О РАЗЛИЧНЫХ РАДИКАЛАХ АЛГЕБР ЛИ

Пихтильков С.А., Благовисная А.Н., Павленко А.Н.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

В работах, посвященных структурной теории алгебр Ли, встречаются различные определения понятия радикала. Это обусловлено исследованием алгебр Ли многими авторами с разных точек зрения.

Наиболее разработана теория конечномерных алгебр Ли, начало которой в конце XIX века положили работы Софуса Ли, Картана, Энгеля, Киллинга. Тогда же появляется понятие радикала для конечномерных алгебр Ли, описанное в трудах Киллинга. Согласно современному пониманию объектов структурной теории алгебр Ли, радикал по Киллингу – это наибольший разрешимый идеал в алгебре Ли.

Существуют многочисленные публикации, в которых исследуются вопросы построения структурной теории алгебр Ли с помощью различных радикалов, как для конечномерных, так и для бесконечномерных случаев. К одному из таких радикалов относится радикал Джекобсона.

По аналогии с определением радикала Джекобсона для кольца можно ввести понятие радикала для алгебр Ли. В этом случае радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L называется пересечение максимальных идеалов или сама алгебра L, если их нет [1]. Такой подход к определению радикала позволяет достаточно плодотворно изучить структуру и свойства конечномерных алгебр Ли.

В бесконечномерном случае изучение радикала Джекобсона проводились Н. Камийя, Е. Маршаллом [2]. В дальнейшем исследование Ф. Кубо [3] показало, что результаты, представленные в работах данных авторов, для бесконечномерных алгебр Ли в общем случае не являются верными.

Другой подход к определению радикала Джекобсона алгебры Ли предложен в статье [4]. В работе показано, что для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль $IrrPI(L) = J(L)$, где $IrrPI(L)$ – пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли или сама алгебра L, если их нет. Следовательно, авторы предлагают считать радикалом Джекобсона алгебры Ли L пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли и саму алгебру L, если их нет.

Хорошо развитая теория конечномерных алгебр Ли способствует возникновению идей, побуждающих применять аналогичные конструкции, методы и средства изучения в случае бесконечномерных алгебр Ли. Однако данный подход не всегда оказывается результативным. Так, например, перенесение определения радикала по Киллингу на бесконечномерный случай невозможно в силу того факта, что в бесконечномерных алгебрах Ли сумма всех разрешимых идеалов не всегда будет разрешимым идеалом. Поэтому возникает понятие локально разрешимого идеала как естественного обобщения понятия разрешимого идеала. Однако отрицательное решение проблемы

Амайо-Стьюарта В. Н. Латышевым, А. В. Михалёвым и С. А. Пихтильковым [5] привело к пониманию того, что для всех алгебр Ли нельзя построить теорию локально разрешимого радикала.

Представление единого для всех классов алгебр Ли радикала было предложено В.А. Парфеновым в 1971 году. Согласно Парфенову [6], радикал алгебры Ли – наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли. В.А. Парфенов показал, что сумма слабо разрешимых идеалов алгебры Ли является слабо разрешимым идеалом. Кроме того, класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли. Дальнейшее исследование подхода Парфенова показало, что в общем случае для всех бесконечномерных алгебр Ли не удается получить аналоги теорем, справедливых в случае алгебр Ли конечных размерностей.

Понятие слабо разрешимого радикала позволяет ввести определение другого вида радикала для алгебр Ли – верхнего слабо разрешимого радикала. Покажем, как это сделано в монографии [5].

Для этого введем обозначение $T(L)$ слабо разрешимого радикала алгебры Ли L. Как и в случае ассоциативных алгебр, наибольший слабо разрешимый идеал $T(L)$ алгебры Ли L называется верхним слабо разрешимым радикалом.

Также можно ввести и понятие нижнего слабо разрешимого радикала алгебры Ли L по аналогии с построением нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах.

Пусть $\rho(L)$ – сумма разрешимых идеалов алгебры Ли L.

Идеал $\rho(L)$ является локально разрешимым в силу того, что сумма двух разрешимых идеалов алгебры Ли является разрешимым идеалом.

Используя трансфинитную индукцию, определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha)$ следующим образом.

1. $\rho(0)=0$.

2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha<\beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta=\gamma+1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\rho(\beta)/\rho(\gamma)=\rho(L/\rho(\gamma))$.

б) Если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta)=\bigcup_{\gamma<\beta}\rho(\gamma).$$

Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры может не быть локально разрешимым [7], но оно будет слабо разрешимым [5].

Из соображений мощности $\rho(\beta)=\rho(\beta+1)$ для некоторого β. Назовем $\rho(\beta)$ нижним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L.

Существует подход к изучению алгебр Ли, предполагающий введение первичного радикала. Первичный радикал алгебры Ли можно определить как пересечение всех первичных идеалов алгебры Ли или саму алгебру Ли, если первичных идеалов нет [8].

Для отдельных классов алгебр Ли существуют и другие способы определения первичного радикала. Например, для специальной алгебры Ли L первичным радикалом можно назвать локально разрешимый радикал [9]. Кроме того, при изучении различных видов алгебр Ли возникают и разновидности первичного радикала. Так, в работе [10] упоминается l-первичный радикал решеточно упорядоченных алгебр Ли.

Первичный радикал алгебр Ли разных типов активно исследуется в последние десятилетия. В относительно недавно появившихся работах рассматривается первичный радикал специальных алгебр Ли [5, 9], специальных супералгебр Ли [11], артиновых алгебр Ли [8], алгебр Ли, удовлетворяющих дополнительным условиям [12].

Классическая теория конечномерных алгебр Ли позволяет определить локально нильпотентный, а также родственные ему радикалы для алгебр Ли.

Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер её неприводимых конечномерных представлений [5].

Локально нильпотентный радикал $N(L)$ определен для обобщенно специальной алгебры Ли L над полем F как пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F [5].

В работах по исследованиям проблемы гомологического описания радикала Джекобсона для алгебр Ли [4, 5, 13] авторы вводят следующую серию определений.

Неприводимо представленным радикалом алгебры Ли называется пересечение аннуляторов неприводимых модулей над алгеброй Ли L и сама алгебра L, если их нет.

Пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и сама алгебра L, если их нет, называется PI-неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

Конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли называется пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных модулей над алгеброй Ли L и сама алгебра L, если их нет.

При исследовании радикалов алгебр Ли интересен вопрос о том, как соотносятся между собой изучаемые радикалы. Возможно ли совпадение, включение радикалов, и при каких условиях. Анализ различных публикаций, посвященных радикалам алгебр Ли, позволяет сделать вывод, что такие ситуации возможны при определенных ограничениях на алгебры Ли.

Таким образом, не существует единого подхода к определению радикала бесконечномерных алгебр Ли. Изучение радикалов бесконечномерных алгебр Ли происходит при условии наложения на них дополнительных ограничений или условий. Такими условиями могут быть артиновость, нетеровость, полиномиальные тождества и другие.

Список литературы

1 Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 356 с.

2 Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras / N. Kamiya // Hiroshima Math. J. – 1979. – V. 9. – P. 37-40.

3 Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. – 1991. – V. 38. – P. 23-30.

4 Кучеров, А. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 71-76.

5 Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков. – Оренбург, ОГУ, 2013. – 171 с.

6 Парфенов, В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В.А. Парфенов // Сиб. мат. журнал. – 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 171-176.

7 Amayo, R. Infinite dimensional Lie algebras / R. Amayo, I Stewart. – Leyden: Noordhoof, 1974.

8 Мещерина, Е. В. О проблеме А. В. Михалева для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т.13. – С. 84-89.

9 Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 643-648.

10 Кочетова, Ю. В. Первичный радикал решеточно K-упорядоченных алгебр / Ю. В. Кочетова, Е.Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 85-158.

11 Балаба, И. Н. Первичный радикал специальных супералгебр Ли / И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 51-60.

12 Поляков, В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли / С. А. Пихтильков, В. М. Поляков // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып.1. – С. 163-169.

13 Кучеров, А. А. О почти локально разрешимых алгебрах ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли / А. А. Кучеров // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 121-125.