ОБ ОДНОМ ОПИСАНИИ РАДИКАЛА ДЖЕКОБСОНА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

Носов В.В., Павленко А.Н., Пихтилькова О.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

В работе рассматривается вопрос гомологического описания радикала Джекобсона для алгебр Ли. Предлагается считать радикалом Джекобсона алгебры Ли L пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом: назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Для бесконечномерных алгебр Ли свойства радикала Джекобсона исследовал F. Kubo [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Известно, что существует специальная алгебра Ли, локально нильпотентный радикал которой строго содержится в радикале Джекобсона [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, пример 1].

Обозначим через $Irr(L)$ пересечение аннуляторов неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.

Пусть M неприводимый L-модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $End(M)$.

Назовем *PI-представлением* алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI-алгеброй.

Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.

Ю. А. Бахтурин использовал пересечение аннуляторов конечномерных неприводимых представлений для доказательства теоремы Леви-Мальцева для конечномерных алгебр Ли [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Известно, что для конечномерных алгебр Ли пересечение аннуляторов конечномерных представлений совпадает с нильпотентным радикалом [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] и, следовательно, с радикалом Джекобсона для поля нулевой характеристики [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Обозначим через $IrrFin(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.

Л. А. Симонян рассмотрел пары $L \subseteq A^{(-)}$, где L – алгебра Ли над полем F характеристики нуль, A – локально конечная ассоциативная алгебра [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Он ввел обозначение $J_A(L) = L \cap J(A)$.

В [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] было доказано:

1. Всякий идеал алгебры Ли L, состоящий из нильпотентных в A элементов, лежит в $J_A(L)$;

2. Если R – локально разрешимый идеал L, то $[R, L] \subseteq J_A(L)$.

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть L – произвольная алгебра Ли. Тогда*

$$Irr(L) = L \cap J(U(L)),$$

где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

Доказательство. Пусть M – произвольный неприводимый $U(L)$-модуль. Тогда M также является неприводимым L-модулем.

Имеет место включение $Irr(L)$ содержится в аннуляторе $U(L)$ модуля M.

Так как радикал Джекобсона $J(U(L))$ ассоциативной алгебры $U(L)$ совпадает с пересечением аннуляторов всех неприводимых $U(L)$-модулей, получим $Irr(L) \subseteq J(U(L))$.

Пусть $x \in L \cap J(U(L))$, M – произвольный неприводимый L-модуль, $A(L)$ – ассоциированная с представлением L ассоциативная алгебра и $\alpha: L \to A(L)^{(-)}$ – гомоморфизм алгебр Ли, задающий L-модуль M.

Тогда существует его продолжение $\bar{\alpha}: U(L) \to A(L)$ где $\bar{\alpha}$ – гомоморфизм ассоциативных алгебр и $\bar{\alpha}(l) = \alpha(l)$ для всех $l \in L$.

Следовательно, M также является $U(L)$-модулем.

Модуль M неприводим над $U(L)$ тогда и только тогда, когда неприводимым является L-модуль M.

Следовательно, x содержится в аннуляторе модуля M и $x \in Irr(L)$.

Включение $J(U(L)) \subseteq Irr(l)$ завершает доказательство теоремы.

Пример 1. Пусть $L = \{\alpha x + \beta y | \alpha, \beta \in F\}$ – двумерная абелева алгебра Ли над полем F.

Ее универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ изоморфна кольцу многочленов $F[x, y]$ от коммутирующих переменных x и y.

Как известно, $J(F[x, y]) = 0$. Следовательно, $Irr(L) = 0$.

Этот пример не противоречит нашим представлениям о радикалах конечномерных алгебр Ли. Нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L также равен нулю.

Пример 2. Дадим новую интерпретацию следующего известного примера.

Пусть F – поле характеристики нуль, $F[x]$ – кольцо многочленов.

Зададим для произвольного $f(x) \in F[x]$ три отображения:

$$a(f(x)) = f'(x), b(f(x)) = x \cdot f(x), e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить, что тождественное отображение e коммутирует с a и b, $[a, b] = e$.

Мы получили представление трехмерной разрешимой алгебры Ли

$$L = \{\alpha x + \beta y + \gamma c | \alpha, \beta, \gamma \in F\}$$

в алгебре эндоморфизмов $End(F[x])$.

Легко проверить, что векторное пространство $F[x]$ является неприводимым L-модулем. Следовательно, $Irr(L) = 0$.

Алгебра $U(L)$ соответствует градуированная алгебра, которая является алгеброй многочленов от трех коммутирующих переменных [6].

Согласно теореме Размыслова-Кемера-Брауна радикал Джекобсона конечнопорожденной PI-алгебры нильпотентен [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Из первичности $U(L)$ следует, что $J(U(L)) = 0$.

Пусть M – точный неприводимый L-модуль задающий PI- представление алгебры L.

Тогда M-неприводимый $U(L)$-модуль, алгебра $A(L)$ является гомоморфным образом алгебры $U(L)$ и, следовательно, удовлетворяет тождеству разрешимости ступени 2, что невозможно. Согласно теореме Познера [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], алгебра $A(L)$ изоморфна алгебре матриц D_2 порядка n над телом D.

Следовательно, $IrrPI(L) = N(L) = \{\alpha e | \alpha \in F\}$.

Алгебра Ли L является разрешимой ступени 2. Получим, $P(L) = L$ (первичный радикал совпадает с разрешимым для конечномерных алгебр [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]).

Используя рассуждения аналогичные рассуждениям из примера 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть L– конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда $IrrPI(L) = N(L)$, где $N(L)$ – нильпотентный радикал алгебры Ли L.*

Теорема 3. *Пусть основное поле имеет нулевую характеристику. Тогда следующие включения в общем случае строгие:$Irr(L) \subset IrrPI(L) \subset IrrFin(L)$.*

Доказательство. Строгость первого включения следует из примера 2.

Докажем строгость второго включения.

Пусть $F \subseteq K$ – расширение поля F, которое не является конечномерным. Таким, например, будет поле рациональных функций с коэффициентами из F. Алгебра sl_2K является простой алгеброй Ли над K. Несложно проверить, что

sl_2K является простым кольцом Ли и, следовательно, простой алгеброй Ли над F.

Алгебра sl_2K имеет точное $PI-$представление над двумерным арифметическим векторным пространством K^2. Следовательно, $IrrPI(sl_2K) = 0$.

В силу бесконечномерности над полем F и простоты алгебра sl_2K не может иметь конечномерных неприводимых представлений над F.

Следовательно, $IrrFin(sl_2K) = sl_2K$.

Предлагаем считать радикалом Джекобсона алгебры Ли L пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет. Из теоремы 2 и результата Маршалла следует, что $IrrPI(L) = J(L)$ для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Список литературы

1. *Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.*
2. *Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.*
3. *Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями// Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. N 4. С. 821-829.*
4. *Пихтильков С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 3. С. 769-782.*
5. *Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.*
6. *Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III). М.: Мир, 1976.*
7. *Симонян Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли // Латвийский математический ежегодник. 1993. Вып. 34. С. 230-234.*
8. *Кемер А. Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной PI-алгебры// ДАН СССР. 1980. Т. 255. N 4.С. 793-797.*
9. *Braun A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring// J of Algebra. 1984. V. 89. N 2. P. 375-396.*
10. *Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. Вып. 3. С. 643-648.*
11. *Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.*