МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. С. Болодурин

# ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов физико-математических факультетов педагогических вузов и учащихся старших классов средней школы

Оренбург
Издательство ОГПУ
2016

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73
Б79

**Рецензенты**

***А. Д. Сафарова***, кандидат педагогических наук, доцент
***Г. М. Гузаиров***, кандидат физико-математических наук, доцент

**Болодурин В. С.**

Б79 **Изображение плоских и пространственных фигур на плоскости** : учеб.-метод. пособие для учителей математики, студентов физико-математических факультетов педагогических вузов и учащихся старших классов средней школы / В. С. Болодурин ; Мин-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2016. — 48 с. : ил.
ISBN 978-5-85859-644-8.

Пособие предназначено для организации проведения занятий со студентами физико-математических факультетов педагогических вузов, учителями на курсах повышения квалификации, учениками старших классов средней школы. Оно содержит теоретические основы изображения плоских и пространственных фигур, примеры и рекомендации по практическому построению изображений фигур. Навыки в изображениях геометрических фигур, построениях на изображениях, проведении сечений фигур плоскостями необходимы для выработки компетенции решения геометрических задач и, в частности, полезны для успешной сдачи ЕГЭ.

УДК 514(075.8)
ББК 21.151я73

**ISBN 978-5-85859-644-8**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## § 1. Параллельное проектирование, основные свойства

Пусть π — некоторая плоскость и $\ell$ — прямая, причем $\ell$ не параллельна плоскости π (рис. 1).

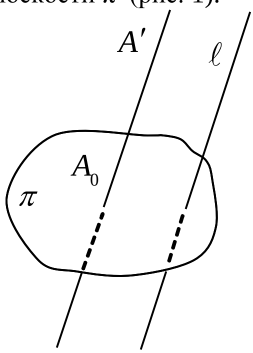



Рис. 1

*Точке пространства A′ поставим в соответствие точку плоскости $A_0$, такую, что прямая $A'A_0$ параллельна $\ell$. Тем самым определится отображение пространства на плоскость π, которое называется параллельным проектированием.* Точка $A_0$ — параллельная проекция точки-оригинала $A'$ на плоскость проекций π. Прямые, параллельные $\ell$, называются проектирующими прямыми.

Если Φ′ — некоторая фигура, то, проектируя каждую точку фигуры Φ′ на плоскость π, получим параллельную проекцию $\Phi_0$.

При параллельном проектировании справедливы свойства:

*а) точки переходят в точки;*

*б) прямые, не параллельные направлению проектирования, переходят в прямые. Прямые, параллельные направлению проектирования, переходят в точки;*

*в) сохраняется принадлежность точек и прямых;*

*г) отрезки, не параллельные направлению проектирования, переходят в отрезки. Отрезки, параллельные направлению проектирования, переходят в точки;*

*д) две параллельные прямые проектируются либо в две параллельные прямые, либо в одну прямую, либо в две точки;*

*ж) два параллельных отрезка проектируются либо в два параллельных отрезка, либо в два отрезка, лежащих на одной прямой, либо в две точки;*

*з) сохраняется простое отношение трех точек прямой линии;*

*е) сохраняется отношение параллельных отрезков.*

Коэффициентом искажения отрезка $A'B'$ при проектировании называют величину $k = \dfrac{A_0B_0}{A'B'}$. Коэффициент искажения одинаков для параллельных отрезков. При изменении направления отрезков коэффициент искажения меняется. Различают:

а) *ортогональное проектирование*, для него $\ell \perp \pi$. В этом случае $0 \le k \le 1$.

б) *косоугольное проектирование*, для него $\ell$ не перпендикулярна плоскости $\pi$. Коэффициент искажения при косоугольном проектировании может принимать любые неотрицательные значения.

*Под изображением фигуры-оригинала* $\Phi'$ *понимают любую фигуру, подобную параллельной проекции фигуры* $\Phi_0$ *на некоторую плоскость*. Возможен широкий произвол при построении изображений фигуры. Он определяется выбором плоскости проекций, направлением проектирования, положением фигуры-оригинала по отношению к плоскости проекций, выбором коэффициента подобия.

Каждой фигуре пространства отвечает множество ее изображений. От изображений фигуры, используемых в педагогической деятельности, требуют выполнения трех условий:

*1) изображение должно быть верным, т.е. быть подобным одной из параллельных проекций фигуры;*

*2) изображение должно быть наглядным, т.е. давать достаточно полное представление о фигуре-оригинале;*

*3) изображение должно быть просто выполнимым, т. е. не требовать для своего построения сложных расчетов и особых инструментов.*

**Задачи**

1. Даны три различные точки. Сколько точек может получиться на плоскости проекций при проектировании данных точек?

2. Какой фигурой является проекция проектирующей прямой?

3. Какой фигурой может быть проекция: а) плоскости, б) полуплоскости, в) угла, отличного от развернутого?

4. В каком случае: а) проекция точки совпадает с этой точкой, б) проекция прямой совпадает с этой прямой?

5. В каком случае неверно утверждение: «проекции параллельных параллельны»?

6. Известно, что отрезок и его проекция имеют равные длины. Как расположен данный отрезок по отношению к плоскости проекций?

7. Какие фигуры можно получить, проектируя на плоскость: а) объединение двух пересекающихся прямых, б) объединение двух скрещивающихся прямых?

8. Если проекции двух прямых параллельны, то верно ли утверждение, что параллельны и проектируемые прямые?

9. Даны две скрещивающиеся прямые $a$, $b$ и плоскость проекций $\alpha$. Проведите прямую $\ell$ так, чтобы при проектировании параллельно $\ell$ проекции прямых $a$ и $b$ были параллельны.

10. Из одной точки выходят три луча, не лежащие в одной плоскости. Какой фигурой может быть проекция объединения этих лучей?

11. Отрезок $AB$ пересекает плоскость проекций в точке $M$. Его проекцией служит отрезок $A_1B_1$. Известно, что $AB = m$, $A_1M : MB_1 = p : q$. Найдите $AM$ и $MB$.

12. Даны три прямые, имеющие только одну общую точку. Укажите все возможные случаи взаимного расположения их проекций на плоскость.

13. Верны ли высказывания: а) проекции двух равных отрезков на данную плоскость равны; б) если проекции прямых пересекаются, то и сами прямые пересекаются; в) если отрезки лежат на одной прямой, то и их проекции на данную плоскость лежат на одной прямой?

14. Дана параллельная проекция треугольника. Постройте проекции медиан этого треугольника.

15. Может ли трапеция быть параллельной проекцией параллелограмма? Ответ объясните.

16. Может ли квадрат быть проекцией параллелограмма при параллельном проектировании?

## § 2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции

Практическое построение изображений плоских фигур основывается на следующих двух теоремах:

**Теорема I.** *Изображением треугольника является любой другой треугольник.*

***Следствие 1***. *Изображением параллелограмма является любой другой параллелограмм.*

Ромбы, прямоугольники, квадраты являются частными случаями параллелограммов, их изображениями будут любые параллелограммы.

***Следствие 2***. *Изображением трапеции является любая другая трапеция с тем же отношением параллельных оснований, что и у оригинала.*

**Теорема 2.** *Если треугольник ABC плоскости* $\pi$ *есть изображение данного треугольника* $A'B'C'$ *плоскости* $\pi'$, *то каждая точка плоскости* $\pi$ *есть изображение определенной точки плоскости* $\pi'$.

***Следствие 3.*** *Изображением четырехугольника будет четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся в том же отношении, что и у данного.*

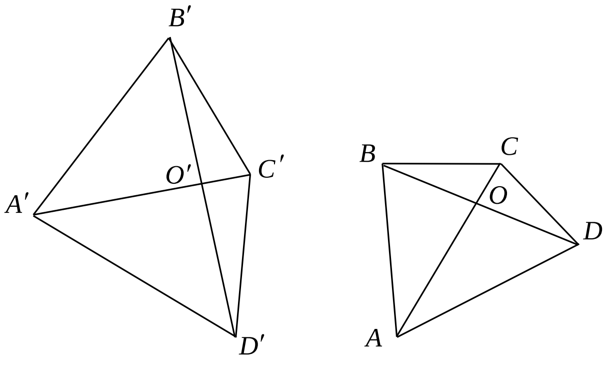



Рис. 2.1

Примем треугольник $ABC$ за изображение треугольника $A'B'C'$ (рис. 2.1). Тогда если точка $D$ — изображение точки $D'$, то $BO:OD = B'O':O'D'$, $AO:OC = A'O':O'C'$. Отсюда вытекает следствие.

***Замечание:*** принято отношение длин отрезков $BO:OD$ называть простым отношением трех точек прямой $BD$ и обозначать $(BDO)$.

При построении изображения произвольного многоугольника удобно выделить в оригинале некоторый треугольник (или параллелограмм). В качестве его изображения можно выбрать любой треугольник (параллелограмм). Произвол построения на этом заканчивается. Изображения остальных элементов многоугольника согласно второй теореме строятся на основе свойств параллельного проектирования и подобия.

**Теорема 3**. *Изображением окружности является эллипс любой заданной формы.*

Взаимно перпендикулярные диаметры окружности делят соответственно параллельные им хорды пополам. В эллипсе таким свойством обладают сопряженные диаметры. Следовательно, *взаимно перпендикулярным диаметрам окружности в изображении отвечают взаимно сопряженные диаметры эллипса.*

При решении многих задач мы встречаемся с необходимостью построения касательных прямых к эллипсу. Пусть дан эллипс и требуется через точку $A$, лежащую на нем, провести касательную (рис. 2.2).

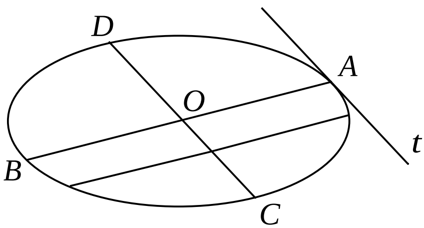



Рис. 2.2

Для этого строим диаметр $AB$ и сопряженный с ним диаметр $CD$. Через точку $A$ проведем прямую $t$, параллельную $CD$. Это будет искомая касательная.

**Задачи**

1. Какой четырехугольник может служить изображением: а) равнобедренной трапеции, б) прямоугольника, в) данного четырехугольника.

2. Треугольник $ABC$ является параллельной проекцией треугольника $A'B'C'$. В треугольнике $A'B'C'$ проведены биссектриса, медиана, высота. Будут ли проекции этих отрезков являться биссектрисой, медианой, высотой треугольника $ABC$?

3. Дано изображение равнобедренного треугольника в виде разностороннего треугольника. На этом изображении постройте: а) изображение биссектрисы угла при вершине, б) изображение перпендикуляра к основанию, проведенного через середину боковой стороны.

4. Может ли: а) изображением заданного четырехугольника служить произвольный четырехугольник, б) изображением трапеции служить параллелограмм, в) изображением ромба служить квадрат?

5. Какие из свойств ромба останутся верными для изображения этого ромба? Какие могут не сохраниться?

6. Какие свойства прямоугольника останутся верными для его проекции?

7. Какие свойства сторон и диагоналей трапеции сохраняются при ее изображении?

8. Данный эллипс есть изображение окружности. Центр этого эллипса на чертеже не указан. Постройте изображение центра окружности.

9. Дано изображение окружности и ее хорды. Постройте изображение касательной к окружности, параллельной этой хорде.

10. Дано изображение окружности и точки на окружности. Постройте изображение касательной к окружности в этой точке.

## § 3. Метрически определенные изображения плоских фигур

**Определение.** *Изображение фигуры называется метрически определенным, если по нему можно восстановить форму фигуры-оригинала с точностью до подобия.*

Изображения окружности, правильного многоугольника, прямоугольного треугольника с заданным отношением катетов на плоскости — примеры метрически определенных изображений.

Изображения произвольного многоугольника, равнобедренного треугольника, параллелограмма на плоскости — примеры изображений, не являющихся метрически определенными. Изображения второго вида можно сделать метрически определенными, если на оригиналы наложить условия, задающие форму.

Из второй теоремы § 2 следует, что для восстановления истинной формы фигур на плоскости достаточно знать форму оригинала изображения одного треугольника плоскости-оригинала. Произвол построения метрически определенного изображения всей плоскости тем самым равен произволу построения определенного изображения одного треугольника. Форма треугольника задается двумя параметрами. Поэтому метрический произвол плоскости равен двум параметрам.

При решении практических задач метрический произвол плоскости может быть использован различными способами. Например, если в условии сказано, что заданный треугольник *ABC* есть изображение равностороннего треугольника, то форма треугольника задана и произвол исчерпан. Можно потребовать, например, чтобы данный параллелограмм был изображением квадрата. Можно на изображении треугольника указать изображения биссектрис или высот треугольника, задать величины углов треугольника, указать положение изображений ортоцентра, центров вписанной или описанной окружности треугольника и т.д.

Изображения центра вписанной или описанной окружности, ортоцентра и других замечательных точек не могут выбираться на плоскости абсолютно произвольно. Существуют так называемые зоны расположения изображений этих точек. Например, изображение центра вписанной окружности может быть только внутри срединного заштрихованного треугольника (рис. 3.1).

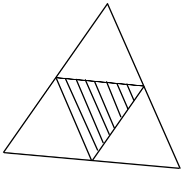


Рис. 3.1

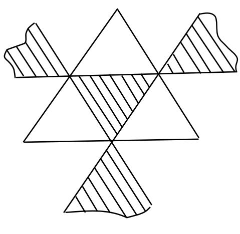


Рис. 3.2

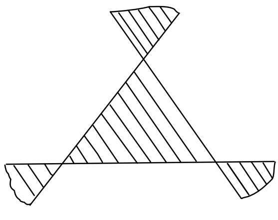


Рис. 3.3

Зона центра описанной окружности отмечена на рисунке 3.2. Область расположения изображений точек пересечения прямых, содержавших высоты треугольника, отмечена на рисунке 3.3.

**Примеры**

**Задача 1.** *Построить изображение правильного восьмиугольника.*

Форма фигуры-оригинала задана, поэтому задача носит метрический характер. Для ее решения рассмотрим восьмиугольник-оригинал. Выделим квадрат $B'D'F'H'$.

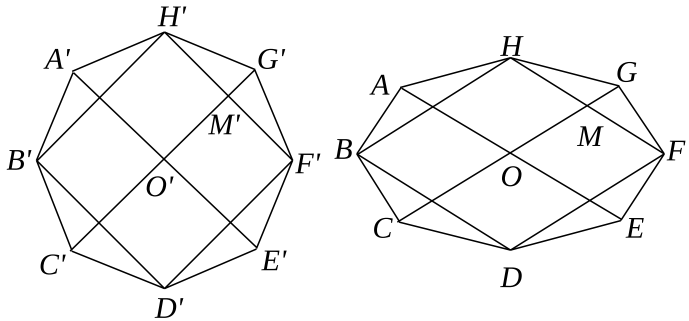



Рис. 3.4

В качестве его изображения возьмем произвольный параллелограмм *BDFH*. Изображением прямой $C'G'$ будет прямая *CG*, проходящая через середины сторон *BD* и *HF*. Аналогично прямая *AE* будет изображением прямой $A'E'$. Точке $O'$ будет соответствовать точка *O*.

Построим точку *G* так, чтобы $(OGM)=(O'G'M')$. Точку *C* выберем симметрично точке *G* относительно точки *O*. Подобно построим точки *A* и *E*. Восьмиугольник *ABCDEFGH* будет искомым изображением.

Кроме задач на построение метрически определенных изображений существуют задачи, связанные с построениями на метрически определенных изображениях. Рассмотрим пример такой задачи.

**Задача 2.** *Построить изображение равностороннего треугольника, описанного около изображения данной окружности.*

Изображением окружности является эллипс (рис. 3.5).

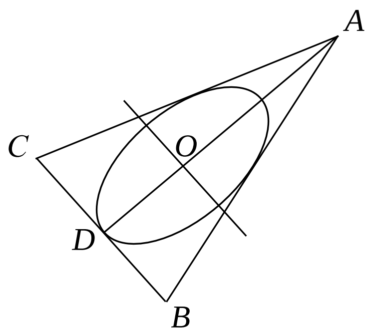



Рис. 3.5

Строим*:*

1. Два сопряженных диаметра.

2. Прямую, касательную к эллипсу и параллельную одному диаметру.

3. Точку $A$, где $AO = 2OD$.

4. Касательные к эллипсу из точки $A$.

5. Точки $B$ и $C$.

Оригинал изображения будет равносторонним треугольником.

При решении метрических задач применяются следующие способы:

1) использование метрики оригинала;

2) метод восстановления формы оригинала;

3) алгебраический метод.

Выясним особенности названных способов на конкретных задачах.

**Задача 3.** *Параллелограмм ABCD служит изображением квадрата A'B'C'D'. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки M' (M' принадлежит отрезку D'C') к прямой B'E', где E' — середина отрезка A'D'.*

**1 способ**. Используем свойства оригинала: если $F'$ — середина отрезка $A'B'$ (рис. 3.6), то отрезки $B'E'$ и $C'F'$ взаимно перпендикулярны и, следовательно, $M'K' \parallel C'F'$. Из свойства следует построение. На изображении квадрата строим изображение точки $F'$ — точку $F$, которая будет серединой отрезка $AB$. Проводим отрезок $MK$, параллельный $FC$.

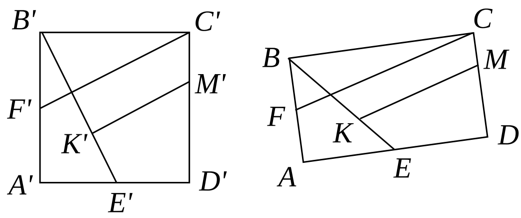



Рис. 3.6

**2 способ**. Решение задачи основывается на восстановлении формы оригинала.

Строим на стороне $AD$ квадрат $AB_0C_0D$, который подобен оригиналу, и задаем параллельное проектирование по направлению $CC_0$ (рис. 3.7).

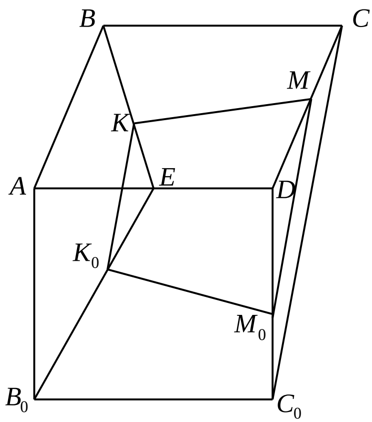



Рис. 3.7

Из точки $M_0$ проводим перпендикуляр $M_0K_0$ к отрезку $B_0E$, затем строим отрезок $K_0K$, параллельный $CC_0$. Отрезок $MK$ — искомое изображение.

Действительно, из подобия квадратов $A'B'C'D'$ и $AB_0C_0D$ и проведенных построений следует, что

$(CMD) = (C'M'D') = (C_0M_0D)$ и

$(BKE) = (B_0K_0E) = (B'K'E')$.

**Задача 4.** *Треугольник $ABC$ является изображением прямоугольного треугольника $A'B'C'$, у которого* $\angle C' = 90°$,

$A'C' : B'C' = 3 : 4$. *Построить изображение биссектрисы, проведенной из вершины $A'$.*

Решим эту задачу алгебраическим методом. Воспользуемся свойством биссектрисы угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Отсюда (рис. 3.8) $C'D' : D'B' = A'C' : A'B' = 3 : 5$.

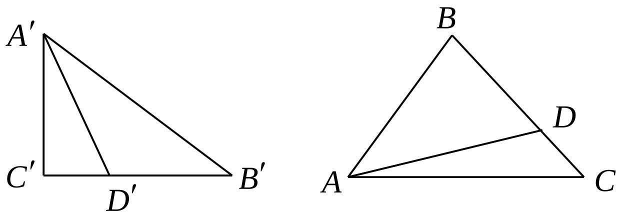



Рис. 3.8

Тогда $C'D' : D'B' = 3 : 5$. Таким образом, задача сводится к построению точки $D$ на отрезке $BC$, удовлетворяющей условию $CD : DB = 3 : 5$.

**Задача 5.** *Дано изображение равностороннего треугольника $A'B'C'$, а также прямой $M'N'$ и точки $P'$ в плоскости треугольника. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки $P'$ на прямую $M'N'$.*

Форма треугольника задана, поэтому изображение плоскости метрически определено. Метрические операции на плоскости не могут выполняться произвольно.

В треугольнике $ABC$ построим медианы $CC_1$ и $BB_1$. Так как исходный треугольник равносторонний, то эти медианы будут изображениями высот треугольника оригинала. Проведем через точку $P$ (рис. 3.9) прямые, параллельные сторонам треугольника $AC$ и $AB$.

Тогда на прямой $MN$ определятся точки $R$ и $Q$. Через эти точки $R$ и $Q$ проведем прямые, параллельные прямым $CC_1$ и $BB_1$. Так как прямые $AB$ и $CC_1$ изображают прямые $A'B'$ и $C'C'_1$, перпендикулярные в оригинале, то прямые $PQ$ и $RR_1$ являются изображениями перпендикулярных прямых. Аналогично прямые $PR$ и $QQ_1$ также изображают перпендикулярные прямые. Тогда точка $O_1$ становится изображением ортоцентра треугольника $Q'R'P'$. Поэтому прямая $PT$ будет изображением прямой, перпендикулярной прямой $M'N'$.

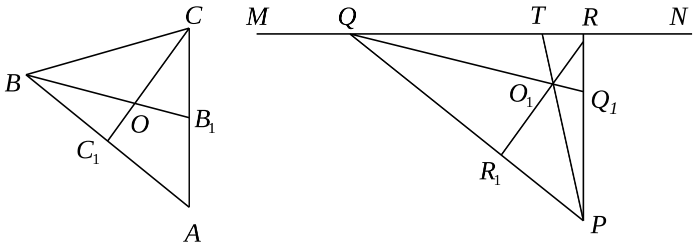



Рис. 3.9

**Задачи**

1. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанного около треугольника-оригинала.

2. Треугольник *ABC* служит изображением треугольника *A'B'C'*, у которого $A_1M : MB_1 = p : q$. Постройте изображение биссектрисы угла.

3. Даны изображения правильных треугольника, четырехугольника, шестиугольника. Постройте изображение центра правильного многоугольника.

4. Постройте изображение правильного пятиугольника, восьмиугольника.

5. На изображении равнобедренного прямоугольного треугольника постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата служит: а) катет данного треугольника, б) его гипотенуза.

6. На изображении правильного шестиугольника постройте изображение: а) апофемы шестиугольника, б) биссектрисы одного из внешних углов, в) перпендикуляра, проведенного через центр к одной из меньших диагоналей.

7. Постройте на изображении ромба изображение его высоты, если угол ромба равен 45°.

8. Треугольник *ABC* — изображение равностороннего треугольника *A'B'C'*. Постройте изображение прямых, перпендикулярных сторонам треугольника *A'B'C'* и проведенных через точку *R*, взятую а) на одной из сторон треугольника *A'B'C'*, б) внутри треугольника *A'B'C'*.

9. Постройте изображение равнобедренной трапеции и ее высот, проведенных из вершин ее тупых углов.

10. Постройте изображение равнобедренной трапеции, диагонали которой точкой пересечения делятся в отношении 1 : 2.

11. Дано изображение окружности. Постройте изображение: а) диаметра, перпендикулярного данной хорде $A'C'$, б) биссектрисы центрального угла $C'O'D'$, в) радиуса, перпендикулярного данному радиусу $O'M'$.

12. Дано изображение окружности и вписанного в нее треугольника $A'B'C'$. Постройте изображение высоты, медианы треугольника $A'B'C'$, проведенных из вершины $A'$.

13. Даны изображения окружности $\omega'$, прямой $a'$, точки $A'$, лежащих в одной плоскости. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки $A'$ на прямую $a'$.

14. Данный эллипс есть изображение окружности. Постройте изображения квадратов, вписанного и описанного около окружности.

15. Данный эллипс есть изображение окружности. Постройте изображения правильных треугольников, вписанного и описанного около окружности.

16. Постройте изображения вписанных в окружность: а) прямоугольного треугольника, б) прямоугольника, в) равнобедренной трапеции, г) равнобедренного треугольника.

17. Постройте изображения описанных около окружности: а) прямоугольного треугольника, б) равнобедренной трапеции, в) равнобедренного треугольника, г) ромба.

18. Дано изображение треугольника, описанного около окружности. Постройте изображения его медиан, высот, биссектрис.

19. Дано изображение окружности и треугольника, вписанного в эту окружность. Постройте изображения высот треугольника.

## § 4. Изображение пространственных фигур в параллельной проекции

Построение изображений пространственных фигур в параллельной проекции основывается на теореме ***Польке — Шварца:*** *Всякий плоский четырехугольник вместе со своими диагоналями является изображением тетраэдра любой произвольной формы.*

Следствием теоремы Польке — Шварца является ***теорема Польке***: *Любые три отрезка плоскости, исходящие из одной точки, являются изображением любых трех отрезков пространства, имеющих общее начало.*

В частности, такими отрезками могут быть три равных и взаимно перпендикулярных отрезка.

Действительно, если соединить концы отрезков на плоскости, то получится четырехугольник вместе со своими диагоналями. Если соединить концы отрезков в пространстве, то получится тетраэдр. Полученный четырехугольник согласно теореме будет изображением построенного тетраэдра.

**Теорема 2.** *Если четырехугольник $ABCD$ плоскости $\alpha$ вместе с его диагоналями является изображением данного тетраэдра $A'B'C'D'$, то каждая точка $M$ плоскости $\alpha$ является изображением определенной точки $M'$ пространства.*

### 1. Построение изображений призм и пирамид

Рассмотрим произвольную $n$-угольную призму. В основании призмы лежит $n$-угольник. Построение изображения призмы начнем с построения изображения $n$-угольника. В качестве изображения одного бокового ребра согласно теореме Польке можно выбрать произвольный отрезок, исходящий из вершины основания. Тогда изображениями других ребер будут отрезки, равные и параллельные выбранному отрезку. Дальнейшее построение проводится в соответствии с законами параллельного проектирования (рис. 4.1).

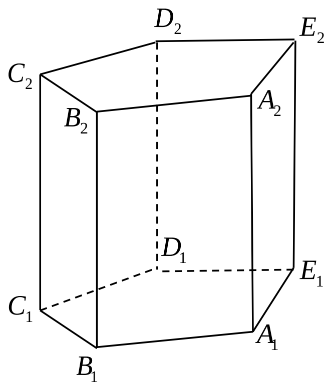



Рис. 4.1

Изображение $n$-угольной призмы будет состоять из двух $n$-угольников с параллельными сторонами, изображающих основания, и $n$ параллелограммов, изображающих боковые грани.

Построение изображения пирамиды начинаем с изображения $n$-угольника, лежащего в основании (рис. 4.2).

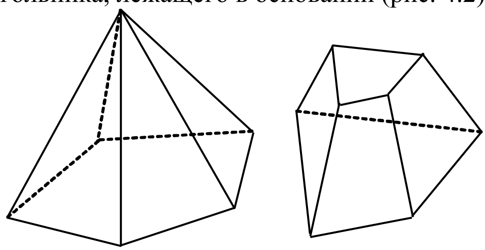


Рис. 4.2

В качестве изображения вершины согласно теореме Польке можно выбрать произвольную точку плоскости. Изображение пирамиды будет состоять из $n$-угольника, изображающего основание, и $n$ треугольников, изображающих грани.

При построении изображения усеченной пирамиды необходимо помнить, что боковые ребра должны изображаться отрезками, лежащими на прямых, проходящих через одну точку. Удобно при построении изображения усеченной пирамиды начать с построения изображения полной пирамиды, а затем получить изображение второго основания как сечения полной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания.

### 2. Построение изображений круглых тел

Для построения изображения цилиндра строим произвольный эллипс. Эллипс дает изображение окружности, являющейся границей круга, лежащего в основании цилиндра. Отложим от центра эллипса в произвольном направлении отрезок (рис. 4.3). Второй конец этого отрезка примем за центр нового эллипса, равного предыдущему и имеющего одинаковые направления осей с первым эллипсом. Проведем затем два параллельных отрезка, касательных к построенным эллипсам.

Для большей наглядности центр второго эллипса обычно располагают на продолжении малой оси исходного эллипса. В этом случае крайние боковые образующие цилиндра соединяют концы больших осей эллипсов оснований.

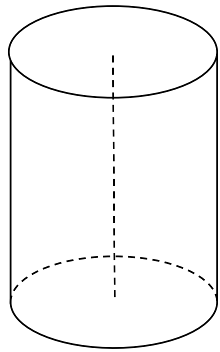


Рис. 4.3

При построении изображения прямого кругового конуса окружность, являющаяся границей его основания, изображается в виде эллипса. Изображение вершины конуса обычно выбирается на продолжении малой оси эллипса основания. Затем из этой точки проводятся касательные к эллипсу (рис. 4.4).

Дополнительно на рисунке построено осевое сечение конуса. Заметим, что треугольник *SAB* не может быть осевым сечением конуса, поскольку отрезок *AB* не является диаметром эллипса.

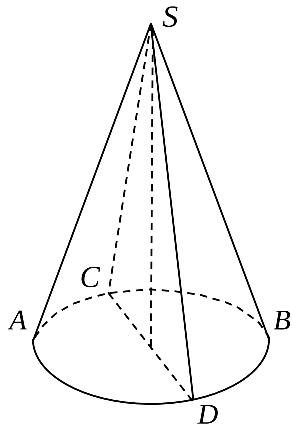



Рис. 4.4

Параллельной проекцией шара на плоскость в общем случае является эллипс. Однако такое изображение шара не наглядно. На практике принято для изображения шара использовать ортогональное проектирование. Изображением шара в этом случае будет круг (рис. 4.5).

Для того чтобы изображение шара было более наглядно, изображают дополнительно некоторую окружность большого круга — экватор, а также точки пересечения $N$, $S$ диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора — оси шара, с поверхностью шара. Эти точки называют полюсами шара. Вычисления показывают, что полюсы располагаются на изображении так, что $ON = ML$ , $OS = ON$ , при этом отрезок $ML$ лежит на касательной к экватору в точке $M$ (рис. 4.5).

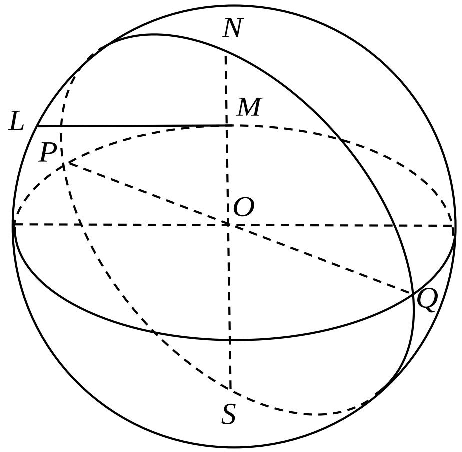
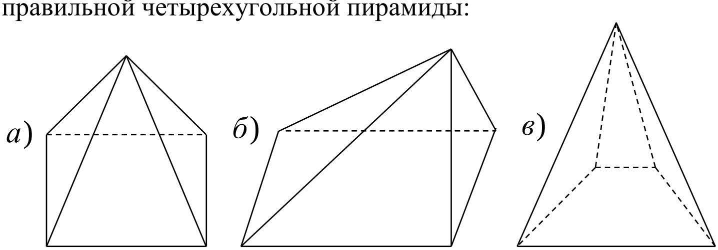



Рис. 4.5

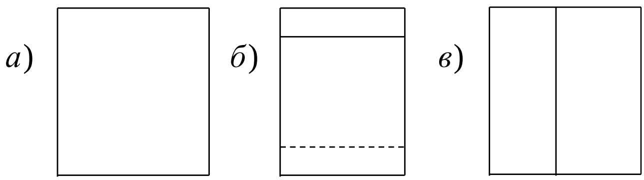
Сечения поверхности шара плоскостями, перпендикулярными оси шара, называют параллелями. Сечения поверхности шара плоскостями, проходящими через ось шара, называют меридианами. Произвольный диаметр $PQ$ экватора и ось $NS$ шара определяют в оригинале плоскость меридиана. Изображается этот меридиан в виде эллипса, для которого диаметры $PQ$ и $NS$ являются сопряженными диаметрами.

**Задачи**

1. Могут ли данные изображения служить изображением правильной четырехугольной пирамиды:




2. Могут ли служить изображением прямоугольного параллелепипеда следующие фигуры:




3. Изображением какой пространственной фигуры может служить круг?

4. Постройте изображение правильной пятиугольной призмы, правильной восьмиугольной пирамиды.

5. Постройте изображения двух взаимно перпендикулярных осевых сечений:

а) цилиндра,

б) конуса.

## § 5. Метрически определенные изображения в пространстве

Произвол построения метрически определенного изображения пространства равен произволу изображения тетраэдра определенной формы. Форма тетраэдра задается пятью параметрами. Поэтому метрический произвол пространства равен 5. Изображения куба, шара, правильных многогранников, прямого кругового конуса с заданным отношением высоты и радиуса основания — это примеры метрически определенных изображений. Все построения на метрически определенных изображениях пространственных фигур строго фиксированы и не могут выполняться произвольно.

При решении метрических задач в пространстве используются упомянутые ранее способы использования метрики и формы оригинала, алгебраический метод.

Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 1.** *Дано изображение правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$, у которой боковое ребро равно стороне треугольника, лежащего в основании. Из точки $A$ опустить перпендикуляр на плоскость $A'BC$.*

Замечаем из соображений симметрии, что искомый перпендикуляр должен лежать в плоскости $ADD'A'$ и быть перпендикуляром к прямой $A'D$. Построим равносторонний треугольник $AA'P$, затем треугольник $D_1AA'$, имеющий истинную форму треугольника $DAA'$.

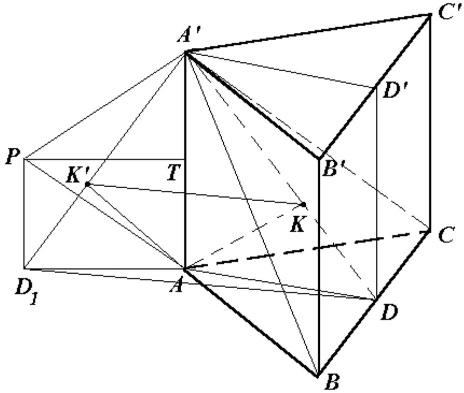



Рис. 5.1

В треугольнике $D_1AA'$ проведем перпендикуляр $AK'$. Разделим далее отрезок $A'D$ точкой $K$ пропорционально тому, как точка $K'$ разделила отрезок $A'D_1$. Тогда отрезок $AK$ будет изображением искомого перпендикуляра.

**Задача 2.** *В правильной треугольной пирамиде, высота которой вдвое больше стороны основания, провести сечение через сторону основания перпендикулярно к противоположному ребру.*

Пусть через ребро $BC = a$ (рис. 5.2) надо провести плоскость, перпендикулярную ребру $AS$.

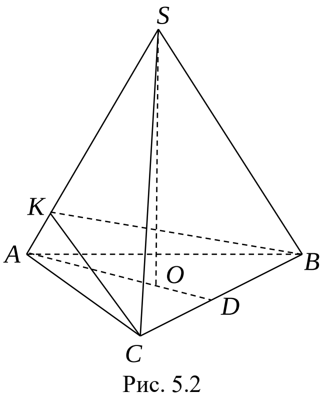



Рис. 5.2

Заметим, что в правильной пирамиде ребро $AS \perp BC$. Поэтому для решения задачи достаточно в треугольнике *ASD* провести высоту *DK*.

Проведем предварительно расчеты. Рассмотрим треугольник *ASD*, в нем $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AS = \frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Заметим, что треугольники *AKD* и *AOS* — подобны (они прямоугольные и имеют общий угол $\angle SAD$). Из подобия треугольников следует пропорция $\frac{AK}{AO} = \frac{AD}{AS}$. Отсюда получаем

$$AK = \frac{AO \cdot AD}{AS} \text{ и } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Продолжая вычисления, находим

$$\frac{AK}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{13}} = \frac{3}{26}.$$

Построим точку *K* на отрезке *AS*, удовлетворяющую соотношению $\frac{AK}{AS} = \frac{3}{26}$. Сечение *CKB* — искомое.

**Задача 3.** *Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На грани ABCD выбрана точка K (рис. 5.3). Построить сечение куба плоскостью, проходящей через эту точку и перпендикулярной диагонали $A_1C$.*

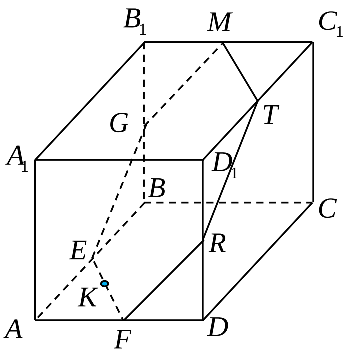



Рис. 5.3

Решим эту задачу, используя свойства оригинала. По теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $A_1C \perp BD$

(действительно, $AC$ — проекция $A_1C$, но $AC \perp BD$, как диагонали квадрата), $A_1C \perp AB_1$, $A_1C \perp AD_1$. Отсюда следует построение.

Строим:

1) прямую, проходящую через точку $K$, параллельно $BD$ до пересечения с ребрами $AB$ и $AD$ в точках $E$ и $F$ соответственно;

2) $EG \parallel AB_1$; 3) $FR \parallel AD_1$;

4) $RT \parallel DC_1$; 5) $GM \parallel BC_1$.

$EGMTRP$ — искомое сечение.

## § 6. Изображение комбинаций тел

В процессе решения пространственных задач часто возникает потребность в использовании изображений комбинаций тел. Рассмотрим примеры построения изображений наиболее часто встречающихся таких комбинаций. Для большей наглядности будем использовать предположение, что тело является прозрачным по отношению к вписанному в него телу и непрозрачным по отношению к себе.

**Задача 1**. *Построить изображение n-угольной призмы, вписанной в цилиндр.*

Строим изображение цилиндра (рис. 6.1).

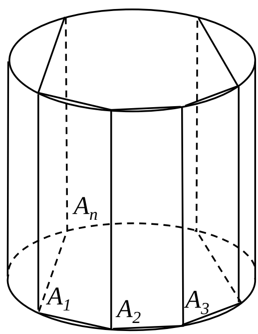



Рис. 6.1

Так как в основании призмы лежит произвольный $n$-угольник, то его изображение строим в виде произвольного

$n$-угольника, вершины которого $A_1, A_2, ..., A_n$ принадлежат эллипсу, лежащему в основании цилиндра. Через точки $A_1, A_2, ..., A_n$ проводим прямые, параллельные образующим цилиндра до пересечения с эллипсом, изображающим верхнее основание цилиндра. Далее ясно, как закончить построение.

**Задача 2.** *Построить изображение правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр.*

Решение этой задачи отличается от предыдущей тем, что в основании призмы лежит правильный $n$-угольник. Его изображение нельзя брать в виде произвольного $n$-угольника, а нужно построить, учитывая форму оригинала. На рисунке 6.2 изображена правильная четырехугольная призма, вписанная в цилиндр.

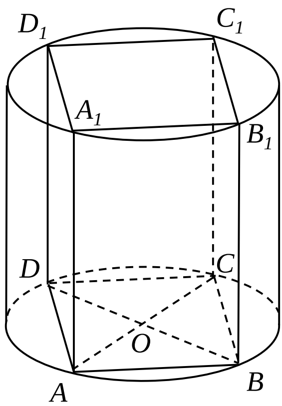



Рис. 6.2

Диаметры эллипса $AC$ и $BD$ в этом случае сопряжены относительно эллипса основания цилиндра.

**Задача 3.** *Построить изображение n-угольной призмы, описанной около цилиндра.*

Решение начинаем с построения изображения цилиндра. Затем строим изображение $n$-угольника, лежащего в основании призмы, учитывая, что он описан около основания цилиндра. Далее достраиваем изображение призмы по известным правилам. На рисунке 6.3 изображена правильная треугольная призма, описанная около цилиндра.

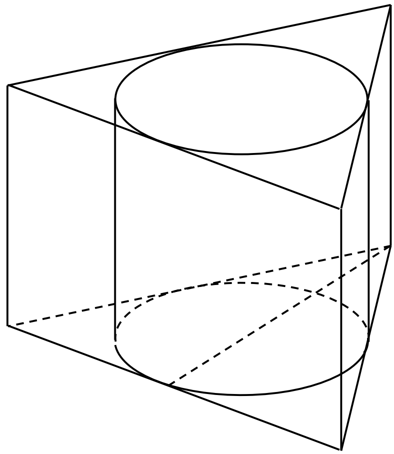


Рис. 6.3

**Задача 4.** *Построить изображение* n*-угольной пирамиды, описанной (вписанной в) около конуса.*

Изображаем конус, затем $n$-угольник, описанный (вписанный) около основания конуса. Изображение вершины пирамиды совпадает с изображением вершины конуса. Дальнейшее построение очевидно. Ниже приведены изображения правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус (рис. 6.4) и правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса (рис. 6.5).

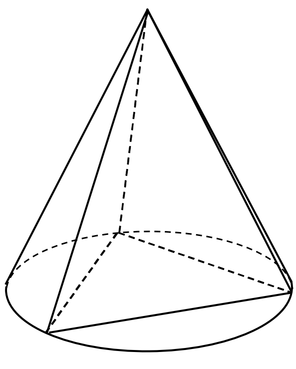


Рис. 6.4

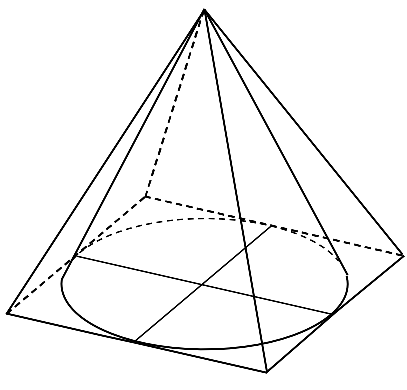


Рис. 6.5

**Задача 5.** *Построить изображение октаэдра, вписанного в куб.*

Строим изображение куба. Так как центры граней куба являются вершинами октаэдра, то, попарно соединяя их, получим изображение октаэдра, вписанного в куб (рис. 6.6).

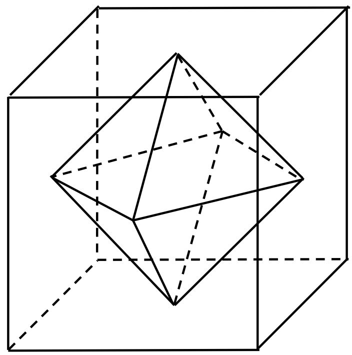


Рис. 6.6

**Задача 6**. *Построить изображение цилиндра и описанного около него конуса.*

Изображаем конус (рис. 6.7). Верхнее основание цилиндра касается поверхности конуса по окружности, плоскость которой параллельна плоскости оснований конуса и цилиндра.

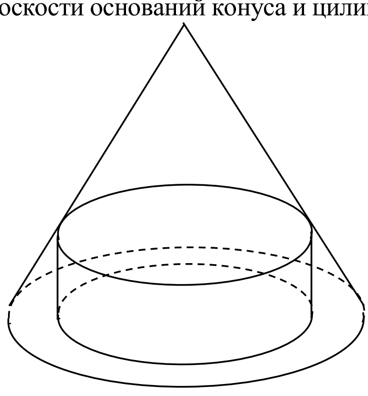


Рис. 6.7

Строим изображение этой окружности в виде эллипса, подобного эллипсу, лежащему в основании конуса. Затем завершаем изображение цилиндра.

При построении изображений тел, вписанных в шар или описанных около шара, лучше начинать с построения изображения шара, если, конечно, условие задачи не требует другого порядка построения. При этом надо помнить, что изображение шара обычно берется в ортогональной проекции. Следовательно, изображения тел, вписанных или описанных около шара, также должны строиться в ортогональной проекции.

**Задача 7**. *Изобразить конус, пирамиду, вписанные в шар.*

На изображении шара строим изображение экватора и затем изображение некоторой параллели. Изображение полюса шара будет задавать изображение вершины конуса (рис. 6.8).

При построении изображения пирамиды, вписанной в шар, строим изображение некоторой параллели и на ней располагаем изображения вершин основания пирамиды (рис. 6.9).

За изображение вершины пирамиды может быть выбрана любая точка чертежа, которая изображает точку поверхности шара и не лежит в плоскости параллели. Если пирамида правильная, то основание пирамиды является правильным многоугольником. Его изображение строится по ранее рассмотренным методам. Изображение вершины совмещаем с изображением полюса шара. На рисунке 6.10 изображена правильная четырехугольная пирамида, вписанная в шар.

Рис. 6.8

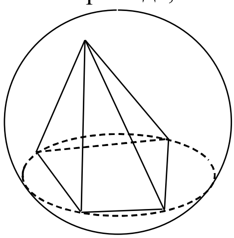


Рис. 6.9

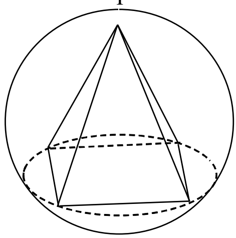


Рис. 6.10

**Задача 8.** *Изобразить описанные около шара конус, пирамиду.*

Чтобы построить изображение конуса, описанного около шара, изображаем основание конуса в виде эллипса, подобного экватору, с центром в одном из полюсов шара и малой осью на прямой, проходящей через полюсы (рис. 6.11).

После этого изображаем крайние видимые образующие конуса как общие касательные контура шара и основания конуса. Точка пересечения этих касательных — вершина конуса находится на прямой, проходящей через ось шара.

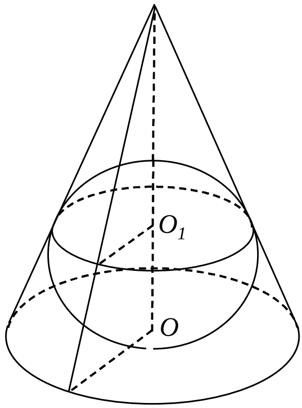



Рис. 6.11

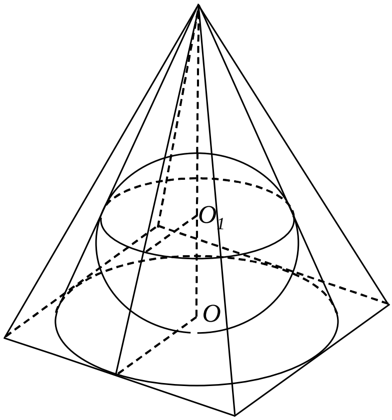



Рис. 6.12

Если решение задачи начать с изображения линии касания поверхности конуса и шара, то произвол в изображении основания конуса недопустим, решение задачи в принципе не изменится, но порядок построений будет иным.

При построении изображения пирамиды, описанной около шара, необходимо учитывать, что если вершина пирамиды лежит на прямой, проходящей через полюсы, то боковые грани касаются поверхности шара в точках, лежащих на параллелях. Дальнейшее решение зависит от конкретных условий задачи. При построении изображения описанной около шара пирамиды с равными двугранными углами при основании сначала удобно построить изображение конуса, описанного около шара, а затем изображение пирамиды, описанной около этого конуса.

На рисунке 6.12 изображена правильная четырехугольная пирамида, описанная около шара.

**Задача 9**. *Изобразить цилиндр, призму, вписанные в шар*.

Если цилиндр вписан в шар, то его поверхность касается поверхности шара по двум параллелям, равноотстоящим от центра шара. Изображение цилиндра, вписанного в шар, представлено на рисунке 6.13. Если в такой цилиндр вписать призму (см. задания 1, 2), то получим изображение призмы, вписанной в шар.

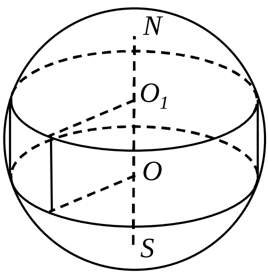



Рис. 6.13

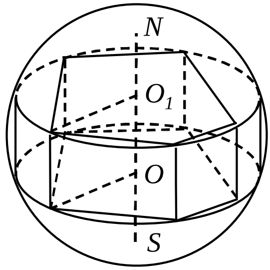



Рис. 6.14

Несложно построить изображение призмы, вписанной в шар, без использования изображения цилиндра. Для этого достаточно помнить, что вершины оснований призмы будут лежать на параллелях, равноудаленных от центра шара. Боковые ребра призмы будут параллельны полярной оси шара, так как в шар можно вписать только прямую призму. Изображение пятиугольной призмы, вписанной в шар, дано на рисунке 6.14.

**Задача 10**. *Построить изображение цилиндра, призмы, описанных около шара.*

Основания цилиндра, описанного около шара, касаются поверхности шара в двух диаметрально противоположных точках, пусть ими будут полюсы шара. Тогда окружности оснований цилиндра и экватор шара изобразятся в виде трех равных эллипсов с параллельными осями и центрами в точках $N$, $S$, $O$ (рис. 6.15).

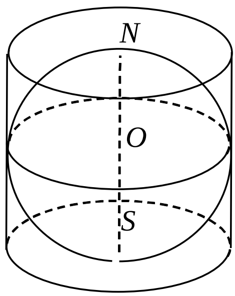



Рис. 6.15

Основания описанной призмы касаются поверхности шара в двух диаметрально противоположных точках. Примем эти точки за полюсы, тогда боковые грани будут касаться шара в точках, лежащих на экваторе. Построим изображение многоугольника, описанного около экватора, учитывая условия, определяющие этот многоугольник. Затем построим изображение призмы, используя тот факт, что ее боковые ребра параллельны и равны $NS$. Рисунок 6.16 изображает треугольную призму, описанную около шара.

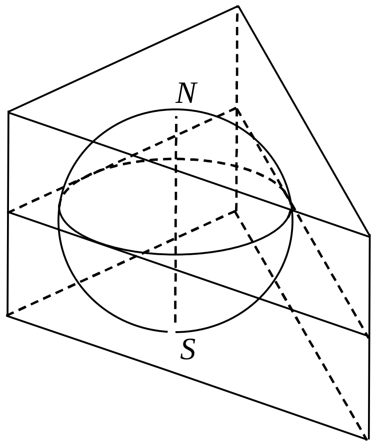



Рис. 6.16

Как и ранее, построение изображения призмы, описанной около шара, можно начать с построения изображения цилиндра, описанного около шара. Затем построить изображение призмы, описанной около этого цилиндра.

**Задачи**

1. Постройте изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в правильную треугольную призму так, чтобы вершины основания пирамиды принадлежали сторонам основания призмы.

2. Постройте изображение цилиндра, вписанного в конус так, что нижнее основание цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса.

3. Постройте изображение:

1) прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра;

2) пирамиды, в основании которой лежит ромб, описанной около конуса;

3) пирамиды с основанием в виде трапеции, описанной около конуса;

4) октаэдра и описанного около него цилиндра;

5) шара, вписанного в правильную треугольную усеченную пирамиду;

6) шара, описанного около усеченного конуса;

7) шара, вписанного в усеченный конус;

8) куба, вписанного в шар;

9) шара, вписанного в куб;

10) правильного тетраэдра, описанного около шара;

11) правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус;

12) шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду;

13) правильной треугольной призмы, вписанной в шар.

## § 7. Аксонометрия

Рассмотрим в трехмерном пространстве репер $R'(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ и произвольную точку $M'(x, y, z)_{R'}$ Свяжем с точкой $M'(x, y, z)_{R'}$ координатную ломаную $O'M_x{}'M_3'M'$ (рис. 7.1).

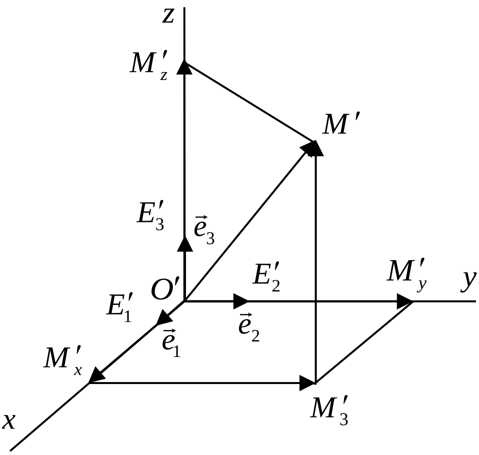



Рис. 7.1

Здесь $M_3'$ — проекция точки $M'$ на координатную плоскость $OXY$ по направлению оси $OZ$, точка $M_x'$ — проекция точки $M_3'$ на ось $OX$ по направлению оси $OY$. Построим также точки $M_y'$ и $M_z'$.

Имеем

$$\overrightarrow{O'M'} = x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2' + z\vec{e}_3' = \overrightarrow{O'M_x'} + \overrightarrow{M_x'M_3'} + \overrightarrow{M_3'M'},$$

при этом $\overrightarrow{O'M_x'} = x\vec{e}_1' = x\overrightarrow{O'E_1'}$,

$\overrightarrow{M_x'M_3'} = \overrightarrow{O'M_y'} = y\vec{e}_2' = y\overrightarrow{O'E_2'}$, $\overrightarrow{M_3'M'} = \overrightarrow{O'M_z'} = z\vec{e}_3' = z\overrightarrow{O'E_3'}$.

Рассмотрим далее некоторую произвольную плоскость $\alpha$. Выберем в пространстве направление проектирования так, чтобы оно не было параллельно координатным плоскостям, и спроектируем на плоскость $\alpha$ репер и координатную ломаную точки $M'(x, y, z)_{R'}$. Подвергнем затем плоскость $\alpha$ преобразованию подобия, получим на ней изображение репера $R'(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ и координатной ломаной $O'M_x{}'M_3'M'$ точки $M'(x, y, z)_{R'}$ (рис. 7.2).

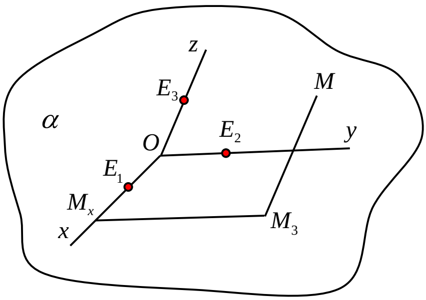



Рис. 7.2

При этом согласно законам параллельного проектирования будут выполняться соотношения:

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{M_xM_3} = y\overrightarrow{OE_2},\ \overrightarrow{M_3M} = z\overrightarrow{OE_3},$$

где $x$, $y$, $z$ — координаты точки $M'$. Из записанных соотношений следует, что если на плоскости $\alpha$ дано изображение репера $R'$, то можно построить изображение $M$ любой точки $M'$ пространства по ее координатам в репере $R'$. Для этого на плоскости $\alpha$ нужно построить ломаную $OM_xM_3M$, где $\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{M_xM_3} = y\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{M_3M} = z\overrightarrow{OE_3}$.

Если в пространстве дана фигура, то, построив изображения всех точек фигуры, мы построим изображение самой фигуры. Этот метод построения изображения фигуры называется методом аксонометрического проектирования (аксонометрия — измерение по осям). Точку $O$ называют началом аксонометрической системы координат, оси $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$ — аксонометрическими осями. Отрезки $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$ называются аксонометрическими единицами, а их длины $e_x, e_y, e_z$ — коэффициентами искажения.

Согласно теореме Польке — Шварца любые три отрезка плоскости с общим началом можно принять за изображение трех отрезков пространства с общим началом.

Если на плоскости даны четыре произвольные, по три неколлинеарные точки $O$, $E_1$, $E_2$, $E_3$, то по теореме Польке — Шварца точку $O$ можно принять за начало изображения пространственного репера, точки $E_1$, $E_2$, $E_3$ за изображения концов базисных векторов. Прямые $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$ будут изображениями координатных осей. Другими словами, на плоскости изображений начало $O$ и аксонометрические оси $OE_1$, $OE_2$, $OE_3$ можно выбирать произвольно при условии, что точки $O$, $E_1$, $E_2$, $E_3$ имеют общее положение.

Если в пространстве выбран ортонормированный репер, то в зависимости от соотношений между значениями аксонометрических единиц различают следующие виды аксонометрических проекций:

а) триметрические проекции — все три коэффициента искажения различны между собой: $e_x \neq e_y, e_y \neq e_z, e_z \neq e_x$;

б) диметрические проекции — два коэффициента искажения равны: $e_x \neq e_y = e_z$. В частном случае, когда $e_y = e_z$, $e_x = \frac{1}{2}e_y$, $\angle E_2OE_3 = 90°$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135°$ — проекция называется кабинетной;

в) изометрические проекции — все три коэффициента искажения равны. В частном случае, когда $\angle E_2OE_3 = 90°$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135°$, изометрическая проекция называется кавальерной, или военной.

Ниже на рисунке 7.3 приведены изображения куба, сделанные в произвольной триметрической проекции, диметрической кабинетной и изометрической военной проекциях.

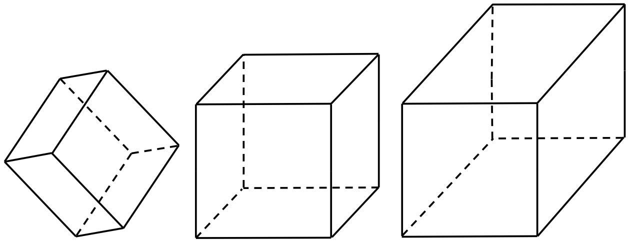


Рис. 7.3

Пусть теперь дано изображение аффинного репера с помощью точек $O$, $E_1$, $E_2$, $E_3$ и произвольной точки $M$. Требуется восстановить положение точки оригинала $M'$ относительно репера-оригинала $R'(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$. Задача решается, если известны координаты точки $M'$. Координаты $M'$ находятся из соотношений $\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{M_xM_3} = y\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{M_3M} = z\overrightarrow{OE_3}$, которые записываются на основе изображения $OM_xM_3M$ координатной ломаной точки $M'$.

Для построения ломаной $OM_xM_3M$ необходимо кроме положения точки $M$ знать положение точки $M_3$, т.е. проекцию точки $M'$ на координатную плоскость $XOY$ в направлении координатной оси $OZ$ (рис. 7.4).

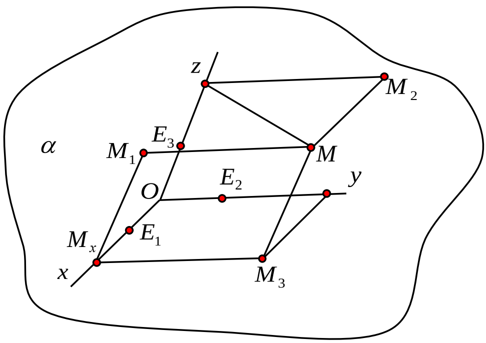



Рис. 7.4

Принято точку $M$ называть первичной аксонометрической проекцией точки $M'$, а точку $M_3$ — вторичной проекцией этой точки. В качестве вторичной аксонометрической проекции можно также рассматривать проекции точки $M'$ на координатные плоскости $XOZ$, $YOZ$ в соответствующих направлениях.

Итак, *если на плоскости* $\alpha$ *дана точка* $M$ *и одна из точек* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *(например,* $M_3$*), то положение точки* $M'$ *в пространстве вполне определяется*.

Таким образом, точка $M'$ пространства задается на плоскости изображения $\alpha$ с помощью двух точек ($M$, $M_3$), при этом прямые $MM_3$ и $OZ$ должны быть либо параллельными, либо совпадать. Если точки $M$ и $M_3$ совпадают, то это означает, что точка $M'$ лежит в плоскости $XOY$.

## § 8. Полные и неполные изображения фигур на плоскости

**Определение**. *Изображение фигуры на плоскости называется полным, если с фигурой можно связать изображение аффинного репера так, что все точки этой фигуры будут заданными.*

Напомним, что точка на изображении фигуры считается заданной, если известны ее первичная аксонометрическая проекция и вторичная проекция на одну из координатных плоскостей. Число точек фигуры может быть бесконечным, в таком случае достаточно указать метод построения вторичной проекции для любой точки фигуры по известной аксонометрической проекции.

*Изображения плоских фигур всегда полные*. *Изображения таких пространственных фигур, как призма, пирамида, цилиндр, конус, шар, являются полными.* Например, изображение призмы на рисунке 8.1 полное.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — изображение треугольной призмы $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$ на некоторой плоскости. Свяжем с изображением призмы изображение репера. Пусть соответственно точки $A$, $C$, $B$, $A_1$ являются изображениями точек репера $O', E_1', E_2', E_3'$. Если точка $M'$ принадлежит в оригинале ребру $A'A'_1$ и точка $M \in AA_1$ есть ее аксонометрическая проекция, то точка $A$ будет вторичной проекцией точки $M'$.

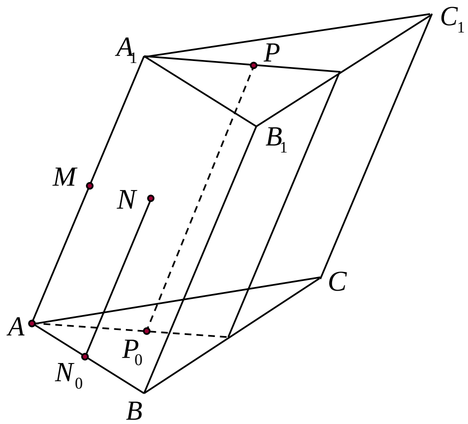



Рис. 8.1

Точки $N$, $N_0$ определяют точку оригинал $N'$, лежащую в грани $A'B'A_1'B_1'$. На рисунке показан способ построения вторичной проекции для точки верхней грани.

Возможен несколько другой подход к определению полноты фигуры. Можно заметить, что с полным изображением связывается изображение некоторой плоскости (например, координатной плоскости $E_1OE_2$) и направление проектирования на эту плоскость (например, по направлению изображения оси $OE_3$). При этом каждая точка полного изображения имеет проекцию на выделенную плоскость по заданному направлению.

Второй подход позволяет ввести второе определение полного изображения фигуры, равносильное предыдущему. *Изображение фигуры называется полным, если с ним можно связать изображение некоторой плоскости (основной) и указать некоторое направление проектирования (внутреннее) так, чтобы для каждой точки изображения фигуры можно было построить ее проекцию на основную плоскость.*

Внешнее проектирование на плоскость изображения всегда является параллельным. Внутреннее проектирование может быть как параллельным, так и центральным проектированием. Внутреннее центральное проектирование удобно использовать при работе с пирамидами, конусами.

Покажем, что изображение пирамиды полное с точки зрения второго определения. Рассмотрим пирамиду-оригинал $S'A'B'C'D'$ и ее изображение $SABCD$ (рис. 8.2).

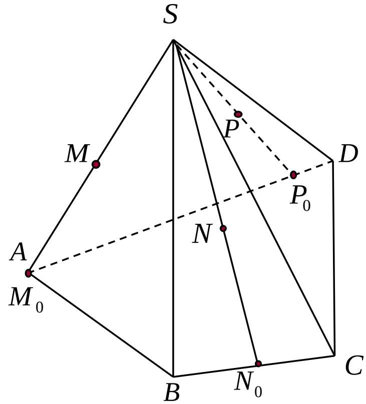



Рис. 8.2

В качестве основной плоскости выберем изображение плоскости основания, внутреннее проектирование будем считать центральным с центром проектирования в точке $S$. На рисунке 8.2 показаны вторичные проекции на плоскости основания для выделенных точек на ребрах и гранях пирамиды.

Свойство изображения быть полным (или неполным) не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

Справедливо утверждение: *полные изображения определяют фигуру-оригинал с точностью до аффинного преобразования.*

Существуют неполные изображения. Например, фигура, которая состоит из призмы и поставленной на нее пирамиды. Изображение этой фигуры неполное. Действительно, если принять плоскость верхней грани призмы за основную плоскость и вести внутреннее проектирование параллельно боковым ребрам, то для всех точек ребер и граней призмы определятся проекции на основную плоскость, однако не будет проекции для вершины пирамиды. Если в качестве внутреннего проектирования использовать центральное проектирование с центром в вершине пирамиды, то для всех точек ребер и граней пирамиды строятся проекции на основной плоскости, однако не будет проекций у нижних вершин призмы.

Неполные изображения можно превратить в полные. *Принято число точек, которое надо добавить к изображению фигуры для того, чтобы оно стало полным, называть коэффициентом неполноты изображения.*

Рассмотренное выше изображение становится полным, если указать проекцию вершины пирамиды на плоскость грани призмы параллельно ребру призмы, т. е. коэффициент неполноты изображения данной фигуры равен единице.

## § 9. Позиционные задачи. Построение сечений

**Определение.** *Под позиционными задачами понимают задачи на установление взаимного расположения фигур-оригиналов по их изображениям, выполненным в одной проекции на одной плоскости.*

Такие задачи удобно решать, пользуясь методом аксонометрии. Если изображение полное, то любая позиционная задача в этом случае имеет вполне определенное решение и не содержит никакого произвола. Если же изображение неполное, то, решая позиционную задачу, некоторые элементы можно задать произвольно.

Классическим примером позиционной задачи является задача на построения сечения некоторой фигуры (призмы, цилиндра, пирамиды, конуса) плоскостью, т. е. задача нахождения общих точек фигуры и плоскости. Прежде чем перейти к изучению различных способов построения сечений, рассмотрим замечание.

**Замечание**. *Согласно школьной практике при построении сечений, а также решении других задач мы не будем отличать точки оригинала (или прямые оригинала) от их аксонометрических проекций; будем называть их просто точками (прямыми). Будем также точки, прямые, плоскости оригинала обозначать теми же буквами, что и их аксонометрические проекции.*

Любая плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому плоскому многоугольнику. Число сторон этого многоугольника не может быть меньше трех, с другой стороны, не может превышать число граней многогранника. Число сторон многоугольника, получающегося в сечении, зависит от формы многогранника, его граней, а также от взаимного расположения плоскости сечения и многогранника.

Существуют несколько способов построения сечений многогранников, цилиндров, конусов плоскостью.

**Метод следов**. Суть этого метода состоит в том, что строится прямая $l$ — (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью определенной грани многогранника. Затем строятся точки пересечения соответствующих ребер с секущей плоскостью. С помощью этих точек строятся следы секущей плоскости на плоскостях остальных граней многогранника.

**Задача 1**. *Дано изображение многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить изображение сечения его плоскостью, проходящей через точки $M$, $P$, $K$, принадлежащие соответственно ребрам $A_1B_1$, $B_1C_1$, $DC$.*

Строим (рис. 9.1):

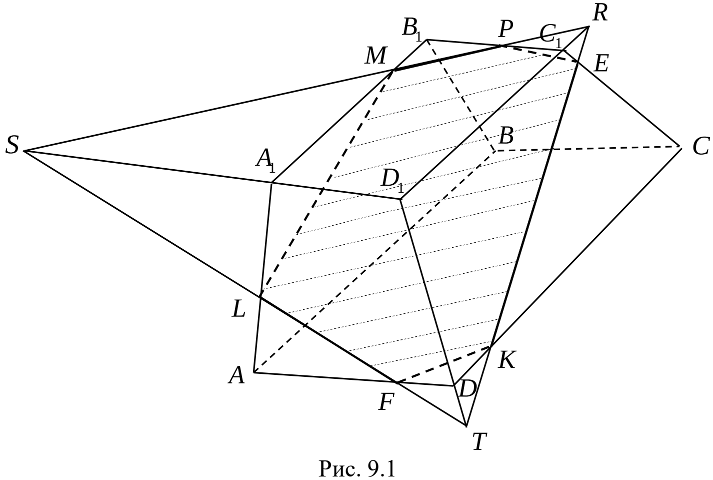



Рис. 9.1

1. Прямую $MP$ — пересечение секущей плоскости с плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$ (след $l$).

2. Точку $R = l \cap D_1C_1$ — точку, пересечения $l$ с плоскостью грани $D_1C_1DC$.

3. Прямую $RK$ — пересечение секущей плоскости с плоскостью грани $D_1C_1DC$ (след секущей плоскости на плоскости $D_1C_1DC$).

4. Точку $T = D_1D \cap PK$ — точку пересечения прямой, содержащей ребро $D_1D$, с секущей плоскостью.

5. Точку $S = MP \cap A_1D_1$ — точку пересечения следа $l$ с плоскостью грани $A_1ADD_1$.

6. Прямую $ST$ и точки пересечения этой прямой с оставшимися ребрами грани $A_1ADD_1$.

*MPEKFL* — искомое сечение.

**Задача 2.** *Дано изображение четырехугольной пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки P, E, K* (рис. 9.2).

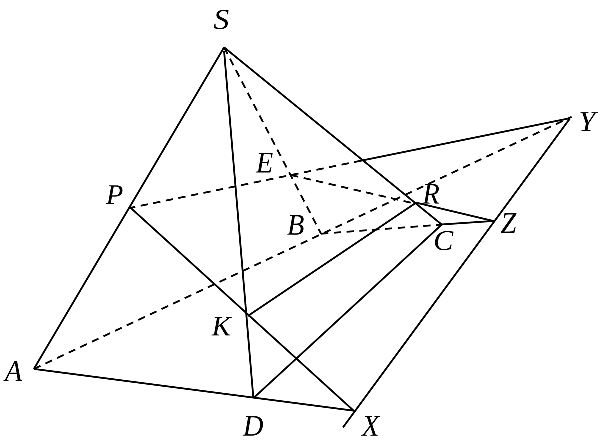



Рис. 9.2

Строим:

1. Прямую $l$ — след секущей плоскости $PEK$ с плоскостью основания $ABCD$. $X = PK \cap AD$, $Y = PE \cap AB$. Прямая $XY$ — след $l$.

2. Точку $R = EZ \cap SC$.

3. $R = EZ \cap SC$.

*KPER* — искомое сечение.

**Метод использования аксиом и теорем геометрии.** При решении задач на построение сечений этим методом используют: признаки параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах, теорему: «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой» и др.

**Задача 7.** *Дано изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $A_1$, $K$, $P$.*

Плоскости граней параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ параллельны, поэтому прямые пересечения этих плоскостей с секущей плоскостью параллельны (рис. 9.3).

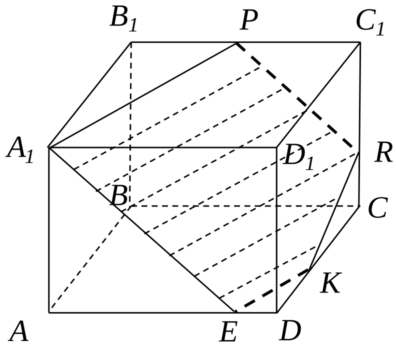



Рис. 9.3

Проведем через точку $K$ прямую, параллельную прямой $A_1P$. Она пересечет прямую $AD$ в точке $E$. Проведем $PR \parallel A_1E$.

$A_1PRKE$ — искомое сечение.

**Задача 8.** *Дано изображение четырехугольной пирамиды SABCD. Ее основанием является трапеция ABCD ($AD \parallel BC$). Точка E — середина стороны SC. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку E и параллельной ребрам BS и CD. Установить форму полученного сечения.*

Построим (рис. 9.4):

1) $E$ — середина отрезка $SC$, тогда $EF$ — средняя линия треугольника и $EF \parallel SB$;

2) $E$ — середина отрезка $SC$, тогда $ER \parallel CD$.

3) Через точку $F$ проводим прямую, параллельную $CD$. Она пересечет ребро $AD$ в точке $P$.

$ERPF$ — искомое сечение. Очевидно, что $ERPF$ — трапеция.

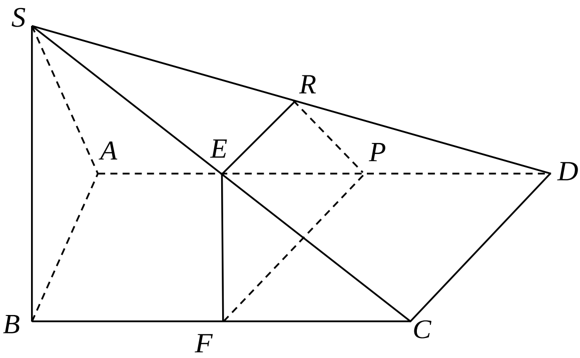


Рис. 9.4

**Задачи**

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину ребра $AA_1$ провести прямую, пересекающую прямые $D_1C_1$ и $BC$.

2. Постройте точку пересечения прямой $KL$ с поверхностью данной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если точка $K$ находится внутри призмы, а точка $L$ — вне призмы.

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения плоскости $ABC_1D_1$ с прямой $DB_1$.

4. На ребрах $DA$, $DB$, $DC$ пирамиды $DABC$ даны точки $M$, $N$ и $P$. Постройте точку пересечения плоскости $MNP$ с отрезком $DE$, где $E$ — точка пересечения медиан основания треугольника $ABC$.

5. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро основания $AB$ и центр грани $CDD_1C_1$.

6. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину $A$, середину ребра $BC$ и центр грани $CDD_1C_1$.

7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину $A$ и центры граней $BCC_1B_1$ и $CDD_1C_1$ соответственно.

8. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания и середину высоты.

9. Постройте сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину $D$ и точки $M$ и $K$, лежащие соответственно на ребрах $AB$ и $BB_1$.

10. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью $MKL$, где $M$ принадлежит ребру $AA_1$, точка $K$ принадлежит грани $A_1ABB_1$, а точка $L$ расположена вне призмы.

11. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, из которых одна принадлежит нижнему основанию, вторая — одному из ее боковых ребер, а третья — одной из боковых граней.

12. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, не лежащими на ее поверхности.

13. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

14. Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей через точку $A$, лежащую на боковой поверхности цилиндра, и через точки $B$ и $C$, лежащие в плоскости его нижнего основания.

15. Постройте сечение цилиндра плоскостью, заданной следом и точкой, не лежащей на поверхности цилиндра.

16. В плоскости основания треугольной пирамиды дана прямая $a$, не пересекающая стороны основания. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $a$ и точку на боковом ребре пирамиды.

17. Постройте сечение конуса плоскостью, заданной точкой $A$, лежащей на образующей конуса, и точками $B$ и $C$, принадлежащими плоскости основания.

18. Постройте сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, из которых две лежат на боковых ребрах, а третья — на стороне основания, при этом все они не принадлежат одной грани.

19. Даны три точки: одна — на стороне верхнего основания, другая на стороне нижнего основания, третья — на боковом ребре четырехугольной усеченной пирамиды. Постройте сечение, определяемое данными точками.

20. Дано изображение треугольной пирамиды с высотой. Постройте сечение ее плоскостью, проведенной через середину высоты и ребро основания.

21. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно одному из боковых ребер.

22. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AD$, $N \in AB$ и параллельно $AC$.

23. Постройте сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую $CP$, где точка $P$ принадлежит диагонали $BD$ основания, параллельно прямой $A_1B$.

24. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через медиану $CM$ грани $ABC$ и параллельной прямой $AD$.

25. Постройте сечение правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ $BD_1$ призмы и параллельной не пересекающим ее диагоналям оснований.

26. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точку $M \in AB$ и параллельной грани $DBC$.

27. Постройте сечение шестиугольной пирамиды $SABCDFE$ плоскостью, проходящей через точку $M$ на основании пирамиды и параллельной боковой грани $SAK$.

28. На двух гранях параллелепипеда даны две скрещивающиеся диагонали. Постройте такое сечение параллелепипеда, плоскость которого проходила бы через одну из этих диагоналей и была бы параллельна другой.

29. Дано изображение четырехугольной пирамиды и ее высоты. Через середину высоты провести сечение параллельно двум скрещивающимся ребрам: ребру основания и боковому ребру.

30. Постройте сечение усеченной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно диагонали основания.

31. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно боковому ребру.

## Варианты контрольной работы

**Вариант 1**

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ служит изображением равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$, углы при основании которой равны 45°. Построить изображение центра окружности, описанной около трапеции.

2. Точка $M$ принадлежит грани $ADB$ тетраэдра $ABCD$, у которого $AB = BD$, $AC = CD$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку $M$ и перпендикулярной ребру $AD$.

**Вариант 2**

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ служит изображением прямоугольной трапеции $A'B'C'D'$, имеющей угол $\angle B' = 60°$. Известно, что в данную трапецию $A'B'C'D'$ можно вписать окружность. Построить изображение ее центра.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ и точка $M$, являющаяся внутренней точкой сечения $ACC'A'$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $M$ и перпендикулярной прямой $BB'$.

**Вариант 3**

1. Треугольник $ABC$ служит изображением равнобедренного треугольника $A'B'C'$, у которого $A'C' = B'C'$ и высота равна основанию. Построить изображения центра вписанной и описанной окружностей.

2. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно боковому ребру, которое противолежит этой диагонали.

**Вариант 4**

1. Параллелограмм $ABCD$ служит изображением квадрата $A'B'C'D'$. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки $M'$ ($M' \in D'C'$) к прямой $B'E'$, где $E'$ — середина $A'D'$.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ провести плоскость через центр основания параллельно боковой грани.

**Вариант 5**

1. Параллелограмм $ABCD$ служит изображением квадрата $A'B'C'D'$. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из точки $M'$ ($M' \in D'C'$) к прямой $B'D'$.

2. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, параллельной одной из боковых граней и проходящей через данную внутреннюю точку отрезка, соединяющего вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей основания.

**Вариант 6**

1. Дано изображение окружности и описанной трапеции $A'B'C'D'$, где $A'D'$ и $B'C'$ — основания. Построить изображения высот трапеции, проведенных из точек $B'$, $C'$.

2. Из точки, взятой на боковой грани правильной треугольной пирамиды, опустить перпендикуляр на ее основание.

**Вариант 7**

1. Дано изображение прямоугольного треугольника $A'B'C'$, катеты которого $A'B' : B'C' = 1 : 2$. Построить изображение прямой $l'$, проходящей через середину его гипотенузы и перпендикулярной ей.

2. Провести прямую, проходящую через центр основания правильной треугольной пирамиды параллельно боковому ребру, и найти точку пересечения этой прямой с боковой гранью.

**Вариант 8**

1. На данном изображении окружности построить изображение вписанной в окружность трапеции, основания которой стягивают дуги 90° и 120°.

2. Через диагональ основания четырехугольной пирамиды провести плоскость, параллельную высоте пирамиды. Основание высоты не лежит на заданной диагонали.

**Вариант 9**

1. Дан параллелограмм, являющийся изображением ромба. Построить изображение прямых, проведенных через точку пересечения диагоналей ромба и перпендикулярных к сторонам ромба, если известно, что острый угол ромба равен 60°.

2. В правильной треугольной пирамиде провести плоскость, проходящую через середину высоты параллельно боковой грани.

**Вариант 10**

1. На данном изображении окружности построить изображение ромба с углом в 60°, описанного около этой окружности.

2. В четырехугольной пирамиде провести прямую через середину высоты, параллельную боковому ребру.

## Список использованной литературы


1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Ч. 2. М. : Просвещение, 1987.
2. Болодурин В. С. Краткий курс лекций по геометрии. Ч. 2. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2005.
3. Вахмянина О. А., Измайлова Т. С. Методы изображений. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 1997.
4. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М. : Учпедгиз, 1961.
5. Четверухин Н. Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. М. : Учпедгиз, 1958.
6. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. М. : Учпедгиз, 1952.
7. Панкратов А. А. Начертательная геометрия. М. : Учпедгиз, 1959.
8. Атанасян Л. С. [и др.]. Сборник задач по геометрии. Ч. 2. М. : Просвещение, 1973.
9. Базылев В. Т. [и др.]. Сборник задач по геометрии. М. : Просвещение, 1980.



Учебное издание

**Болодурин** Виктор Сергеевич

**Изображение плоских и пространственных фигур на плоскости**

Учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов физико-математических факультетов педагогических вузов и учащихся старших классов средней школы

Редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано в печать 23.09.2016 г. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$
Усл. печ. л. 2,8. Тираж 100 экз. Заказ 55

ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет». 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19