МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА РЫНКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Акманова Ю. А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Одной из перспективных и быстро развивающихся областей применения математического моделирования является динамика инновационных процессов.

Большой интерес представляет исследование математических моделей инновационных процессов в научно-образовательных областях. Современные проблемы повышения качества образования, увеличения объемов услуг, реорганизации деятельности управления вузом с целью превращение вуза в коммерческо-финансово-научно-образовательную структуру, а также многие другие стоят на повестке дня в перестройке научно-образовательных процессов не только в России, но и во всем мире.

В данной работе представлено математическое моделирование процесса спроса и предложения на рынке образовательных услуг.

Рассмотрены теоретические основы применения трехпараметрической модели Лоренца для указанной модели.

Модель Лоренца обладает рядом преимуществ:

1) с математической точки зрения схема Лоренца – наиболее простая схема описания самоорганизующейся системы;

2) в модельных уравнениях системы Лоренца явно присутствуют слагаемые, соответствующие положительной и отрицательной обратным связям, являющимися необходимым атрибутом научно-образовательных систем;

3) эта модель является воплощением синергетического подхода, так как в ней определяются параметры порядка, позволяющие описать сложное поведение моделируемой системы достаточно простым образом (минимальным числом уравнений), а также управляющие параметры, при изменении которых существенно меняется макроскопическое поведение системы.

Объектом исследования модели является образовательное учреждение, состоящее из большого числа взаимодействующих подсистем и процессов. Она имеет следующие характеристики.

Роль параметра порядка системы D характеризует функция спроса $D = f_1(x_1,\ldots,x_n;\{Q_1,\ldots,Q_p\})$ на выпускников вуза, где D – объем спроса со стороны внешних потребителей (работодатели, предприятия и т.д.), $x_1,\ldots,x_n$ – пространственные координаты, $\{Q_1,\ldots,Q_p\}$ – агрегированные компоненты вектора качества выпускников $\overrightarrow{Q_t}$. При $D = 0$ вуз функционирует не эффективно, при $D > 0$ – эффективно.

Роль второго параметра S, описывающего образовательную деятельность вуза, описывает производственная функция $S = f_2(M, N)$, где S – объем продукта образовательной системы, M – модель концепции образования (управления качеством), N – потенциал вуза (ресурсы, персонал, мощности и т.д.). При этом $M = f_3\left[D\left(x_1,\ldots,x_n;\{Q_1,\ldots,Q_p\}\right),\{q_1,\ldots,q_p\}\right]$, где $\{q_1,\ldots,q_p\}$ – компоненты вектора качества учебного процесса $\vec{q}(\tau)$.

Третий параметр модели – это управляющий параметр U, который связан с качеством подготовки выпускников вуза, изменения которого приводит к самоорганизации системы, $U = \left|\overline{Q}(t)\right| / \left|\overline{Q}^*(t)\right|$.

Для пространственно однородной системы уравнения модели имеют вид (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dD}{dt} = -a_1 D + a_2 S \\ \dfrac{dS}{dt} = -b_1 S + b_2 D U \\ \dfrac{dU}{dt} = -c_1 (U - U_e) - c_2 S D \end{cases} \qquad (1).$$

Все величины, находящиеся в модели (1), характеризуют поведение системы как целого, т.е. представляют значения, усредненные по объему системы (ансамблю всех подсистем и процессов).

Основой синергетического подхода является то обстоятельство, что положительная обратная связь переменных $D(t)$, $U(t)$ с переменной $S(t)$, зависящими от времени, приводит к самоорганизации системы.

Вид динамической системы (1) совпадает с уравнениями Лоренца, записанными в перенормированных переменных. Запись уравнений Лоренца в форме (1) обусловлена выделением в явном виде параметра U_e, отражающего связь системы с внешней средой и влияющего на самоорганизация. Этот параметр задает образовательной системе определенные критерии качества учебного процесса.

Особые точки системы (1) имеют вид:

1) $\left(D^*, S^*, U^*\right) = \left(0, 0, U_e\right)$;

2) $\left(D^*, S^*, U^*\right) = \left(\sqrt{\dfrac{c_1 a_2}{c_2 a_1}\left(U_e - U_c\right)}, \dfrac{a_1}{a_2}\sqrt{\dfrac{c_1 a_2}{c_2 a_1}\left(U_e - U_c\right)}, U_e\right)$, где $U_e > U_c = \dfrac{a_1 b_1}{a_2 b_2} > 0$.

Характеристическое уравнение для динамической системы (1) имеет виде:

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-a_1-\lambda & a_2 & 0\\ b_2U^* & -b_1-\lambda & b_2D^*\\ -c_2S^* & -c_2D^* & -c_1-\lambda\end{vmatrix} \qquad (2)$$

Для первой особой точки уравнение (2) имеет вид:

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-a_1-\lambda & a_2 & 0\\ b_2U^* & -b_1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -c_1-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

$$\left(-c_1-\lambda\right)\left[\left(-b_1-\lambda\right)\left(-a_1-\lambda\right)-a_2b_2U_e\right]=0 \qquad (4)$$

$$\left(-c_1-\lambda\right)\left[\lambda^2+\left(a_1+b_1\right)\lambda+\left(U_c-U_e\right)a_2b_2\right]=0 \qquad (5)$$

Из уравнения (5) получим:

$$\lambda_1=-c_1<0,\lambda_{2,3}=-\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{\left(a_1+b_1\right)^2}{4}-a_2b_2\left(U_c-U_e\right)}$$

Если $U_c>U_e,\dfrac{\left(a_1+b_1\right)^2}{4}\geq a_2b_2\left(U_c-U_e\right)$, то $\lambda_2<0,\lambda_3<0$, и переходим к устойчивому узлу (при $U_c=U_e$ имеем $\lambda_2<0,\lambda_3<0$).

Если $U_c>U_e,\dfrac{\left(a_1+b_1\right)^2}{4}<a_2b_2\left(U_c-U_e\right)$, то $\lambda_{1,2}$ имеют комплексно-сопряженный вид с отрицательной действительной частью, и приходим к устойчивому фокусу.

Если $U_c<U_e$, то $\lambda_2>0,\lambda_3<0$, и приходим к седлу.

Для второй особой точки уравнение (2) примет вид:

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-a_1-\lambda & a_2 & 0\\ b_2U_e & -b_1-\lambda & b_2\overline{A}\\ -\dfrac{a_1c_2}{a_2}\overline{A} & -c_2\overline{A} & -c_1-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

$$\left(-a_1-\lambda\right)\begin{vmatrix}-b_1-\lambda & b_2\overline{A}\\ -c_2\overline{A} & -c_1-\lambda\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_2U_e & b_2\overline{A}\\ -\dfrac{a_1c_2}{a_2}\overline{A} & -c_1-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

$$\begin{gathered}-\lambda^3-\left(a_1+b_1+c_1\right)\lambda^2-\left(a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1-b_2c_2\overline{A}^2+a_2b_2U_c\right)\lambda-\\ -2a_1b_2c_2\overline{A}^2-a_1b_1c_1+a_2b_2c_1U_c=0\end{gathered} \qquad (8)$$

где $\overline{A}=\sqrt{\dfrac{c_1a_2}{c_2a_1}\left(U_e-U_c\right)}$

Окончательный вид уравнения (8):

$$\begin{gathered}\lambda^3+\left(a_1+b_1+c_1\right)\lambda^2+\left[2a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1-\frac{c_1c_2b_2}{a_1}\left(U_e-U_c\right)\right]\lambda+\\ +2b_1a_2c_1\left(U_e-U_c\right)=0\end{gathered} \qquad (9)$$

Применим к уравнению (9) условия Рауса-Гурвица.

Согласно этим условиям, для того, чтобы все корни произвольного кубического уравнениям

$$a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица для уравнения (9)

$$G=\begin{pmatrix}a_1 & a_3 & 0\\ a_0 & a_2 & 0\\ 0 & a_1 & a_3\end{pmatrix} \qquad (11)$$

были положительны:

$$\begin{vmatrix}a_2 & 0\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}=a_2a_3>0,\begin{vmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_3\end{vmatrix}=a_1a_3>0,\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0 \qquad (12)$$

Получим следующие условия на устойчивость второй особой точки:

$$\begin{cases} 2a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 - \dfrac{c_1c_2b_2}{a_1}\left(U_e - U_c\right) > 0 \\ \left(a_1 + b_1 + c_1\right)\left(2a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1\right) - \dfrac{c_1b_2}{a_1}\left(U_e - U_c\right)\left(a_1c_2 + b_1c_2 + c_1c_2 - 2a_1a_2\right) > 0 \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотри два частных случая.

1) $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 1 \Rightarrow U_c = 1$

В этом случае система неравенств (9) приводится к виду: $1 < U_e < \dfrac{17}{5}$

2) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1, c_1 = c_2 = c$

В этом случае система неравенств (9) приводится к виду:

$$\begin{cases} c^3\left(U_e - 1\right) - 2c^2\left(2 - U_e\right) + 2c\left(U_e - 4\right) - 4 < 0 \\ 0 < c < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2\left(U_e - 1\right)}}{U_e - 1} \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим первое неравенство системы (14) на границах второго неравенства.

При $c = 0$ оно удовлетворяется. Подставляя первую границу второго неравенства системы (10) в первое неравенство, получим:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 2\left(U_e - 1\right)}}{U_e - 1}\right)^3\left(U_e - 1\right) - 2\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 2\left(U_e - 1\right)}}{U_e - 1}\right)^2\left(2 - U_e\right) + \\ &+ 2\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 2\left(U_e - 1\right)}}{U_e - 1}\right)\left(U_e - 4\right) - 4 < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

В случае, когда U_e стремится к единице, левая часть неравенства (15) стремится к минус бесконечности, а при возрастании U_e она быстро возрастает. Таким образом, в интервале $1 < U_e < 2$ существует некоторое пороговое значение параметра U_e, разделяющее области устойчивости и неустойчивости второй особой точки во втором частном случае. Например, если взять значение $U_e = \dfrac{3}{2}$, то неравенство (15) примет заведомо выполняющийся вид

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-10-4\sqrt{2}\right)-4<0$. Таким образом, в этом случае вторая особая точка является устойчивым узлом.

Таким образом, рассмотренная модель может быть использована для моделирования процесса спроса и предложения на рынке образовательных услуг.

В данной работе рассматривается трехпараметрическая модель Лоренца и на ее основе – условия и принципы функционирования вузов как самоорганизующихся систем, также оцениваются параметры эффективного развития образовательных систем с устойчивым спросом на выпускников и абитуриентов.

Дальнейшее изучение данной модели даст возможность применить другие схемы для ее улучшения, что позволит получить некоторые новые качественные результаты по количеству особых точек и их устойчивости.

Список литературы

1 Билаль Н.С., Математическое моделирование инновационных процессов на основе автономных динамических систем: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Н.С. Билаль – Белгород, 2012. – 181 с.

2 Вестник УГАТУ / М.Б. Гузаиров, И.Б. Герасимова, Модель накопления потенциала в образовательных системах. – 2006 - №2(15) – с. 115-119

3 Малинецкий, Г.Г., Математическое моделирование системы образования / Г.Г.Малинецкий, С.А.Кащенко, А.Б.Потапов // Синергетика и методы науки. СПб.: Наука – 1998 – 439 с.

4 Общероссийский математический портал [www.mathnet.ru]. – Буланичев В.А., Серков Л.А., Самоорганизация экономических систем с детерминированным хаосом – 2007 – С. 116-126.