# ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ» В ПРОПЕДЕВТИЧЕСКОМ КУРСЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

**Павленко А.Н., Пихтилькова О.А.**
**Оренбургский государственный университет, г. Оренбург**

В курсе физики, изучаемом студентами естественнонаучных направлений высших учебных заведений, понятие определенного интеграла начинает применяться уже в начале первого семестра первого курса. Однако, в программах дисциплин «Математический анализ» и «Математика» изучение интегрального исчисления для функций одной переменной предусматривается обычно не ранее второго семестра, а теме «Интеграл» в средних учебных заведениях, как правило, уделяется явно недостаточное внимание в силу отсутствия заданий по данному материалу в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике [1].

Таким образом, возникает необходимость в организации в течение первого семестра (первых двух семестров) пропедевтического курса по элементарной и высшей математике (примеры подобных курсов в [2-6] и в приведенной там литературе) в котором будут изучаться (повторяться) темы, необходимые для изучения естественнонаучных дисциплин или миникурсов внутри самих этих дисциплин.

Ниже предлагается новый подход к повторению и изучению темы «Определенный интеграл» основополагающими особенностями которого являются:

1) повторение понятия интеграла и рассмотрение его физических приложений не последовательно, а одновременно;

2) введение понятия определенного интеграла с помощью определения, максимально удобного для физических приложений;

3) не рассмотрение на данном этапе некоторых вспомогательных понятий, свойств определенного интеграла и методов его вычисления, за исключением формулы Ньютона-Лейбница.

Как известно [7], значения довольно большого числа физических величин численно равны площадям под графиками некоторых функций. Рассмотрим следующие примеры:

1) пройденный материальной точкой путь $S$ численно равен площади под графиком (рисунок 1) зависимости скорости от времени $v = v(t)$;

2) работа идеального газа $A$ численно равна площади под графиком (рисунок 2) зависимости давления газа от его объема $P = P(V)$.

Отсюда следует, что на пропедевтическом этапе изучения понятия определенного интеграла целесообразно ввести данное понятие как величину площади под графиком непрерывной неотрицательной функции. Такой подход не только является наглядным и доступным, но и отличается естественностью и непосредственной связью с физическими приложениями.

Следует отметить, что рассмотрение темы «Определенный интеграл» по схеме, довольно сильно отличающейся от общепринятой, встречается даже в полных курсах высшей математики. В качестве примера можно указать известный учебник по высшей математике для студентов естественных (геологического, географического, биологического и др.) факультетов университетов [8].

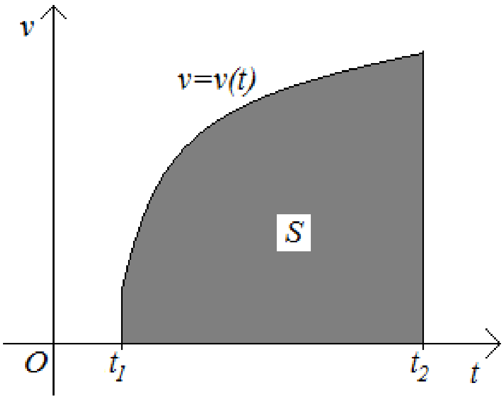

Рисунок 1

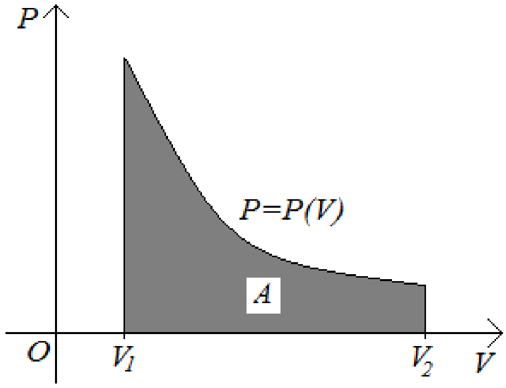

Рисунок 2

**Определение.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$ ($a < b$). Определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ назовем число, равное площади (рисунок 3) под графиком функции $y = f(x)$ при $x \in [a;b]$.

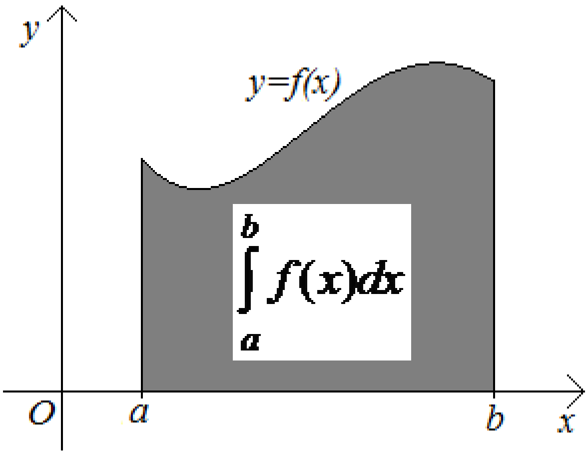

Рисунок 3

Представляется целесообразным не рассматривать свойства определенного интеграла на данном этапе, так как их использование может быть заменено учетом в решении физического смысла рассматриваемой задачи, а также, как правило, хорошо усвоенными по школьному курсу математики свойствами производной.

Учитывая важность формулы Ньютона-Лейбница, ее следует привести с обоснованием даже в пропедевтическом курсе. При этом удобен вывод на основе использования понятия определенного интеграла с переменным верхним пределом. В силу применения несколько нестандартных обозначений, ниже приводится данный вывод полностью.

**Определение.** Если мы будем менять значение $b$, то и значение определенного интеграла будет меняться (рисунок 4), таким образом можно рассмотреть функцию $F(b)=\int\limits_a^b f(x)dx$, которую будем называть определенным интегралом с переменным верхним пределом.

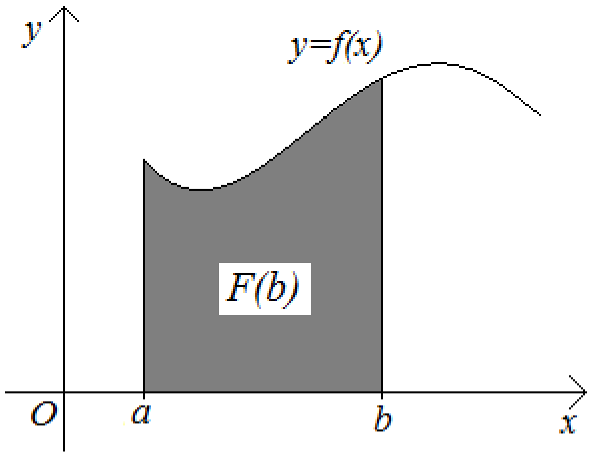


Рисунок 4

Определенный интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подинтегральной функции. Действительно, используя определение производной, получим:

$$F'(b)=\lim_{\Delta b\to 0}\frac{F(b+\Delta b)-F(b)}{\Delta b}=\lim_{\Delta b\to 0}\frac{\Delta F(b)}{\Delta b}.$$

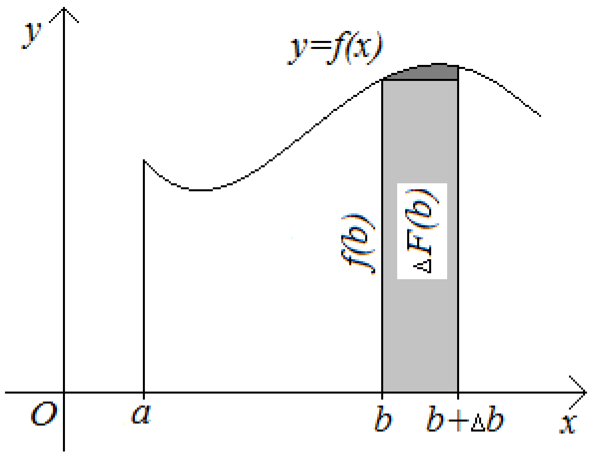


Рисунок 5

Из рисунка 5 имеем приближенное равенство

$$\Delta F(b)\approx f(b)\cdot\Delta b.$$

Тогда будем иметь:

$$F'(b) = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{f(b)\Delta b}{\Delta b} = \lim_{\Delta b \to 0} f(b) = f(b).$$

Любую первообразную для данной функции $f(b)$ мы сможем записать в виде

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + C.$$

Очевидно, что

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx + C = 0 + C = C.$$

Вычтя из предпоследнего равенства последнее равенство, получим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Задача.** Найти работу идеального газа при изотермическом процессе.

**Решение.** Как известно, работа идеального газа численно равна площади под графиком зависимости давления газа от его объема (рисунок 2). Тогда получим:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV.$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона [7]

$$PV = \frac{m}{M}RT,$$

получим

$$P = \frac{mRT}{M} \cdot \frac{1}{V}.$$

Так как при изотермическом процессе температура $T$ является константой, то тогда множитель $\frac{mRT}{M}$ будет постоянной величиной.

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{M} \cdot \frac{1}{V} dV .$$

Используем формулу Ньютона-Лейбница. С помощью таблицы первообразных (или даже таблицы производных) получаем, что первообразной функции $\frac{1}{V}$ является функция $\ln V$. Так как из физического смысла задачи следует, что всегда $V > 0$, то брать величину объема по модулю нет необходимости. Тогда будем иметь:

$$A = \left( \frac{mRT}{M} \cdot \ln V \right) \Bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{mRT}{M} \cdot \ln V_2 - \frac{mRT}{M} \cdot \ln V_1 = \frac{mRT}{M} \cdot \left( \ln V_2 - \ln V_1 \right) =$$

$$\frac{mRT}{M} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

**Ответ:** $A = \frac{mRT}{M} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$**.**

При нахождении первообразных целесообразно использовать подробные таблицы неопределенных интегралов [9,10].

*Список литературы*


1. *http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory*
2. *Чаплыгин, С.А. Пропедевтический курс механики / С.А. Чаплыгин. – изд. 2-е. – М.: Госиздат, 1923. – 242 с.*
3. *Сазонов, В.Н. Пропедевтический курс математического анализа: конспект лекций / В.Н. Сазонов. – М.: Моск. станкоинструм. ин-т., 1989. - 52 с. : ил.*
4. *Кузнецова, В.А. О целесообразности вводного пропедевтического курса в университете / В.А. Кузнецова // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. – 2003. - № 3, том: 8. – С. 406.*
5. *Светлова, Н.И. Школьная математика и подготовка студентов специальности «Математические методы в экономике» / Н.И. Светлова // Вестн. Нижегородского ун-та им. Лобачевского. – 2011. – № 3(3). – С. 106–109.*
6. *Темникова И.С. Восстановление школьных и пропедевтика вузовских математических знаний с помощью компьютерных средств обучения: материалы Международной научно-практической конференции "Информационные технологии в образовании и фундаментальных науках (ИТО-Поволжье-2007)", Казань 18-21 июня 2007 г. / ТГГПУ, Казань.*

7. *Детлаф, А.А. Курс физики: Учеб. пособие для студ. втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 720 с. –* ISBN 5-7695-2312-3.

8. *Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. — М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. — 656 с.: ил.* - ISBN 5-17-004601-4.

9. *Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. для вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович.*- *11-е изд., стер.* - *СПб. : Лань, 2005.* - *736 с.* - *(Учебники для вузов. Специальная литература).* - *Библиогр.: с. 736.* - ISBN 5-8114-0499-9.

10. *Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. / Г. Б. Двайт.* - *СПб.: АО ВНИИГ им. Б. В. Веденеева, 1995.* - *176 с*