О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ДИАФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Сикорская Г.А., Косилов Е.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

«Достопочтеннейший Дионисий, зная, что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука. Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним незнаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет тебе удобопонятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение». Таким посвящением открывается «Арифметика» Диофанта Александрийского.

В книге «Арифметика» Диофант (3 век) обобщил накопленный до него опыт решения неопределенных алгебраических уравнений в целых или рациональных числах. Решение в целых числах уравнений с целыми коэффициентами более чем с одним переменным представляет собой одну из интереснейших проблем теории чисел. Некоторые виды таких уравнений были рассмотрены еще до Диафанта знаменитым математиком древности Пифагором (6 в. до н.э). В средневековой Европе работы Диофанта о решении уравнений в целых числах получили широкое распространение и развитие. Впоследствии, в память о мыслителе, вложившем в исследование неопределенных алгебраических уравнений в целых числах большой вклад, эти уравнения стали называть диофантовыми. Исследованием диофантовых уравнений занимались такие классики математики как П. Ферма (1601-1655), Л. Эйлер (1707- 1783), Ж.Л. Лагранж (1736-1813), К.Ф. Гаусс (1777-1855), П.Л. Чебышев (1821-1894). И в настоящее время многие математики современности работают в области исследования диафантовых уравнений.

И так, диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями.

В настоящее время разработано множество методов решения диафантовых уравнений, основанных на свойствах делимости, на разложении на множители, на различных подстановках, на сравнении и т.д. Рассмотрим решение диафантовых уравнений основанное на теории вычетов.

Построим кольцо классов вычетов по mod n. Пусть $Z = \{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3; \dots\}$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Фиксируем $n \geq 2,\ n \in N$. Определим остатки от деления целых чисел, например, на число три. Получим три класса вычетов: $\overline{0}$ – класс нуля, $\overline{1}$ – класс единицы, $\overline{2}$ – класс двойки.

Если число принадлежит одному из этих классов, то будем обозначать принадлежность его к этому классу чертой сверху.

Например, $\overline{2} = \overline{-4}$. Эти числа отстоят друг от друга на число, кратное трем: $2 - (-4) = 6 \vdots 3$.

Введем <u>операции</u> над классами

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
2) $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a - b}$
3) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b} n \geq 2,\ n \in N$

Очевидно, что $\overline{a}^n = \overline{a^n}$ (это многократно примененное третье правило).

Пусть $n \in N, n \geq 2$.

Построим множество класса по mod n

$$z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

$$a, b \in Z,\ \overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a - b = kn.$$

Теперь перейдем непосредственно к решению диафантовых уравнений.

Задача 1. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 = 2003$ не имеет решения в целых числах.

Решение. «Работаем» по mod4:

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

Следовательно, $x^2 + y^2 = 2003$, $\overline{x^2} + \overline{y^2} = \overline{3}$

Рассмотрим всевозможные варианты:

$\overline{0} + \overline{0} \neq \overline{3}, \overline{0} + \overline{1} \neq \overline{3}, \overline{1} + \overline{1} \neq \overline{3}$

Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 = 2003$ не имеет решений в целых числах.

Задача 2. Доказать, что уравнение $12x + 5 = y^2$ не имеет решения в целых числах.

Решение. «Работаем» по mod3:

a	a^2
0	0
1	1
2	1

$12x + 5 = y^2$

$\overline{0} + \overline{2} \equiv \overline{y}$

Класса $\overline{2}$ нет. Получили противоречие.

Ответ: уравнение $12x + 5 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

Задача 3. Доказать, что уравнение $12x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решения в целых числах.

Решение. «Работаем» по mod 5:

$12x^2 - 7y^2 = 9$

$\overline{0} - \overline{2y^2} = \overline{4}$, $\overline{2y^2} = -\overline{4} = \overline{1}$

y	y^2
0	0
1	1
2	4
-2	4
-1	1

И так, $\overline{2y^2} = \overline{1}$

$\overline{2} \cdot \overline{0} = \overline{0} \neq \overline{1}$, $\overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2} \neq \overline{1}$, $\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{8} = \overline{3} \neq \overline{1}$

Равенство по mod5 не возможно, что и требовалось доказать.

Просмотрев уже только эти задачи, можем с уверенностью утверждать, об эффективности поиска решений, или, соответственно, доказательства отсутствия таковых, основанное на использовании теории вычетов. Единственная сложность решения диафантовых уравнений через вычеты это вопрос о выборе mod. Однако вопрос теряет свою остроту в процессе многократного решения подобных задач, то есть правильность выбора модуля нарабатывается с опытом. Теперь более сложные задачи:

Задача 4. Решить в натуральных числах уравнение $3^x + 55 = y^2$, ($x,y \in N$)

Решение. «Работаем» по mod 4:

y	y^2
0	0
1	1
2	0
3	1

$3^x + 55 = \overline{y^2}$

$$\overline{(-1)^x} + \overline{-1} = \overline{1}(\text{или } \overline{0})$$

$\overline{(-1)^x}=\overline{1}(\text{или } \overline{2})$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{(-1)^x} = \overline{1} - \text{верно, если } x - \text{четный.} \\ \overline{(-1)^x} = \overline{2} - \text{не может быть ни при каком } x \end{array}\right.$$

$55 = y^2 - 3^{2x}$ => $55 = (y - 3^{x,})(y + 3^{x,})$

Проанализируем равенство $55 = (y - 3^{x,})(y + 3^{x,})$.

Правая часть равенства есть произведение двух натуральных чисел, причем первый сомножитель меньше второго. Воспользуемся основной теоремой алгебры: любое натуральное число раскладывается в произведение простых единственным образом с точностью до порядка сомножителей. Следовательно, разложить 55 на произведение натуральных можно, либо 1·55, либо 55·1, больше вариантов нет. Таким образом, приходим к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - 3^{x,} = 1 \\ y + 3^{x,} = 55 \end{cases} \\ \begin{cases} y - 3^{x,} = 5 \\ y + 3^{x,} = 11 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим каждую из систем.

1) $\begin{cases} y - 3^{x,} = 1 \\ y + 3^{x,} = 55 \end{cases}$

$2y = 56$ => $y = 28$

$28 - 3^{x,} = 1$

$-3^{x,} = -28 + 1$

$3^{x,} = 27$

$3^{x,} = 3^3$ => x, = 3

Тогда x = 6

2)$2y = 16$ => $y = 8$

$8 - 3^{x,} = 5$

$3^{x,} = 8 - 5$

$3^{x,} = 3$

$3^{x,} = 3^1$ => x, = 1

Тогда x = 2

Ответ: (16; 24), (2; 8).

Задача 5. Решить в натуральных числах уравнение $3^x + 7 = 2^y$ $(x, y \in N)$

Решение. mod3:

$$3^x + 7 = 2^y$$
$$\bar{0} + \bar{1} = \overline{-1}^y;\ \bar{1} = \overline{(-1)}^y$$
$$=> y - \text{четное}$$
$$y = 2y,$$
$$3^x + 7 = 4^{y,}$$

mod3:

$$3^x + 7 = 4^{y,}$$
$$\overline{\overline{(-1)}^x} + \overline{-1} = \bar{0};\ \bar{1} = \overline{(-1)}^x$$
$$=> x - \text{четное}$$
$$x = 2x,$$

Подставим в исходное $x = 2x,$ и $y = 2y,$

$$3^{2x,} + 7 = 2^{2y,}$$
$$7 = 2^{2y,} - 3^{2x,}$$
$$7 = (2^{y,} - 3^{x,})\,(2^{y,} + 3^{x,})$$

Раскладываем 7 на множители 1 и 7, так как это число – простое, следовательно

$$\begin{cases} 2^{y,} - 3^{x,} = 1 \\ 2^{y,} + 3^{x,} = 7 \end{cases}$$
$$2 \cdot 2^{y,} = 8 => 2^{y,} = 4 => 2^{y,} = 2^2 => y, = 2$$
$$2^2 - 3^{x,} = 1 => 4 - 3^{x,} = 1 => 3^{x,} = 3 => x, = 1$$
$$x, = 1 = > x = 2$$
$$y, = 2 => y = 4$$

Ответ: (2;4).

Предлагаем читателю «поработать» с диафантовыми уравнениями, используя теорию вычетов.

Задача 6. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = z^2$.

Задача 7**.** Решите в целых числах уравнение $4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$.

Задача 8. Докажите, что уравнение $3x^2 - y^2 = 5$ не имеет решений в целых числах.

Задача 9. Докажите, что уравнение $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

***Задача* 10.** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ не имеет решений в натуральных числах.

Список литературы

1. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. - М.: Наука, 1972.*
2. *ВиноградовИ.М. Основы теории чисел. - М.: Наука, 1972.*
3. *Галкин Е. Задачи с целыми числами. - М.: «Математика», 1999 - 2000.*
4. *Малинин В. Решение уравнений в натуральных и целых числах. - М.: «Математика», 2001, №№ 21 - 22.*
5. *Молдаванский Д.И. Целые числа. Основы теории делимости. - Иваново: изд-во Ивановского областного института повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, 2001.*
6. *ХассеГ. Лекции по теории чисел. - М.: И.Л., 1953.*