

ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Туктамышева Л.М.

ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»,
г. Оренбург,

При подготовке магистров по экономическим направлениям требуется углубленное изучение эконометрических методов, в частности вопросов математического моделирования многомерных временных рядов, которые находят применение не только в экономике, но и социологии, медицине и т.д. И, если, моделирование одномерных временных рядов достаточно хорошо освещено в отечественной литературе, то вопросам моделирования многомерных рядов, на наш взгляд, уделяют достаточно мало внимания. Как правило, исследователи прибегают к использованию моделей в форме системы одновременных регрессионных уравнений, которые зарекомендовали себя как эффективный инструмент установления связей между исследуемыми показателями и прогнозирования. Гораздо реже можно встретить применение моделей векторной авторегрессии, в которых нет разделения переменных на экзогенные и эндогенные, кроме того все переменные в правой части уравнений лаговые. Векторная модель авторегрессии (VAR) предложена К.Симсом в 1980 году и является обобщением моделей авторегрессии к многомерным временным рядам, представляет собой систему уравнений, в которой каждая переменная (компонента многомерного временного ряда) представлена линейной комбинацией всех переменных в предыдущие моменты времени [1].

Векторные модели авторегрессии строятся по стационарным временным рядам, в случае, если ряды нестационарны (интегрированы первого порядка $I(1)$) и коинтегрированы, то строятся векторные модели корректировки ошибок (VECM).

Порядок модели определяется порядком лага, а в простейшем случае модель VAR включает две переменные с лагом 1, число уравнений модели равно числу переменных:

$$\begin{cases} x_{t1} = \alpha_{10} + \alpha_{11}x_{t-1,1} + \alpha_{12}x_{t-1,2} + \varepsilon_{t1} \\ x_{t2} = \alpha_{20} + \alpha_{21}x_{t-1,1} + \alpha_{22}x_{t-1,2} + \varepsilon_{t2} \end{cases}, \quad (1)$$

где α_{10}, α_{20} - свободные параметры; α_{ij} - параметры авторегрессии ($i, j = 1, 2$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - взаимно некоррелированные «белые шумы» [2].

В общем виде для k переменных и числа лагов p модель авторегрессии (VAR(p)) имеет вид:

$$\begin{cases} x_{t1} = \alpha_1 + \alpha_{11}^{[1]}x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[1]}x_{t-1,k} + \alpha_{11}^{[2]}x_{t-2,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[2]}x_{t-2,k} + \dots + \alpha_{11}^{[p]}x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[p]}x_{t-p,k} + \varepsilon_{t1} \\ x_{t2} = \alpha_2 + \alpha_{21}^{[1]}x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[1]}x_{t-1,k} + \alpha_{21}^{[2]}x_{t-2,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[2]}x_{t-2,k} + \dots + \alpha_{21}^{[p]}x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[p]}x_{t-p,k} + \varepsilon_{t2} \\ \dots \\ x_{tk} = \alpha_k + \alpha_{k1}^{[1]}x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[1]}x_{t-1,k} + \alpha_{k1}^{[2]}x_{t-2,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[2]}x_{t-2,k} + \dots + \alpha_{k1}^{[p]}x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[p]}x_{t-p,k} + \varepsilon_{tk} \end{cases} \quad (2)$$

или в векторно-матричной записи:

$$\begin{pmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ \dots \\ x_{tk} \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{[1]} \dots \alpha_{1k}^{[1]} \\ \alpha_{21}^{[1]} \dots \alpha_{2k}^{[1]} \\ \dots \\ \alpha_{k1}^{[1]} \dots \alpha_{kk}^{[1]} \\ A^{[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1,1} \\ x_{t-1,2} \\ \dots \\ x_{t-1,k} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{[p]} \dots \alpha_{1k}^{[p]} \\ \alpha_{21}^{[p]} \dots \alpha_{2k}^{[p]} \\ \dots \\ \alpha_{k1}^{[p]} \dots \alpha_{kk}^{[p]} \\ A^{[p]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-p,1} \\ x_{t-p,2} \\ \dots \\ x_{t-p,k} \\ X_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t1} \\ \varepsilon_{t2} \\ \dots \\ \varepsilon_{tk} \\ \tilde{\varepsilon}_t \end{pmatrix} \quad (3)$$

или

$$X_t = \alpha + A^{[1]} X_{t-1} + \dots + A^{[p]} X_{t-p} + \tilde{\varepsilon}_t. \quad (4)$$

Оценивание параметров модели можно проводить, например, методом наименьших квадратов отдельно для каждого уравнения, что делает привлекательным применение данных моделей [1,3].

Представленные модели являются приведенными формами VAR, а о разделении VAR на приведенные, рекурсивные и структурные формы начали говорить, начиная с середины 90-х гг. прошлого века [4,5]. Рекурсивная и структурная форма VAR в матричной записи записываются идентично:

$$X_t = \alpha + A^{[0]} X_t + A^{[1]} X_{t-1} + \dots + A^{[p]} X_{t-p} + \tilde{\varepsilon}_t.$$

(5)

Наличие в уравнении матрицы $A^{[0]}$ означает одновременное воздействие между переменными.

Рекурсивная форма VAR для k переменных и числа лагов p модель авторегрессии имеет вид:

$$\begin{cases} x_{t1} = \alpha_1 + \alpha_{11}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[1]} x_{t-1,k} + \alpha_{11}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{t1} \\ x_{t2} = \alpha_2 + \alpha_{21}^{[0]} x_{t1} + \alpha_{21}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[1]} x_{t-1,k} + \alpha_{21}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{t2} \\ \dots \\ x_{tk} = \alpha_k + \alpha_{k1}^{[0]} x_{t1} + \dots + \alpha_{k,k-1}^{[0]} x_{t,k-1} + \alpha_{k1}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[1]} x_{t-1,k} + \dots + \alpha_{k1}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{tk} \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, первое уравнение векторной авторегрессии не содержит в правой части текущего наблюдения по другим переменным, второе уравнение содержит текущий уровень только первой переменной, третье уравнение – текущие уровни первого и второго уравнений соответственно и т.д.

Структурная форма VAR для k переменных и числа лагов p имеет вид:

$$\begin{cases} x_{t1} = \alpha_1 + \alpha_{12}^{[0]} x_{t2} + \dots + \alpha_{1k}^{[0]} x_{tk} + \alpha_{11}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[1]} x_{t-1,k} + \alpha_{11}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{1k}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{t1} \\ x_{t2} = \alpha_2 + \alpha_{21}^{[0]} x_{t1} + \dots + \alpha_{2,k}^{[0]} x_{tk} + \alpha_{21}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[1]} x_{t-1,k} + \alpha_{21}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{2k}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{t2} \\ \dots \\ x_{tk} = \alpha_k + \alpha_{k1}^{[0]} x_{t1} + \dots + \alpha_{k,k-1}^{[0]} x_{t,k-1} + \alpha_{k1}^{[1]} x_{t-1,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[1]} x_{t-1,k} + \dots + \alpha_{k1}^{[p]} x_{t-p,1} + \dots + \alpha_{kk}^{[p]} x_{t-p,k} + \varepsilon_{tk} \end{cases} \quad (7)$$

Вопросы идентификации рекурсивной и структурной формы VAR в рамках данной работы опустим, так как фактически речь идет о методах идентификации СОУ [6-10].

Изучим построение и исследование векторной модели авторегрессии для двумерного временного ряда. Для моделирования возьмем данные по индексу

ВВП и инвестиций в основной капитал по РФ за период с I квартала 2003 года по III квартал 2013 года.

На рисунке 1 представлены ряды динамики изучаемых показателей.

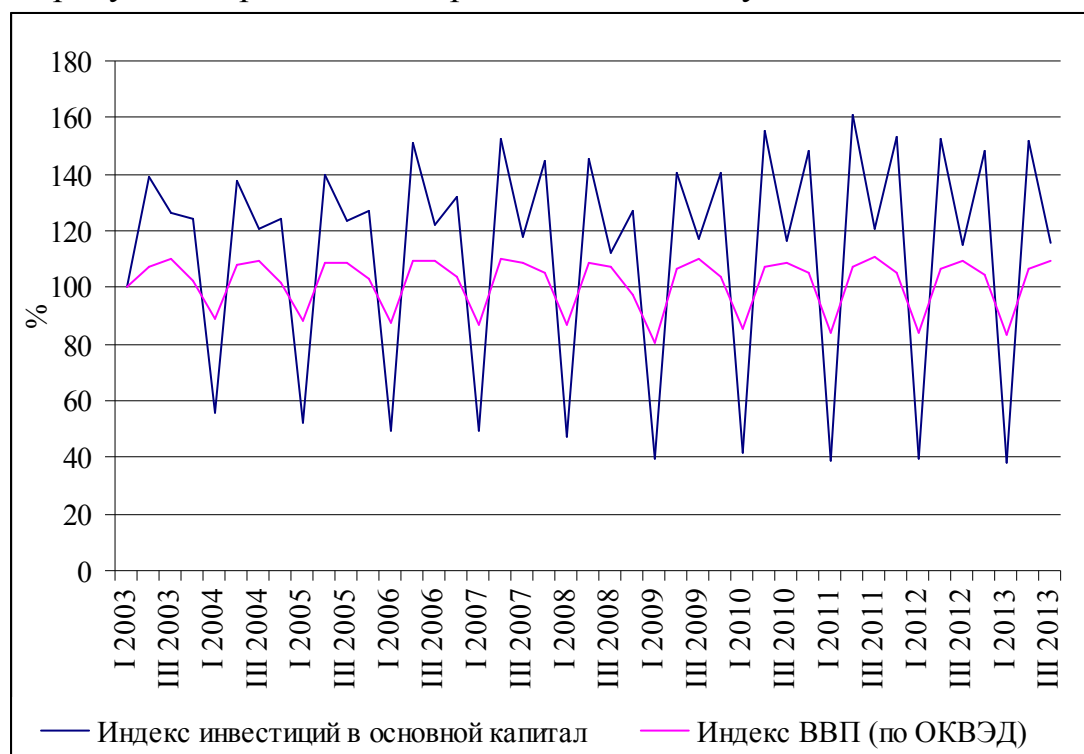


Рисунок 1 – Динамика индекса инвестиций в основной капитал и индекса ВВП за 2003-2013 гг. в РФ

По графику, представленному на рисунке 1, можно предположить отсутствие тренда и наличие сезонности. Проверка стационарности рядов динамики изучаемых показателей проводилась на основе анализа выборочной автокорреляционной и частной автокорреляционной функции, а также проверки гипотезы о наличии единичного корня (DS-ряд) на основе расширенного критерия Дики-Фуллера (ADF-тест) и проверки гипотезы о стационарном ряде (TS-ряд) на основе критерия Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шинна (KPSS-тест). Расчеты проводились в ППП Gretl.

При моделировании в модель введены фиктивные переменные для учета сезонности:

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{и квартал, } i=1,2,3 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Несмотря на то, что в данной модели переменные не разделяются на эндогенные и экзогенные, принято говорить, что фиктивные переменные, а также константа – экзогенные переменные [11].

Для проверки гипотезы о достаточности лагов использован тест отношений правдоподобий, а также информационные критерии Акаике, Шварца и Хеннана-Куина (таблица 1).

Таблица 1 – Проверка порядка модели VAR (достаточности лагов)

Длина лага	Акаике	Шварца	Хеннана-Куина
1	10,4832	10,9847	10,6658
2	9,93587	10,6114	10,1801
3	9,99289	10,8373	10,2982

По таблице видно, что минимальные значения информационных критериев для лага 2, другими словами на текущий уровень индекса ВВП оказывает влияние индекс ВВП и индекс инвестиций в основной капитал за последнее полугодие. Общий вид модели VAR(2):

$$\begin{cases} x_{t1} = \alpha_1 + \alpha_{11}^{[1]} x_{t-1,1} + \alpha_{12}^{[1]} x_{t-1,2} + \alpha_{11}^{[2]} x_{t-2,1} + \alpha_{12}^{[2]} x_{t-2,2} + \gamma_{11} S_{t,1} + \gamma_{12} S_{t,2} + \gamma_{13} S_{t,3} + \varepsilon_{t1} \\ x_{t2} = \alpha_2 + \alpha_{21}^{[1]} x_{t-1,1} + \alpha_{22}^{[1]} x_{t-1,2} + \alpha_{21}^{[2]} x_{t-2,1} + \alpha_{22}^{[2]} x_{t-2,2} + \gamma_{21} S_{t,1} + \gamma_{22} S_{t,2} + \gamma_{23} S_{t,3} + \varepsilon_{t2} \end{cases} \quad (8)$$

Оценивание параметров модели проводилось в ППП Gretl, результаты представлены под номером (9):

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}_{t1} = 108,3 - 0,297 x_{t-1,1} + 1,57 x_{t-1,2} + 0,7 x_{t-2,1} - 1,96 x_{t-2,2} - 54,6 S_1 + 24,8 S_2 + 20 S_3, \hat{R}^2 = 0,98 \\ \hat{\epsilon}_{t2} = 64,2 - 0,05 x_{t-1,1} + 0,69 x_{t-1,2} + 0,09 x_{t-2,1} - 0,407 x_{t-2,2} - 9 S_1 + 16,1 S_2 + 9 S_3, \hat{R}^2 = 0,97 \end{cases} \quad (9)$$

Параметры первого уравнения значимы на уровне значимости 0,1, а параметры второго уравнения на уровне значимости 0,05. Проверка показала взаимную некоррелированность остатков отдельных уравнений и остатков отдельных уравнений. Кроме того, остатки также являются нормально распределенными. Значения выборочных коэффициентов детерминации для обоих уравнений системы свидетельствует о высоком качестве аппроксимации.

Осуществим прогнозирование на период с 2014 по 2016 год, результаты представлены на рисунках 2,3.

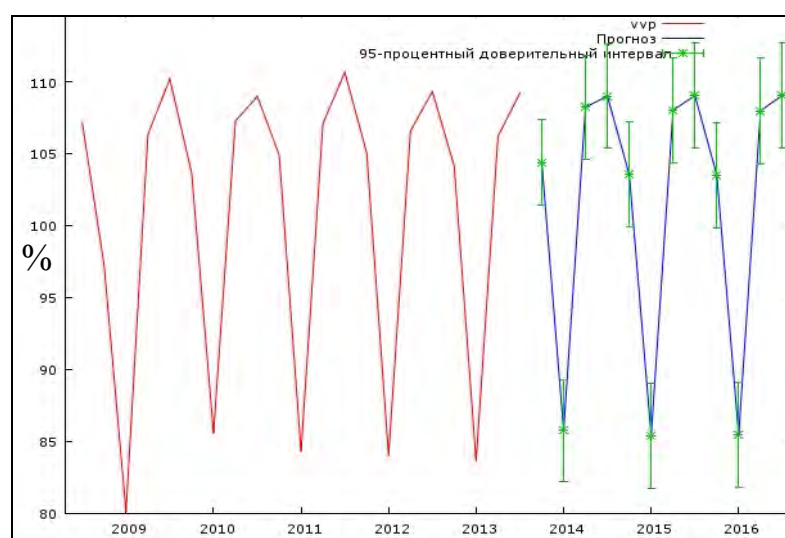


Рисунок 2- Прогноз индекса ВВП РФ на период до 2016 года

Согласно полученной модели, в ближайшие три года ожидается рост ВВП, так, наибольший рост ВВП будет наблюдаться в третьем квартале каждого года (около 109%), а снижение в первом квартале (85%). На рисунке 3 представлены результаты прогнозирования инвестиций в основной капитал.

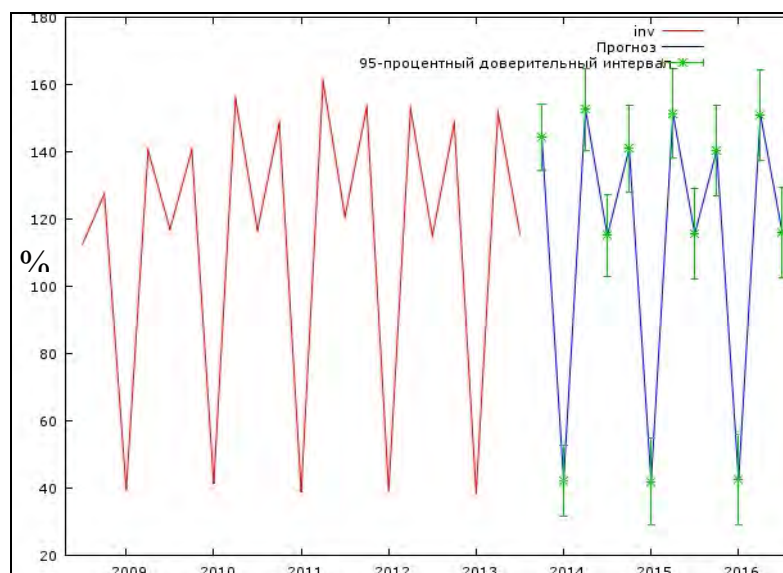


Рисунок 2 – Прогноз индекса инвестиций в основной капитал в РФ на 2014-2015 гг.

Согласно прогнозу в четвертом квартале 2013 года инвестиции возрастут на 44,3%, а наибольший прирост ожидается во втором квартале 2014 года, когда прирост составит 52,4%.

Расчет показателей точности прогнозирования (средней ошибки аппроксимации, среднеквадратической ошибки прогноза) показал, что модель обладает высокими прогнозными свойствами.

Таким образом, векторная модель авторегрессии позволяет строить точные прогнозы, выбор переменных для ее построения осуществляется с точки зрения экономической теории, однако она не устанавливает структуру взаимосвязей. Кроме того, к недостаткам векторной модели авторегрессии следует отнести большое число оцениваемых параметров, так в рассмотренной двумерной модели первого порядка с учетом константы и параметров при фиктивных переменных было оценено 16 коэффициентов, следовательно, для построения таких моделей необходимо обладать информацией за достаточно длительный промежуток времени.

Список литературы

1. **Канторович, Г.Г.** Анализ временных рядов // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. - 2003. - Т.7, N1. - С.79-103. - Оконч.Начало: 2002.- N1.
2. **Банников, В.А.** Векторные модели авторегрессии и коррекции регрессионных остатков (Eviews) / В.А. Банников // *Прикладная эконометрика*.

2006. № 3. С. 96-129.

3. **Матвеев, М.Г.** Параметрическая идентификация моделей векторной авторегрессии / М.Г. Матвеев // Современная экономика: проблемы и решения. - 2010. - № 5. С. - 133-142.

4. **Canova, F.** VAR Models: Specification, Estimation, Inference and Forecasting // Pesaran H., Wickens V (Eds) Handbook of Applied Econometrics. Basil Blackwell, 1994.

5. **Enders, W.** Applied Econometric Time Series. New York, 1992.

6. **Ковалевский, В.П.** Анализ и моделирование демографических и миграционных процессов в контексте национальной безопасности (региональный аспект) / В.П. Ковалевский и др. Под редакцией А.Г. Реннера -Самара: Изд во СамНЦ РАН, 2009. -226 с.

7. Математические методы моделирования социально-экономических процессов (региональный аспект)/А. Г. Реннер [и др.]. -Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2008. -182 с. -Библиогр.: с. 179-181.

8. **Реннер, А.Г.** Методы прогнозирования экономических показателей на основе временных рядов с учетом пространственной неоднородности данных и нелинейной взаимосвязи между факторами / А.Г. Реннер, Е.Н. Седова // Вестник Оренбургского государственного университета: Научно-практический журнал. – 2007 – №4. – С. 104–111.

9. **Бантикова, О. И.** Статистический анализ демографической безопасности (на примере Оренбургской области):автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук / О. И. Бантикова; Оренбургский государственный аграрный университет. Оренбург, 2007 - 22 с.

10. Математическое моделирование: исследование социальных, экономических и экологических процессов (региональный аспект) : учебное пособие / Бантикова О. И., Васянина В. И., Жемчужникова Ю. А., Реннер А. Г., Седова Е. Н., Стебунова О. И., Туктамышева Л. М., Чудинова О. С. / под ред. А.Г. Реннера; Оренбургский гос. ун-т . – Оренбург: ОГУ.- 2012. -366с.

Дорохов, Е.В. Статистический подход к изучению прогнозирования индекса РТС на основе методов векторной авторегрессии и коинтеграции / Е.В. Дорохов // Финансы и бизнес. – 2008 - №1. – С.85-110.