0), *B*(6;–3;–4), *C*(5;–2;–3). Точка *C* делит отрезок *AB* в отношении *AC* к *CB*. Найти это отношение.

4. Найти длину вектора $\vec{a}(1;-1;0)$.

5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(3;-4;3)$ и $\vec{b}(-4;-5;3)$.

6. Найти смешанное произведение векторов *a*, *b*, *c*, если $\vec{a}(1;-1;4)$, $\vec{b}(-2;-2;-2)$, $\vec{c}(1;4;1)$.

7. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного упорядоченной парой точек *A*(3;4;–5).

8. Даны точки *A*(–2;3;1) и *B*(2;1;–5). Найти координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* в отношении 2:1.

9. Даны перпендикулярные векторы *a* и *b*. Указать пропущенную координату: $\vec{a}(1;x;1)$, $\vec{b}(2;-4;-2)$.

10. *ABCD* — параллелограмм, *A*(–3;0;2), *B*(–2;1;3), *C*(5;0;2). Найти координаты точки *D*.

11. В ΔABC проведена медиана *BM*. Написать разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

12. Векторы $\vec{a}(2;3;1)$ и $\vec{b}(4;6;x)$ коллинеарны. Указать пропущенную координату.

13. Даны точка *A*(–5;–1;2) и вектор $\overrightarrow{AB}(2;2;6)$. Найти координаты точки *B*.

14. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}(2;31;0)$, $\vec{b}(-1;2;1)$.

15. Найти объем тетраэдра *ABCD*, если $\overrightarrow{AB}(3;0;1)$, $\overrightarrow{AC}(1;1;-4)$, $\overrightarrow{AD}(4;1;-2)$.

16. Найти площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB}(0;1;0)$, $\overrightarrow{AD}(2;-1;3)$.

17. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. MN — средняя линия треугольника, M — середина AB, N — середина AC. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{CB}$.

18. Векторы $\vec{a}(2\alpha+1;3\alpha+2;\alpha)$, $\vec{b}(2;3;-1)$ и $\vec{c}(1;2;4)$ компланарны. Найти α.

19. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

20. Найти площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}(3;4;0)$.

21. Записать формулу для нахождения модуля векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

22. Записать формулу для нахождения объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на сторонах.

23. Записать формулу для нахождения объема тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на сторонах.

24. Записать формулу для нахождения объема треугольной призмы, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на сторонах.

2. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Системы координат и уравнение фигуры на плоскости

Аффинным репером $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, или аффинной системой координат, плоскости *называют совокупность точки и двух неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.*

Точка O — начало репера, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ — векторы репера, OE_1 — ось *абсцисс,* OE_2 — ось *ординат.*

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ должен линейно разлагаться по векторам базиса $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, т. е. $\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

Аффинными координатами точки M в репере $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *называют коэффициенты линейного разложения радиуса-вектора точки M по базису* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Координаты точки при выбранном репере определяются единственным образом.

Координаты вектора, если известны координаты начала и конца представителя этого вектора, *определяются по формулам*:

$$\alpha=x_2-x_1,\ \beta=y_2-y_1.$$

Если даны точка $M_0(x_0,y_0)$ и вектор $\vec{a}(\alpha,\beta)$, то координаты точки $M(x,y)$, для которой $\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}$, находятся следующим образом*:*

$$x=x_0+\alpha,\ y=y_0+\beta.$$

Если дан отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, и известно*, что точка $M(x,y)$ делит отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении λ, т.е. $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, то координаты точки M определяются формулами*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (1+\lambda\neq 0).$$

Для координат середины отрезка справедливы соотношения:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Аффинная система координат $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *называется прямоугольной декартовой системой координат, если* $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ *и* $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$.

Расстояние между двумя точками, заданными в прямоугольной декартовой системе координат, находится следующим образом:

$$\rho(M_1M_2)=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Формулы

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+x_0,$$
$$y=c_{21}x'+c_{22}y'+y_0$$

определяют закон преобразования аффинных координат точки при переходе от одной аффинной системы координат к другой. Здесь (x,y) — координаты точки M в старой системе координат, (x',y') — координаты M в новой системе координат, (x_0,y_0), (c_{11},c_{21}), (c_{12},c_{22}) — координаты начала и базисных векторов новой системы координат в старой системе координат.

Формулы перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой прямоугольной декартовой системе координат имеют вид:

$$x=x'\cos\alpha-\varepsilon y'\sin\alpha+x_0,$$
$$y=x'\sin\alpha+\varepsilon y'\cos\alpha+y_0,$$

где значение $\varepsilon=1$ отвечает одинаково ориентированным системам координат, а значение $\varepsilon=-1$ — противоположно ориентированным системам координат.

Параллельный перенос системы координат определяется соотношениями:

$$x=x'+x_0,$$
$$y=y'+y_0.$$

Полярной осью называется *луч с заданным сонаправленным единичным вектором.*

Совокупность точки O (полюса), полярной оси с началом в этой точке и единичным вектором $\vec{e}$ *называется полярной системой координат.*

Каждой точке M плоскости за исключением точки O ставятся в соответствие два числа: $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ и $\alpha = (\vec{e}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM})$, которые называются полярными координатами. Значения ρ и α изменяются в пределах:

$$0 < \rho < \infty,\ -\pi < \alpha \le \pi .$$

Если известны полярные координаты точки, то соответствующие прямоугольные декартовы координаты находятся по формулам:

$$x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha .$$

Под уравнением геометрической фигуры понимают *аналитические условия, которым удовлетворяют координаты точек фигуры и только точек фигуры.*

Аналитические условия на координаты точек фигуры могут выражаться уравнением, системой уравнений, неравенством, системой неравенств, системой уравнений и неравенств на координаты точек фигуры.

Линией на плоскости *называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению* $F(x,y) = 0$.

Все линии на плоскости разбиваются на два множества: алгебраические линии и трансцендентные линии.

§ 2. Теория прямой линии на плоскости

Уравнения прямой. Геометрически прямая линия на плоскости может быть определена:

1. С помощью точки $M_0(x_0, y_0)$ и направляющего вектора $\vec{a}(\alpha, \beta)$.

2. С помощью двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Известны следующие уравнения прямой на плоскости:

1. Векторное уравнение

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a} ,$$

где M_0 — начальная точка прямой, M — произвольная точка, $\vec{a}(\alpha, \beta)$ — направляющий вектор, λ — произвольный скаляр.

2. Параметрические уравнения

$$\begin{matrix} x - x_0 = \lambda\alpha, \\ y - y_0 = \lambda\beta \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x = x_0 + \lambda\alpha, \\ y = y_0 + \lambda\beta. \end{matrix}$$

3. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

4. Каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}, \text{ где } \alpha \neq 0, \beta \neq 0.$$

5. Уравнение прямой, заданной двумя точками, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$, или $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, числа в знаменателях не равны нулю.

6. Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где } ab \neq 0.$$

7. Уравнение прямой с начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

8. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

9. Общее уравнение прямой линии

$$Ax + By + C = 0.$$

Расположение прямой на плоскости. Вектор $\vec{a}(\alpha, \beta)$ *параллелен прямой* с уравнением $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется *соотношение* $A\alpha + B\beta = 0$.

Возможны следующие случаи расположения прямой относительно системы координат и соответствующие уравнения прямых:

1. Прямая проходит через начало координат, $Ax + By = 0$.
2. Прямая параллельна оси OX, $By + C = 0$.
3. Прямая совпадает с осью OX, $By = 0$;
4. Прямая параллельна оси OY, $Ax + C = 0$.
5. Прямая совпадает с осью OY, $Ax = 0$.

Расположение двух прямых на плоскости. Геометрически две прямые на плоскости могут пересекаться в одной точке, быть параллельными, совпадать.

Прямые l_1 и l_2 с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *совпадают* тогда и только тогда, когда, *коэффициенты* при соответствующих переменных и свободные члены в уравнениях прямых *пропорциональны,* т. е.

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2.$$

Прямые l_1 и l_2 с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *параллельны* тогда и только тогда, когда

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 \neq \lambda C_2.$$

Прямые l_1 и l_2 с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *пересекаются в точке* тогда и только тогда, когда $A_1 = \lambda A_2,\ B_1 \neq \lambda B_2$.

Метрическая теория прямой на плоскости. К метрической теории относят свойства фигур, связанные с измерением расстояний и величин углов.

Нормальным вектором прямой называется вектор, перпендикулярный любому направляющему вектору этой прямой.

Уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(\alpha, \beta)$, имеет вид

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l с уравнением $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Угол между двумя прямыми определяется по формуле

$$\cos(\vec{a}_1 \,\widehat{\ }\, \vec{a}_2) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

§ 3. Вопросы и задачи

1. Выбрать на плоскости некоторый аффинный репер и построить точки $A(1;1)$, $B(1;0)$, $C(0;-1)$, $D(-2;3)$, $E(2;-5)$.

2. Выбрать на плоскости ПДСК и построить точки $A(2;1)$, $B(1/2;-1)$, $C(-\sqrt{3};2)$, $D(-2;-\sqrt{5})$.

3. Начало ПДСК помещено в центре квадрата, сторона которого равна $2a$. Найти координаты вершин квадрата, если: а) стороны квадрата параллельны осям координат; б) диагонали квадрата лежат на осях координат.

4. Найти координаты вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$ относительно аффинной системы координат $R(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, где: а) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$; б) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AF}$.

5. Относительно ПДСК на плоскости дана точка $M(x, y)$. Найти координаты точки, симметричной точке M: а) относительно начало координат; б) относительно оси абсцисс; в) относительно оси ординат; г) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов; д) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

6. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: A(1;–3), B(8;0), C(4;8), D(–3;5). Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если A(1;1), B(2;3), C(5;0), D(7;–5).

8. Даны координаты вершин A(–4;4), B(2;8) параллелограмма $ABCD$. Точка M(2;2) — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найти координаты вершин C и D.

9. Доказать, что точки A, B, C принадлежат одной прямой: а) A(2;1), B(0;5), C(4;–3); б) A(–1;0), B(1;–2), C(3;–4).

10. Даны координаты точек P(–1;5), Q(3;2). а) Найти координаты точки M, симметричной точке P относительно точке Q; б) найти координаты точки N, симметричной точке Q относительно P.

11. Определить координаты точек, делящих отрезок A(2;3), B(–1;2) в отношении $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = 1/2; \lambda_4 = 3$.

12. В каком отношении точка C(3;2) делит отрезок AB, если A(0;5), B(–1;6)?

13. Определить радиус окружности, которая проходит через точку A(–2;1) и имеет центр в точке O(2;–3). Репер ортонормированный.

14. В треугольнике ABC A(4;1), B(7:5), C(–4;7). Вычислить длину биссектрисы AD. Репер ортонормированный.

15. Найти длину медианы AM, биссектрисы AD треугольника ABC, если A(1;–2), B(1;1), C(5;–2). Репер ортонормированный.

16. Даны точки A(–5;12), B(8;12), C(–5;–1). Определить, является ли отрезок BC хордой окружности, проходящей через начало координат и с центром в точке A. Репер ортонормированный.

17. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-8;4)$ и касающейся осей координат. Репер ортонормированный.

18. Написать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом OM, если известно, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -2/3$, $M_1(2;3)$, $M_2(1;0)$. Репер ортонормированный.

19. Дан треугольник ABC: $A(4;4)$; $B(-4;2)$, $C(-4;4)$ и AM и BN — медианы треугольника. Найти отношение $AM : BN$. Репер ортонормированный.

20. При каком значении k треугольник ABC с основанием AB и вершинами в точках $A(1;3)$, $B(2:-1)$, $C(4;k)$ — равнобедренный? Репер ортонормированный.

21. По координатам вершин треугольника ABC выяснить, будет ли он остроугольным, тупоугольным, прямоугольным: а) $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(7;3)$; б) $A(4;0)$, $B(1;1)$, $C(5;4)$; в) $A(2;1)$, $B(3;1)$, $C(6;3)$? Репер ортонормированный.

22. Определить длины медиан треугольника, вершины которого заданы координатами $A(2;1)$, $B(-2;3)$, $C(0;3)$. Репер ортонормированный.

23. Написать уравнение окружности с центром в точке $P(1;-1)$ и радиусом PM, если точка M делит отрезок AB в отношении $\lambda = -2$ и $A(3;-2)$, $B(0;-1)$. Репер ортонормированный.

24. Даны три точки $A(-1;-2)$, $B(0;1)$, $C(2;7)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

25. По координатам A и B квадрата $ABCD$ вычислить координаты вершин C и D, если $A(0;-1)$, $B(-2;1)$. Репер ортонормированный.

26. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек $B(1;1)$ и $C(3;7)$. Репер ортонормированный.

27. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-2;-3)$, $B(1;4)$, $C(8;7)$, $D(5;0)$ является ромбом. Репер ортонормированный.

28. Точки $P(1;1)$, $Q(-1;2)$, $C(2;-1)$ — три вершины равнобочной трапеции $PQCE$ ($PQ \| CE$). Найти координаты вершины E. Репер ортонормированный.

1. ***Прямая в аффинной системе координат***

1. Дана прямая с уравнением $2x - y + 5 = 0$. Выяснить, какие из следующих точек принадлежат этой прямой: $A(5;15)$, $B(1;1)$, $C(0;5)$, $D(–2;1)$, $E(3;0)$, $F(7;–5)$, $K(1;6)$.

2. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(1;1)$, $B(3;–4)$;

b) проходящей через начало координат и точку $K(2;3)$;

c) проходящей через точку $E(2;6)$ и параллельной вектору $\vec{p}(2;-3)$;

d) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = –2$;

e) проходящей через точку $A(–3;4)$ и параллельной оси OY;

f) проходящей через точку $F(–2;1)$ и параллельной оси OX;

g) проходящей через точку $A(1;–5)$ и параллельной прямой $x – 3y + 1 = 0$;

h) проходящей через точку $M(–2;3)$ и параллельной прямой $2x + y – 4 = 0$.

3. Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой: а) (2;1), (–1;4), (–7;10); б) (0;5), (7;1), (–2;3); в) (1;0), (0;1), (–2;3); г) (2;1), (10;3), (5;2).

4. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые, и изобразить их на чертеже: а) $2x + 3y + 1 = 0$; б) $3x + y – 3 = 0$; в) $5x – 4 = 0$; г) $x – y = 0$; д) $7x – 4y = 0$; е) $6x = 0$.

5. Записать параметрические уравнения прямых и уравнения прямых в отрезках, если прямые заданы общими уравнениями: а) $3x – 2y + 6 = 0$; б) $x – y – 3 = 0$; в) $4x + y – 1 = 0$; г) $x – 3 = 0$; д) $2y + 5 = 0$.

6. Записать общие уравнения прямых, заданных параметрическими уравнениями: а) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5 + 6t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - -1 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = -1 + 3t. \end{cases}$

7. Составить уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника ABC, и уравнения прямых, содержащих медианы этого треугольника, если а) $A(–1;3)$, $B(0;4)$, $C(–2;–2)$; б) $A(2;6)$, $B(–4;0)$, $C(4;2)$; в) $A(–2;0)$, $B(–1;3)$, $C(1;1)$.

8. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция и написать уравнения прямых, содержащих среднюю линию и диагонали трапеции, если $A(–2;–2)$, $B(–3;1)$, $C(5/2;5/2)$, $D(3;1)$.

9. Даны уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC: $x + 2 = 0$, $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$. Написать уравнения прямых, содержащих медианы данного треугольника.

10. Известны уравнения прямых l_1: $4x - 5y = 0$, l_1: $x - 3y = 0$, содержащих медианы треугольника ABC, и вершина $A(2;-5)$. Написать уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

11. Даны уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника ABC: $2x - y + 1 = 0$, $x + 3y = 0$, $-x + y + 2 = 0$. Написать уравнения прямых, содержащих стороны треугольника.

12. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка O пересечения его диагоналей. Составить уравнения прямых AB, BC, CD, DA, AC и BD, если: а) $A(2;1)$, $B(-3;0)$, $O(-4;3)$; б) $A(3;-1)$, $B(1;2)$, $O(-1;0)$.

13. Даны середины сторон треугольника $M(2;-1)$, $N(-3;-3)$, $P(-1;0)$. Составить уравнения сторон треугольника.

14. Даны уравнения прямых, содержащих стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$: $x + 3y + 2 = 0$, $x - y = 0$, и точка $P(2;1)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнение прямых, на которых лежат стороны AD и CD.

15. Исследовать взаимное расположение пар прямых и в случае пересечения найти координаты общей точки: а) $x + y + 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$; б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x - 2y - 3 = 0$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$; г) $y = 3$ и $x + y = 0$; д) $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 6 = 0$; е) $y = 0$ и $y - 4 = 0$.

16. При каком значении t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 0$, параллельны?

17. Можно ли подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $\lambda x + \mu y - 3 = 0$: а) совпали; б) были параллельны; в) пересекались?

2. *Прямая в прямоугольной декартовой системе координат*

18. Составить уравнение прямой: а) проходящей через точку $A(-1;2)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 3; б) проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k = -3$; в) проходящей через начало координат и образующей с осью OX угол 60°; г) проходящей через точку

M(3;–4) и образующей с осью OX угол 135°; д) отсекающей от оси OY отрезок $b = –3$ и имеющей угловой коэффициент $k = –2$; е) проходящей через точку А(2;–5) и не имеющей углового коэффициента.

19. Написать уравнение прямой: а) проходящей через точку A(–1;–3) и перпендикулярной вектору $\vec{n}(2;3)$; б) проходящей через точку B(2;–4) и перпендикулярной прямой $x + 2y – 3 = 0$; в) проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $x + y – 2 = 0$.

20. Через точку пересечения прямых $3x – y = 0$ и $x + 4y – 12 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная к прямой $2x + 7y = 0$. Найти уравнение этой прямой.

21. Определить координаты направляющего вектора $\vec{p}$, нормального вектора $\vec{n}$, угловой коэффициент k, отрезки a и b, отсекаемые прямой на осях координат, для каждой из следующих прямых: а) $2x – 5y + 3 = 0$; б) $x + 4y – 2 = 0$; в) $x – 3 = 0$.

22. Точка H(3;2) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l. Написать уравнение прямой l.

23. Даны точки A(–2;3) и B(4;1). Составить уравнение прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно прямой AB.

24. На прямой $x + 2y – 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек A(–2;5), B(0;1).

25. Даны вершины треугольника ABC $A(1;5)$, B(–1;2), C(3;2). Составить уравнения высот треугольника.

26. Даны вершины A(–1;5), B(3;2) треугольника ABC и точка H(5;–3) пересечения его высот. Составить уравнение его сторон.

27. Вершины треугольника находятся в точках A(–4;–5), B(4;1), C(–½;7). Написать уравнение прямой, содержащей: а) биссектрису угла A; б) медиану, проведенную из вершины A; в) высоту, опущенную из вершины C.

28. Даны уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC BC: $x + y – 1 = 0$, CA: $2x – y = 0$, AB: $x – 2y – 2 = 0$. Составить уравнения прямых, содержащих высоты этого треугольника.

29. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный, и написать уравнение его оси симметрии, если A(2;1), B(4;3), C(2;3).

30. Даны уравнения прямых l_1: $3x - y - 2 = 0$, l_2: $x - 3y + 5 = 0$. Написать уравнения прямых, содержащих биссектрисы углов, образуемых прямыми l_1 и l_2.

31. Составить уравнения прямых, отстоящих от прямой $6x - 8y + 1 = 0$ на расстояние, равное 2.

32. На оси OX найти точку, равноудаленную от прямых: а) $x + 3y + 2 = 0$, $3x - y + 1 = 0$; б) $4x - 3y = 0$.

33. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точку, равноудаленную от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

34. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $A(3;1)$, $B(-1;0)$, $C(2;-1)$.

35. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ и вершина $A(-2;1)$. Найти площадь прямоугольника.

36. Написать уравнение окружности с центром в точке $P(6;-3)$, касающейся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.

37. Составить уравнение окружности радиуса $R = 5$, касающейся прямых, заданных уравнениями: $3x + 4y - 10 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$.

38. Найти угол между прямыми: а) $3x + y - 6 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$; б) $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$ и $\sqrt{3}x - y - 5 = 0$; в) $x - 2y + 1 = 0$ и $6x + 3y - 2 = 0$; г) $x - y = 0$ и $x - 3 = 0$; д) $y = 0$ и $2x - 5 = 0$.

39. Найти величины углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $18x + 6y - 17 = 0$, $14x + 7y + 15 = 0$, $5x + 10y - 9 = 0$.

§ 4. Системы координат в пространстве

Аффинным репером $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, или аффинной системой координат, пространства *называют совокупность точки и трех некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке.*

Точка O называется началом репера, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — векторами репера.

Прямые, проходящие через начало репера по направлению векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, называются координатными осями (ось *абсцисс*, ось *ординат*, ось *аппликат*). Координатные плоскости обозначают следующим образом: XOY, YOZ, ZOX.

Аффинными координатами точки M в репере $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *называют коэффициенты линейного разложения радиуса-вектора точки M по базису* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

При заданном аффинном репере каждая точка M пространства получает единственный набор координат.

Координаты вектора*, если известны координаты начала и конца представителя этого вектора,* находятся по формулам:

$$\alpha = x_2 - x_1,\ \beta = y_2 - y_1,\ \gamma = z_2 - z_1 .$$

Если даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$, то координаты точки $M(x,y,z)$, для которой $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}$, находятся следующим образом:

$$x = x_0 + \alpha, y = y_0 + \beta,\ z = z_0 + \gamma .$$

Если дан отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, и известно, что точка $M(x,y,z)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, т. е. $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, то координаты точки M определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\ (1+\lambda \neq 0) .$$

Прямоугольная декартова система координат пространства характеризуется тем, что векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ удовлетворяют условиям:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \text{, где } i, j = 1, 2, 3.$$

Прямоугольная декартова система координат позволяет находить расстояние между точками:

$$\rho(M_1M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Формулы

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 ,$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 ,$$
$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0$$

определяют закон изменения координат точки пространства при переходе от одной аффинной системы координат к другой, при этом определитель матрицы $|c_{ij}| \neq 0$.

Формулы преобразования координат точки при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой получаются из предыдущих формул при выполнении дополнительных условий:

$$c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2=1, \qquad c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{32}c_{32}=0,$$

$$c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2=1, \qquad c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}+c_{32}c_{33}=0,$$

$$c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2=1, \qquad c_{13}c_{11}+c_{23}c_{21}+c_{33}c_{31}=0.$$

Формулы параллельного переноса системы координат записываются в виде

$$x=x'+x_0,\ y=y'+y_0,\ z=z'+z_0.$$

Поверхностью трехмерного пространства *называется множество точек, координаты которых в аффинной системе координат удовлетворяют уравнению* $F(x,y,z)=0$.

Линией называется множество точек*, координаты которых в аффинной системе координат удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Пусть $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ — прямоугольная декартова система координат. Точке M поставим в соответствие три числа ρ,φ,z, где z — аппликата точки ($-\infty<z<\infty$)), а ρ,φ — полярные координаты проекции точки M на плоскость XOY ($\rho>0,\ 0\le\varphi<2\pi$). Числа ρ,φ,z называются цилиндрическими координатами точки M. Цилиндрические координаты связаны с прямоугольными декартовыми координатами точки M соотношениями

$$x=\rho\cos\varphi,$$

$$y=\rho\sin\varphi,$$

$$z=z.$$

Пусть r — расстояние от начала координат O до точки M ($r>0$), θ — угол между вектором $\vec{k}$ и радиусом-вектором точки M ($0\le\theta\le\pi$), φ — угол между положительным направлением оси абсцисс и проекцией радиуса-вектора точки M на плоскость XOY ($0\le\varphi<2\pi$). Эти три числа называют сферическими координатами точки M. Сферические координаты связаны с прямоугольными декартовыми координатами точки M соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\varphi.$$

§ 5. Теория плоскости и прямой в пространстве

Плоскость. Существуют различные способы задания плоскости, соответственно различные уравнения в одном и том же репере.

1. Уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя направляющими неколлинеарными векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

2. Векторное уравнение плоскости:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} .$$

3. Параметрические уравнения плоскости:

$$x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 ,$$
$$y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 ,$$
$$z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 .$$

4. Уравнение плоскости, заданной тремя точками:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

5. Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 ,$$

здесь $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

6. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{, где } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 .$$

Условие параллельности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и вектора $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$ записывается в виде $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$.

Расположение плоскости относительно системы координат характеризуется таблицей 1.

Таблица 1

	Параллельность плоскости с осью (координатной плоскостью)		Условия прохождения плоскости через ось (совпадения с координатной плоскостью)	
	Условия	Уравнение плоскости	Условия	Уравнение плоскости
Ось *OX*	A = 0	$By + Cz + D = 0$	A = D = 0	$By + Cz = 0$
Ось *OY*	B = 0	$Ax + Cz + D = 0$	B = D = 0	$Ax + Cz = 0$
Ось *OZ*	C = 0	$Ax + By + D = 0$	C = D = 0	$Ax + By = 0$
Пл. *XOY*	A = B = 0	$Cz + D = 0$	A = B = D = 0	$Cz = 0$
Пл. *XOZ*	A = C = 0	$By + D = 0$	A = C = D = 0	$By = 0$
Пл. *YOZ*	B = C = 0	$Ax + D = 0$	B = C = D = 0	$Ax = 0$

Взаимное расположение двух плоскостей пространства с уравнениями

$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

зависит от значений рангов r и ρ матриц:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Если $r=\rho=2,$ то плоскости пересекаются по прямой линии. Если $r=1, \rho=2,$ то плоскости не имеют общих точек, поэтому они параллельны. Если $r=\rho=1,$ то плоскости совпадают. Условие $r=\rho=1$ равносильно требованию пропорциональности коэффициентов при соответствующих переменных и свободных членов в уравнениях плоскостей.

Вектор $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ *называется нормальным вектором плоскости α,* если он перпендикулярен к любому направляющему вектору плоскости.

Уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$, имеет вид:

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0.$$

Вектор $\vec{a}(A,B,C)$, где *A, B, C* — коэффициенты в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$, является одним из нормальных векторов плоскости α.

Расстояние $\rho(M_0,\alpha)$ от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости α находится по формуле:

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Прямая. 1. Если прямая задана с помощью точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющего вектора $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$, то уравнения

$$x=x_0+t\alpha,$$
$$y=y_0+t\beta,$$
$$z=z_0+t\gamma$$

называются *параметрическими уравнениями прямой*.

2. Если $\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \gamma\neq 0$, то соотношения:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

называются *каноническими уравнениями прямой*.

3. Уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где числа, стоящие в знаменателях, не могут быть нулями.

4. Если прямая линия задана как результат пересечения двух плоскостей, то уравнение прямой запишется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Пусть даны две прямые: l_1: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и l_2: $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, тогда

1) если $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}) \neq 0$, то прямые l_1, l_2 скрещиваются;

2) если $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}) = 0$, то прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости, при этом

а) если вектор $\vec{a}_1$ не коллинеарен $\vec{a}_2$, то прямые l_1, l_2 пересекаются;

б) если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ коллинеарны между собой и не коллинеарны $\overrightarrow{M_1M_2}$, то прямые l_1, l_2 параллельны;

в) если все векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, то прямые совпадают.

Пусть даны плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$, тогда:

1) если $A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0$, то прямая l пересекает плоскость в некоторой точке;

2) если $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, но $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая l параллельна плоскости;

3) если $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая l лежит в плоскости.

Величина угла между двумя прямыми пространства подсчитывается по формуле

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{a}_2) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Угол между прямой l и плоскостью находится следующим образом:

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

§ 6. Вопросы и задачи

1. ***Аффинная и прямоугольная декартова системы координат в пространстве***

1. Точки D, E, F — середины ребер BC, AC, AB тетраэдра $OABC$. Найти координаты вершин этого тетраэдра в репере (O, D, E, F).

2. В пространстве дана ПДСК и точка $M(2;3;5)$. Построить точки $M_1(2;5;3)$, $M_2(3;5;2)$, $M_3(5;2;3)$.

3. Вершина A параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ принята за начало координат, ребра AB, AD, AA' — за базисные векторы, то есть $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{e}_3$. Найти в этой системе координат координаты всех вершин параллелепипеда.

4. В пространстве дан тетраэдр $ABCD$ и выбран аффинный репер $\{D, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{DC}$. Найти в этой системе координаты точки M — точки пересечения медиан треугольника ABC.

5. Относительно ПДСК в пространстве дана точка $M(x, y, z)$. Найти координаты точки, симметричной точке M относительно: а) начала координат; б) плоскости OXY; в) оси OZ.

6. Относительно ПДСК в пространстве дана точка $M(x, y, z)$. Найти координаты ортогональной проекции точки M: а) на ось OX; б) на плоскость OYZ; в) на ось OZ; г) на плоскость OXY.

7. Определить расстояния d_x, d_y, d_z точки $M(x, y, z)$ от осей координат OX, OY, OZ. Система координат прямоугольная декартова.

2. Решение простейших задач в пространстве

8. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин $A(2;–1;1)$, $B(1;3;4)$, $A_1(4;2;0)$, $D(6;0;1)$. Найти координаты остальных вершин.

9. Даны четыре точки $A(2;4;3)$, $B(0;0;5)$, $C(4;1;6)$, $D(–2;3;2)$. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются, найти координаты точки пересечения.

10. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_3(1;–1;2)$ и $A_5(2;1;–4)$, определить координаты остальных точек.

11. Выяснить, какие из данных четверок точек лежат в одной плоскости: а) $A_1(0;0;–1)$, $B_1(–½;0;½)$, $C_1(0;1;2)$, $D_1(1;1;1)$; б) $A_2(1;7;8)$, $B_2(3;5;6)$, $C_2(–1;4;4)$, $D_2(0;7;6)$.

12. Даны две вершины треугольника: $A(–4;–1;2)$ и $B(3;5;–6)$. Найти третью вершину C, если середина стороны AC лежит на оси OY, а середина стороны BC — на плоскости OXY.

13. Найти расстояние между точками: а) $A_1(1;2;3)$ и $A_2(1;–2;0)$; б) $B_1(2;–3;1)$ и $B_2(1;–3;8)$; в) $C_1(–1;–1;0)$ и $C_2(2;3;\sqrt{5})$; г) $O(0;0;0)$ и $D(1;-3;\sqrt{15})$.

14. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(3;5;–4)$, $B(–1;1;2)$, $C(–5;–5;–2)$ является равнобедренным.

15. Определить радиус сферы, проходящей через точку $A(–2;0;2)$ и имеющей центр в точке $B(1;1;6)$.

16. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;–1;4)$, $B(3;2;–6)$, $C(–5;0;2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

17. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точек $A(–4;1;7)$, $B(3;5;–2)$.

18. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;–1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(–10;5;3)$. Найти длину биссектрисы BD и длину медианы CM треугольника.

3. *Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве*

19. Найти сферические координаты точек по их прямоугольным декартовым координатам: $A(–8;–4;1)$, $B(–2;–2;–1)$, $C(0;–4;3)$, $D(1;–1;–1)$, $E(0;1;0)$.

20. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч OM образует с осями OX и OY углы, соответственно равные $\pi/4$ и $\pi/3$, а третья координата точки $z = –1$.

21. Найти прямоугольные декартовы координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту $\theta = 45°$ и долготу $\varphi = 330°$.

22. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющей две точки A и B, лежащие на шаре радиуса r, зная широту и долготу этих точек $A(\varphi_1;\theta_1)$, $B(\varphi_2;\theta_2)$.

23. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным декартовым координатам $A(3;–4;5)$, $B(1;–1;–1)$, $C(–6;0;8)$.

24. Найти цилиндрические координаты точки M, зная, что луч OM составляет с осями координат углы $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{4}$, а длина отрезка OM равна 1.

25. Найти угол α между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью OX, зная цилиндрические координаты точки $M(r;\varphi;z)$.

4. *Плоскость в аффинной системе координат*

26. Определить координаты нескольких точек, лежащих в плоскости $3x-2y+z+12=0$.

27. Определить ординату точки, имеющей абсциссу, равную единице, и расположенной в плоскостях $2x-y+z-6=0$ и а) OXZ; б) OYZ; в) OXY.

28. Найти уравнение плоскости: а) проходящей через точку $A(2;0;3)$ и параллельной векторам $\vec{p}_1(2;1;5)$ и $\vec{p}_2(1;0;1)$; б) проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;–1;3)$ и параллельной вектору $\vec{p}(1;2;2)$; в) проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;–1;2)$; г) проходящей через точку $M(1;2;–1)$ и параллельной плоскости OXZ; д) проходящей через точку $M(2;1;–5)$ и параллельной плоскости $2x-y+3z-1=0$; е) проходящей через точки $M_1(1;2;–4)$, $M_2(2;0;–3)$ и параллельной оси OY; ж) проходящей через точку $P(7;–5;1)$ и отсекающей на осях координат положительные и равные между собой отрезки.

29. Написать параметрическое уравнение плоскости: а) проходящей через точку $A(0;0;1)$ и параллельной векторам $\vec{p}_1(1;0;1)$ и $\vec{p}_2(2;1;3)$; б) проходящей через точки $M_1(1;0;0)$, $M_2(1;2;3)$, $M_3(0;3;6)$; в) проходящей через точку $M(2;–1;3)$ и параллельной плоскости $x+2y-3z-5=0$.

30. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четверки точек: а) $A_1(3;1;0)$, $A_2(0;1;2)$, $A_3(–1;0;–5)$, $A_4(4;1;5)$; б) $B_1(2;1;–1)$, $B_2(1;–1;2)$, $B_3(0;4;–2)$, $B_4(3;1;–2)$; в) $C_1(0;0;–1)$, $C_2(1;3;4)$, $C_3(5;0;–3)$, $C_4(4;4;1)$.

31. Даны вершины тетраэдра $ABCD$: $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;–1;3)$, $D(3;–1;5)$. Написать: а) уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD; б) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD.

32. Даны вершины параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;–1;3)$, $A_1(3;–1;5)$. Написать уравнение плоскостей, содержащих его грани.

33. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей: а) $x – 3y + z + 1 = 0$ и $2x + y – 4z + 3 = 0$; б) $3x + y – z + 2 = 0$ и $6x + 2y – 2z + 3 = 0$; в) $\sqrt{2}x-y+3z+\sqrt{2}=0$ и $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z+2=0$; г) $x + y + z – 1 = 0$ и $x + y + z = 0$.

34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;–3;5)$ и параллельной плоскости: а) $3x - y + z + 4 = 0$; б) $x - 3y + z = 0$; в) $3z - 4 = 0$; г) $3x + 5 = 0$; д) $2x - 4y + 5z = 0$; е) $2y - 7z + 6 = 0$.

35. Найти координаты точки пересечения следующих трех плоскостей: а) $5x + 8y - z = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$; б) $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x + y + z - 5 = 0$, $-3x + 12y + 6z - 7 = 0$; в) $2x - y + 5z - 4 = 0$, $5x + 2y - 13z + 23 = 0$, $3x - z + 5 = 0$.

36. Указать особенности в расположении плоскостей в каждом из следующих случаев: а) $3x - y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$, $6x - 2y - 5z + 2 = 0$, $x + y - 5z + 3 = 0$; б) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z - 3 = 0$; в) $2x - y + 3z - \frac{1}{2} = 0$, $4x - 2y + 3z + 1 = 0$, $-2x + y - 3z + 2 = 0$.

37. Указать особенности в расположении следующих плоскостей: а) $3x - 5z + 1 = 0$; б) $9y - 2 = 0$; в) $x + y - 5 = 0$; г) $2x + 3y - 7z = 0$; д) $8y - 3z = 0$ — относительно аффинной системы координат.

38. Написать уравнение плоскости: а) параллельной плоскости OXZ и проходящей через точку $A(2;–5;3)$; б) проходящей через ось OZ и точку $B(–3;1;–2)$; в) параллельной оси OX и проходящей через точки $C(4;0;–2)$ и $D(5;1;7)$.

39. При каких значениях параметров a и b плоскости $2x + ay + 3z - 2 = 0$ и $bx - 6y - 6z + 4 = 0$: а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают?

5. *Плоскость в прямоугольной декартовой системе координат*

40. Написать уравнение плоскости, проходящей: а) через точку $M(2;3;–1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(1;2;-4)$; б) через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}(0;-3;4)$.

41. Дан тетраэдр $ABCD$: $A(–1;2;5)$, $B(0;–4;5)$, $C(–3;2;1)$, $D(1;2;4)$. Написать уравнения плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных сторонам AB, BC и CA.

42. Найти множество точек, равноудаленных от точек $A(2;–1;3)$ и $B(4;5;–3)$.

43. Найти координаты направляющего и нормального векторов следующих плоскостей: а) $x + 2y - z + 1 = 0$; б) $x - 3z + 5 = 0$; в) $y + 1 = 0$; г) $x - 3y + z + 4 = 0$.

44. Составить уравнение плоскости: а) проходящей через точки $A(1;-1;3)$, $B(1;2;4)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$; б) проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$; в) проходящей через точку $M(1;1;-2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x + 3z = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$; г) проходящей через основание $M(2;6;-4)$ перпендикуляра, проведенного к плоскости через начало координат.

45. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2;-3;6)$.

46. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 10 = 0$ в точке $A(0;1;3)$.

47. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости: а) $15x - 10y + 6z - 90 = 0$; б) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$; в) $7x + y - 5 = 0$.

48. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости π в каждом из следующих случаев: а) $M_0(1;-2;2)$, π: $2x + y + 2z - 7 = 0$; б) $M_0(3;0;4)$, π: $2x + 3z + 8 = 0$; в) $M_0\left(-1;2;\sqrt{2}\right)$, $\pi: 5x - 3y + \sqrt{2}z = 0$.

49. Установить расположение плоскости $2x - 2y - z + 9 = 0$ относительно сферы в каждом из следующих случаев: а) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$; б) $(x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$; в) $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 4$; г) $(x + 1)^2+(y + 2)^2+(z-11)^2 = 5$.

50. Вычислить расстояние между следующими парами параллельных плоскостей: а) $x - 2y + 2z - 6 = 0$ и $x - 2y + 2z + 18 = 0$; б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z - 21 = 0$; в) $x - y + 5z + 27 = 0$ и $x - y + 5z - 54 = 0$; г) $2x - 3y + 5z + 27 = 0$ и $-6x + 9y - 15z + 9 = 0$; д) $x - 3y + 2z + 1 = 0$ и $2x - 6y + 4z + 3 = 0$.

51. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точки $M(1;1;4)$ и от плоскости π: $2x - 2y + z - 12 = 0$.

52. На оси OY найти точку, равноудаленную от двух плоскостей α: $x + 2y - z - 1 = 0$ и β: $3x + 5 = 0$.

53. Составить уравнение множества точек пространства, отстоящих от плоскости $6x - 3y + 2z - 14 = 0$ на расстояние, равное 3.

54. Написать уравнение сферы, центр которой лежит на оси OX и которая касается двух плоскостей α: $2x - 4y - 3z + 21 = 0$ и β: $5x - 2z = 0$.

55. Даны вершины тетраэдра $ABCD$: $A(0;0;3)$, $B(1;-2;1)$, $C(0;-2;2)$, $D(1;1;1)$. Вычислить длину высоты DH тетраэдра.

56. Составить уравнение множества точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, в каждом из следующих случаев: а) $2x - y + 3z - 4 = 0$ и $2x - y + 3z - 5 = 0$; б) $x + y - 2z - 3 = 0$ и $x + y - 2z + 7 = 0$; в) $3x - y + z + 5 = 0$ и $3x - y + z + 15 = 0$.

57. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей: а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$; б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0$ и $6x - 3z + 2 = 0$; в) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$; г) $3x - y + 2z + 15 = 0$ и $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

6. *Прямая в аффинной системе координат*

58. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{1}$; б) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

59. Определить, какие из точек $M_1(-1;2;-1)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-4;1)$ принадлежат прямой $l: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$

60. Написать уравнение прямой: а) проходящей через две точки $M_1\left(2;-3;\dfrac{1}{2}\right)$, $M_2\left(3;5;\dfrac{3}{2}\right)$; б) проходящей через точку $M(2;1;-3)$ и параллельной вектору $\vec{p}(1;-3;1)$; в) образованной пересечением плоскости $x + 3y - z + 1 = 0$ с координатной плоскостью OXY; г) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2;0;3)$, $B(1;1;1)$, $C(2;4;-3)$; д) проходящей через точку $M(1;-3;4)$ и параллельной прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$; е) проходящей через

точку $K(2;-5;3)$ и параллельной прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$;

ж) проходящей через начало координат и параллельной прямой $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=6t-2, \\ z=2t+5. \end{cases}$

61. Написать уравнения прямых, содержащих ребра тетраэдра $ABCD$, если $A(0;0;2)$, $B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$, $D(-1;4;-2)$.

62. Проверить, лежат ли точки $A(3;0;1)$, $B(0;2;4)$, $C\left(1;\frac{4}{3};3\right)$ на одной прямой.

63. Написать параметрические уравнения прямых: а) $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=0, \\ y+z=0. \end{cases}$

64. Установить взаимное расположение следующих пар прямых: а) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=9t, \\ y=5t, \\ z=-3+t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ z-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z-8=0, \\ 2y+3z-7=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=t, \\ y=-8-4t, \\ z=-3-3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-2t, \\ z=-t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-2t, \\ y=-5+3t, \\ z=4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=-1, \\ z=4-t. \end{cases}$

65. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-6t, \\ z=-1-8t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7-6t, \\ y=2+9t, \\ z=4-t \end{cases}$ лежат в одной плоскости, и написать уравнения этой плоскости.

66. Доказать, что следующие пары прямых параллельны, и составить уравнение плоскостей, проходящих через каждую

пару прямых: а) $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -t, \\ z = 1+t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

б) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

67. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-3z+5=0. \end{cases}$

68. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;3;7)$ и прямую $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-5}{-1}$.

69. Выяснить взаимное расположение прямой l и плоскости α, если: а) $l: \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 3t, \\ z = -2+t \end{cases}$ и $\alpha: 2x-y+z+1=0$;

б) $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ и $\alpha: x-2y+5z-6=0$; в) $l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и $\alpha: x-2y+5z-4=0$.

7. *Метрические задачи на сочетание прямых и плоскостей*

Во всех следующих задачах предполагается, что в пространстве задан ортонормированный репер $R\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

70. Найти расстояние от точки P до прямой l, если: а) $P(7;9;7)$, $l: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$; б) $P(0;1;2)$, $l: \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 2-2t, \\ z = -1. \end{cases}$

71. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми: а) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ и $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{-3}$;

б) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{0}$.

72. Найти угол между прямой l и плоскостью π:

а) $l:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+12}{3}=\dfrac{z-4}{6}$ и $\pi:6x+15y-10z=0$;

б) $l:\begin{cases} x=t-3, \\ y=-2t+2, \\ z=2t-1 \end{cases}$ и $\pi:4x+2y+2z-5=0$.

73. Определить угол между следующими прямыми: а) $\begin{cases} y+1=0, \\ x+2z-1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=0, \\ z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t, \\ z=3+2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y-2z-1=0, \\ 2x+2y+z+3=0. \end{cases}$

74. Написать уравнения прямой: а) проходящей через точку $M(2;-3;3)$ и перпендикулярной плоскости $x-3y+4z-1=0$; б) проходящей через точку $A(2;3;-1)$, пересекающей прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{3}$ и перпендикулярной к ней; в) проходящей через точку $M(2;3;1)$ и перпендикулярной прямым $\begin{cases} 2x-y+3z+4=0, \\ -x+2y+2z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y-z+1=0, \\ 2x+y+4z=0. \end{cases}$

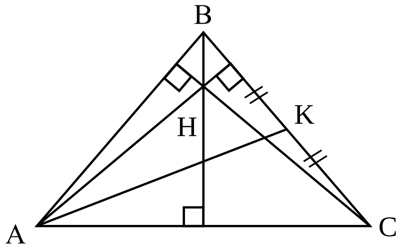
75. На прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3;11;4)$ и $B(-5;-13;-2)$.

76. Написать уравнение плоскости: а) проходящей через точку $A(1;-3;4)$ и перпендикулярной к прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{5}$; б) проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ x+y-z+5=0; \end{cases}$ в) проходящей через начало координат, параллельной прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$ и перпендикулярной к плоскости $x-2y+z-1=0$.

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Вариант 0

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–10;2), *B*(6;4). Его высоты пересекаются в точке *H*(5;2). Написать уравнения прямых, содержащих стороны треугольника и медиану *AK*.



Дано: ΔABC, *A*(–10;2), *B*(6;4), *H*(5;2) — точка пересечения высот ΔABC, *AK* — медиана.

Найти: уравнения прямых *AB*, *BC*, *AC*, *AK*.

Решение: Уравнение прямой *AB* запишем, зная координаты точек *A* и *B*, которые принадлежат этой прямой: $\frac{x+10}{6+10}=\frac{y-2}{4-2}$. То есть $\frac{x+10}{16}=\frac{y-2}{2}$. Воспользуемся свойством пропорций: $2\cdot(x+10)=16\cdot(y-2)$. В результате решения данного уравнения получаем, что прямая *AB* задается уравнением $x-8y+26=0$.

Для прямой *BC* точка *B* является начальной точкой, а вектор $\overrightarrow{AH}(15;0)$ — нормальным вектором. Поэтому $BC: 15\cdot(x-6)+0\cdot(y-4)=0$, следовательно, $BC: x-6=0$.

Аналогично для прямой *AC* точка *A* — начальная точка, $\overrightarrow{BH}(-1;-2)$ — нормальный вектор. То есть $AC: (-1)\cdot(x+10)+(-2)\cdot(y-2)=0$. Полученное уравнение умножаем на (–1) и, раскрывая скобки, получаем: $x+10+2y-4=0$. Таким образом, прямая *AC* задается уравнением $x+2y+6=0$.

Так как *AK* — медиана ΔABC, то точка *K* — середина *BC*, следовательно, для того чтобы найти координаты точки *K*, найдем координаты точки *C*, зная, что $C=AC\bigcap BC$. Составим систему из уравнений прямых AC и BC: $\begin{cases} x+2y+6=0, \\ x-6=0. \end{cases}$

Решаем полученную систему, то есть $\begin{cases} x=6, \\ y=-6. \end{cases}$

Таким образом, точка С имеет координаты $C(6;-6)$.

Тогда $K(x;y)$: $\begin{cases} x=\dfrac{6+6}{2}=6, \\ y=\dfrac{4+(-6)}{2}=-1, \end{cases}$ то есть $K(6;-1)$.

Запишем уравнение прямой AK, зная координаты точек A и K:

$AK: \dfrac{x+10}{6+10}=\dfrac{y-2}{-1-2}$, то есть $\dfrac{x+10}{16}=\dfrac{y-2}{-3}$. В результате получаем уравнение прямой AK:

$$AK: 3x+16y-2=0.$$

Ответ: AB: $x-8y+26=0$, BC: $x-6=0$, AC: $x+2y+6=0$, $AK: 3x+16y-2=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3;-1)$ и перпендикулярной плоскости $x+2y-z+1=0$. Выяснить взаимное расположение этой прямой и плоскости $2x+y-3z+3=0$.

Дано: $A(2;3;-1)$, π: $x+2y-z+1=0$, α: $2x+y-3z+3=0$, $l: A\in l$ и $l\perp\pi$.

Найти: l, взаимное расположение l и α.

Решение. Составим уравнение прямой l. Так как $A\in l$, следовательно, точка A — начальная точка прямой l. По условию $l\perp\pi$, нормальный вектор $\vec{n}(1;2;-1)$ плоскости π является направляющим вектором прямой l. Тогда

$$l: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}.$$

Для того чтобы выяснить взаимное расположение прямой l и плоскости α, запишем параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+2t, \\ z=-1-t. \end{cases}$ Решим систему, составленную из уравнений l и α: $\begin{cases} 2x+y-3z+3=0, \\ x=2+t, \\ y=3+2t, \\ z=-1-t. \end{cases}$ В первое уравнение системы вместо x, y, z подставим соответствующие выражения:

$2(2+t)+(3+2t)-3(-1-t)+3=0$, раскрываем скобки:

$4+2t+3+2t+3+3t+3=0$, приводим подобные слагаемые: $7t+13=0$, откуда $t=-\frac{13}{7}$, следовательно, l и α пересекаются в точке M, которая имеет координаты

$$\begin{cases} x=2-\frac{13}{7}, \\ y=3+2\cdot\left(-\frac{13}{7}\right), \\ z=-1-\left(-\frac{13}{7}\right), \end{cases} \text{ то есть } M\left(\frac{1}{7};-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right).$$

Ответ: $l:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$, $l\cap\alpha=M\left(\frac{1}{7};-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;–2;1)$ и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

Дано: $M(1;–2;1)$, $l:\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$ $\alpha: M\in\alpha$ и $\alpha\perp l$.

Найти: α.

Решение. Так как $M\in\alpha$, следовательно, M — начальная точка плоскости α. По условию $l\perp\alpha$, следовательно, направляющий вектор $\vec{p}$ прямой l является нормальным вектором плоскости α. Найдем координаты вектора $\vec{p}$:

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right).$$

Вычислим определители второго порядка, получим $\vec{p}(1;2;3)$. Тогда $\alpha:1(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0$, в уравнении раскрываем скобки: $x-1+2y+4+3z-3=0$, приводим подобные слагаемые, получаем: $x+2y+3z=0$.

Ответ: $\alpha: x+2y+3z=0$.

Вариант 1

1. Даны вершины тетраэдра: $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;-1;3)$ и $D(3;1;5)$. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через ребро *AB* и параллельной ребру *CD*;

б) проходящей через вершину *A* и параллельной грани *BCD*.

2. Написать уравнение прямой, содержащей медиану *AM* треугольника *ABC*, если: $A(-1;1;2)$, $B(2;-1;0)$, $C(-1;2;2)$ (система координат — прямоугольная).

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;-3)$ и параллельной прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

Вариант 2

1. В точке $A(2;6)$, лежащей на окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=25$, провести касательную к данной окружности.

2. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $M(1;-3;4)$ и параллельной прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0; \end{cases}$

б) образованной пересечением плоскости $5x-7y+2z-3=0$ с координатной плоскостью *OXZ*.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{1}$.

Вариант 3

1. Дан тетраэдр $A(-1;2;5)$, $B(0;-4;5)$, $C(-3;2;1)$, $D(1;2;4)$. Написать уравнение:

а) плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной ребру BC;

б) грани ABD (система координат — прямоугольная).

2. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $M_1\left(2;-3;\frac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(3;5;\frac{3}{2}\right)$;

б) проходящей через точку $M(2;-3;3)$ и перпендикулярной плоскости $x-3y+4z-1=0$ (система координат — прямоугольная).

3. Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$ (система координат — прямоугольная).

Вариант 4

1. Написать параметрические уравнения плоскости, которая проходит через точку $A(2;-1;3)$ параллельно плоскости $2x-y+3z-1=0$.

2. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2;0;-3)$ и параллельной оси OZ;

б) проходящей через точки $A_1(0;-2;3)$ и $A_2(3;-2;1)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $3x+2y-z-5=0$ (система координат — прямоугольная).

Вариант 5

1. Доказать, что ΔABC равнобедренный и составить уравнение его оси симметрии, если $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(2;3)$.

2. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей: а) через точку $P(-5;4;3)$, которая является основанием перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; б) проходящей через точку $M(3;2;5)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{4}$ и $\begin{cases} x=-2+2t, \\ y=1+3t, \\ z=5+6t. \end{cases}$ Репер ортонормированный.

Вариант 6

1. Найти проекцию точки $M(0;8)$ на прямую $l: 3x-y-2=0$. Репер ортонормированный.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;5;7)$ и точку пересечения прямой $l: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{4}$ с плоскостью $\pi: 2x-3y+z-14=0$.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x-2y+z-1=0$. Репер ортонормированный.

Вариант 7

1. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек $B(1;1)$ и $C(3;7)$. Репер ортонормированный.

2. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;-2;5)$ параллельно оси ординат.

3. Доказать, что прямые $l_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ и $l_2: \begin{cases} x = 6+3t, \\ y = -1-2t, \\ z = -2+t \end{cases}$ лежат в одной плоскости, составить уравнение этой плоскости.

Вариант 8

1. Прямая AB пересекает координатные плоскости OXY и OYZ в точках M и N. Вычислить длину MN, если $A(2;1;1)$, $B(-2;0;3)$. Репер ортонормированный.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;2;-1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 2x+2y-2z+7=0. \end{cases}$ Репер ортонормированный.

3. Выяснить взаимное расположение прямых $l_1: \begin{cases} 3x-y+z-1=0, \\ x-3y+z+4=0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x = 2+t, \\ y = 1-3t, \\ z = 4-2t. \end{cases}$

Вариант 9

1. Показать, что треугольник, заданный уравнениями своих сторон $x+5y+8=0$, $8x+y-14=0$, $7x-4y+17=0$, является равнобедренным. Репер ортонормированный.

2. Составить параметрические уравнения прямой: а) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0; \end{cases}$ б) проходящей через точку $B(1;-1;-3)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к нему, если $M_1(3;2;-4)$, $M_2(1;4;2)$. Репер ортонормированный.

Вариант 10

1. Дан ΔABC: $A(1;-2)$, $B(-1;6)$, $C(5;10)$. Составить уравнение средней линии ΔABC, параллельной AB.

2. Установить расположение плоскости π относительно сферы $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4$, если известно, что плоскость π проходит через прямые l_1 и l_2, где $l_1: \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0, \end{cases}$ $l_2: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Репер ортонормированный.

3. Найти сумму координат точки пересечения прямой $\begin{cases} 3x-y+2z+4=0, \\ -2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ с плоскостью XOY.

§ 8. Вопросы для самопроверки

1. Даны точки $A(2;\ 3;\ 0)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB пополам.

2. Записать уравнение плоскости, параллельной оси OZ.

3. Записать уравнение плоскости, параллельной плоскости XOZ и проходящей через точку $A(2;-5;3)$.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-5;1)$ и параллельной плоскости $x - 2y + 4z = 0$.

5. Выяснить взаимное расположение плоскостей α: $x - 3y + z + 1 = 0$ и β: $2x + y - 4z + 2 = 0$.

6. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через ось OX.

7. Записать условие параллельности двух плоскостей в пространстве, заданных уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

8. Записать формулу для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ на плоскости.

9. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, если π: $Ax + By + Cz + D = 0$, $l: \dfrac{x-x_0}{\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma}$,
$A\cdot\alpha + B\cdot\beta + C\cdot\gamma = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

10. Даны две прямые. Выяснить их взаимное расположение, если $l_1: \dfrac{x-x_1}{\alpha_1} = \dfrac{y-y_1}{\beta_1} = \dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$, $\quad l_2: \dfrac{x-x_2}{\alpha_2} = \dfrac{y-y_2}{\beta_2} = \dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

11. Записать уравнение прямой на плоскости в «отрезках».

12. Записать формулу для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$.

13. Найти расстояние между плоскостями, заданными уравнениями $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ и $2x + 3y + 4z + 7 = 0$.

14. Выяснить взаимное расположение прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{-3}$ и плоскости $2x - 3y + 4z + 3 = 0$.

15. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$ и плоскости $2x - 3y + 4z + 3 = 0$.

16. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{4}$ и плоскости $2x - 3y + 4z + 3 = 0$.

17. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{8}$ и плоскости $2x - 3y + 4z + 3 = 0$.

18. Записать координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости $x - 2y + 5z - 4 = 0$.

19. Найти $B + C$, если на плоскости прямая $2x - y - 6 = 0$ параллельна прямой $2x + By + C = 0$, проходящей через точку $(-2;-1)$.

20. Выяснить расположение прямой l: $x + 1 = 0$ относительно аффинной системы координат на плоскости.

21. Записать условие, при котором плоскость, заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ относительно аффинной системы координат, проходит через начало координат.

22. Выяснить взаимное расположение двух прямых на плоскости, если l_1: $x + y - 1 = 0$, l_2: $2x + 2y + 4 = 0$.

23. Записать формулу для нахождения косинуса угла между прямыми a: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и b: $A_2x + B_2y + C_2z = 0$.

24. Выяснить взаимное расположение плоскостей α: $2x - y - 3z - 2 = 0$ и β: $4x - 3y - z = 0$.

25. Записать уравнение медианы CK треугольника ABC, если $A(4;4)$, $B(-4;2)$, $C(-4;0)$.

26. Записать уравнение плоскости в «отрезках».

27. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$, $A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma\neq 0$.

28. Записать уравнение прямой на плоскости, заданной начальной точкой и нормальным вектором, если $A(4;4)$ $\vec{n}\,(2;3)$.

29. Записать формулу для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до прямой $l:\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$.

30. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости, заданной уравнением $7x + y + 5 = 0$.

31. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;–1;2)$.

32. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(2;–1;3)$.

33. Даны точки $A(2;–3)$, $B(3;–5)$. Записать уравнение прямой, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к прямой AB.

34. Выяснить взаимное расположение прямых на плоскости l_1: $2x + y – 1 = 0$, l_2: $4x + 2y – 2 = 0$.

35. Записать уравнение плоскости, содержащей ось абсцисс и проходящей через точку (2;1;–5).

36. Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной плоскости, заданной уравнением $2x – 4y + 5z – 9 = 0$.

37. Записать параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;1;3)$.

38. Записать формулу для нахождения угла между двумя плоскостями, заданными общими уравнениями.

39. Выяснить взаимное расположение двух прямых a и b, если $a:\dfrac{x-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$, $b:\dfrac{x-x_2}{\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\beta_2}=\dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$,

$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\dfrac{x_2-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y_2-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z_2-z_1}{\gamma_1}$.

40. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, если π: $Ax + By + Cz + D = 0$, $l:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$,

$A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma=0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0$.

41. На плоскости указать расстояние от точки $M_0(1;0)$ до прямой l: $x + y + 1 = 0$.

42. На плоскости найти расстояние между параллельными прямыми a: $4x + 3y + 5 = 0$ и b: $8x + 6y + 20 = 0$.

43. Записать уравнение прямой на плоскости, заданной начальной точкой $A(1;–1)$ и направляющим вектором $\vec{p}\,(2;3)$.

44. Найти косинус угла между двумя прямыми $a:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$ и $b:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$.

3. ЧАСТНАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Теория кривых второго порядка

Эллипсом называется множество точек плоскости*, сумма расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная, большая расстояния между точками.*

В канонической системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, стороны которого принадлежат прямым с уравнениями $x=\pm a$, $y=\pm b$.

Эллипс симметричен относительно осей и начала канонической системы координат.

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $0\le\varepsilon<1$ называют эксцентриситетом эллипса.

Уравнения

$$x=a\cos\varphi,$$
$$y=b\sin\varphi$$

носят название параметрических уравнений эллипса.

Гиперболой называется множество точек плоскости*, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная, меньшая расстояния между данными точками.*

В канонической системе координат уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Все точки гиперболы лежат вне полосы, границами которой являются прямые с уравнениями: $x=\pm a$. Прямые $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ называют асимптотами гиперболы.

Гипербола симметрична относительно осей и начала канонической системы координат.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, где $\varepsilon > 1$, называют эксцентриситетом гиперболы.

Параболой называется множество точек плоскости*, расстояние от которых до некоторой прямой (директрисы) равно расстоянию до некоторой точки (фокуса).*

Уравнение параболы может быть записано в виде $y^2 = 2px$.

Парабола симметрична относительно прямой, проходящей через фокус и перпендикулярной к директрисе.

Уравнение кривой второго порядка в полярных координатах имеет вид

$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = p,$$

при этом если $\varepsilon < 1$, то это уравнение определяет эллипс ($0 \le \varphi < 2\pi$), если $\varepsilon = 1$, то уравнение определяет параболу ($0 < \varphi < 2\pi$), если $\varepsilon > 1$, то уравнение определяет правую ветвь гиперболы ($\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$, где φ_0 — угол, для которого $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$).

§ 2. Теория поверхностей второго порядка

Эллипсоидом называется множество точек пространства*, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эллипсоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Точки эллипсоида принадлежат части пространства, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, грани которого расположены на плоскостях с уравнениями $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$.

Конусом второго порядка называется множество точек пространства*, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 .$$

Конус симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.

Однополостным гиперболоидом называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 .$$

Двуполостным гиперболоидом называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Однополостный и двуполостный гиперболоиды симметричны относительно всех координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.

Эллиптическим параболоидом называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \text{, где } p,q>0 .$$

Гиперболическим параболоидом называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \text{, где } p,q>0 .$$

Параболоиды проходят через начало координат. Параболоиды симметричны относительно плоскостей *YOZ, XOZ* и оси *OZ.*

Эллиптическим цилиндром называется множество точек пространства, *координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 .$$

Гиперболическим цилиндром называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Эллиптический и гиперболический цилиндры симметричны относительно всех координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.

Параболическим цилиндром называется множество точек пространства*, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению* $y^2=2px$.

Параболический цилиндр симметричен относительно координатных плоскостей *XOY*, *XOZ*, оси *OX*.

Уравнение поверхности, полученной при вращении кривой γ с уравнением $\begin{cases} x=\phi(z), \\ y=\varphi(z) \end{cases}$ вокруг оси *OZ*, имеет вид

$$x^2+y^2=\phi^2(z)+\varphi^2(z)\,.$$

При вращении кривых второго порядка вокруг их осей симметрии получаются поверхности второго порядка. Например, эллипсоид вращения ($\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$), гиперболоиды вращения ($\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$), параболоид вращения ($\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$).

§ 3. Вопросы и задачи

На плоскости и в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат.

1. *Эллипс*

1. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих эллипсов: а) $4x^2+9y^2-36=0$; б) $4x^2+144y^2-576=0$; в) $x^2+9y^2=9$; г) $9x^2+25y^2=1$. Изобразить эллипсы на чертеже.

2. Найти точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, абсциссы которых равны: а) 2; б) 3; в) 1.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если: а) вершины эллипса имеют координаты $A_1(6;0)$, $A_2(-6;0)$, $B_1(0;3)$, $B_2(0;-3)$; б) фокальное расстояние равно 10, а малая полуось равна 5; в) эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а большая полуось равна 3; г) эксцентриситет равен $\sqrt{\frac{3}{5}}$, а малая полуось равна 2; д) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет равен $\frac{1}{2}$.

4. Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если: а) эллипс проходит через точки $M_1\left(2;\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ и $M_2(-3;0)$; б) эллипс проходит через точки $M_1(1;3)$, $M_2(4;1)$; в) эллипс проходит через точку $M\left(-3;\frac{7}{4}\right)$ и расстояние между фокусами равно 6; г) эллипс проходит через точку $M\left(-3;\frac{11}{\sqrt{15}}\right)$ и имеет эксцентриситет, равный $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

5. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$ и найти расстояние между ними.

6. Составить уравнение эллипса, если: а) расстояние между директрисами равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$; б) расстояние между директрисами равно $\frac{72}{\sqrt{11}}$, а между фокусами — $2\sqrt{11}$; в) расстояние между директрисами равно $4\sqrt{15}$, а эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) прямые $x=\pm\frac{8}{\sqrt{13}}$ служат директрисами эллипса, а малая полуось равна 2.

7. Найти координаты фокусов, уравнения директрис, изобразить на чертеже данные кривые, их фокусы и директрисы: а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$; в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. *Гипербола*

1. Найти длины полуосей, координаты фокусов следующих гипербол: а) $9x^2-4y^2-36=0$; б) $25x^2-16y^2-1=0$; в) $x^2-y^2-25=0$; г) $10x^2-2y^2-10=0$. Изобразить гиперболы на чертеже.

2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если: а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10; б) действительная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $A\left(6;2\sqrt{3}\right)$; в) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$.

3. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис следующих гипербол: а) $4x^2-9y^2=36$; б) $16x^2-9y^2=144$. Сделать чертеж.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если: а) гипербола проходит через точки $A(4;0)$ и $B\left(4\sqrt{17};4\right)$; б) гипербола проходит через точку $P(–5;3)$ и имеет эксцентриситет, равный $\sqrt{2}$; в) гипербола имеет асимптоты $4y\pm 3x=0$ и директрисы $5x\pm 16=0$; г) гипербола является равнобочной и проходит через точки $K\left(\sqrt{2};1\right)$; д) угол между асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку $M\left(4\sqrt{3};2\right)$; е) угол между асимптотами равен 45° и гипербола проходит через точку $M(5;3)$; ж) гипербола имеет общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходит через точку $M\left(4\sqrt{2};3\right)$; з) гипербола имеет общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ и ее эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$.

5. Для равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через точку $M\left(4;\sqrt{2}\right)$.

По данному эксцентриситету в каждом из следующих случаев определить угол между асимптотами гипербол: а) $\varepsilon=\sqrt{2}$; б) $\varepsilon=2$; в) $\varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. *Парабола*

1. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол: а) $y^2=6x$; б) $x^2=3y$; в) $x^2=-4y$; г) $y^2=-2x$; д) $2x^2-3y=0$; е) $3y^2+16x=0$. Сделать чертеж.

2. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев: а) расстояние от фокуса, лежащего на оси *OX*, до вершины равно 4; б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку *M*(1;2); в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку *M*(–5;2); г) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку *M*(3;–4).

3. Составить уравнение параболы, если: а) фокус имеет координаты (–6;0); б) фокус имеет координаты (0;4); в) директриса задана уравнением $x + 4 = 0$; г) директриса задана уравнением $y – 10 = 0$; д) директриса задана уравнением $x – 5 = 0$.

4. *Цилиндрические и конические поверхности*

1. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнение ее оси *l* и координаты одной из ее точек *M*: а) $l:\begin{cases}x=7+3t,\\ y=1+4t,\\ z=3+2t\end{cases}$ и *M*(2;–1;0); б) $l:\begin{cases}x=t,\\ y=1+2t,\\ z=-3-2t\end{cases}$ и *M*(1;–2;1).

2. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев: а) направляющая лежит в

плоскости OXY и имеет уравнение $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2-x=0, \\ z=0, \end{cases}$ а образующие параллельны вектору $\vec{p}(1;0;1)$; б) направляющая лежит в плоскости OYZ и имеет уравнение $\begin{cases} y^2-yz+5=0, \\ x=0, \end{cases}$ а образующие параллельны оси OX; в) направляющая лежит в плоскости OXY и имеет уравнение $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=0, \end{cases}$ а образующие параллельны вектору $\vec{p}(1;2;-1)$; г) направляющая лежит в плоскости OXZ и является окружностью $\begin{cases} (x-1)^2+z^2=4, \\ y=0, \end{cases}$ а образующие параллельны оси OY.

3. Написать уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев, если ее образующие параллельны вектору $\vec{p}(5;3;-2)$, а направляющая задана уравнением: а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2-z^2=4, \\ x=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2=2z, \\ y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ z=0. \end{cases}$ Для каждого случая сделать чертеж.

4. Написать уравнение конической поверхности, если: а) направляющая в плоскости OXY задана уравнением $\begin{cases} x^2+y^2-y=0, \\ z=0 \end{cases}$ и вершина имеет координаты (1;0;1); б) направляющая в плоскости OYZ задана уравнением $\begin{cases} y^2+z^2=16, \\ x=0 \end{cases}$ и вершина имеет координаты (1;0;0); в) направляющая в плоскости OXZ задана уравнением

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ и вершина имеет координаты (0;4;–3).

В каждом случае сделать чертеж.

5. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат, если ее направляющая задана уравнением: а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1, \\ 2x - y + 4z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ z = 4. \end{cases}$

5. *Сферическая поверхность. Поверхности вращения*

1. Написать уравнение сферической поверхности: а) с центром в точке $P(0;1;0)$ и радиусом 5; б) с центром в начале координат и радиусом 6; в) с центром в точке $S(5;1;-3)$ и проходящей через точку $M(2;-3-3)$; г) с центром в точке $P(1;4;-7)$ и касающейся плоскости α: $6x + 6y - 7z + 42 = 0$.

2. Определить координаты центра и величину радиуса для каждой из следующих сфер: а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0$; г) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$.

3. Написать уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси OY каждой из следующих кривых, расположенных на плоскости OXY: а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1, \\ z = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 = 6y, \\ z = 0. \end{cases}$

4. Написать уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси OX (оси OY) линии, заданной уравнением:
а) $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 5, \\ y = 0. \end{cases}$

В каждом случае сделать чертеж.

5. Исследовать методом сечений поверхности второго порядка: а) $x^2 + y^2 - 2y = 0$; б) $x^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; в) $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$.

6. ***Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды***

1. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные уравнениями:

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$; б) $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$;

в) $x^2+y^2+z^2-4z+5=0$; г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

2. Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, который: а) проходит через точку $M(2;0;1)$ и пересекает плоскость OYZ по эллипсу $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1,\\ z=0;\end{cases}$ б) проходит через точку $M_1\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ и пересекает плоскость OYZ по эллипсу $\begin{cases}\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1,\\ x=0;\end{cases}$ в) пересекает плоскость OYZ по эллипсу $\begin{cases}\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1,\\ x=0,\end{cases}$ а плоскость OXY — по окружности $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ z=0;\end{cases}$ г) проходит через точки $M_1(2;2;4)$, $M_2(0;0;6)$, $M_3(2;4;2)$.

3. Исследовать методом сечений следующие поверхности: а) $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; б) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$.

4. Определить сечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-z^2=1$ плоскостью, проведенной через точку $M(0;0;1)$ параллельно плоскости OXY.

5. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность: а) проходит через точку $M\left(\sqrt{5};3;2\right)$ и пересекает плоскость OXZ по гиперболе

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$ б) пересекает плоскость OXY по окружности

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 0, \end{cases}$ а плоскость OXZ — по гиперболе $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{10} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

6. Написать уравнение двуполостного гиперболоида, если точки $M_1(3;1;2)$, $M_2\left(2;\sqrt{11};3\right)$, $M_3\left(6;2;\sqrt{15}\right)$ лежат на данной поверхности.

7. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка: а) $4x^2 + y^2 - 16z = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 - 4z + 5 = 0$; в) $x^2 - 2y^2 - 4x - z + 1 = 0$.

8. Написать уравнение эллиптического параболоида, ось которого совпадает с осью OZ, проходящего через точки $A(1;-2;1)$ и $B(-3;-3;2)$.

9. Найти уравнения прямолинейных образующих: а) гиперболического параболоида $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 2z$, параллельных плоскости $6x + 4y - 8z + 1 = 0$; б) однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, проходящих через точку $M(5;3;2)$.

10. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если поверхность пересекает ось OXZ по гиперболе $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$, а плоскость OYZ — по гиперболе $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

11. Написать уравнение гиперболического параболоида, ось которого совпадает с осью OY, проходящего через точки $A(1;-2;1)$ и $B(-3;-3;2)$.

12. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, который проходит через точку $M(8;0;8)$ и пересекает плоскость XOZ по параболе $-y^2 = 16z$.

13. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида, если поверхность пересекает плоскость OXZ по параболе $x^2 + y^2 = 9z$, а плоскость YOZ — по параболе $y^2 = 18z$.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Вариант 0

1. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точку $M(9/2;–1)$, а уравнение ее асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$.

Дано: $\gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $M\left(\frac{9}{2};-1\right)\in\gamma$, $l_1: y=\frac{2}{3}x$, $l_2: y=-\frac{2}{3}x$ — асимптоты.

Найти: уравнение гиперболы.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; уравнения ее асимптот $l_1: y=\frac{2}{3}x$, $l_2: y=-\frac{2}{3}x$. Так как гипербола проходит через точку $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$, координаты точки M удовлетворяют уравнению гиперболы, то есть $\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{(-1)^2}{b^2}=1$. Из уравнений асимптот следует, что $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$.

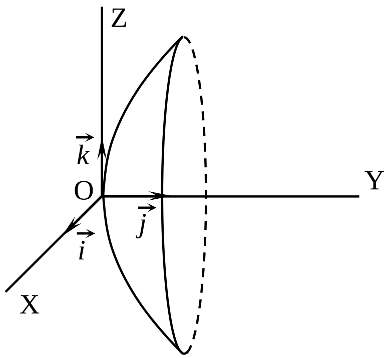
Решаем систему $\begin{cases}\frac{81}{4a^2}-\frac{1}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\frac{2}{3}.\end{cases}$ Из второго уравнения системы выразим b через a и подставим в первое, тогда $\begin{cases}b=\frac{2}{3}a,\\ \frac{81}{4a^2}-\frac{9}{4a^2}=1,\end{cases}$ решаем второе уравнение системы, получаем:

$\begin{cases}b=\frac{2\sqrt{18}}{3},\\ a^2=18,\end{cases}$ или $\begin{cases}a^2=18,\\ b^2=8.\end{cases}$

Уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$.

Ответ: $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$.

2. Написать уравнение поверхности вращения, образованной вращением параболы $\begin{cases} z^2=10y, \\ x=0 \end{cases}$ вокруг: а) оси *OY*; б) оси *OZ*.



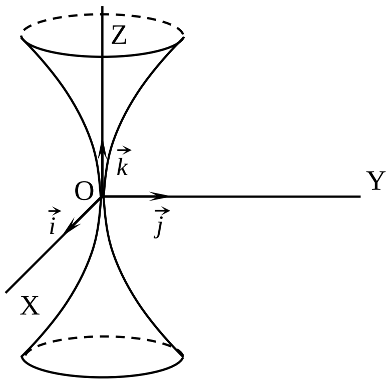
Дано: $\gamma:\begin{cases} z^2=10y \\ x=0 \end{cases}$, l — ось вращения. а) $l\equiv OY$; б) $l\equiv OZ$.

Найти: уравнения поверхности вращения.

Решение

а) Запишем уравнение параболы в виде $\begin{cases} z=\pm\sqrt{10y}, \\ x=0. \end{cases}$ Тогда уравнение поверхности вращения $\left(\pm\sqrt{z^2+x^2}\right)=\pm\sqrt{10y}$.

Возведем обе части равенства в квадрат: $z^2+x^2=10y$.



б) Запишем уравнение параболы в виде $\begin{cases} y=\frac{1}{10}z^2, \\ x=0. \end{cases}$

Тогда поверхность вращения задается уравнением

$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{10}z^2$.

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$x^2+y^2=\frac{1}{100}z^4,$$

то есть $z^4=100\left(x^2+y^2\right)$.

Ответ: а) $z^2+x^2=10y$; б) $z^4=100\left(x^2+y^2\right)$.

2. Определить вид сечения однополостного гиперболоида, заданного уравнением $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, плоскостью, проведенной через точку $M(0;0;4)$ параллельно плоскости OXY.

Дано: $HI:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, $\pi \parallel OXY$ и $M(0;0;4)\in\pi$, $\pi\cap HI=\gamma$.

Найти: γ — ?

Решение. Так как $M(0;0;4)\in\pi$ и $\pi\parallel OXY$, то уравнение плоскости $\pi: z=4$. Для того чтобы определить сечение γ, составим систему из уравнений плоскости π и однополостного гиперболоида HI:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1,\\ z=4,\end{cases} \text{ следовательно, } \begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=5,\\ z=4.\end{cases}$$

Эта система в плоскости $\pi: z=4$ задает эллипс $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{80}=1$.

Ответ: сечением HI плоскостью π является эллипс:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{80}=1,\\ z=4.\end{cases}$$

Вариант 1

1. Написать каноническое уравнение и исследовать гиперболу, проходящую через точки $A(1;0)$, $B(\sqrt{5};4)$.

2. Составить уравнение сферы, если центр сферы совпадает с началом координат, а плоскость $16x-15y-12z+75=0$ является касательной к сфере.

3. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ и изобразить ее.

Вариант 2

1. Составить уравнение эллипса, имеющего общие фокусы с гиперболой $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ и проходящего через точку $M(0;3)$.

2. Написать каноническое уравнение эллипсоида, который проходит через точку $N(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$ и пересекает плоскость *YOZ* по эллипсу $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$.

3. Определить вид поверхности $x^2=6z$ и построить ее изображение.

Вариант 3

1. Составить каноническое уравнение эллипса, если прямые $x=\pm\frac{36}{\sqrt{11}}$ служат директрисами эллипса, а расстояние между фокусами $2\sqrt{11}$. Изобразить эллипс на чертеже.

2. Составить уравнение поверхности вращения вокруг оси *OY* кривой $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$, расположенной в плоскости *XOY*.

3. Определить вид поверхности $9y^2-16x^2-144=0$ и изобразить ее.

Вариант 4

1. Написать уравнение гиперболы, асимптоты которой заданы уравнениями $4y+3x=0,\ 4y-3x=0$, а директрисы — уравнениями $5x+16=0$, $5x-16=0$.

2. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, который пересекает плоскость *XOY* по окружности $x^2+y^2=9$, а плоскость *XOZ* — по гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$.

3. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ и изобразить ее.

Вариант 5

1. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса, лежащего на оси *OY*, до вершины равно 3.

2. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность проходит через точку $M(\sqrt{5};3;2)$ и пересекает плоскость *OXZ* по гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$.

3. Определить вид поверхности $x^2+9y^2+18z=0$ и изобразить ее.

Вариант 6

1. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку *M*(–3;7/4), при этом 2*c* = 6.

2. Составить уравнение поверхности вращения параболы $\begin{cases} x^2=-2y, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг оси *OY*. (Система координат — прямоугольная.)

3. Определить вид поверхности $x^2-2y^2+3z^2=0$ и изобразить ее.

Вариант 7

1. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между директрисами равно $4\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Составить уравнение поверхности вращения параболы $\begin{cases} y^2 = 4z, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси OY. (Система координат — прямоугольная.)

3. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 2z$ и изобразить ее.

Вариант 8

1. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координату (0;10).

2. Составить уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$, расположенной в плоскости XOZ, вокруг оси OZ. (Система координат — прямоугольная.)

3. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ и изобразить ее.

Вариант 9

1. Составить каноническое уравнение гиперболы, если $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}}$, а расстояние между директрисами равно 8.

2. Составить уравнение поверхности вращения вокруг оси OY эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенного в плоскости OXY. (Система координат — прямоугольная.)

3. Определить вид поверхности $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ и изобразить ее.

Вариант 10

1. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 12, $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Составить уравнение поверхности вращения вокруг оси *OY* кривой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенной в плоскости *OXY*. (Система координат — прямоугольная.)

3. Определить вид поверхности $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ и изобразить ее.

§ 5. Вопросы для самопроверки

1. Вычислить эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

2. Найти длины полуосей гиперболы $9x^2-4y^2-36=0$.

3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

4. Определить координаты фокуса F параболы $y^2 = 6x$.

5. Составить уравнение параболы, если фокус имеет координаты (0;3).

6. Найти длины полуосей эллипса $4x^2+9y^2-36=0$.

7. Составить каноническое уравнение эллипса, если фокальное расстояние $2c = 10$, а малая полуось $b = 5$.

8. Найти уравнение асимптот гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

9. Составить уравнение директрисы параболы $x^2=3y$.

10. Составить уравнение параболы, если фокус имеет координаты (–3;0).

11. Определить координаты фокуса параболы $x^2=-4y$.

12. Составить уравнение параболы, если директриса имеет уравнение $x^2=8y$.

13. Вычислить эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

14. Составить уравнение директрисы параболы $y^2=-2x$.

15. Определить вид поверхности $2z=x^2$ и изобразить ее.

16. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1=0$ и изобразить ее.

17. Определить вид поверхности $x^2+\frac{y^2}{6}-z^2=1$ и изобразить ее.

18. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и изобразить ее.

19. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и изобразить ее.

20. Определить вид поверхности $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{10}=1$ и изобразить ее.

21. Определить вид поверхности $2x=z^2$ и изобразить ее.

22. Определить вид поверхности $2y=\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{10}$ и изобразить ее.

Вопросы к экзамену

1. Понятие вектора. Простейшие свойства.

2. Сложение, вычитание векторов и их свойства.

3. Умножение вектора на действительное число и его свойства.

4. Линейная зависимость и независимость векторов, связь с коллинеарностью и компланарностью.

5. Базис множества векторов пространства. Координаты вектора в базисе, свойства.

6. Условие коллинеарности векторов в координатной форме.

7. Векторные пространства и подпространства.

8. Ортогональная проекция вектора на ось.

9. Скалярное произведение векторов и его свойства.

10. Выражение скалярного произведения в координатной форме.

11. Векторное произведение векторов и его свойства. Геометрический смысл модуля векторного произведения.

12. Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Геометрический смысл модуля смешанного произведения.

13. Аффинная система координат на плоскости. Координаты точки в аффинной системе координат. Решение простейших задач.

14. Прямоугольная система координат на плоскости, свойства.

15. Алгебраическая линия и ее порядок.

16. Различные способы задания прямой, уравнения прямой.

17. Расположение прямой, заданной общим уравнением, по отношению к аффинной системе координат.

18. Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$.

19. Взаимное расположение прямых на плоскости, заданных общими уравнениями.

20. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя параллельными прямыми.

21. Угол между прямыми и его вычисление.

22. Уравнение прямой, заданной в прямоугольной декартовой системе координат точкой и вектором нормали.

23. Аффинная система координат в пространстве. Решение простейших задач.

24. Понятие об уравнении множества точек в пространстве. Алгебраическая поверхность. Сфера как поверхность второго порядка.

25. Различные способы задания плоскости в пространстве, уравнения плоскости.

26. Общее уравнение плоскости.

27. Расположение плоскости относительно аффинной системы координат.

28. Взаимное расположение двух и трех плоскостей в пространстве.

29. Геометрический смысл знака четырехчлена.

30. Метрическая теория плоскости в пространстве. Задание плоскости начальной точкой и нормальным вектором. Угол между плоскостями.

31. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями.

32. Различные способы задания прямой в пространстве.

33. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

34. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

35. Угол между двумя прямыми в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.

36. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

37. Определение, каноническое уравнение и свойства эллипса.

38. Определение, каноническое уравнение и свойства гиперболы.

39. Определение, каноническое уравнение и свойства параболы.

40. Директориальные свойства эллипса, гиперболы, параболы.

41. Классификация кривых второго порядка.

42. Цилиндрические поверхности.

43. Поверхности вращения.

44. Конические поверхности.

45. Конус второго порядка. Метод сечений.

46. Эллипсоид.

47. Гиперболоиды.

48. Параболоиды.

49. Прямолинейные образующие.

50. Классификация поверхностей второго порядка.

Список рекомендуемой литературы

1. Атанасян, Л. С. Геометрия. Ч. 1 / Л. С. Атанасян. М. : Просвещение, 1973.

2. Атанасян, Л. С. Геометрия. Ч. 1 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. М. : Просвещение, 1986.

3. Базылев, В. Т. Геометрия. Ч. 1 / В. Т. Базылев [и др.]. М. : Просвещение, 1974.

4. Болодурин, В. С. Краткий курс лекций по геометрии. Ч. 1 / В. С. Болодурин. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2009.

5. Прояева, И. В. Геометрия. Ч. 1 / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2013.

6. Прояева, И. В. Геометрия. Ч. 2 / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2013.

7. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии. Ч. 1 / Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян. М. : Просвещение, 1973.

8. Базылев, В. Т. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев [и др.]. М. : Просвещение, 1980.

9. Болодурин, В. С. Практикум по аналитической геометрии / В. С. Болодурин, А. Д. Сафарова. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2013.

Учебное издание

Болодурин Виктор Сергеевич
Прояева Ирина Владимировна
Сафарова Алия Дамировна

Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Элементы аналитической геометрии»

Учебное пособие для студентов
физико-математических факультетов

Редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано в печать 22.08.2016 г.
Усл. печ. л. 5,43
Тираж 100 экз.
Заказ 44

ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет». 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19